

HANDBUCH DER PHYSIK

ZWEITE AUFLAGE

UNTER MITWIRKUNG VON

Prof. Dr. R. ABEGG-Breslau, Prof. Dr. F. AUERBACH-Jena, Dr. A. BEMPORAD-Catania, Prof. Dr. F. BRAUN-Strassburg, Prof. Dr. E. BRODHUN-Charlottenburg, Prof. Dr. M. CANTOR-Würzburg, Prof. Dr. S. CZAPSKI†-Jena, Prof. Dr. TH. DES COUDRES-Leipzig, Prof. Dr. P. DRUDE†-Berlin, Prof. Dr. P. DUDEN-Höchst a. Main, Dr. O. EPPENSTEIN-Jena, Prof. Dr. K. EXNER-Innsbruck, Prof. Dr. W. FEUSSNER-Marburg, Dr. H. GERDIEN-Göttingen, Prof. Dr. L. GRAETZ-München, Prof. Dr. G. JÄGER-Wien, Prof. Dr. H. KAYSER-Bonn, Prof. Dr. R. LUTHER-Leipzig, Prof. Dr. F. F. MARTENS-Berlin, Prof. Dr. A. OBERBECK†-München, Prof. Dr. F. POCKELS-Heidelberg, Dr. K. PULFRICH-Jena, Dr. L. RELLSTAB-Hannover, Dr. M. v. ROHR-Jena, Dr. O. SACKUR-Breslau, R. SCHÜTTAUF-Jena, Prof. Dr. J. STARK-Hannover, Dr. H. v. STEINWEHR-Charlottenburg, Prof. Dr. R. STRAUBEL-Jena, Prof. Dr. K. WAITZ-Tübingen

HERAUSGEGEBEN

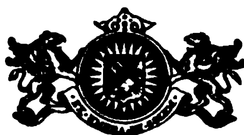
VON

DR. A. WINKELMANN,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

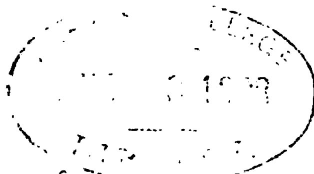
ERSTER BAND.

ALLGEMEINE PHYSIK.

MIT 466 ABBILDUNGEN.



LEIPZIG
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH
1908



Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort zur ersten Auflage.

.... Die ursprünglich für das Werk geplante lexikologische Darstellung, welche man hauptsächlich aus Rücksicht auf die Leichtigkeit, mit der sich die einzelnen Gegenstände auffinden lassen, zu wählen pflegt, entbehrt für die Physik größtenteils dieses Vorteils, wenn man nicht sehr zahlreiche Wiederholungen in das Werk einführen will. Außerdem beansprucht eine solche Darstellung, soll sie anders ihren Zweck erreichen, die Aufnahme einer übergroßen Zahl von Artikeln bezw. Stichworten; dieser Umstand ist aber notwendig mit einem Auseinanderreißen unmittelbar miteinander verwandter Erscheinungen verbunden, eine Tatsache, von deren Richtigkeit man sich durch einen Blick in das Sachregister eines jeden physikalischen Lehrbuchs leicht überzeugen kann. Es erschien daher gegenüber diesen Nachteilen zweckmäßig, statt der lexikologischen Anordnung eine dem Inhalt angepaßte zu wählen....

Da die Bearbeitung des ganzen Gebiets nicht von einer Hand erfolgt, sich vielmehr eine größere Anzahl Mitarbeiter für die Vollendung des Ganzen verbunden hat, so ist von vornherein zu erwarten, daß eine gewisse Ungleichheit in der Behandlung der einzelnen Artikel zutage tritt. Gegenüber diesem nicht zu vermeidenden Mangel gewährt aber gerade die Vielheit der Mitarbeiter, wenn die Stoffverteilung eine zweckmäßige ist, einen Vorteil von durchgreifender Bedeutung, nämlich die Möglichkeit, daß jedes Kapitel von einem Manne bearbeitet wird, der selbständige Untersuchungen in dem betreffenden Gebiete ausgeführt hat. Man hat sich bemüht, diesen Gedanken so weit wie möglich zu verwirklichen.

Der Zweck des Werkes ist, ein Handbuch zu liefern, welches in erster Linie für den Fachmann bestimmt ist; trotzdem darf man hoffen, daß auch der Laie, sofern ihm eine allgemeine naturwissenschaftliche Bildung zur Seite steht, dasselbe mit Vorteil benutzen wird, um sich eine tiefere Einsicht und Kenntnis in den verschiedenen Gebieten der Physik zu verschaffen.

Jena, im November 1890.

A. Winkelmann.

Nachwort und Vorwort zur zweiten Auflage.

Nachdem die erste Auflage des „Handbuch der Physik“ im Jahre 1896 vollendet vorlag, trat bereits im Jahre 1901 das Bedürfnis auf, in die Vorbereitungen für eine Neuauflage einzutreten. Diese Vorbereitungen wurden nach dem gleichen Grundsatz, der bei der ersten Auflage maßgebend war, ausgeführt, nämlich jedes zu behandelnde Kapitel, wenn irgend möglich, einem Forscher anzuvertrauen, der selbständige Untersuchungen in dem betreffenden Gebiete ausgeführt hatte. Infolge der lebhaften Entwickelung auf den meisten Gebieten der Physik wurde der Rahmen des Werkes bedeutend erweitert, so daß von vornherein sechs Bände in Aussicht genommen wurden. Zurzeit sind fünf Bände erschienen und zwar gelangte der vierte Band (Elektrizität und Magnetismus, erster Teil) im Jahre 1905 zuerst zur Ausgabe.

Das ganze Gebiet der Physik ist auf die sechs Bände in folgender Weise verteilt:

I. Band: Allgemeine Physik (zwei Teile).
II. Band: Akustik.
III. Band: Wärme.
IV. Band: Elektrizität und Magnetismus (I. Teil).
V. Band: „ „ „ (II. Teil).
VI. Band: Optik.

Der erste Band wurde wegen seines großen Umfangs von 1560 Seiten in zwei Teile zerlegt. Mit der Ausgabe dieses Bandes ist das ganze Werk vollendet, bis auf den zweiten Band, der im nächsten Jahre voraussichtlich ausgegeben werden kann.

Jeder einzelne Band enthält an der Spitze ein Inhaltsverzeichnis der einzelnen Artikel mit den Namen der betreffenden Autoren und am Schluß ein ausführliches alphabetisches Sachregister der behandelten Gegenstände.

Zu den bereits früher ausgegebenen Bänden III, IV, V und VI sind von verschiedenen Seiten in sehr dankenswerter Weise Berichtigungen mitgeteilt, die am Schluß des vorliegenden Bandes Aufnahme gefunden haben.

Jena, im April 1908.

A. Winkelmann.

Artikelverzeichnis nebst Inhaltsangabe zu Band I.

HANDBUCH DER PHYSIK

ZWEITE AUFLAGE

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. A. WINKELMANN

I. BAND. 1. HÄLFTE



LEIPZIG
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH
1908

HANDBUCH DER PHYSIK

ZWEITE AUFLAGE

UNTER MITWIRKUNG VON

Prof. Dr. R. ABEGG-BRESLAU, **Prof. Dr. F. AUERBACH**-JENA, **Dr. A. BEMPORAD**-CATANIA, **Prof. Dr. F. BRAUN**-STRASSBURG, **Prof. Dr. E. BRODHUN**-CHARLOTTENBURG, **Prof. Dr. M. CANTOR**-WÜRZBURG, **Prof. Dr. S. CZAPSKI**-JENA, **Prof. Dr. TH. DES COUDRES**-LEIPZIG, **Prof. Dr. P. DRUDE** BERLIN, **Prof. Dr. P. DUDEN**-HÖCHST A. MAIN, **Dr. O. EPPENSTEIN**-JENA, **Prof. Dr. K. EXNER**-INNSBRUCK, **Prof. Dr. W. FEUSSNER**-MARBURG, **Dr. H. GERDIEN**-GÖTTINGEN, **Prof. Dr. L. GRAETZ**-MÜNCHEN, **Prof. Dr. G. JÄGER**-WIEN, **Prof. Dr. H. KAYSER**-BONN, **Prof. Dr. R. LUTHER**-LEIPZIG, **Prof. Dr. F. F. MARTENS**-BERLIN, **Prof. Dr. F. POCKELS**-HEIDELBERG, **Dr. K. PULFRICH**-JENA, **Dr. L. RELLSTAB**-HANNOVER, **Dr. M. v. ROHR**-JENA, **Dr. O. SACKUR**-BRESLAU, **R. SCHÜTTAUF**-JENA, **Prof. Dr. J. STARK**-HANNOVER, **Prof. Dr. R. STRAUBEL**-JENA, **Prof. Dr. K. WAITZ**-TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN

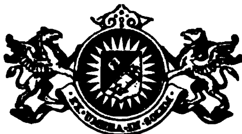
VON

DR. A. WINKELMANN,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

ERSTER BAND. ERSTE HÄLFTE.

Allgemeine Physik.

MIT 164 ABBILDUNGEN.



LEIPZIG
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH
1906

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Artikelverzeichnis nebst Inhaltsangabe
zu Bd. I, p. 1—544.[1]

[1] Nach Vollendung des Bandes I wird ein den ganzen Band umfassendes Sachregister ausgegeben.

Druckfehlerverzeichnis zu Band I. 1. Hälfte.

Seite 85, Zeile 8 von unten lies: „besitzt“ statt „benutzt“.

Grundbegriffe.

Von F. AUERBACH.

Einleitung. Aus dem großen Gebiete der Naturwissenschaft pflegt man etwas Besonderes herauszuheben, das man als exakte Naturwissenschaft bezeichnet; man denkt dabei zunächst und äußerlich an einige bestimmte naturwissenschaftliche Disziplinen, nämlich an Mechanik und Astronomie, Physik und Chemie; und man stellt ihnen Mineralogie, Geologie und Biologie als beschreibende Naturwissenschaften gegenüber. Bei etwas tieferem Eindringen in das Wesen dieses Gegensatzes und bei einer auch nur flüchtigen Betrachtung der Geschichte der Naturwissenschaften findet man indessen, daß es sich hier nicht sowohl um Klassifikation der verschiedenen Zweige der Naturwissenschaft, als vielmehr um eine Charakterisierung des Niveaus handelt, zu dem sich die in diesem Zweige übliche Betrachtungsweise im Laufe ihrer Entwickelung erhoben hat. Unter Beschreibung wird nämlich in diesem Zusammenhange[1] eine rein qualitative Angabe der Erscheinungen verstanden, während das Beiwort „exakt" eben ausdrücken soll, daß die Wissenschaft von diesem Niveau zu dem der quantitativen Festlegung der Tatsachen aufgestiegen ist. Die Aufgabe, exakt zu werden, ist nun offenbar allen Zweigen der Naturwissenschaft gemein; und wenn einige Disziplinen diese Aufgabe eher als andere bis zu einem gewissen Grade gelöst haben, so ist das weniger das Verdienst ihrer persönlichen Vertreter, als vielmehr eine Folge des Umstandes, daß bei ihnen die Verhältnisse einfacher liegen, daß bei ihnen das Qualitative sich in unmittelbarer Weise zu einem Quantitativen ausbauen läßt.

Das System der Grundbegriffe. Die erste Bedingung, die eine Naturwissenschaft erfüllen muß, wenn sie den Anspruch auf das Beiwort „exakt" erheben will, ist offenbar die exakte Einführung und Fassung der in ihr vorkommenden Begriffe. Bedenkt man nun, wie außerordentlich groß die Zahl dieser Begriffe ist, die überdies mit der Fortentwickelung der Wissenschaft noch zunimmt, so sieht man ein, daß es zuvörderst durchaus notwendig ist, diese ungeheuere Mannigfaltigkeit in ein System zu bringen, das heißt zu zeigen, ob und wie die einzelnen Begriffe miteinander zusammenhängen, welche von ihnen man auf andere zurückführen — Analyse — und dann wieder aus ihnen ableiten — Synthese — kann. Wenn man auf diese Weise alle „abgeleiteten Begriffe" ausgeschieden hat, behält man nur noch das übrig, was man die Grundbegriffe oder Fundamentalbegriffe[2] nennen kann; und ihre Gesamtheit wird das „System der

[1] Über eine weitergehende Fassung des Begriffs „Beschreibung" — mit Einbeziehung des Quantitativen — vergleiche man weiter unten. — [2] Zur richtigen Anwendung des Ausdrucks „Grundbegriffe" muß man sich von der weit verbreiteten, sprachlich falschen Anwendung frei machen, bei der „Grundbegriffe" mit „Anfangsgründen" oder „einfachsten Tatsachen" verwechselt wird — man vergleiche die Titel elementarer Lehrbücher u. s. w.

Grundbegriffe sein. Dabei ist noch zweierlei fraglich; nämlich einmal: wieviel derartige irreduzible Grundbegriffe man braucht, mit anderen Worten, wievielgliedrig das System der Grundbegriffe ist — je geringer diese Mindestzahl ist, desto besser; und es gibt vielleicht so manchen, dem als äußerstes Ideal ein einziger Fundamentalbegriff vorschwebt, aus dem sich alle übrigen ableiten lassen; und zweitens, ob zwingende Gründe für die Wahl ganz bestimmter Grundbegriffe vorliegen, oder ob hier ein gewisser Spielraum gelassen ist, ob es vielleicht mehrere Begriffe gibt, die sich in dem Grundsystem völlig ersetzen können.

Den Ausgangspunkt für die so umschriebene Aufgabe bilden für den Naturforscher begreiflicherweise die Sinnesorgane. Was uns diese Organe zunächst liefern, sind die Sinneswahrnehmungen, auch Sinnesempfindungen genannt; aus ihnen gehen durch gedankliche Operationen die Vorstellungen hervor; und an diese knüpft zuletzt die Begriffs- und Ideenbildung an. Diese Kette von geistigen Tätigkeiten stellt zugleich den Versuch dar, vom Subjektiven, das durch die Sinnesorgane unmittelbar geliefert wird, zu einem höheren Objektiven sich zu erheben, das von den Fehlern und Beschränkungen des Subjektiven befreit ist — ein Versuch, dessen Durchführbarkeit zu erörtern nicht hierher, sondern in die philosophische Erkenntnistheorie gehört. Es genügt hier zu betonen, daß auch die naturwissenschaftliche Erkenntnislehre zwar von den Sinneswahrnehmungen ausgeht, aber durchaus nicht, wie zuweilen ihr vorgeworfen wird, an ihnen haften bleibt und sich auf sie verläßt, sondern sie auf jedem sich darbietenden Wege zu einem Objektiven auszubauen versucht.[1]

A. Der Raum.

Raumbegriff. An der in Rede stehenden Aufgabe wirken alle unsere Sinnesorgane unter Umständen mit; indessen spielen zwei von ihnen doch für den ersten und allgemeinen Teil der Aufgabe die wesentliche Rolle: der Gesichtssinn und der Tastsinn. Beide liefern uns nun als erstes übereinstimmend den Raum, näher präzisiert die Raumwahrnehmung, die Raumvorstellung, den Raumbegriff, die Raumidee. Der Raum ist die Form unserer äußeren Anschauung; die Form, in der sich uns die Außenwelt, einschließlich unseres eigenen Körpers, darstellt. Je nach dem Gliede, bis zu dem wir in der obigen Kette von Bildungen fortschreiten, ist es der rein sinnliche, subjektive Raum oder ein von unserem Ich mehr oder weniger losgelöster, objektivierter Raum. Dabei ist der Weg, den der Tastsinn einerseits und der Gesichtssinn andererseits einschlagen, um zum Ziele zu gelangen, nicht unwesentlich verschieden. Der Tastsinn läßt uns ohne weiteres eine dreifache Mannigfaltigkeit des Raumes, ein, vom subjektiven Zentrum aus gerechnetes, Vorn und Hinten, Links und Rechts, Oben und Unten unterscheiden. Das einzelne und ruhende Auge hingegen entwirft uns, seiner physi-

[1] Die ältere Literatur zur allgemeinen Erkenntnistheorie kann hier nicht aufgeführt werden; auch von der neueren muß es genügen, einiges für den Physiker besonders in Betracht kommende zu nennen: Zunächst die verschiedenen Schriften von E. MACH (Analyse der Empfindungen, Vorträge und Aufsätze, Mechanik, Wärmelehre und zahlreiche einzelne Abhandlungen). H. v. HELMHOLTZ, Einleitung zu den Vorlesungen über theoretische Physik. Leipzig 1903. P. VOLKMANN, Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften. Leipzig 1896; Ann. d. Naturphil. **1.** 105. 1902. J. B. STALLO, Die Begriffe und Theorien der modernen Physik. Leipz. 1901. W. OSTWALD, Vorlesungen über Naturphilosophie. Leipz. 1902. W. K. CLIFFORD, Von der Natur der Dinge. Leipzig 1903. H. POINCARÉ, Wissenschaft und Hypothese. Leipzig 1904. PEARSON, Grammar of Science. London 1900. F. AUERBACH, Kanon der Physik. Leipzig 1899, sowie (ganz populär): Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. 2. Aufl. Leipzig 1906. E. v. HARTMANN, Die Weltanschauung der modernen Physik. Leipzig 1902. H. KLEINPETER, Ann. d. Naturphil. **2.** 404. 1903. C. FRENZEL, Die Grundlagen der exakten Naturwissenschaften. Leipzig 1905. Endlich sei noch auf J. C. MAXWELL, Substanz und Bewegung, Braunschweig 1879, hingewiesen.

schen Beschaffenheit und physiologischen Wirkungsart gemäß, zunächst ein flächenhaftes, zweidimensionales, reelles Bild auf der Netzhaut, das wir alsdann auf einen äußeren, ebenfalls zweidimensionalen Raum hinausprojizieren. Diese Raumfläche wird man, von begrenzenden Hindernissen — eigener Körper, Erdboden — abgesehen, zunächst als eine Kugelfläche zu bezeichnen geneigt sein; nähere Untersuchung ergibt indessen eine Abweichung in dem Sinne, daß die Entfernung des „reinen Oben", des Zenits, vom Auge kleiner ist als die eines Horizontpunktes (man denke an die Täuschung über die Größe des Mondes); daß also die Raumfläche von vertikal abgeplattetem Charakter ist. Erst durch das Zusammenwirken beider Augen, die in demselben Momente verschiedene Netzhautbilder liefern, und durch die Erfahrungen bei Ortsänderungen, wobei parallaktische Verschiebungen auftreten, wird die Vorstellung der Raumfläche, also des Links-rechts-nebeneinander und des Oben-unten-nebeneinander durch Hinzufügung des Vor- und hintereinander, der sogenannten Tiefendimension, zum dreidimensionalen Raume vervollständigt. Während endlich dieser subjektive Raum durch die Gesetze der Perspektive bestimmt wird, gehorcht der aus ihm abstrahierte objektive Raum objektiven, von irgend einem Standpunkt unabhängigen Gesetzen.[1]

Der Ausdruck „objektiver Raum" kann übrigens leicht mißverstanden werden, und das führt uns auf die erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten, die der Raumbegriff darbietet und die hier wenigstens insoweit kurz berührt werden müssen, als sie sich für die physikalische Grundlegung geltend machen. Der objektive Raum ist nämlich nicht etwa an sich ein Objekt, etwas reales oder gar materielles; er ist von lediglich transzendentaler Realität. Auch soll mit der Unabhängigkeit des objektiven Raumes von einem subjektiven Standpunkte nicht gesagt sein, daß es einen absoluten Raum gebe; im Gegenteil, gerade die physikalische Betrachtung drängt die Relativität des Raumes geradezu in den Vordergrund, worüber bei der Besprechung des Bewegungsbegriffes, wo sich die entsprechende Frage aufrollt, noch die Rede sein wird. Das Hauptinteresse aber nimmt für uns die Frage in Anspruch, ob es einen absoluten Raum in dem Sinne gebe, daß es außer ihm keine anderen Räume geben könne — eine Frage, die sich offenbar mit der anderen im wesentlichen deckt, ob der Raum etwas a priori gegebenes sei, dem wir mit unseren Fähigkeiten nicht beikommen können, oder ob er einer Analyse und einer Entwickelung fähig sei.

Hier hilft uns nun die äußerst fruchtbare Methode der Analogie zwischen Niederem und Höherem. Denn daß es im Raume zweidimensionale Gebilde, d. h. Flächen verschiedener Art gibt, ist sogar unserer Anschauung unmittelbar zugänglich: es gibt die Ebene, die Kugelfläche, die pseudosphärische Fläche (Beltrami), die Zylinderfläche, die Eifläche u. s. w. Die drei erstgenannten Flächen zeichnen sich dadurch aus, daß sie ein überall gleiches Krümmungsmaß (Gauss) haben, und zwar ist es in der Ebene überall null, in der Kugelfläche positiv, in der pseudosphärischen Fläche negativ, wobei freilich zu bemerken ist, daß die pseudosphärische Fläche in unserem Raume nur stückweise darstellbar ist. Das, wodurch sich diese drei Flächen voneinander unterscheiden, ist ihr Verhalten gegenüber den beiden Sätzen von der kürzesten Linie — „zwischen zwei Punkten ist nur eine einzige kürzeste Linie vorhanden" — und von den Parallelen — „durch einen Punkt außerhalb einer Linie gibt es nur eine einzige Parallele zu derselben". Für die Ebene gelten nämlich beide Sätze, für die Kugel nur der zweite, für die pseudosphärische Fläche nur der erste. Was aber andererseits alle drei Flächen von sämtlichen übrigen scheidet, ist dies, daß auf ihnen und nur auf ihnen eine Figur ohne Änderung ihrer Dimensionen beliebig verschoben werden kann.

[1] Über den geometrischen Raum und, im Gegensatz hierzu, den Gesichts-, Tast- und Bewegungsraum vgl. z. B. H. Poincaré, a. a. O., p. 52 ff.

Wenden wir nun die Methode der höheren Analogie an, so gelangen wir zu der Einsicht, daß es auch Räume sehr verschiedener Art geben wird, daß unter ihnen drei von überall gleichem Krümmungsmaß (RIEMANN) vorkommen, nämlich der ebene, der sphärische und der pseudosphärische Raum, und daß, in Konsequenz der Gesetze, die wir in ihm gelten lassen — Euklidische Geometrie — der Raum, in dem wir leben, als ebener Raum anzusehen ist. Es folgt aber weiter, daß wir uns auch die anderen Raumarten begrifflich und, bis zu einem gewissen Grade, auschaulich vorstellen können (v. HELMHOLTZ).

Die wichtigste Konsequenz unserer Betrachtungen für die Praxis aber ist die folgende. Eine Ausmessung des Raumes, eine Messung von Raumgrößen ist offenbar nur möglich, wenn die Sicherheit besteht, daß in ihm Kongruenz besteht, d. h. daß die der Messung zugrunde gelegten Größen, also z. B. die Länge eines Maßstabes, sich bei seiner Verschiebung im Raume nicht ändert. Das ist nun zwar durchaus nicht in jedem Raume, wohl aber, wie das Obige lehrt, in unserem Raume der Fall. Damit ist also jede Meßkunst erst eigentlich fundiert. Es sei übrigens darauf hingewiesen, daß bei gewissen Betrachtungen, die sich auf Raumprobleme beziehen, so namentlich bei dem Problem des ruhenden oder beweglichen Lichtäthers (vgl. Bd. **6**. 484) fast als einziger Ausweg aus den dabei auftretenden Schwierigkeiten und Widersprüchen die Annahme übrig bleibt, daß ein Maßstab bei der Bewegung durch den Raum seine Länge ändere. Sollte sich das wirklich als notwendig herausstellen, so würde das nach dem Erörterten eine völlige Umwälzung der Lehre vom Raume involvieren.[1]

Schließlich wäre noch die Frage nach der Möglichkeit von mehr als drei Dimensionen des Raumes insoweit zu diskutieren, als das für die physikalische Erkenntnis von Bedeutung sein kann. Da aber hierbei der Zeitbegriff eine wesentliche Rolle spielt, wird dies besser auf später verschoben.

Raumgrößen und Raummaße.

Strecke, Längeneinheit. Der Raumbegriff ist nunmehr als mathematische Größe zu präzisieren. Hierzu wird, da der Punkt — Ort im Raume — überhaupt keine Dimension besitzt, naturgemäß das einfachste dimensionale Gebilde, die eindimensionale Strecke dienen, und zwar diejenige Strecke, die dadurch ausgezeichnet ist, daß sie die kürzeste Verbindung zwichen zwei Punkten im Raume darstellt, also in unserem ebenen Raume die gerade Strecke. Es frägt sich nur noch, wie lang man sie wählen solle, um die Einheit zu erhalten. Hier besteht nun vollkommene Willkür; es gibt kein absolutes Längenmaß in dem Sinne, daß es größere innere Berechtigung hätte als irgend ein anderes. Wenn man sich trotzdem dieses Ausdrucks bedient, so kann er nur rein äußerliche Bedeutung haben. Man kann insbesondere die praktische Forderung aufstellen, daß die gesamte Kulturwelt und speziell die gesamte Wissenschaft und Technik sich desselben Längenmaßes bediene; und um diese Forderung durchzusetzen, wird man

[1] Aus der reichen Literatur über die Natur des Raumes seien hier folgende Schriften herausgehoben: DEICHMANN, Das Problem des Raumes in der griechischen Philosophie. Leipzig 1893. — BAUMANN, Die Lehre von Raum und Zeit in der neueren Philosophie. Berlin 1868. N. J. LOBATSCHEWSKY, Prinzipien der Geometrie. Kasan 1830. — B. RIEMANN, Die Hypothesen der Geometrie, Abh. Gött. Ges. d. Wiss. **13**. 1854. — H. v. HELMHOLTZ, Ursprung und Bedeutung der geometrischen Axiome, Vorträge u. Reden, Braunschw. (Vortrag 1870). — E. BELTRAMI, Saggio di Interpretazione della Geometria non-euclidea, Napoli 1868 und Ann. di Mat. (2) **2**. 232. — C. STUMPF, Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung. Leipzig 1873. — B. ERDMANN, Die Axiome der Geometrie. Leipzig 1877. — F. PIETZKER, Die Gestaltung des Raumes. Braunschweig 1891. — H. KLEINPETER, Raum- und Zeitbegriff u. s. w.: Arch. f. wiss. Phil. **4**. 32. 1898 und **5**. 159. 1899. — FR. DREYER, Studien, Bd. II: Kontinuitätsmethodik eines Dreidimensionalen. Leipzig 1903. — A. KIRSCHMANN, Die Dimensionen des Raumes. Leipzig 1902.

nicht an spezielle Verhältnisse, wie z. B. der Fuß des Menschen, sondern man wird an Größen anknüpfen müssen, die eine für die ganze Menschheit allgemeine Bedeutung besitzen. Derartige Erwägungen haben nun zu folgendem geführt.

Das Meter. Nachdem ein erster Vorschlag, die Länge des Sekundenpendels zu wählen, wegen der Verquickung dieser Größe mit dem Zeitbegriff mit Recht fallen gelassen worden war, wurde von der französischen Nationalversammlung am 30. März 1791 der zehnmillionte Teil des Erdmeridians vom Äquator zum Pol als Längeneinheit festgesetzt und als Meter bezeichnet; die betreffende Gradmessung wurde in den nächsten Jahren ausgeführt und danach ein Normal-Meterstab hergestellt (25. Juni 1800). Als dann später Bessel zeigte, daß ein Meridianquadrant nicht 10000000, sondern etwas mehr, nämlich 10000856 solcher Einheiten enthalte, wurde trotzdem beschlossen, bei dem einmal festgesetzten Maßstabe zu bleiben; und das mit Recht, da ja spätere Gradmessungen eventuell wieder neue Abweichungen ergeben konnten. Wenn man also das Meter tatsächlich definieren will, muß man von der Beziehung zur Erde gänzlich absehen und einfach sagen: Das Meter wird dargestellt durch den bei der Temperatur des schmelzenden Eises gemessenen Abstand der Endstriche auf demjenigen Maßstabe, welcher von der internationalen Generalkonferenz für Maß und Gewicht als internationales Prototyp des Meter anerkannt worden und bei dem Internationalen Maß- und Gewichtsbureau (im Pavillon Breteuil in Sèvres bei Paris) niedergelegt ist. Von diesem Urmeter ist u. a. eine Kopie aus Platiniridium dem Deutschen Reiche als nationales Prototyp überwiesen worden, es wird bei der Kaiserlichen Normal-Eichungs-Kommission aufbewahrt (als Nr. 18) und hat bei verschiedenen Temperaturen Θ die Länge

$$0{,}999999 + 0{,}000008642\,\Theta + 0{,}00000000100\,\Theta^2 \pm 0{,}0000002 \quad ;$$

das letzte Glied gibt den wahrscheinlichen Fehler an. Über die Frage, ob und inwieweit sich ein derartiges Normalmeter mit der Zeit verändere, sind an mehreren Orten Untersuchungen angestellt worden, die zum Teil solche Änderungen, aber äußerst geringfügige ergeben haben.[1]

Abgeleitete Längenmaße. Aus dem Meter werden durch Multiplikation bezw. Division mit Potenzen von 10 größere bezw. kleinere Einheiten gebildet, die jedoch nur zum Teil offiziell geworden oder sich praktisch eingebürgert haben; man erhält dafür folgendes Tableau mit beigesetzten Abkürzungen:

m = 1 Meter	dm = 0,1 m = Dezimeter
Dm = 10 m = Dekameter	cm = 0,01 m = Zentimeter
Hm = 100 m = Hektometer	mm = 0,001 m = Millimeter
km = 1000 m = Kilometer	μ = 0,000001 m = Mikron
	$\mu\mu$ = 0,000001 mm = Millimikron

Für die Zwecke der exakten Wissenschaft ist nun das Meter unbequem groß; man hat sich deshalb geeinigt, nicht das Meter, sondern das Zentimeter[2] als Längeneinheit festzusetzen; in ihm haben die übrigen Maße folgende Werte:

km	m	dm	cm	mm	μ	$\mu\mu$
10^5	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-4}	10^{-7}

[1] Zur Geschichte und Begründung des Metermaßes vgl. namentlich: Chevreul, C. R. **69.** 847. 1869. — B. Weinstein, Handb. d. phys. Maßbest. **2.** 20. 1888. — C. E. Guillaume, La Convention du Mètre et le Bureau intern. des Poids et Mesures. Paris 1902. Ferner zahlreiche Abhandlungen und Berichte in den Procès-verbeaux des séances du Comité intern. des Poids et Mesures, den Traveaux et Mém. du Bureau des Poids et Mesures, zuletzt Bd. 12 (1902), in den Metronomischen Beiträgen, den Mitteilungen und Abhandlungen der kaiserl. Normal-Eich-Kommission und in den Veröffentlichungen des königl. preuß. geodät. Instituts. — [2] Nach Einführung der neuen Orthographie im Deutschen Reiche stimmen zahlreiche Maßworte nicht mehr mit ihren Abkürzungen überein (Zentimeter = cm; Kubikmeter = cbm); daran wird sich kaum noch etwas ändern lassen.

Da in einigen Staaten das metrische System eben erst oder noch nicht eingeführt ist, und da in zahlreichen Schriften früherer Zeit, welche noch heute häufig zu Rate zu ziehen sind, Angaben in anderen Maßsystemen als dem metrischen gemacht sind, auch ältere Apparate noch vielfach die bezüglichen Einteilungen besitzen, so möge hier eine Vergleichungstabelle Platz finden.

	m		km
Pariser Fuß	0,3248394	Französische Myriameter	10,000000
Rheinischer Fuß	0,3138535	Deutsche oder geographische Meile (15 = 1°)	7,420438
Bayrischer Fuß	0,2918592	Preußische Meile (24000 Fuß)	7,532485
Hannoverscher Fuß	0,2920947	Österreichische Meile (24000 Fuß)	7,586663
Sächsischer Fuß	0,2831901	Schweizer Stunde (16000 Fuß)	4,800000
Kasseler Fuß	0,2876991	Englische Meile (5280 Fuß)	1,609315
Württemberger Fuß	0,2864903	Russische Werst (3500 Fuß)	1,066781
Badischer und Schweizer Fuß	0,3000000	Seemeile (60 = 1°)	1,855109
Schwedischer Fuß	0,3014943		
Englischer und russischer Fuß	0,3048010		
Wiener Fuß	0,3161109		

Pariser Zoll	2,712 cm
Pariser Linie	0,22558 cm
Toise (6 Fuß)	1,9490364 m
Yard (3 engl. Fuß)	0,914404 m

Für sehr große Strecken, wie sie namentlich in der Astronomie vorkommen, bedient man sich als Maßes häufig der Zeiten, die der Lichtstrahl braucht, um sie zurückzulegen; man spricht also von Lichtsekunden, Lichtminuten, Lichtstunden, Lichttagen, Lichtjahren; dabei gelten die Beziehungen (vgl. Band **6**, im Artikel „Lichtgeschwindigkeit“:

Lichtsekunde	299890 km
Lichtjahr	$94639 \cdot 10^8$ km

Lichtwellen als Längeneinheit. Das metrische Maßsystem hat, wie gesagt, seinen absoluten Charakter — soweit dieser Ausdruck überhaupt zulässig ist — dadurch verloren, daß man die exakte Beziehung zum Erdkörper aufgegeben und den einmal hergestellten Urmaßstab beibehalten hat. Dieser Maßstab und ebenso seine Kopien sind aber möglichen Veränderungen und zerstörenden Gefahren ausgesetzt; und es ist daher der Vorschlag gemacht worden, wenn auch nicht für die Praxis, so doch behufs Wahrung einer stets wieder reproduzierbaren Norm sowie für feinste wissenschaftliche Zwecke eine Länge als Einheit festzusetzen, die sich in der Natur vorfindet, und die man mit genügender Genauigkeit anzugeben in der Lage ist; eine Länge, die auch möglichst unabhängig sein muß von veränderlichen Umständen, wie z. B. der Temperatur, und zu deren Messung der Rahmen und die Hilfsmittel eines normalen Laboratoriums ausreichen. Diese Eigenschaften vereinigen in sich die Wellenlängen der einzelnen Lichtarten, wie sie sich durch dunkle oder helle Spektrallinien zum Teil äußerst scharf charakterisieren lassen. Der Erste, der sich hierzu äußerte, scheint K. R. KOCH[1] gewesen zu sein, und zwar mit den Worten (gelegentlich des Problems der Auswertung von Schraubengängen): „hierdurch erscheint es möglich, als Maßeinheit direkt die Lichtwelle, das einzige wirkliche und ... unveränderliche Naturmaß, zu benutzen.“ Unabhängig von KOCH hat MICHELSON[2] das Problem aufgenommen, und zum Teil in Verbindung mit MORLEY, in einer Reihe hervorragender Arbeiten durchgeführt. Als Linien dienten anfangs die von Natrium, Lithium, Thallium und Wasserstoff, später aber die drei sehr scharf charakterisierbaren Linien des Kadmiums (rot,

[1] K. R. KOCH, Ber. d. Naturf. Ges. zu Freib. i. Br. **8.** 123; WIED. Ann. **18.** 511. 1883; **52.** 432. 1894. — [2] A. MICHELSON u. E. MORLEY, SILL. Journ. (3) **34.** 427. 1887; (3) **38.** 181. 1889. — A. MICHELSON, C. R. **116.** 790. 1893; Journ. de Phys. (3) **6.** 5. 1894; Trav. et Mém. Bur. int. poids et mes. **11.** 1894.

grün, blau), wodurch man zugleich eine wertvolle Kontrolle erhält. Wegen der zur Ausmessung benutzten Interferenzmethode mit stufenweiser Annäherung an große Strecken muß auf die Optik (Bd. VI) sowie auf die Originalabhandlungen verwiesen werden. Auch auf die weitere Literatur[1] kann hier nur hingewiesen werden; bei der Längenmessung (Artikel „Messung von Raum und Zeit") wird darauf teilweise zurückzukommen sein. Das Ergebnis, zu dem MICHELSON für die Wellenlängen λ der Kadmiumlinien kam, ist folgendes:

λ (rot) = 0,64384722 μ	1 cm = 15531,635 λ (rot)
λ (grün) = 0,50858240 μ	1 cm = 19662,497 λ (grün)[2]
λ (blau) = 0,47999107 μ	1 cm = 20833,721 λ (blau)

Zur ungefähren Vorstellung kann man sich merken, daß zwei grüne Kadmiumwellen um etwa $1^3/_4{}^0/_0$ größer sind als ein Mikron. Von absoluter Sicherheit für alle Zukunft ist freilich auch dieses Maß nicht, da sich in den Welträumen, in die das Sonnensystem mit der Zeit gelangt, der Äther vielleicht anders verhält und die Wellenlängen des Lichtes deshalb andere Werte annehmen.[3]

Typische Längen. In der folgenden Tabelle sind einige typische Strecken, von ganz großen bis herab zu ganz kleinen, zusammengestellt; dabei bedeuten Zahlen ohne Bezeichnung Zentimeter.

Zusammenstellung einiger typischer Strecken.

Sonne—Sirius . .	17 L.-J. =	1,6	$\cdot 10^{19}$	Sekundenpendel . .	99,349
Sonne—Neptun .	250 L.-Min. =	4,47	$\cdot 10^{14}$	a'-Welle in Luft .	76,55
Sonne—Erde . .	498 L.-Sek. =	1,486	$\cdot 10^{13}$	Hg-Höhe der Atmo-	
Erde—Mond . .	1,3 L.-Sek. =	3,834	$\cdot 10^{10}$	sphäre	76
Erdäquator . . .		4,007037	$\cdot 10^{9}$	Theoret. Mittelflut .	50
Erdquadrant . .		1,0000856	$\cdot 10^{9}$	Kapill. Steighöhe des	
Äquatorialradius				Wassers bei 1 mm	3
der Erde . . .		6,37740	$\cdot 10^{8}$	Kürzeste Schallwelle	1
Polarradius . . .		6,35608	$\cdot 10^{8}$	Gleitung von Wasser	
Elektrost. Kapazi-				an Glas	0,235
tät der Erde .		6,36	$\cdot 10^{8}$	Längste Wärmewelle	$3 \cdot 10^{-3} = 30\ \mu$
Mondradius . . .		1,733	$\cdot 10^{8}$	Größte Schallampli-	
Höchste Luftfahrt		1,1	$\cdot 10^{6}$	tude in Luft . .	$10^{-4} = 1\ \mu$
Größte Meerestiefe		9,5	$\cdot 10^{5}$	Längste Lichtwellen	$8 \cdot 10^{-5} = 0,8\ \mu$
Höchster Berg . .		8,84	$\cdot 10^{5}$	Kürzeste Lichtwellen	$3 \cdot 10^{-5} = 0,3\ \mu$
Tiefstes Bohrloch .		2	$\cdot 10^{5}$	Gleitung von Luft an	
Eiffelturm . . .		3	$\cdot 10^{4}$	Glas	$1,1 \cdot 10^{-5}$
Längste Schallwel-				Weglänge der Gas-	
len in Luft . .		2	$\cdot 10^{3}$	teilchen	$10^{-5} = 0,1\ \mu$
Höchste Springflut		1,8	$\cdot 10^{3}$	Durchmesser der Gas-	
Originale HERTZ-				teilchen	$10^{-6} = 0,01\ \mu$
sche Wellen . .		560		Kleinste Schallampli-	
Hg-Länge des Ohm		106,3		tude in Luft . .	$10^{-8} = 0,1\ \mu\mu$

Flächen. Aus dem Grundbegriffe der Strecke ergibt sich als erster abgeleiteter der der Fläche; man wird als Maßfläche naturgemäß das Quadrat nehmen und, da das Zentimeter die Streckeneinheit ist, als Flächeneinheit das Quadratzentimeter, in Abkürzung qcm — seltener cm² — erhalten. Durch Multiplikation mit Potenzen von 100 findet sich weiter:

qmm = 1 Quadratmillimeter	=	0,000001 qm
qcm = 1 Quadratzentimeter	=	0,0001 „
qdm = 1 Quadratdezimeter	=	0,01 „

[1] G. H. v. WYSS, Naturw. Rundschau 3. 389. 1888. C. E. GUILLAUME, La Convention du Mètre etc. Paris 1902. E. GUMLICH, Das Weltall. Heft 12—14. 1902. A. PEROT und CHR. FABRY, Ann. Chim. Phys. (7) 24. 119. 1901. — [2] Diese Zahl ist in den Beibl. zu den Ann. d. Phys. 1895. p. 368 leider verdruckt und der Fehler dann in mehrere andere Bücher übergegangen. — [3] Vgl. O. CHWOLSON, BOLTZMANN-Festschr. 1904. p. 28.

qm	= 1 Quadratmeter	=	1 qm
a	= 1 Quadratdekameter = 1 Ar .	=	100 „
ha	= 1 Quadrathektometer = 1 Hektar	=	10000 „
qkm	= 1 Quadratkilometer	=	1000000 „

Hieran sind noch folgende Beziehungen zu schließen:

1 englischer Quadratzoll	= 645,1 qmm	100 österreich. Quadratfuß	= 9,99207 qm
1 englischer Quadratfuß	= 929 qcm	100 preußische „	= 9,85040 „
1 englischer Acker . .	= 40,467 a	100 englische „	= 9,28995 „
1 preußischer Morgen .	= 0,2552 ha	100 bayrische „	= 8,51818 „
1 russische Desjatine .	= 1,0925 ha	100 sächsische „	= 8,01966 „
1 geogr. Quadratmeile .	= 55,0588 qkm	1 preußischer Quadratzoll	= 6,8405 qcm
1 englische Quadratmeile	= 2,5899 qkm		
1 Quadratwerst . . .	= 1,1380 qkm		

Volumina. Zur Festlegung der Volumeneinheit bieten sich zwei verschiedene Wege dar, und beide sind auch tatsächlich beschritten worden; ein direkter und ein indirekter. Beim direkten wählt man als Normalvolumen denjenigen Würfel, dessen Kante 1 cm lang ist und nennt dieses Volumen ein Kubikzentimeter, abgekürzt ccm oder cbcm, seltener cm^3; man hat dann folgende Übersicht:

cbmm	= 1 Kubikmillimeter	=	0,001 cbcm
ccm	= 1 Kubikzentimeter	=	1 „
cbdm	= 1 Kubikdezimeter	=	1000 „
cbm	= 1 Kubikmeter	=	1000000 „

Der indirekte Weg besteht in der Ableitung der Volumeneinheit aus der Masseneinheit (s. w. u.), indem man definiert: Volumeneinheit ist der Rauminhalt, den dasjenige Gefäß bei 0° C. haben muß, wenn es gerade 1 Gramm destilliertes Wasser von der Maximaldichte fassen soll; aus begreiflichen Gründen wird man dann statt eines Gramm lieber ein Kilogramm nehmen und erhält alsdann das, was man ein Liter, abgekürzt l, nennt; 100 l heißen ferner 1 Hektoliter. Wenn das Kilogramm — s. w. u. — genau seiner Definition gemäß hergestellt wäre, müßte das Liter mit dem Kubikdezimeter identisch sein; das ist aber nicht der Fall, es ist (ähnlich wie bei dem Urmaßstab) ein Fehler untergelaufen, und so besteht eine Differenz, die zwar noch nicht endgültig festgestellt, aber jedenfalls äußerst klein, nämlich wahrscheinlich derart ist, daß das Kubikdezimeter um 20—50 Milliontel kleiner ist als das Liter (s. w. u.).

Zur Umrechnung mögen noch folgende Angaben dienen:

1 preußischer Kubikfuß . . .	=	30916 ccm
1 preußischer Kubikzoll . . .	=	17,891 ccm
1 österreichischer Kubikfuß . .	=	31585 ccm
1 englischer Kubikfuß	=	28315 ccm
1 bayrischer Kubikfuß	=	24861 ccm
1 sächsischer Kubikfuß . . .	=	22711 ccm
1 englische Gallone	=	4,5435 l
1 amerikanische Gallone . . .	=	3,7854 l
1 Tschertwet (russisch) . . .	=	206,9 l

Schließlich seien für einige regelmäßige Raumformen sogen. Körper (im rein geometrischen Wortsinne), die Volumina bei der Kantenlänge bezw. dem Durchmesser 1, und umgekehrt die Kanten- bezw. Durchmesserlängen angegeben, die sie haben müssen, wenn sie die Einheit des Rauminhalts haben sollen:

Form	Volumen	Kante bezw. Durchmesser
Würfel	1	1
Tetraeder	0,1152	2,055
Oktaeder	0,4713	1,285
Kugel	0,5232	1,241

Richtungen und Winkel. Bei der Definition der Begriffe Richtung und Winkel wiederholt sich das ganz entsprechende Verhältnis wie bei Ort und Strecke. Man kann die Strecke als Abstand zweier Orte definieren, wenn man für letztere eine absolute Bestimmung fingiert oder in bestimmten Fällen inhaltlich realisiert; oder man kann sich auf das Relative beschränken und muß alsdann umgekehrt unter Ort den Abstand von einem festen Ausgangsorte verstehen. Ebenso kann man unter Winkel die Verschiedenheit zweier Richtungen im Raume verstehen, die man sich der Einfachheit halber auf gemeinschaftlichen Anfangspunkt projizieren wird; oder man definiert umgekehrt eine Richtung dadurch, daß sie mit einer festen Bezugsrichtung einen bestimmten Winkel bildet. Das erstere Verfahren hat in diesem Falle erhöhte Bedeutung, weil die physische Realisierung bestimmter Richtungen in mehrfacher Weise in der Natur gegeben ist, und zwar in erster Linie durch die Schwerkraft auf der Erde: Lotrichtung und Niveau; oder Vertikallinie und Horizontalebene. Die wichtigste physisch definierte Linienrichtung, die Lotrichtung, und die wichtigste Flächenrichtung, der Horizont, haben ihre gemeinsame Wurzel in der Schwerkraft. Die Lotrichtung in einem Punkte ist die Richtung der Resultante aller gravitierenden Kräfte der Erde in diesem Punkte; ihren einfachsten Ausdruck findet sie in der Richtung, die ein einfaches Pendel — Lot genannt — im Ruhezustande annimmt; die Richtung des freien Falles ist hiervon aus gewissen Gründen (vgl. Artikel „Fall und Wurf") etwas verschieden. Die Frage, wie sich das Lot an verschiedenen Punkten und an demselben Punkte zu verschiedenen Zeiten verhält, bleibt späterer Gelegenheit vorbehalten (vgl. Artikel „Gravitation"). — Die auf der Lotlinie senkrecht stehende Ebene heißt Horizontalebene, ihre Begrenzung für das Auge eines Menschen bei Abwesenheit aller Hindernisse heißt der Horizont; auch für ihn gibt es ein einfaches Herstellungsmittel in dem Niveau einer Flüssigkeit, natürlich von kapillaren und anderen Abweichungen abgesehen. Man kann daher auch direkt die Horizontalebene als Niveauebene definieren.

Von der Lotrichtung sind einige andere, mit ihr nahe zusammenfallende prinzipiell zu unterscheiden: die Richtungen nach dem Mittelpunkt und nach den beiden Brennpunkten der Erde; ebenso von der Horizontalebene die Tangentialebene in dem betreffenden Punkte an die Erde. Dagegen ist Zenit exakt die Verlängerung der Lotrichtung nach oben und bis zum Himmelsscheitel.

Andere astronomisch oder physikalisch ausgezeichnete Richtungen sind die nach den Himmels- und Erdpolen, nach den magnetischen Polen der Erde, deren horizontale Projektionen u. s. w.

Linienwinkel. Er ist der Richtungsunterschied zwischen zwei sich schneidenden geraden Linien; bei sich nicht schneidenden genügt es, durch irgend einen Punkt der einen eine Parallele zu der anderen zu ziehen. Beim Winkelmaß hat sich trotz vielfacher Bestrebungen, die noch neuerdings wieder zutage getreten sind, das Dezimalsystem nicht Bahn brechen können, aus dem einfachen Grunde, weil das Maßsystem für Winkel infolge der Achsendrehung der Erde aufs innigste mit dem Zeitmaß (s. w. u.) verknüpft ist und dieses ebenfalls nicht von dezimalem Charakter ist. Die natürliche Einheit des Linienwinkels ist der ganze Umlauf um alle von einem Punkte aus in einer Ebene von einer beliebigen Anfangsrichtung aus mögliche Richtungen. Aus praktischen Gründen bezw. aus Erwägungen, die auf mathematischem Gebiete liegen, wählt man aber eines von zwei anderen Maßen. Bei dem einen, das man als das theoretische oder Bogenmaß bezeichnen kann, setzt man den ganzen Umlauf gleich 2π und drückt Winkel in Bruchteilen dieser Größe aus; bei dem anderen, dem praktischen oder Gradmaße, setzt man den ganzen Umlauf gleich 360 Grad, symbolisch 360^0, kommt dadurch zu der Gradeinheit und verschafft sich durch ein- und zweimalige Teilung in 60 Teile die Winkelminute (′) und die Winkelsekunde (″).

Hiernach ergeben sich folgende Beziehungen (Winkel im Bogenmaß ohne besondere Bezeichnung):

1″	=	=	= 0,000004848	
1′	=	= 60″	= 0,0002909	
1°	= 60′	= 3600″	= 0,017453	
30°	= 1800′	= 108000″	= 0,52359	
45°	= 2700′	= 162000″	= 0,7854	($\pi/4$)
57,2958°	= 3437,75′	= 206265″	= 1	
1 rechter Winkel = 90°	= 5400′	= 324000″	= 1,5708	($\pi/2$)
180°	= 10800′	= 648000″	= 3,1416	(π)
360°	= 21600′	= 1296000″	= 6,2823	(2π)

Es ist zu betonen, daß im leeren Raume, d. h. bei Abstraktion von allem übrigen zwar nur Winkel bis zu 360 Grad vorkommen; daß aber bei gedanklich-genetischen oder physisch-realen Prozessen und Beziehungen auch beliebige größere Winkel mit einer beliebigen Anzahl von ganzen Umläufen nebst Bruchteilen eines weiteren vorkommen können.

Zusammenstellung einiger typischer Winkel:

Magnetisch. Drehungskoeffizient des Eisens	200000°	Grenzwinkel, Diamant	24¼°
Randwinkel, Hg gegen Glas	135°	Schiefe der Ekliptik	23½°
Spaltwinkel, Kalkspat	105° 5′	Achsenwinkel, Arragonit	18° 18′
Haupteinfallswinkel bei Gold	72,3°	Drehung des Quarzes, rot	16°
Inklination, Potsdam 1905	66¼°	Östliche Länge, Berlin	13° 23′
Drehung des Rohrzuckers	66°	Deklination, Potsdam 1905	9½°
Achsenwinkel des Gipses	57½°	Winkel zwischen optischer und Strahlenachse, Schwefel	3½°
Nördliche Breite von Berlin	52° 30′	Sonnendurchmesser, scheinbar, Mittel	32′ 4″
Grenzwinkel von Wasser	48¾°	Monddurchmesser, scheinbar, Mittel	31′ 24″
Achsenwinkel von Glimmer	45°	Jupiter, Maximum	51″
Drehung des Quarzes (violett)	45°	Aberration des Lichtes	20,5″
Wurfwinkel, Optimum (theor.)	45°	Nutation der Erde	9′
Hauptazimut, Gold	41,6°		
Regenbogen, grün	41¼°		
Wurfwinkel, Optimum, Mittel	39°		

Flächenwinkel. Es ist der Richtungsunterschied zwischen zwei sich schneidenden Ebenen; er läßt sich leicht auf den Linienwinkel zurückführen durch die Definition als Richtungsunterschied zwischen zwei in demselben Punkte der Schnittkante der Ebenen auf dieser errichteten Senkrechten. Man kann auch, indem man an das mathematische Winkelmaß unter Weglassung des Faktor 2π anknüpft, sagen: Linienwinkel ist der von den Linien ausgeschnittene Bruchteil eines Kreises; Flächenwinkel ist der von den Ebenen ausgeschnittene Teil einer Zylinderfläche. Einheit und Maßsystem ist für den Flächenwinkel dasselbe wie für den Linienwinkel.

Raumwinkel, Körperwinkel, Kegelöffnung. Die zuletzt angeführte Definition von Linien- uud Flächenwinkel ist am geeignetsten, um auf einen dritten Winkelbegriff übertragen zu werden, den Raumwinkel oder Körperwinkel. Geht nämlich von einem Punkte ein Kegel im allgemeinsten Sinne des Wortes, also mit beliebigem Querschnitt, aber durchaus geraden Leitlinien, aus, so ist der Raumwinkel der Bruchteil, den jener Kegel aus einer Kugel ausschneidet. Die gesamte Umgebung eines Punktes würde hiernach den Raumwinkel 1 darstellen; man verfährt aber auch hier anders und hat wieder zwei Möglichkeiten: entweder man nennt die ganze Umgebung, als Verhältnis der Kugelfläche zum Radius 4π; oder man geht vom Grad des Linienwinkels aus, bildet von dem Punkte aus eine vierseitige Pyramide, deren Kanten Winkel von je 1° miteinander bilden

und nennt diesen Raumwinkel einen Quadratgrad. Die ganze Kugeloberfläche hat, wie eine einfache Überlegung lehrt,

$$\frac{1}{\pi} \cdot 360 \cdot 360 = 41252{,}96 \text{ Quadratgrade} \quad ,$$

also eine irrationale Zahl; deshalb und weil die Einteilung einer Kugelfläche in Quadratgrade überhaupt nicht realisierbar ist, spielt der Quadratgrad keine praktische Rolle (vgl. jedoch w. u.). Die Erdoberfläche z. B. wird statt dessen mit Benutzung von Meridianen und Parallelkreisen in Trapezgrade geteilt, von denen sie genau 64800 enthält, die aber freilich von sehr verschiedener Größe sind, nämlich vom Äquator bis zu den Polen abnehmen, worüber folgende kleine Tabelle eine Übersicht gibt:

Breite	Trapezgröße		Breite	Trapezgröße	
	in 100 qkm	in Qu.-Gr.		in 100 qkm	in Qu.-Gr.
0—1	123,8	0,999	60—61	61,70	0,498
10—11	121,8	0,983	70—71	41,75	0,337
20—21	116,1	0,937	80—81	20,69	0,167
30—31	107,0	0,864	85—86	9,79	0,079
40—41	94,66	0,764	89—90	1,09	0,0088
50—51	77,68	0,627			

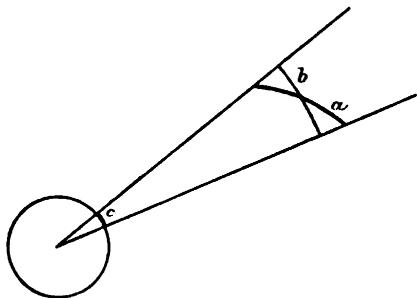
Winkel und scheinbare Größe. Der Winkelbegriff steht zum Linien- und Flächenbegriff in einer sehr einfachen und wichtigen Beziehung. Der Linienwinkel von einem Punkte nach den Enden einer beliebigen Linie ist nämlich das, was man die scheinbare Größe der Linie, von jenem Punkte gesehen, nennt; und ebenso ist der Raumwinkel von einem Punkte nach dem Rande einer beliebigen Fläche die scheinbare Größe dieser Fläche, von jenem Punkte aus gesehen. Zu der wirklichen Größe steht die scheinbare in einfacher Beziehung; bedeutet nämlich dL ein Linienelement, dF ein Flächenelement (beide unendlich klein gedacht), r die Entfernung des Sehpunktes von dem Element, u den Winkel, den die Sehrichtung nach dem Element mit der auf ihm errichteten Normalen bildet — bei einer Linie ist diejenige Normale zu nehmen, die mit Sehrichtung und Element in einer Ebene liegt —, sind endlich l und f die scheinbaren Größen, so gelten die Formeln:

(1) $$l = \int \frac{dL}{r} \cos u \quad , \qquad f = \int \frac{dF}{r^2} \cos u \quad .$$

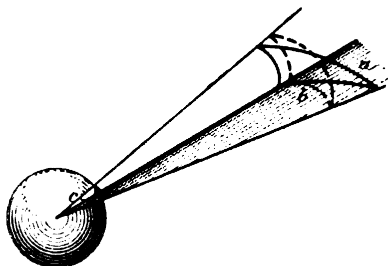
Linie wie Fläche darf dabei beliebig gekrümmt sein; indessen wird es darauf offenbar gar nicht ankommen, man wird vielmehr einfach diejenige Gerade bezw. Ebene an die Stelle setzen dürfen, welche mit den gegebenen Gebilden dieselben Endpunkte bezw. denselben Rand hat; nur hiervon hängt die scheinbare Größe ab. Eine Schwierigkeit entsteht in dem Falle, daß sich von dem Sehpunkte aus einzelne Teile der Linie oder Fläche überdecken; man muß alsdann der Normale einen bestimmten Richtungssinn beilegen; der cos wird dann für die eine der beiden sich überdeckenden Teile das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten wie für den anderen, so daß sich diese beiden Teile aufheben. — In den besonderen Fällen, daß r und u oder auch nur der Quotient $(\cos u)/r$ bei der Linie bezw. $(\cos u)/r^2$ bei Flächen für alle Elemente gleich groß ist, kann man die Integration ohne weiteres ausführen und erhält:

(2) $$l = \frac{\cos u}{r} L \quad , \qquad f = \frac{\cos u}{r^2} F \quad ;$$

die scheinbare Größe einer Linie ist dann einfach umgekehrt proportional der Entfernung vom Sehpunkte, die einer Fläche umgekehrt dem Quadrate dieser Entfernung, beide außerdem desto kleiner, je schiefer die Gebilde gegen die Sehrichtung liegen. Bei geraden Linien und ebenen Flächen wird die scheinbare Größe, falls der Punkt in der verlängerten Linie bezw. Ebene liegt, geradezu Null. In Figur 1 ist die scheinbare Größe einer Linie, in Figur 2 die einer



Figur 1.



Figur 2.

Fläche dargestellt; *a* ist das gegebene Gebilde, *b* seine Projektion senkrecht zur Sehrichtung, *c* die Projektion von *b* auf den Einheitskreis bezw. die Einheitskugel, d. h. die scheinbare Größe.

Raumwinkel und scheinbare Größe spielen in verschiedenen Gebieten der Physik eine wichtige Rolle, so namentlich in der Photometrie von Räumen, in der Lehre vom Magnetismus und Elektromagnetismus u. s. w.

Koordinaten. Zur Festlegung des Ortes im dreidimensionalen Raume sind drei Bestimmungsstücke erforderlich; sie heißen seine Koordinaten. Die drei Betsimmungsstücke müssen voneinander unabhängig und so beschaffen sein, daß sie den Ort eindeutig bestimmen. Je nach ihrer Wahl erhält man verschiedene Koordinatensysteme. Eine Fläche, deren sämtliche Punkte eine Koordinate gemeinsam haben, heißt eine Koordinatenfläche, eine Linie, deren sämtliche Punkte zwei Koordinaten gemeinsam haben, sich also nur durch die dritte unterscheiden, heißt eine Koordinatenlinie. Der ganze Raum wird von drei Scharen von Koordinatenflächen durchsetzt. Je nachdem diese Flächen ersten Grades — also Ebenen —, zweiten Grades u. s. w. sind, unterscheidet man ebene Koordinaten, Koordinaten zweiten Grades, gewöhnlich elliptische Koordinaten genannt u. s. w.; ferner, je nachdem sich die Flächen senkrecht oder schief schneiden, orthogonale oder anorthogonale, speziell für ebene Flächen rechtwinklige oder schiefwinklige Koordinaten; spezielle Varianten von Koordinaten zweiten Grades, bei denen eine oder zwei der bestimmenden Strecken in Winkel ausarten, sind die Zylinderkoordinaten und die sphärischen oder Polarkoordinaten. Bei den ebenen Systemen heißen die drei Geraden, für die je zwei Koordinaten null sind, Koordinatenachsen, ihr Schnittpunkt Anfangspunkt oder Nullpunkt. Vom Nullpunkte aus pflegt man die positive X-Achse nach rechts, die positive Y-Achse nach hinten zu legen, so daß beide zusammen die horizontale Ebene ergeben; die positive Z-Achse kann man dann entweder nach oben oder nach unten legen; man kann jene Kombination das gewöhnliche, diese das inverse Koordinatensystem nennen; zuweilen finden sich auch die Bezeichnungen als englisches (Weinranken-) bezw. französisches (Hopfenranken-) System. — Statt der bisher betrachteten Koordinaten führt man neuerdings häufig andere Größen $p_1, p_2, \ldots p_n$ ein, die den Ort irgendwie bestimmen und nennt sie allgemeine oder verallgemeinerte Koordinaten; sind ihrer mehr als drei, so müssen Beziehungen zwischen ihnen bestehen; sind ihrer nur zwei, so legen sie im Raume nur eine Linie und nur

auf der Fläche einen Punkt fest; ist nur eine gegeben, so wird im Raume nur eine Fläche, in der Fläche nur eine Linie und nur in der Linie ein Punkt durch sie fixiert. — In der Ebene heißt die X-Achse gewöhnlich Abszissenachse, die Y-Achse Ordinatenachse.

Der Ort hat hiernach eine lediglich relative Bedeutung, die Relation erfolgt zum Anfangspunkte — eventuell, bei Betrachtung mehrerer Punkte, zu einem von ihnen und erst von diesem zum Anfangspunkte. In diesem letzteren Sinne kann man also absolute und relative Koordinaten eines Punktsystems unterscheiden; an die Stelle der letzteren kann man auch die Konfigurationskoordinaten[1] setzen.

Im folgenden sind die wichtigsten Formeln für Koordinatensysteme und die Ausdrücke in ihnen zusammengestellt. Es sind dabei bezeichnet: rechtwinklige Koordinaten mit x, y, z, oder mit x', y', z'; schiefwinklige mit ξ, η, ζ, die Winkel zwischen ihren Ebenen mit α, β; Polarkoordinaten mit r (Radiusvektor), φ (Breite), ψ (Länge); Zylinderkoordinaten mit ϱ (Abstand von der Achse), z (Abstand von der Grundebene), Θ (Länge).

1. Formeln für den Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen (Koordinatentransformation):

a) von einem zu einem anderen rechtwinkligen:

$$(3)\quad \begin{cases} x' = a + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \quad , \\ y' = b + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \quad , \\ z' = c + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{cases}$$

(a, b, c Koordinaten des Nullpunktes des einen im anderen System, die α, β, γ die Cosinus der neun Winkel zwischen den Achsen des einen und denen des anderen Systems);

b) von rechtwinkligen zu Polarkoordinaten (φ Breite, z wird Polarachse, x die Nullachse der Längen):

$$(4)\quad x = r\cos\varphi\cos\psi \quad , \qquad y = r\cos\varphi\sin\psi \quad , \qquad z = r\sin\varphi \quad ;$$

umgekehrt

$$(5)\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \qquad \varphi = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad , \qquad \psi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad ;$$

c) von rechtwinkligen zu zylindrischen

$$(6)\quad x = \varrho\cos\Theta \quad , \qquad y = \varrho\sin\Theta \quad , \qquad z = z \quad ;$$

umgekehrt

$$(7)\quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \qquad \Theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad , \qquad z = z \quad ;$$

d) von rechtwinkligen zu elliptischen: den Koordinaten x, y, z entsprechen als elliptische die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der in λ kubischen Gleichung

$$(8)\quad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1 \quad .$$

2. Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkte:

$$(9)\quad \begin{cases} \text{rechtwinklig:} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \\ \text{schiefwinklig:} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha + z^2 - 2z\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha}\cos\beta} \quad , \\ \text{polar:} \quad r = r \quad , \qquad \text{zylindrisch:} \quad r = \sqrt{\varrho^2 + z^2} \quad . \end{cases}$$

[1] H. Hertz, Pr. d. Mech., p. 58.

3. Flächenelement in der xy-, bezw. $r\varphi$-Ebene:

$$(10)\quad \begin{cases} \text{rechtwinklig:}\quad df = dx\,dy \quad , \qquad \text{schiefwinklig:}\quad df = dx\,dy \sin\alpha \quad , \\ \text{polar:}\quad df = r\,dr\,d\varphi \quad . \end{cases}$$

4. Raumelement:

$$(11)\quad \begin{cases} \text{rechtwinklig:} & d\tau = dx\,dy\,dz \quad , \\ \text{schiefwinklig:} & d\tau = dx\,dy\,dz \sin\alpha \sin\beta \quad , \\ \text{polar:} & d\tau = r^2 \cos\varphi\, dr\, d\varphi\, d\psi \quad , \\ \text{zylindrisch:} & d\tau = \varrho\, d\varrho\, d\Theta\, dz \quad . \end{cases}$$

Polarkoordinaten einiger Orte auf der Erde.

h = Höhe (in m) über dem Meeresspiegel = $r - r_0$, φ = geographische Breite, ψ = geographische Länge von Greenwich (nördlich und östlich +, südlich und westlich —).

Ort	h	φ	ψ	Ort	h	φ	ψ
Aachen . . .	185	50° 47′	6° 5′	Königsberg . .	22	54° 43′	20° 30′
Amsterdam . .	4	52 23	4 53	Konstantinopel .	50	41 0	29 0
Athen	105	37 59	23 44	Kopenhagen . .	10	55 41	12 35
Basel	282	47 33	7 36	Krakau . . .	220	50 4	19 58
Berlin	37	52 30	13 23	Leipzig . . .	120	51 20	12 $23^1/_2$
Bern	572	46 57	7 26	Lissabon . . .	95	38 $42^1/_2$	− 9 11
Bonn	57	50 44	7 6	Madrid . . .	663	40 $24^1/_2$	− 3 41
Braunschweig .	72	52 16	10 32	Mailand . . .	130	45 28	9 $11^1/_2$
Bremen . . .	4	53 5	8 48	Marburg . . .	240	50 49	8 46
Breslau . . .	117	51 7	17 2	Melbourne . .	30	−37 50	144 59
Breteuil . . .	67	48 50	2 16	Montreal . . .	20	45 31	−73 33
Brocken . . .	1041	51 48	10 37	Moskau . . .	147	55 45	37 34
Brüssel . . .	19	50 51	4 22	München . . .	525	48 9	11 $36^1/_2$
Budapest . . .	153	47 30	19 2	Münster . . .	63	51 58	7 38
Cambridge . .	12	52 13	0 6	Neapel . . .	149	40 52	14 15
Cap d. g. Hoffn.	8	−33 56	18 29	New York . .	56	40 44	−73 59
Chicago . . .	183	41 54	−87 38	Nizza	340	43 43	7 18
Christiania . .	23	59 55	10 43	Oxford . . .	64	51 $45^1/_2$	− 1 16
Dresden . . .	115	51 2	13 44	Palermo . . .	72	38 7	13 21
Dublin . . .	16	53 23	− 6 20	Paris	64	48 50	2 20
Edinburgh . .	71	55 57	− 3 11	Potsdam . . .	32	52 23	13 4
Florenz . . .	70	43 47	11 15	Prag	188	50 5	14 25
Frankfurt . .	74	50 7	8 41	Rio de Janeiro .	64	−22 54	−43 10
Freiburg . . .	268	48 0	7 51	Rom	53	41 54	12 29
Genf	407	46 12	6 9	S. Franzisko .	18	37 47	−122 26
Gießen . . .	142	50 35	8 41	St. Louis . .	174	38 38	−90 12
Glasgow . . .	56	55 53	− 4 18	St. Petersburg .	11	59 50	30 18
Göttingen . .	146	51 32	9 57	Stockholm . .	20	59 $20^1/_2$	18 $3^1/_2$
Graz	392	47 5	15 27	Straßburg . .	143	48 35	7 46
Greenwich . .	47	51 29	0 0	Stuttgart . . .	249	48 47	9 11
Halle	108	51 30	11 58	Tiflis	487	41 41	44 51
Hamburg . . .	7	53 33	9 58	Tokio	10	35 36	139 42
Hannover . .	54	52 23	9 43	Triest	26	45 39	13 $45^1/_2$
Heidelberg . .	112	49 25	8 42	Tübingen . .	322	48 31	9 $2^1/_2$
Helsingfors . .	16	60 10	24 77	Turin	250	45 4	7 42
Hongkong . .	6	22 18	114 10	Upsala . . .	24	59 $51^1/_2$	17 $34^1/_2$
Jena	155	50 $56^1/_2$	11 37	Warschau . .	110	52 13	21 2
Innsbruck . .	592	47 16	11 24	Washington . .	35	38 54	−77 3
Kairo	29	30 5	31 17	Wien	150	48 $12^1/_2$	16 23
Karlsruhe . .	114	49 $^1/_2$	8 24	Würzburg . .	184	49 48	9 $58^1/_2$
Kiel	5	54 $20^1/_2$	10 9	Zürich . . .	470	47 23	8 33
Köln	55	50 57	6 58				

Die Frage, ob die Ortskoordinaten auf der Erde unveränderlich sind, ist von zusammengesetztem Charakter. Es können sich nämlich einerseits relative Veränderungen der Teile der Erdoberfläche gegeneinander geltend machen, und hierdurch kann sich jede der drei Koordinaten ändern; so die Höhe durch Hebungen und Senkungen, Länge und Breite durch Dehnungen und Zusammenziehungen; es sind zurzeit Untersuchungen derartiger Veränderungen in Angriff genommen worden, die aber naturgemäß erst nach längerer Zeit Ergebnisse liefern können. Andererseits kann sich eine der Koordinaten, nämlich die geographische Breite oder die ihr entsprechende, komplementäre Polhöhe auch auf der starren Erde ändern, indem sich nämlich die Drehungsachse des Erdkörpers ändert; auch hierüber sind Beobachtungen im Gange, und es ist auch zweifellos, daß Polhöheänderungen stattfinden; näheres ist aber noch nicht endgültig festgestellt. Die obigen abgerundeten Zahlen werden übrigens durch alle diese Einflüsse kaum berührt.

Zahlengrößen und Dimensionen. Es müssen hier einige allgemeinere Betrachtungen eingeschaltet werden, Feststellungen betreffend, die für die gesamte Physik von fundamentaler Bedeutung sind. Eine in der Physik vorkommende Größe kann zunächst eine reine Zahl sein; und zwar entweder an sich, wie insbesondere das, was man auch „Anzahl" nennt und wofür die Zahl der Planeten des Sonnensystems oder die Zahl von Kolbenzügen, die man bei einer Pumpe zu bestimmtem Zwecke tun muß, Beispiele liefern, oder eine reine Zahl infolge der getroffenen Festsetzung, wofür ein Winkel im Bogenmaß (d. h. relativ zum Radius) ein Beispiel ist. Die meisten physikalischen Größen aber sind nicht reine Zahlen, sie erfordern noch einen Zusatz, die Angabe einer Einheit, auf die sich die Zahlangabe bezieht, sowie des Charakters dieser Einheit, also des Charakters des durch die Größe repräsentierten Begriffs. Ist nun dieser Begriff ein Grundbegriff (p. 1), so ist nichts weiter zu sagen; ist es aber, wie das meist der Fall sein wird, ein reduzierbarer, abgeleiteter Begriff, so ist noch anzugeben, wie sich der Begriff durch die in ihm enthaltenen Grundbegriffe ausdrückt. Diese dem Zahlenwerte hinzuzufügende Angabe nennt man, unter Verallgemeinerung eines die Raumgrößen kennzeichnenden Begriffes (p. 3), die Dimension[1] des Begriffes. Eine vollständige Angabe muß hinter dem Zahlenwerte stets auch die Dimension enthalten. Um aber auch rein begriffliche Dimensionsformeln hinschreiben zu können, für die es auf spezielle Zahlenwerte nicht ankommt, bedient man sich häufig des Symbols der eckigen Klammern, in die man die dimensional zu definierende Größe einschließt.

Von den bisher behandelten Raumgrößen ist die Fläche offenbar dimensional das Quadrat, das Volumen der Kubus einer Länge, während die Winkel aller Arten reine Zahlen sind; in Formeln:

$$[W] = 1 \quad , \qquad [L] = L \quad , \qquad [F] = L^2 \quad , \qquad [V] = L^3 \tag{12}$$

(reine Zahlen sind, da es auf den Zahlenwert selbst nicht ankommt, mit Eins zu bezeichnen).

Geht man zu dem allgemeinen Falle über, daß man mehrere Grundgrößen, etwa die drei Größen L, M, N hat, aus denen sich alle übrigen ableiten lassen, so kann man jede Größe dimensional auf Potenzen — event. auch gebrochene — von L, M, N zurückführen, erhält also eine Formel von folgendem Typus:

$$[G] = L^a M^b N^c \quad . \tag{13}$$

Für eine bestimmte Zahlengröße, die den Zahlenwert g hat, ist diese Dimensionsformel zu der vollständigen Größenformel zu ergänzen:

$$G = g \cdot L^a M^b N^c \quad . \tag{14}$$

[1] In diesem Sinne ist der Ausdruck Dimension zuerst von FOURIER in seiner berühmten Théorie anal. de la chaleur (Paris 1822), Art. 160, angewandt worden; vgl. deutsche Ausgabe von B. WEINSTEIN, Berlin 1884, p. 96.

Für den Übergang von einer Einheit zu einer anderen ergibt sich hieraus die Regel, daß sich der Zahlenwert umgekehrt derjenigen Potenz der geänderten Einheit ändert, in der diese in der Dimensionsformel vorkommt. Geht man z. B. von Metern zu Zentimetern über, so wird der Zahlenwert einer Länge 100, der einer Fläche 10000, der eines Volumens 1000000 mal so groß.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Kenntnis der Dimension für das Rechnen mit physikalischen Größen. Addition und Subtraktion derselben haben nur dann einen Sinn, wenn die Größen dieselbe Dimension haben. In diesem Falle sind nur die Maßzahlen zu addieren.

Die Multiplikation zweier Größen vollzieht sich, indem man die Zahlenwerte multipliziert. Das Produkt hat aber eine andere Dimension wie die Faktoren. Ist:

(15) $$A = a[x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma] \quad , \qquad B = b[x^\delta \cdot y^\varepsilon \cdot z^\eta] \quad , \qquad C = A \cdot B \quad ,$$

und setzt man:

$$C = c[x^\mu \cdot y^\nu \cdot z^\varrho] \quad ,$$

so ist einerseits: $c = a \cdot b$, und andererseits:

(16) $$\mu = \alpha + \delta \quad , \qquad \nu = \beta + \varepsilon \quad , \qquad \varrho = \gamma + \eta \quad ,$$

oder nach früherer Bezeichnung:

(17) $$[C] = [A] \cdot [B] \quad .$$

Die Dimension des Produkts ist gleich dem Produkt der Dimensionen der Faktoren.

Hieraus läßt sich leicht der allgemeine Satz ableiten:

Alle einfachen Rechenoperationen, welche man mit den Größen vornimmt, sind auch mit den Dimensionen vorzunehmen, um die Dimension des Resultats zu erhalten. Man kann auch umgekehrt sagen: Rechenoperationen mit physikalischen Größen, welche auf verschiedene Einheiten bezogen sind, haben nur dann einen Sinn, wenn man nach Ausführung der Rechnung mit den Zahlenwerten die neue Einheit der resultierenden Zahl feststellt.

Skalar, Vektor, Tensor. Mit der Unterscheidung zwischen Zahlenwert und Dimension ist aber die Charakterisierung eines Begriffs im allgemeinen noch nicht erledigt. Größen, bei denen dies der Fall ist, nennt man Skalare[1], weil sie, bei einmal festgesetzter Einheit — und eventuell einem Ausgangspunkt — auf einer Skala von Zahlen ihren Platz haben; es gibt von solchen Größen stets nur eine mit gegebenem Zahlenwerte. Dahin gehören von allgemeinen Begriffen namentlich die Begriffe: Masse, Temperatur, Energie.

Den Skalaren gegenüber stehen die geometrischen Größen, die noch eine weitere Mannigfaltigkeit haben, nämlich ihre Orientierung im Raume. Man nannte diese Größen früher allgemein Vektoren, hat aber später eingesehen, daß hier noch wesentliche Unterscheidungen zu machen sind. Unter Vektoren[1] versteht

---

[1] Die Ausdrücke Skalar und Vektor sind in diesem Sinne zuerst von W. R. HAMILTON gebraucht worden in seinen Lectures on Quaternions, Cambr. 1853. p. 58 bezw. 15. Dieses Buch ist auch in einer deutschen Ausgabe von P. GLAN, Leipzig 1882—84, erschienen. Ein kleinerer Leitfaden über Quaternionen ist der von ISRAEL-HOLZWART. Vgl. auch A. MAC AULEY, Phil. Mag. (5) **33**. 477. 1892.

Wegen der Unterscheidung zwischen polaren und axialen Vektoren sowie über Tensoren vgl. W. VOIGT, Die fundamentalen Eigenschaften der Kristalle, Leipzig 1898, sowie P. CURIE, Journ. de Phys. (3) **3**. 393. 1894.

Von der Literatur über Vektorrechnung sei angeführt: J. W. GIBBS, Elements of Vector-Analysis, Newhaven 1881—1884. ELIE, Mém. de Bord. (4) **3**. 1. 1893. A. FÖPPL, Einführung in die MAXWELLsche Theorie (Einleitung), Leipzig 1894; Geometrie der Wirbelfelder, Leipzig 1897. M. ABRAHAM, Geometrische Grundbegriffe, in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften **4**. 2. Teil. p. 1. 1901 (von demselben Autor die Neuauflage der FÖPPLschen Elektrizitätslehre). A. H. BUCHERER, Elemente der Vektoranalysis, mit Beispielen aus der theoretischen Physik. Leipzig 1903.

man demgemäß gegenwärtig nur solche Richtungsgrößen, die durch eine einseitige Richtung charakterisiert sind. Das einfachste anschauliche Bild eines Vektors ist also eine Strecke, die von einem festen Punkte, etwa dem Koordinatenanfangspunkte, aus nur in einer Richtung sich erstreckt. Aber auch in dem Vektorbegriff steckt noch zweierlei wesentlich verschiedenes. Das ist das Verhalten bei einer sogen. Inversion des Koordinatensystems, d. h. bei einer Umkehrung aller drei Richtungen desselben, wobei es, wie man leicht einsieht, nicht bloß in eine neue Lage kommt, sondern wesensverschieden, nämlich spiegelbildlich (s. w. u.) wird und durch keine Drehung wieder mit dem ursprünglichen identifiziert werden kann. Bei einer solchen Inversion nun kann eine Größe entweder ihr Vorzeichen wechseln oder unverändert bleiben; jene Vektoren nennt man polare, diese axiale Vektoren. Eine andere Unterscheidung besteht darin, daß zwar jeder Vektor eine unendlichzählige Symmetrieachse (s. w. u.) darstellt, daß aber außerdem durch einen polaren Vektor unendlich viele Symmetrieebenen gehen, während es bei einem axialen Vektor eine zur Achse senkrechte Symmetrieebene gibt. Das geometrische Bild eines polaren Vektors ist die schon genannte Linie, das eines axialen ist das Produkt zweier Linien, also etwa ein Parallelogramm; letzteres kann man bekanntlich durch eine auf seiner Ebene senkrechte, an Länge seinem Flächeninhalt gleiche Strecke ersetzen — aber diese Repräsentanz hört bei der Inversion des Koordinatensystems auf, da hier die Strecke ihr Zeichen umkehrt, das Parallelogramm aber ungeändert bleibt. Als mechanischen Vertreter des polaren Vektors kann man die Verschiebung längs der gedachten Linie ansehen; für den axialen Vektor dagegen ist typisch eine Drehung um diese Linie an Achse — weshalb für einen axialen Vektor auch der Name „Rotor" vorgeschlagen worden ist.

Endlich gibt es drittens Größen mit doppelseitigem Richtungssinn, bei denen also die beiden Seiten der Richtung einander gleichwertig sind. Eine solche Größe, deren geometrisches Bild eine vom Anfangspunkte nach beiden Seiten sich gleich weit erstreckende Linie ist, nennt man einen Tensor[1] (früher auch Bivektor). Der einfachste physikalische Vertreter eines Tensors ist die Spannung eines Fadens oder eines Stabes; dabei ist zu beachten, daß hier Zeichenwechsel keinen Richtungswechsel bedeutet, also etwas anderes bedeuten muß: offenbar ergibt er den Gegensatz zwischen Zug- und Druckspannung.

Mit Skalaren kann man ohne weiteres rechnen wie mit Zahlen; man vergleiche das über die Behandlung der Dimensionen dabei bereits Gesagte. Dagegen lassen sich auf Vektoren und Tensoren die gewöhnlichen Rechenoperationen nicht anwenden. Man muß vielmehr für sie neue Rechnungsweisen einführen, wie das in der Quaternionentheorie und in der Vektoranalysis geschehen ist; oder man muß jede Größe auf Skalare zurückführen, mit diesen die Rechnungen erledigen und am Schluß die Vektoren oder Tensoren wieder aufbauen. Ein Vektor wird dabei, wie sich schon aus seinem Bilde, einer Strecke, ergibt, in drei Komponenten, bildlich die Projektionen jener Strecke auf die drei Koordinatenachsen, zerlegt; diese Komponenten haben zwar noch Richtungen, aber, worauf es hier allein ankommt, keine Mannigfaltigkeit der Richtung mehr, so daß man mit ihnen wie mit Skalaren rechnen kann. Für polare Vektoren P gelten dabei dieselben Transformationsformeln wie für Strecken (s. oben p. 13); es ist also, wenn P_x, P_y, P_z die Komponenten in einem, P_x', P_y', P_z' die in einem anderen, gegen das erste verdrehten System sind:

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} P_x' &= \alpha_{11} P_x + \alpha_{12} P_y + \alpha_{13} P_z \\ P_y' &= \alpha_{21} P_x + \alpha_{22} P_y + \alpha_{23} P_z \\ P_z' &= \alpha_{31} P_x + \alpha_{32} P_y + \alpha_{33} P_z \end{aligned}\right\} \quad P\left\{\begin{aligned} &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \\ &= \sqrt{P_x'^2 + P_y'^2 + P_z'^2} \end{aligned}\right. .$$

[1] Vgl. Anm. 1 auf voriger Seite.

Während also die P_x u. s. w. vom Koordinatensystem abhängen, ist P selbst davon unabhängig. — Auch der axiale Vektor A zerfällt in drei Komponenten A_x, A_y, A_z, und diese kann man wieder durch die Komponenten zweier polarer Vektoren P, Q in folgender Weise ausdrücken:

$$(19)\qquad A_x = P_y Q_z - P_z Q_y \quad , \qquad A_y = P_z Q_x - P_x Q_z \quad , \qquad A_z = P_x Q_y - P_y Q_x \quad ;$$

diese Komponenten stellen eben die Projektionen des aus P und Q gebildeten Parallelogramms auf die Koordinatenebenen dar. Die beiden in der Physik wichtigsten Vektorausdrücke sind die Divergenz[1] und der Quirl[2], abgekürzt div und qu; es ist nämlich

$$(20)\qquad \operatorname{div} P = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \quad ,$$

und es sind die Komponenten eines Quirles

$$(21)\qquad \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \quad , \qquad \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \quad , \qquad \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \quad .$$

Statt Divergenz sagte man früher, indem man statt der positiven die negativen Differentialquotienten, also die Gefälle, benutzte, Konvergenz[3]; statt Quirl sagt man auch, in Übereinstimmung mit englischen Autoren, curl[4], auch Rotor[5] oder Vortex[6] ist vorgeschlagen, weil nämlich die Quirlkomponenten eines polaren Vektors die Komponenten eines axialen Vektors (Rotors, Wirbels) sind. Schwieriger wird die Zerlegung bei den Tensoren. Man könnte annehmen, daß auch hier drei Komponenten ausreichen; eine nähere Betrachtung zeigt aber, daß deren sechs notwendig sind, wenigstens in dem allgemeinen Falle, wo es sich um drei zueinander senkrechte Spannungen, um ein sogen. Tensortripel, handelt; es kann hierauf nicht näher eingegangen werden, ebensowenig auf die Rechnungsregeln mit Vektoren und Tensoren, worüber man die einschlägige Literatur zu Rate ziehen muß.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß infolge des verschiedenen Richtungscharakters Dimensionsformeln identisch sein können, ohne daß doch die dargestellten Größen von gleichem Charakter sind — ein Verhältnis, das etwa vergleichbar mit den Verhältnissen bei empirischen und Strukturformeln in der Chemie ist. Ein Beispiel bieten die Begriffe „Arbeit einer Kraft“ und „Moment eines Kräftepaares“ dar, die dimensional übereinstimmen, sich aber durch den Richtungscharakter der darin vorkommenden Strecken unterscheiden. Man vergleiche hierüber u. a. eine Abhandlung von WILLIAMS.[7]

Gestalt. Wenn schon das einfachste Raumgebilde, die gerade Linie, außer ihrer Länge noch ein weiteres Merkmal, ihre Richtung, hat, so wird man erwarten dürfen, daß bei komplizierteren Gebilden, also bei krummen Linien, sowie bei Flächen und Körpern, die alleinige Angabe eines Zahlenwertes mit einer Dimension den Begriff noch viel unvollständiger charakterisieren wird. Das, was zur Charakterisierung noch fehlt, kann man ganz allgemein als Gestalt bezeichnen. Gestalt ist somit die Gesamtheit aller Zuordnungen von Strecken und Richtungen bei einem Raumgebilde. Der mathematische Ausdruck dieser Zugehörigkeit ist bei einer ebenen Kurve eine Gleichung zwischen den x und y, bei einer Raumkurve ein System zweier solcher Gleichungen, bei einer Fläche eine Gleichung zwischen den x, y, z; bei einem Körper endlich die Gleichung der ihn begrenzenden Fläche, mit dem Zusatz, daß auch alle zwischen die extremen Werte

---

[1] W. K. CLIFFORD, Elements of dynamics p. 209. — [2] E. WIECHERT, WIED. Ann. **59.** 288. 1896; Grundlagen der Elektrodynamik 1899. — [3] J. C. MAXWELL, Lond. Math. Soc. **3.** 224. 1871; Papers **2.** 257. — [4] J. C. MAXWELL, ibid. — [5] H. A. LORENTZ, Vers. e. Th. d. Elektr. u. s. w. 1895. — [6] W. VOIGT, Gött. Nachr. 1900. Heft 2. p. 14. — [7] W. WILLIAMS, Phil. Mag. (5) **34.** 234. 1892.

der Variablen hineinfallenden Werte mit zu dem Gebilde gehören. Je nach der Natur dieser Gleichungen unterscheidet man Kurven und Flächen ersten, zweiten Grades u. s. w. bis zu transzendenten Kurven und Flächen. Zahlreiche dieser Gebilde spielen in der Physik eine wichtige Rolle: unter den Kurven namentlich die Gerade, die Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel), die trigonometrischen Kurven (Sinus-, Kosinus-, Tangenslinie), die Exponentialkurve, besonders die mit negativem Exponenten, die Rollkurven (Zykloide, Trochoide, Kardioide u. s. w.), die Spiralen und die Schraubenlinien, die Kettenlinie, die Lemniskate u. a. m.; unter den Flächen die Ebene, die Flächen zweiten Grades (Kugel, Zylinder, Kegel, Ellipsoid, Paraboloid, ein- und zweischaliges Hyperboloid) u. a. m. Unter den Körpern gibt es erstens solche, deren Oberfläche eine einzige geschlossene Fläche ist (Kugel, Ellipsoid u. s. w.); zweitens solche, deren Oberfläche aus mehreren zusammenstoßenden Flächen besteht, die entweder eben (Polyeder) oder krumm (Linsen u. s. w.) sind; drittens solche, deren Oberfläche aus mehreren getrennten Flächen besteht (Hohlkugel u. s. w.). Spezielle Fälle von Körpern sind solche, bei denen eine oder gar zwei Dimensionen relativ nur schwach ausgebildet sind; jene nennt man Lamellen, Platten, Scheiben oder Schalen, diese Fäden, Stäbe, Drähte, Saiten.

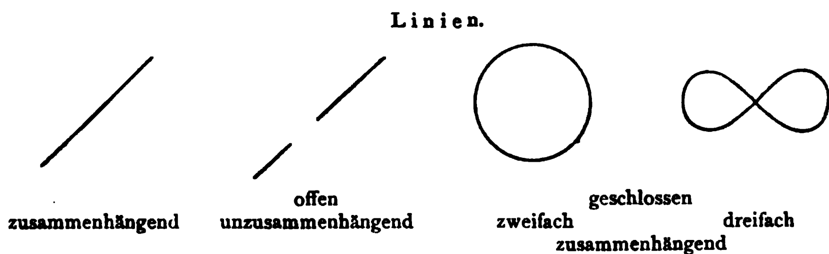
Zusammenhang. Eine für die physikalische Anwendung besonders wichtige Unterscheidung ist die zwischen zusammenhängenden und unzusammenhängenden Gebilden; das Entscheidende dafür ist, ob man von irgend einem Punkte des betreffenden Gebietes zu irgend einem anderen gelangen kann, ohne das Gebiet zu verlassen. Dabei ist zu beachten, daß der Weg, auf dem das geschieht, auch durch die Unendlichkeit gehen darf; so ist z. B. nicht bloß die Ellipse, sondern auch die Hyperbel, und nicht bloß die Sinuslinie, sondern auch die Tangenslinie eine zusammenhängende Linie; und nicht bloß das Ellipsoid und das einschalige, sondern auch das zweischalige Hyperboloid eine zusammenhängende Fläche. Ein unzusammenhängendes Gebilde unterscheidet sich von mehreren Gebilden durch den zwar nicht räumlichen, aber sonst irgendwie bestehenden Zusammenhang; man kann z. B. das System Erde–Mond als einen aus zwei getrennten Teilen bestehenden Körper betrachten, und bei einem in Tropfen aufgelösten Flüssigkeitsstrahl sind es sogar sehr viele Teile.

Eine zusammenhängende Linie kann offen oder geschlossen sein, je nachdem sie Endpunkte hat oder nicht; auch kann sie aus geschlossenen und offenen Stücken oder Zweigen bestehen. Ebenso kann eine Fläche offen oder geschlossen sein; ersteres ist sie, falls in ihr Linien irgendwo aufhören. Ein Volumen oder Körper ist immer geschlossen. Eine Fläche oder ein Körper können außer ihrer äußeren auch innere Begrenzungen haben; und zwar ist bei zusammenhängenden Gebilden die Anzahl der äußeren Begrenzungen stets eins, die der inneren beliebig. Ferner können die verschiedenen Grenzflächen von Körpern miteinander verkettet oder frei sein.[1]

Der Zusammenhang eines Gebildes kann von verschiedenem Grade sein. Ein Gebilde ist einfach zusammenhängend, wenn es durch einen beliebigen Schnitt zum Zerfallen gebracht wird; zweifach zusammenhängend, wenn es Schnitte gibt, nach deren Ausführung es immer noch einfach zusammenhängend bleibt u. s. w. Mit diesem Unterschied ist ein weiterer zwingend verknüpft, den man aber für Linien anders fassen muß als für Flächen und Körper. Bei Linien kann man ihn so aussprechen: Bei einer einfach zusammenhängenden Linie kann man von einem ihrer Punkte zu einem anderen nur auf einem Wege gelangen, bei einer zweifach zusammenhängenden auf zwei verschiedenen u. s. w. Bei Flächen und Körpern gibt es zwischen zwei Punkten unendlich viele Wege;

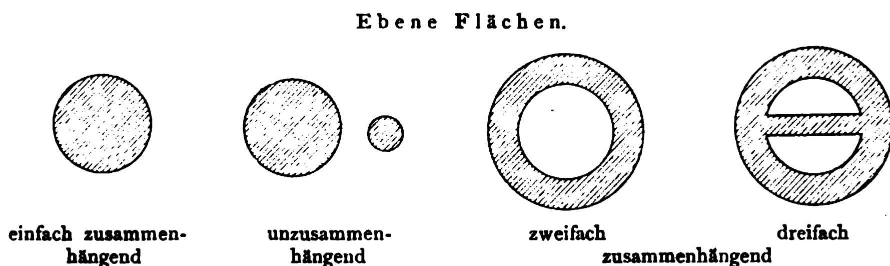
[1] Eine sehr übersichtliche Darstellung dieser und der folgenden Verhältnisse findet man bei C. E. Cullis, Inaug.-Diss. Jena 1896.

Linien.



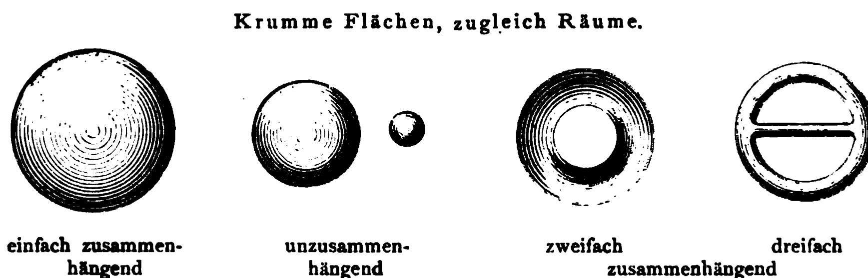
Figur 3.

Ebene Flächen.



Figur 4.

Krumme Flächen, zugleich Räume.



Figur 5.

Krumme Flächen.



Figur 6.

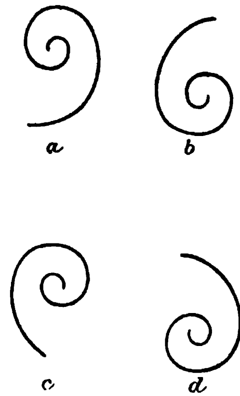


Figur 7.

unter ihnen sind aber solche, die sich allmählich ineinander überführen lassen und solche, bei denen das nicht der Fall ist. Bei einem einfach zusammenhängenden Flächen- oder Raumgebilde gibt es nun lediglich ineinander überführbare Wege, bei zweifach zusammenhängenden gibt es zwei Scharen solcher Wege, derart, daß ein Weg der einen Schar in einen der anderen nicht übergeführt werden kann u. s. w. — Beispiele: Eine gerade oder eine Halbkreislinie ist einfach, jede unverzweigte, geschlossene und jede geschlossene Linie mit offenen Verzweigungen ist zweifach zusammenhängend, also z. B. eine Kreislinie oder eine Kreislinie mit einem Radius; dagegen ist eine Kreislinie mit einem Durchmesser dreifach zusammenhängend. Eine Halbkugelfläche, aber auch eine volle Kugelfläche ist einfach, dagegen ein Kreisring zweifach und ein Kreisring mit einem Brückenstreifen dreifach zusammenhängend. Von Körpern endlich ist eine Kugel, aber auch eine Hohlkugel einfach, dagegen ein Ring zweifach und ein Ring mit einem Brückenstab dreifach zusammenhängend. Bei krummen Flächen kommt dann noch der Unterschied zwischen offenen und geschlossenen, bei krummen Flächen, sowie bei Körpern, noch der zwischen Trennung und Verkettung hinzu. In den Figuren 3 bis 7 sind diese Mannigfaltigkeiten durch Beispiele veranschaulicht.

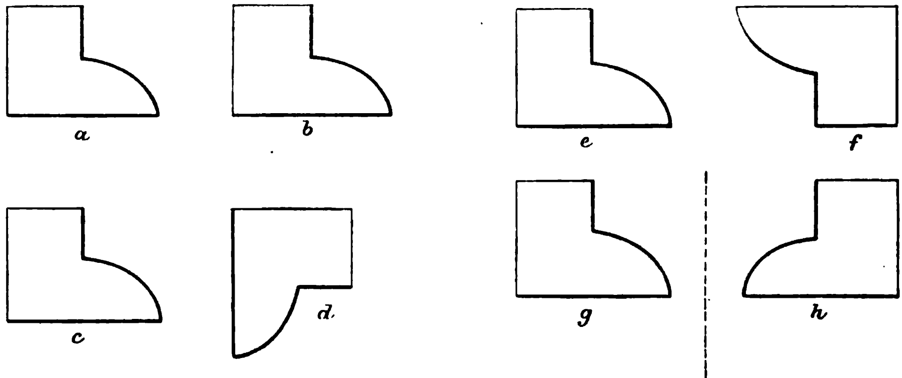
Es gibt eine ganze Anzahl von physikalischen Erscheinungen, für deren Verlauf und Charakter es sehr wesentlich ist, ob der Raum, in dem sie sich abspielen, einfach oder mehrfach zusammenhängend ist; es sei besonders auf die hydrodynamischen und auf die elektromagnetischen Erscheinungen hingewiesen.

Kongruenz und Spiegelbildlichkeit. Zwei räumliche Gebilde können sich, nach dem früher Gesagten, durch zweierlei unterscheiden: durch die Größe und durch die Gestalt; sie können sich nur in einer von beiden Hinsichten unterscheiden, in der anderen aber übereinstimmen; sie können endlich in beiden Hinsichten übereinstimmen. Zwei Gebilde, die gleiche Größe und Gestalt haben, heißen kongruent; sie können nämlich miteinander zur Deckung gebracht werden, entweder, wenn sie nämlich gleiche Lage im Raume haben, durch bloße Verschiebung des einen von ihnen, oder, wenn sie verschieden orientiert sind, durch Verschiebung und Drehung. Dabei ist indessen, je nach der Natur des Gebildes, noch ein ganz wesentlicher Unterschied zu machen. Betrachten wir zunächst ebene Gebilde, also ebene Kurven oder ebene Flächen, so sind zwei Fälle möglich: entweder die Deckung kann durch Drehung in der Ebene vollzogen werden, oder es muß dazu die dritte Dimension zu Hilfe genommen werden; als Beispiel kann die Spirale dienen: die beiden Rechtsspiralen, Figur 8 *a* und *b* (d. h. Spiralen, deren Verlauf von innen nach außen dem Uhrzeigersinne entspricht), können durch Drehung in der Papierebene gedeckt werden, ebenso die beiden Linksspiralen *c* und *d*; dagegen kann *a* mit *c* oder *b* mit *d* nur durch eine Drehung im Raume gedeckt werden. Im ersten Falle nennt man die Gebilde kongruent im engeren Sinne, im letzteren spiegelbildlich-kongruent oder enantiomorph. Ganz entsprechend bei ebenen Flächen: in Figur 9 sind *a* und *b* kongruent und gleich orientiert; *c* und *d*, *e* und *f* sind kongruent; dagegen sind *g* und *h* enantiomorph und können nur durch Drehung um die gestrichelte Linie zur Deckung gebracht werden. — Gehen wir jetzt zu räumlichen Gebilden, seien es nun Kurven, Flächen oder Körper, über, so ergibt schon die Methode der höheren Analogie, daß der obige Gegensatz hier viel schärfer werden wird, einfach aus dem Grunde, weil man hier der Drehung im dreidimensionalen Raume eine solche im vierdimensionalen Raume nicht gegenüber stellen kann,



Figur 8.

und weil — rein gedanklich —, nur diese letztere bei enantiomorphen Gebilden die Deckung erzwingen könnte. Bei Raumgebilden stehen sich also Kongruenz und Enantiomorphie schroff gegenüber. Beispiele bieten für Kurven die Schraubenlinie, für Flächen die Schraubenfläche; sie können rechts- oder linksgewunden sein, und sind dann nicht ineinander überführbar; für Flächen liefert auch der als unendlich dünn gedachte Handschuh, rechter und linker, ein anschauliches Beispiel. Für Körper wird man zunächst an die Hände oder Füße denken; das mannigfachste Beispiel aber bieten die Kristallformen dar, von denen es teils symmetrische,



Figur 9.

teils solche gibt, die entweder kongruent oder aber enantiomorph sind; im übrigen kann auf die Gestalten der Kristalle erst bei der Betrachtung der Materie eingegangen werden, weil hier außer rein geometrischen auch physische Verhältnisse in Betracht kommen. Schließlich ist darauf aufmerksam zu machen, daß auch bei räumlichen Gebilden noch ein weiterer Unterschied besteht. Enantiomorphe Raumkurven oder Raumflächen lassen sich doch durch ein bestimmtes Verfahren zur Deckung bringen, nämlich durch Umbiegung oder Umstülpung (wobei z. B. aus dem rechten ein linker Handschuh wird); bei den Körpern ist auch dieses Mittel naturgemäß ausgeschlossen.

Ähnlichkeit in großen und kleinen Teilen; Winkel- und Flächentreue. Zwei Gebilde, die verschiedene Größe, aber gleiche Gestalt haben, heißen ähnlich; das Charakteristische ist, daß alle Winkel in beiden Gebilden einander beziehungsweise gleich sind; ein weiteres, daß alle Elemente — Kurvenstücke, Flächenelemente, Volumenelemente — in gleichem Maße verkleinert oder vergrößert sind. Man nennt das den Abbildungsmaßstab oder das Ähnlichkeitsverhältnis; der spezielle Fall, wo es eins ist, ist die Kongruenz.

Wenn hiernach Ähnlichkeit zwei Merkmale hat, Winkeltreue und Größentreue, so folgt, daß es zwei neue Beziehungen zwischen Gebilden geben wird, die einen entfernteren Verwandtschaftsgrad darstellen werden. Die eine von ihnen ist die Winkeltreue oder in den kleinsten Teilen ähnliche Beziehung, bei der der Maßstab freilich von Stelle zu Stelle wechselt, wenn auch in stetiger Weise. Die andere ist die größentreue Beziehung, bei der die Winkel und damit die Gestaltseinzelheiten freilich verschieden sind. Eine besonders wichtige Rolle spielen diese Fragen bei der Abbildung von Flächen, sei es, daß man bestimmten Anlaß hat, die kongruente oder endlich-ähnliche Abbildung zu verschmähen, sei es, daß, wie bei der Abbildung von Gebilden, die sich auf der Kugelfläche befinden, in solche in der Ebene, die endlich-ähnliche Abbildung überhaupt unmöglich ist und nur die Wahl zwischen der winkeltreuen oder der flächentreuen Abbildung bleibt (Kartographie).

B. Die Zeit.

Zeitvorstellung. Das Raumbild, das uns die Sinne vorführen, erfährt fortwährend Veränderungen, auch wenn wir selbst unseren Ort im Raume nicht ändern; schon dies drängt uns die Zeitidee auf. Wir können aber weitergehen und von allen äußeren Eindrücken absehen; wir können uns etwa in ein absolut dunkles, lautloses und auch auf die übrigen Sinne nicht wirkendes Zimmer begeben, wir können uns selbst so regungslos verhalten, daß auch von dem eigenen Körper keine Empfindungen uns zum Bewußtsein kommen. Was alsdann immer noch übrig bleibt, sind unsere Gedanken. Hier liegt also die letzte Wurzel der Vorstellung, die wir Zeit nennen, und die wir nicht loswerden können, außer im traumlosen Schlafe. Deshalb nennt KANT die Zeit, im Gegensatz zum Raume als der äußeren, die innere Anschauungsform. Sie ist insofern von wesentlich einfacherer Natur als der Raum, als sie nur eine einzige Mannigfaltigkeit, bildlich gesprochen, nur eine einzige Dimension hat; sie ist also bei Übertragung äußerer Formen auf innere mit einer Linie zu vergleichen, und man würde exakter sein, wenn man, statt von Zeiträumen, von Zeitstrecken spräche.

Zu der Raumstrecke können wir nunmehr die **Zeitstrecke** als zweite Fundamentalgröße fügen. Es fragt sich nur, ob diese beiden Begriffe wirklich durchaus irreduzibel sind oder ob es vielleicht in irgend einem Sinne möglich ist, den Zeitbegriff mit dem Raumbegriff in Beziehung zu setzen. Zur Beantwortung dieser Frage ist wieder die Methode der niederen und höheren Analogie vortrefflich geeignet. Denken wir uns wieder eine zweidimensionale Welt, etwa eine Ebene, und in ihr intelligente Wesen, für die es nichts als diese Ebene gibt; für uns soll sich diese Ebene durch den dreidimensionalen Raum hindurchbewegen — oder dieser Raum durch jene Ebene hindurch, was einerlei ist — für die zweidimensionalen Wesen existiert diese Bewegung nicht. Kreuzt nun die Ebene eine gegen sie schräge Linie, so sehen die Wesen einen Punkt nacheinander in verschiedenen Lagen, während es sich für uns nicht um ein Nacheinander, sondern um ein Nebeneinander handelt; stößt die Ebene auf die Spitze eines Dreiecks, so sehen sie eine Linie mit der Zeit wachsen, während wir in dem Dreieck gleichzeitig verschieden lange Linien nebeneinander sehen u. s. w. Kurz: was für uns die dritte Dimension, ist für die zweidimensionalen Wesen Zeit. Wenden wir nun die höhere Analogie an, so können wir uns, freilich nur begrifflich, nicht anschaulich, vorstellen, daß das, was wir als zeitliche Erscheinungen betrachten, von einem höheren Standpunkte aus die Mannigfaltigkeit einer vierten Dimension ist, durch die sich unser dreidimensionaler Raum hindurchbewegt.

In formaler Hinsicht kann man also jedenfalls soviel sagen: zu den drei Koordinaten eines Ortes x, y, z gesellt sich als vierte völlig gleichwertige Größe der Zeitpunkt t; die Größen x, y, z, t sind die vier Mannigfaltigkeiten unserer Anschauung. Man kann sogar noch einen Schritt weiter gehen und fragen, ob nicht die Möglichkeit vorliegt, t durch die Raumgrößen auszudrücken; das wird in der Tat der Fall sein, wenn es gelingt, Gleichungen aufzustellen, in denen sowohl t als x, y, z und sonst nur Größen vorkommen, die sich empirisch feststellen lassen; eine solche Gleichung ist z. B. das WEBERsche elektrodynamische Gesetz.

Zeitmaß. Wenn die Zeit vom Charakter einer inneren Vorstellung ist, so wird man, um ein Maß für sie zu gewinnen, sich zunächst an den inneren Sinn, den man in diesem Zusammenhange geradezu als Zeitsinn bezeichnen kann, halten. Es zeigt sich aber, daß dieser Sinn uns für exakte Zwecke völlig im Stiche läßt. Das Ergebnis von Versuchen, Zeiten zu schätzen, ist schon in dem einfachsten Falle, wo es sich nur darum handelt, die Gleichheit zweier Zeitstrecken anzugeben, äußerst unregelmäßig und fehlerhaft; es machen sich die verschiedensten

Einflüsse geltend: subjektiver Zustand des Schätzenden, Unterschied zwischen leerer und erfüllter (d. h. an Vorgängen armer oder reicher) Zeit; ganz besonders aber das, was man zeitliche Perspektive nennen kann, d. h. zwei Zeitstrecken werden bei gleicher Länge sehr verschieden geschätzt, je nachdem sie soeben vergangen oder weit zurückliegend sind — ein Übel, das sich bei dem entsprechenden Raumproblem dadurch beseitigen läßt, daß man mit dem Maßstabe in der Zeit an die zu messende Stelle des Raumes wandert, wofür es hier kein Analogon gibt. Der Versuch, ein inneres Maß zu finden, muß also aufgegeben werden.

Erddrehung; Tag. Es bleibt somit nichts übrig, als sich an äußeres Geschehen im Raume zu halten und zuzusehen, ob es Erscheinungen gibt, von denen man Ursache hat, anzunehmen, daß sie sich immer in gleichen Zeitabschnitten in gleicher Weise wiederholen, d. h. periodische Bewegungen von absoluter Konstanz. Daß es solche Erscheinungen nicht geben kann, folgt aber aus der Grundanschauung, wonach alles im Flusse ist, einem fortwährenden Wechsel unterworfen ist. Man wird sich also schon aus dieser allgemeinen Erwägung heraus bescheiden müssen, auf absolute Exaktheit zu verzichten; und die Spezialuntersuchung bestätigt das.

Eine Bewegung, die den zu stellenden Anforderungen jedenfalls noch am besten entsprechen wird, ist die Achsendrehung der Erde; ihre Periode, als Zeitmaß hingestellt, ist der Tag. Ist die Tageslänge nun wirklich unveränderlich, ist sie nach Jahrmillionen noch ebenso groß wie vorher? Diese Frage läßt sich theoretisch und empirisch studieren. Was die Theorie betrifft, so weist sie eine ganze Anzahl von Einflüssen nach, die auf die Tageslänge einwirken müssen, und von denen hier genannt seien: die Vermehrung der Erdmasse durch die auf sie stürzenden Meteoriten, die Flutreibung der Ozeane an der festen Erdoberfläche und die Kontraktion des Erdkörpers infolge seiner Abkühlung; die beiden ersten Einflüsse werden offenbar die Tageslänge vergrößern, die dritte wird sie verkleinern, sie kommt aber gegenüber den beiden ersten nicht in Betracht, und es muß folglich geschlossen werden, daß die Erddrehung sich immer mehr verlangsamt. Man kann sogar gewisse Extreme dieser Änderung wenigstens ihrer Größenordnung nach angeben: zur Zeit, als sich, wie man annimmt, der Mond von der Erde losriß, hat, nach einer der Hydrodynamik entlehnten Betrachtung von G. H. DARWIN (s. u.), die Periode der Erddrehung nur etwa vier Stunden betragen, und andererseits wird in einer sehr fernen Zukunft, wenn einmal nicht bloß der Mond der Erde — das ist schon jetzt der Fall —, sondern auch die Erde dem Monde immer dieselbe Seite zukehren wird, wenn also Tag und Monat gleiche Zeiten sein werden, diese Periode etwa 48 jetzige Tage ausmachen.

Will man nun von diesen kolossalen Zeiträumen zu solchen übergehen, wie sie etwa der beglaubigten Geschichte der Menschheit entsprechen, so hat man folgendes zu beachten. Nehmen wir an, ein Tag sei um u Sekunden länger als der vorhergegangene, so ist der letzte Tag eines Jahres um rund $360 \cdot u$ länger als der erste, der mittelste Tag des Jahres um $180\,u$ länger als der erste; die Zeitverschiebung, die dieses Jahr bewirkt, beträgt also $180 \cdot 360 \cdot u$ sec, oder allgemein nach n Tagen hat sich die Zeitrechnung um $\frac{1}{2} n^2 \cdot u$ sec verschoben. Mit anderen Worten: die Zeitverschiebung wächst mit fortschreitender Zeit in quadratischem Verhältnis. Ist z. B. ein Tag um 0,0000001 sec länger als der vorige, so macht das in einem Jahre schon $180 \cdot 360$ mal so viel, d. h. 0,0065 sec, in einem Jahrhundert schon 65 sec, also über 1 Minute, und in 2500 Jahren, was etwa der geschichtlichen Zeit entspricht, schon $10\frac{1}{2}$ Stunden aus. Man ersieht hieraus, daß die Zeitverschiebung in langen Zeiträumen sehr groß und doch von Tag zu Tag über alle Vorstellung klein sein kann.

Wenn nun die Erde in ihrer Drehung zurückbleibt, so wird sich uns das dadurch zu erkennen geben, daß die Gestirne scheinbar voraneilen werden, und

daß Unstimmigkeiten zwischen beobachteten und berechneten Momenten von Finsternissen zutage treten werden. Um das letztere zuerst zu erledigen, so kann man, was z. B. altchinesische und chaldäische Finsternisbeobachtungen betrifft, nicht Genauigkeit auf Minuten verlangen, wohl aber müßten, wenn es sich um Stunden handelt, Widersprüche auftreten, und das ist nirgends der Fall. Dagegen zeigt der Mond allerdings eine Voraneilung gegenüber seinem berechneten Orte, und zwar um 12″; davon lassen sich etwa 6″ durch die Änderungen der Exzentrizität der Erdbahn erklären; die übrigen 6″ wird man, da sich andere Erklärungen nicht finden, als ein Zurückbleiben der Erde ansehen dürfen, und die Rechnung ergibt, daß hierzu eine Verschiebung um 22 sec im Jahrhundert ausreicht, also ein Betrag, der nur $^1/_3$ des vorhin angenommenen ausmacht und somit durch die Finsternisübereinstimmung nicht geradezu widerlegt wird. Immerhin bleibt die ganze Angelegenheit noch mit großer Unsicherheit behaftet. Jedenfalls darf man für alle, auch die feinsten wissenschaftlichen und praktischen Zwecke, deren Verfolgung sich nicht gerade über Jahrhunderte erstreckt, den Tag als konstant und als Norm für die Zeitrechnung betrachten.[1]

Sterntag und Sonnentag. Es ist nunmehr erforderlich, den Begriff des Tages noch näher zu präzisieren. Rechnet man von dem Durchgang eines Fixsternes durch den Meridian des Beobachtungsortes bis zum nächsten Durchgang, so erhält man den Sterntag; um auch einen bestimmten Anfangspunkt zu haben, rechnet man von dem Durchgange des Frühlingspunktes durch den Meridian aus. Rechnet man dagegen von einer oberen Kulmination der Sonne zur nächsten, d. h. von Mittag zu Mittag, so erhält man den Sonnentag. Zwischen beiden besteht, wegen des während eines Tages erfolgenden Fortschreitens der Erde auf ihrer Bahn, also wegen des scheinbaren Zurückbleibens der Sonne eine Differenz, die in einem Jahre einen Tag, also täglich 3 min 56,6 sec ausmacht; um diesen Betrag ist der Sonnentag länger als der Sterntag. Indessen ist zwar der Sterntag konstant, der Sonnentag dagegen ist, infolge der verschiedenen Fortschreitungsgeschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne und aus anderen Gründen, von wechselnder Länge, der größte Wert ist 24 h 32 sec, der kleinste 23 h 59 min 39 sec; und diese an sich kleine Differenz summiert sich von Tag zu Tag derart, daß große Beträge herauskommen. Man denkt sich daher die wahre Sonne durch eine fingierte oder mittlere ersetzt, um die sich die Erde gleichförmig dreht und nennt die so bestimmte Zeit, im Gegensatz zu jener wahren Sonnenzeit, die mittlere Sonnenzeit, die Differenz beider aber die Zeitgleichung, Viermal im Jahre ist sie null, nämlich am 14. oder 15. April, 14. oder 15. Juni, 31. August oder 1. September, 23. oder 24. Dezember; dagegen fällt der wahre Mittag um den 11. Februar um $14^1/_2$ min später, um den Anfang November um $16^1/_4$ min früher als der mittlere. Zwischen Sternzeit und mittlerer Sonnenzeit bestehen nun folgende Beziehungen:

---

[1] Von der Literatur über die Veränderung des Tages kann hier nur das wichtigste, meist auf die Mondbewegung oder die Flutreibung bezügliche, angeführt werden. Die Berechnung von ADAMS, die an einen bei LAPLACE gefundenen Fehler anknüpft, findet man bei THOMSON und TAIT, Handbuch der theoretischen Physik **2.** 830. Aus neuerer Zeit: F. TISSERAND. Annuaire 1892 und Mécan. cél. (Kapitel Mondtheorie). A. DELAUNAY, C. R. **62.** 1023. G. H. DARWIN, Astr. Nachr. **96.** 217. S. NEWCOMB, Res. on the motion of the moon, Amer. Ephemeris; Astr. Nachr. **154.** 198. 1900. P. BERTRAND, C. R. **62.** 162. G. J. STONEY, Astr. Journal **22.** Nr. 515. H. POINCARÉ, Bull. astr. **20.** 215. F. K. GINZEL, Wien. Ber. **85. 88. 89.** sowie Spez. Kanon d. Finsternisse u. s. w. TH. V. OPPOLZER, Astr. Nachr. **108.** 67. 1884. Es sei erwähnt, daß, wenn man die Mondbeschleunigung durch kosmischen Staub (V. OPPOLZER) erklären wollte, man annehmen müßte, daß dieser die Erde in einem Jahrhundert mit einer 2,8 mm dicken Schicht bedecken müßte; und es würde sich dann die Dichte des Staubes im Weltraume zur normalen Dichte der Luft verhalten wie 1 zu 3760000000000.

Sternzeit	mittl. Sonnenzeit	mittl. Sonnenzeit	Sternzeit
1 t	23 h 56 m 4,1 s	1 t	1 t 0 h 3 m 56,6 s
1 h	59 m 50,17 s	1 h	1 h 0 m 9,86 s
1 m	59,84 s	1 m	1 m 0,16 s
1 s	0,997 s	1 s	1,003 s

Die Sternzeit ist zweifellos die gegebene Zeit für wissenschaftliche Zwecke. Dagegen ist sie für das bürgerliche Leben, das sich in erster Linie nach der Sonne richten muß, ungeeignet, weil bei ihr der Tagesanfang im Laufe des Jahres alle Tageszeiten des Sonnentages durchläuft und z. B. am 21. März auf Mittag, am 22. Juni auf 6 Uhr morgens, am 23. September auf Mitternacht und am 21. Dezember auf 6 Uhr abends fällt. Übrigens besteht zwischen astronomischer und bürgerlicher Rechnung ein weiterer Unterschied insofern, als der astronomische Tag nicht um Mitternacht, sondern erst an dem darauf folgenden Mittag beginnt, also gegen den bürgerlichen um 12 Stunden zurück ist.

Sekunde. Abgeleitete Zeiteinheiten. In der Physik und den meisten verwandten Wissenschaften wird als Zeiteinheit die Sekunde benutzt und mit sec oder s oder S bezeichnet. Sie ist der 86400[te] Teil des mittleren Sonnentages oder der 86164,09[te] Teil des Sterntages. 60 Sekunden bilden eine Minute — min oder m —, 60 Minuten eine Stunde — h —, 24 Stunden einen Tag — t —. Die Woche und der Monat haben lediglich für das bürgerliche Leben Bedeutung. Das Jahr kann in sehr verschiedener Weise definiert werden, und zwischen den so erhaltenen Größen sind erhebliche Unterschiede. Am häufigsten kommt das tropische Jahr in Betracht, d. h. die Dauer der Drehung der Erde um die Sonne, bezogen auf den Frühlingspunkt; es ist

$$1\,\text{Jahr} = 365\,\text{t}\ 5\,\text{h}\ 48\,\text{m}\ 47{,}8\,\text{s} = 365{,}2422 \text{ mittlere Sonnentage,}$$
$$= 31\,556\,926\,\text{s} \qquad = 366{,}2422 \text{ Sterntage.}$$

Um den im Jahre enthaltenen Bruchteil eines Tages zu berücksichtigen, muß im bürgerlichen Leben — und ebenso in der Wissenschaft — in jedem vierten Jahr ein Schalttag eingefügt und dieser in jedem Säkularjahre, jedes vierte ausgenommen, unterdrückt werden (Gregorianischer Kalender).

Lichtmaß der Zeit. Der Umstand, daß als absolutes Längenmaß die Wellenlänge einer bestimmten Lichtart vorgeschlagen worden ist, legt den Gedanken nahe, nun auch die Zeiteinheit entsprechend festzulegen, und zwar durch die Schwingungsdauer ebenderselben Lichtart; es würde dann die Lichtgeschwindigkeit gleich Eins werden.

Relative und absolute Zeit. Orts-, Welt- und Zonenzeit. In der eigentlichen Physik spielt, entsprechend dem Umstand, daß es sich hier um willkürlich vom Experimentator hergestellte Erscheinungen handelt, die Zeit nur eine relative Rolle, d. h. es kommen nur Zeitstrecken ihrem Zahlenwerte nach, nicht aber ihrem Anfangspunkte nach in Betracht. Man pflegt daher einen dem Beginn des Vorgangs entsprechenden Zeitpunkt als Nullpunkt zu wählen und von hier aus die Zeiten — t — zu rechnen; dabei versteht man unter t meist Zeitpunkte, unter T Zeitdauern (Zeitstrecken).

In der kosmischen Physik (Astronomie, Geophysik, Meteorologie u. s. w.) spielt dagegen die absolute Zeit oft gerade die entscheidende Rolle. Die sich hiermit beschäftigende Lehre heißt Chronologie. Hier genügt es anzuführen, daß man auch in der Wissenschaft nach dem gregorianischen Kalender rechnet (meist auch in Rußland, wo im bürgerlichen Leben noch der julianische herrscht), und daß man große Zeitpunkte, sogenannte Epochen durch die Jahreszahl mit Dezimalen ausdrückt, so daß z. B. 1905,0 den Beginn dieses Jahres bedeutet. Dagegen ist über die Tagesepoche noch einiges zu sagen. Zunächst hat, infolge

der Lage auf einem bestimmten Meridian, jeder Ort auf der Erde seine eigene Zeit, die Ortszeit; Orte auf verschiedenen Meridianen also verschiedene Ortszeiten, und zwar pro Grad um vier Minuten, nach Osten voran, nach Westen zurück. Diese Ortszeit ist für lokale Beobachtungen und für das tägliche Leben zweifellos die vernünftigste; trotzdem ist sie im bürgerlichen Leben den Verkehrsbedürfnissen zuliebe fallen gelassen worden. Extrem gegenüber steht ihr die Weltzeit, d. h. die allen Orten aufgedrungene Zeit eines bestimmten Ortes, als welcher die Sternwarte zu Greenwich bei London anerkannt ist; diese sogenannte Weltzeit wird in der Astronomie und zum Teil auch noch in anderen Fällen benutzt; für die meisten Zwecke und ganz besonders für das tägliche Leben führt sie natürlich zu ganz ungeheuerlichen Konsequenzen. Man hat sich daher auf ein Kompromiß geeinigt, indem man die Erdoberfläche in Stundenzonen teilte, d. h. in Zonen von je 15 Grad Breite, und jeder von ihnen eine bestimmte Zonenzeit gab; die verschiedenen Zonenzeiten werden sich dann nur um ganze Stunden unterscheiden, in den Minuten und Sekunden aber übereinstimmen. So ist Nordamerika in fünf Zonen geteilt, mit Intercolonial, Eastern, Central, Mountain, Pacific Time — gegen Weltzeit um 5, 6, 7, 8, 9 Stunden nach; in Europa ist die Einteilung mehr politisch: die westlichen Staaten haben — soweit sie nicht noch ihre alten Festsetzungen haben — Westeuropäische, d. h. Weltzeit; Deutschland, Österreich, Ungarn, Italien, Schweiz, Dänemark, Schweden, Norwegen u. s. w. haben Mitteleuropäische Zeit[1] — gegen Greenwich um eine Stunde voraus, der Rest hat Osteuropäische Zeit. Die Datumlinie, d. h. die Linie, wo bei der Bewegung nach Osten dasselbe Datum nochmals gezählt, bei der nach Westen aber eines übersprungen werden muß, ist nicht genau der 180. Meridian, sondern eine sich zwischen den Südseeinseln durchwindende Linie.

C. Die Bewegung.

Kombination der Begriffe Raum und Zeit. Die allgemeinste Beziehung, in die man die Begriffe von Raum und Zeit bringen kann, ist in dem Ausspruche enthalten: es finden Ortsänderungen im Raume mit der Zeit statt. Diese Ortsänderungen nennt man Bewegung; in ihr ist als Spezialfall der der Beibehaltung des Ortes, der Ruhe, enthalten. Der Begriff der Bewegung erscheint hier abgeleitet aus den Grundbegriffen von Raum und Zeit; nach dem früher Gesagten könnte man auch den Zeitbegriff erkenntnistheoretisch aus Raum und Bewegung ableiten, würde dabei aber dem inneren Sinne, der an sich schon den Zeitbegriff liefert und ihn alsdann erst den Bewegungsbegriff erzeugen läßt, nicht gerecht werden. Eine weitere Frage ist die, ob alles empirische in letzter Instanz Raum und Zeit und somit Bewegung sei, oder ob es davon unabhängige Vorstellungen (Kräfte, Energien, Farben u. s. w.) gebe; in jenem Falle ergibt sich die Aufgabe, alle Naturerscheinungen auf Bewegung zurückzuführen, in diesem gibt es verschiedene selbständige Gebiete naturwissenschaftlicher Lehre, beide Ansichten stehen sich noch heute schroff gegenüber, worauf noch zurückzukommen sein wird. Die reine Bewegungslehre heißt Kinematik, die physikalische heißt Mechanik, zerfallend in Statik (Ruhe) und Dynamik (Bewegung) oder, nach der englischen Nomenklatur Dynamik, zerfallend in Statik und Kinetik.

Arten der Bewegung. Da die Bewegung sich sowohl im Raume als auch in der Zeit abspielt, weist sie Merkmale von jedem dieser beiden Grundbegriffe auf: in räumlicher Hinsicht kann sie geradlinig oder krummlinig, und in ganz

[1] Auch die Zonenzeit führt noch zu krassen Differenzen mit der Natur: in Aachen steigt die Sonne nach Mittag noch 36 Minuten aufwärts, in Czernowitz beginnt sie schon um $11^h\ 16^m$ zu sinken, und entsprechend groß ist die Asymmetrie von Sonnenauf- und -untergang in diesen Orten.

analoger Weise kann sie in zeitlicher Hinsicht gleichförmig oder ungleichförmig sein. Übrigens ist einleuchtend, daß die hier gegenübergestellten Fälle nicht gleichwertig sind; vielmehr ist die geradlinige Bewegung nur ein Spezialfall der allgemeinen, und zwar der, wo die Bahnkrümmung null ist; und entsprechend in zeitlicher Hinsicht. Ferner kann Bewegung fortschreitend oder periodisch sein, d. h. sie kann immer nur neue Raumorte berühren oder nach gewissen Zeiten immer wieder dieselben Orte bestreichen; dabei kommt es noch darauf an, ob die Bewegung ersterer Art wirklich abgeschlossen ist (auf den Erdboden gefallener Stein) oder nicht, in welch letzterem Falle immer noch zweifelhaft bleibt, ob sie nicht doch noch als periodisch sich erweist. Auf die weiteren Unterscheidungen wird besser in der Kinematik eingegangen.

Relative und absolute Bewegung. Bewegung ist Ortsänderung; damit ist der relative Charakter des Bewegungsbegriffes von selbst gegeben. Wenn von der Bewegung eines Körpers als Ganzen die Rede ist, muß immer hinzugesetzt werden, gegen welchen anderen Körper er sich bewegt; und entsprechend bei den Bewegungen der Teile eines und desselben Körpers gegeneinander. So führt z. B. der Fahrgast, der sich in den Speisewagen begibt, eine Bewegung relativ zu dem Zuge aus, dieser Zug selbst bewegt sich gegen die Erde, diese gegen die Sonne und die Sonne gegen einen etwaigen Zentralstern, von dem man aber auch nicht mit irgend welchem Sinne sagen kann, daß er im Raume fest sei. In der Physik, die es doch wesentlich mit irdischen Vorgängen zu tun hat, versteht man häufig unter relativer Bewegung die Bewegung eines Körpers auf der ruhend gedachten Erde, unter absoluter die relativ zur Sonne; in anderen Fällen freilich, wo es sich um die gleichzeitige Bewegung mehrerer Körper handelt, unter relativer die eines dieser Körper zu einem anderen, unter absoluter die relativ zur Erde.

Wenn hiernach der relative Charakter des Bewegungsbegriffes keinem Zweifel unterliegt, so ergeben sich doch gerade deshalb erkenntnistheoretische Schwierigkeiten, mit denen sich zahlreiche Philosophen, Mathematiker und Physiker beschäftigt haben.[1] Das Trägheitsprinzip (s. w. u.) enthält nämlich die Ausdrücke „geradlinig" und „gleichförmig"; und diese Ausdrücke besagen nach dem Vorausgegangenen gar nichts, wenn nicht erläutert wird, in bezug auf welches Raumsystem und auf welche Zeitrechnung sie gelten sollen. C. NEUMANN führt deshalb einen hypostasierten unbeweglichen Raum ein, den er der Anschaulichkeit halber den „Körper Alpha" nennt; seine drei Hauptträgheitsachsen kann man sich dann als feste Koordinatenachsen vorstellen. NEUMANN gibt selbst zu, daß dieser Körper Alpha, der sich übrigens an ältere Vorstellungen von LAPLACE, LAGRANGE u. a. anschließt, etwas rätselhaftes hat; und das gilt in nicht geringerem Maße von den Formen, in denen die neueren Autoren die Bezugsidee gekleidet haben, so auch von dem „Fundamentalkörper" und „Fundamental-Koordinatensystem", das H. STREINTZ einführt. Irgend eine Aussage muß von dem Fundamentalsystem gemacht werden, und diese enthält notwendig irgend einen noch nicht fundierten Begriff, wie den des absoluten Raumes oder der Kraft oder der „Grundmaterie"

[1] Nur die wichtigsten Autoren können hier genannt werden, bei ihnen findet man auch die übrige Literatur: L. EULER, Theoria motus 1765; Reflexions sur l'espace et le temps Mém. Acad. Berl. 1748. IMMANUEL KANT, Neuer Lehrbegriff der Bewegung und Ruhe 1758; Metaphysische Anfangsgründe 1786. TH. YOUNG, Lectures **1.** 18; **2.** 27. J. M. C. DUHAMEL, C. R. **69.** 773. 1869. C. NEUMANN, Über die Prinzipien der GALILEI-NEWTONschen Theorie. Leipzig 1870. E. MACH, Geschichte und Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag 1872. H. STREINTZ, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883. L. LANGE, Die geschichtliche Entwickelung des Bewegungsbegriffes. Leipzig 1886. THOMSON u. TAIT, Treatise **1.** 242. A. VOSS, Enzyklopädie der Mathematik. **4.** (1) 30. B. u. J. FRIEDLÄNDER, Absolute und relative Bewegung. Berlin 1896. E. LAMPE (Referat über englische Arbeiten), Fortschr. d. Math. **25.** 1318. 1897. V. E. JULIUS, Arch. Néerl. (2) **6.** 285. 1901. C. NEUMANN, BOLTZMANN-Festschrift 1904. p. 252. Auf das Trägheitsprinzip selbst kann erst später eingegangen werden.

(als welche eventuell der Äther dienen kann) oder dergleichen. Von Interesse ist aber noch eine Unterscheidung, die von vielen Autoren gemacht wird, und die einen Gegensatz zwischen fortschreitender und rotierender Bewegung betrifft; absolute Translation wird als ein erkenntnistheoretisches Unding zugegeben, aber absolute Rotation soll es geben. Es werden dafür namentlich die mit Rotationen zusammenhängenden physikalischen Erscheinungen herangezogen, ganz besonders die Abplattung rotierender, gravitierender Flüssigkeiten und die Stabilität von Kreiseln; hier soll man immanente Eigenschaften absolut rotierender Materie vor sich haben, und es werden sogar besondere Experimente vorgeschlagen, um das in großem Maßstabe zu demonstrieren. Eine nähere Untersuchung zeigt indessen, daß auch bei der Rotation kein Anlaß vorliegt, die reine Relativitätstheorie zu verlassen; insbesondere ist die Abplattung eines im sonst leeren Raume rotierenden Flüssigkeitskörpers mit der, in diesem Falle schärfer zu definierenden relativen Bewegung der Flüssigkeitsteile gegeneinander in Verbindung zu setzen, und statt zu sagen: der auf dem rotierenden Tische ruhende Kreisel fällt um, hat man eben zu sagen: der Tisch fällt um — oder nicht um. Endlich würden noch die Argumente übrig bleiben, die von dem Druckgefühl ausgehen, das man bei der Berührung und Bewegung kreiselnder Körper hat; es kommt das aber offenbar auch wieder auf die Frage der Erhaltung der Kreiselebene hinaus, und hierauf wird bei der Untersuchung des Begriffes der Materie eingegangen werden.

Geschwindigkeit. Um ein Maß für den Bewegungsbegriff aufzustellen und die Bewegung damit als mathematische Größe zu charakterisieren, muß man die Raumstrecke zur Zeitstrecke in Beziehung setzen. Dies geschieht ganz allgemein durch den Ausspruch: Geschwindigkeit ist der Grenzwert, dem sich das Verhältnis der zurückgelegten Strecke zu der Zeit, in der sie zurückgelegt wird, nähert, wenn beide Größen von dem Orte und dem Zeitpunkte aus, für den die Geschwindigkeit gelten soll, kleiner und kleiner genommen werden. Die Existenz eines solchen Grenzwertes muß aus den Voraussetzungen nachgewiesen werden; für physikalische Zwecke genügt es, daß man die Ausnahmefälle, wo der Grenzwert fraglich wird, im einzelnen immer angeben kann. Die Geschwindigkeit ist ein Vektor (p. 16), sie ist durch einen Zahlenwert mit dem Zusatz cm (eventuell mit einem anderen) sowie durch Angabe der Richtung im Raume charakterisiert. Um mit Geschwindigkeiten zu rechnen, muß man daher entweder die Vektoranalysis anwenden, oder man muß die Geschwindigkeit G in ihre Komponenten, z. B. nach dem rechtwinkligen Koordinatensystem, zerlegen oder, was dasselbe ist, ihre Projektionen auf die Achsen dieses Systems bilden: u, v, w; auch nach irgend einer anderen Richtung kann man die betreffende Geschwindigkeitskomponente bilden. Die Geschwindigkeit ist im allgemeinen veränderlich, sie ist eine Funktion der Zeit oder, was damit eindeutig zusammenhängt, eine Funktion der zurückgelegten Strecke l. Es bestehen die Beziehungen — α, β, γ Richtungswinkel des Vektors G —:

$$G = \frac{dl}{dt} = f(t) = f_1(l) \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = G\frac{dx}{dl} = G\cos\alpha = f_x(t) \\ v &= \frac{dy}{dt} = G\frac{dy}{dl} = G\cos\beta = f_y(t) \\ w &= \frac{dz}{dt} = G\frac{dz}{dl} = G\cos\gamma = f_z(t) \end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$G = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{24}$$

und die Dimensionsformeln

$$[G] = [u] = [v] = [w] = L\,T^{-1} \quad . \tag{25}$$

Beim Übergang von einem zu einem anderen Koordinatensystem werden die neuen Geschwindigkeitskomponenten u', v', w' durch die alten u, v, w in derselben Weise ausgedrückt, wie früher (p. 13) die Koordinaten. Dagegen bleibt die Geschwindigkeit selbst dabei natürlich ungeändert, d. h. es ist

$$u^2 + v^2 + w^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2 \quad . \tag{26}$$

Bei der gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant, und man kann sie dann einfacher definieren als das Verhältnis einer Strecke zu der Zeit, in der sie zurückgelegt wird; oder noch einfacher, indem man den Nenner dieses Verhältnisses gleich 1 wählt: als die in 1 sec zurückgelegte Strecke. Die Einheit der Geschwindigkeit ist also die bei derjenigen Bewegung, bei der in 1 sec 1 cm zurückgelegt wird; man hat für diese Einheit verschiedene Namen vorgeschlagen, so Cel (von celeritas)[1], kin (von kinesis); sie sind aber nicht durchgedrungen, und man fügt daher, wo es erforderlich erscheint, den Zusatz cm/sec bei. Die Geschwindigkeitskomponenten sind bei einer gleichförmigen Bewegung im allgemeinen veränderlich; die rechtwinkligen sind aber konstant für die gleichförmige und geradlinige Bewegung, die Polar- und Zylinderkomponenten für gewisse gleichförmige Schraubenbewegungen u. s. w. Schließlich sei, im Hinblick auf späteres, der an sich einleuchtende Satz erwähnt, daß der Geschwindigkeitsvektor in jedem Zeitpunkte die Richtung der Tangente der Bahn hat.

Auswahl einiger typischer Geschwindigkeiten.

Hebung festen Landes	$3 \cdot 10^{-7}$	Zyklon (Maximum)	$12 \cdot 10^{3}$
Gletscher (Maximum)	$2 \cdot 10^{-5}$	Erdbebenwelle	$3 \cdot 10^{4}$
Pflanzenwachstum (Maximum)	10^{-4}	Schall in Luft	$335 \cdot 10^{2}$
Spitze des Stundenzeigers	$3 \cdot 10^{-4}$	Luft ins Vakuum	$395 \cdot 10^{2}$
Spitze des Minutenzeigers	$5 \cdot 10^{-3}$	Äquatorpunkt der Erde	$463 \cdot 10^{2}$
Schnecke	$15 \cdot 10^{-2}$	Luftmolekeln (0° C)	$485 \cdot 10^{2}$
Spitze des Sekundenzeigers	$3 \cdot 10^{-1}$	Kanonenkugel	$6 \cdot 10^{4}$
Blut (Maximum)	7	Flutwelle (Maximum)	$8 \cdot 10^{4}$
Schneeflocke	20	Mond um die Erde	10^{5}
Mensch im Schritt	120	Äquatorpunkt der Sonne	$2 \cdot 10^{5}$
HALLEYs Komet im Aphel	$3 \cdot 10^{2}$	Explosionswelle	$6 \cdot 10^{5}$
Leichter Wind	$5 \cdot 10^{2}$	Sonne	$76 \cdot 10^{4}$
Strom (Maximum)	$6 \cdot 10^{2}$	Sirius	$154 \cdot 10^{4}$
Pulswelle	$9{,}4 \cdot 10^{2}$	Erde um die Sonne	$295 \cdot 10^{4}$
Dampfschiff (Maximum)	$12 \cdot 10^{2}$	Sternschnuppe (Mittel)	$4 \cdot 10^{6}$
Fahrrad	$15 \cdot 10^{2}$	HALLEYs Komet im Perihel	$393 \cdot 10^{5}$
Automobil	$28 \cdot 10^{2}$	Kabelstrom (mittlere Länge)	$4 \cdot 10^{8}$
Schnellzug	$32 \cdot 10^{2}$	Strom in freiem Drahte (1 km Länge)	$36 \cdot 10^{8}$
Nervenleitung	$34 \cdot 10^{2}$	Licht	$3 \cdot 10^{10}$
Brieftaube	$4 \cdot 10^{3}$	Elektrische Kraft	$3 \cdot 10^{10}$
Orkan	$50 \cdot 10^{2}$	Gravitation	$> 10^{12}$
Elektrischer Schnellzug	$55 \cdot 10^{2}$		

Winkelgeschwindigkeit; Touren- oder Schwingungszahl: Rotations- oder Schwingungsdauer. Bei Bewegungen, die man auf ein Zentrum bezieht, ist häufig eine andere Größe als die Streckengeschwindigkeit noch charakteristischer, nämlich die Winkelgeschwindigkeit. Sie ist der Grenzwert des Verhältnisses des zu dem zurückgelegten Bogen gehörigen Winkels zu der entsprechenden Zeit; sie ergibt sich aus der Streckengeschwindigkeit durch deren Division mit dem augenblicklichen Abstand r des sich bewegenden Punktes von dem Bezugszentrum. Für die Winkelgeschwindigkeit gilt die Formel (φ Winkel):

[1] A. v. OETTINGEN, Verh. Naturf.-Vers. Frankfurt 1897.

(27) $$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{r} = \frac{1}{r}\frac{dl}{dt}$$

sowie die Dimensionsformel

(28) $$[\omega] = T^{-1} \quad ;$$

Die Winkelgeschwindigkeit kann konstant sein, auch wenn es die Streckengeschwindigkeit nicht ist und umgekehrt (Spirale); nur bei der Bewegung auf Bahnen von konstanter Krümmung (Kreis, Schraubenlinie) verhalten sich beide Größen entsprechend.

Drückt man die Winkelgeschwindigkeit nicht in Winkelmaß, sondern in Bruchteilen oder Vielfachen eines ganzen Umlaufs aus, so erhält man das, was man die Umlaufszahl oder Tourenzahl nennt; ihr reziprokes ist offenbar die Rotationsdauer. Entsprechende Begriffe für die hin und her gehende Schwingungsbewegung sind die Schwingungszahl bezw. die Schwingungsdauer. Nennt man in beiden Fällen die Zahl n, die Dauer T, so hat man die Beziehung

(29) $$\left(\frac{\omega}{360} = \right) n = \frac{1}{T} \quad , \qquad T = \frac{1}{n}$$

und die Dimensionsformeln

(30) $$[n] = T^{-1} \quad , \qquad [T] = T \quad .$$

Auswahl einiger typischer Rotations- bezw. Schwingungsdauern und -Zahlen.

	Dauer	Zahl
Erde um Sonne	31556926	0,00000003169
Mond um Erde	2551443	0,000000392
Erde um ihre Achse	86400	0,000011574
Flutwelle	44700	0,00002237
Stundenzeiger	43200	0,00002315
Minutenzeiger	3600	0,0002778
Sekundenzeiger	60	0,016667
Größte Meereswogen	30	0,03333
Größte Schwungräder	10	0,1
Mittlere Wasserwellen	2	0,5
Sekundenpendel	1	1
Kräuselwellen	$2 \cdot 10^{-1}$	5
Tiefster Ton	$6 \cdot 10^{-2}$	16
Stimmton (a')	$23 \cdot 10^{-4}$	435
Offene Induktionsschwingung	10^{-4}	10^{4}
Höchster Ton	$2 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{4}$
Oszillierende Flaschenentladung	10^{-6}	10^{6}
Langsame Hertzsche Schwingung	10^{-8}	10^{8}
Schnellste Hertzsche Schwingung	10^{-10}	10^{10}
Langsamste Wärmeschwingung	$3 \cdot 10^{-13}$	$3,3 \cdot 10^{12}$
Langsamste Lichtschwingung	$3 \cdot 10^{-14}$	$3,3 \cdot 10^{13}$
Natriumlicht	$1,96 \cdot 10^{-14}$	$5,1 \cdot 10^{13}$
Schnellste Lichtschwingung	$1,2 \cdot 10^{-14}$	$8,3 \cdot 10^{13}$
Schnellste photogr. Schwingung	$3 \cdot 10^{-15}$	$3,3 \cdot 10^{14}$

Beschleunigung. Wie aus dem Streckenbegriff den der Geschwindigkeit, so kann man offenbar aus diesem in ganz entsprechender Weise einen weiteren Begriff, die Beschleunigung, ableiten. Indessen liegt die Sache hier insofern nicht so einfach, als man jetzt prinzipiell zwischen geradliniger und krummliniger Bewegung unterscheiden muß. Bei geradliniger Bewegung ist die Beschleunigung der Grenzwert, dem sich das Verhältnis der Änderung der Geschwindigkeit zu der Zeit, in der diese Änderung erfolgt, nähert, wenn diese Zeit kleiner und kleiner

genommen wird. Bei der gleichförmigen Bewegung ist die Beschleunigung **null**, bei der beschleunigten ist sie positiv, bei der verzögerten negativ, ihr Zahlenwert kann dann auch als Verzögerung bezeichnet werden. Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung konstant und kann dann einfacher als die Änderung der Geschwindigkeit in der Sekunde definiert werden; ebenso bei der gleichförmig verzögerten Bewegung. Die Beschleunigung ist insbesondere gleich 1, wenn sich die Geschwindigkeit in 1 sec um 1 cm ändert; der für diese Einheit vorgeschlagene Name „gal" (Abkürzung von GALILEI) ist nicht durchgedrungen. Auch von der Beschleunigung kann man die Projektionen auf irgend welche Richtungen, insbesondere auf die Koordinatenachsen bilden und erhält so die Beschleungiungskomponenten. Schließlich erhält man folgende Beziehungen des Beschleunigungsvektors B zu seinem Komponenten ξ, η, ζ, zu seinen Richtungswinkeln α, β, γ) übereinstimmend mit denen des Geschwindigkeitsvektors G) sowie zu den früher aufgestellten Größen G, u, v, w, l, x, y, z:

(31) $$B = \frac{dG}{dt} = \frac{d^2 l}{dt^2} = F(t) = F_1(l)$$

(32) $$\begin{cases} \xi = B\cos\alpha = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dG}{dt}\cos\alpha \quad , \\ \eta = B\cos\beta = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dG}{dt}\cos\beta \quad , \\ \zeta = B\cos\gamma = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dG}{dt}\cos\gamma \quad , \end{cases}$$

(33) $$\begin{cases} B = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \sqrt{\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2} = \\ \qquad = \sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad , \end{cases}$$

sowie die Dimensionsformeln:

(34) $$[B] = [\xi] = [\eta] = [\zeta] = L\,T^{-2} \quad .$$

Beschleunigungen erhalten also, wo es erforderlich erscheint, den Zusatz $\mathrm{cm/sec^2}$ oder cm pro sec pro sec.

Bei der krummlinigen Bewegung darf die Beschleunigung aus der Geschwindigkeit, da sie deren Änderung sowohl der Größe als auch der Richtung nach darstellen soll, direkt nur nach den Regeln der Vektoranalysis abgeleitet werden; nach den gewöhnlichen Rechnungsweisen ist der indirekte Weg erforderlich, auf dem man die Geschwindigkeit in die drei rechtwinkligen Komponenten zerlegt, mit diesen nach den obigen Formeln verfährt und zum Schlusse die resultierende Beschleunigung bildet. Dabei ergibt sich die Möglichkeit einer neuen Zerlegung der Beschleunigung, nämlich nach der Richtung der Bahntangente, der in der Schmiegungsebene auf dieser Tangente senkrechten Richtung und der auf der Schmiegungsebene senkrechten Richtung. Bei einer derartigen Zerlegung der Geschwindigkeit würde nur die erste Komponente einen Wert haben, die beiden anderen würden null sein; bei der Beschleunigung sind die beiden ersten Komponenten vorhanden, nur die dritte ist auch hier null. Man kann also sagen: der Geschwindigkeitsvektor liegt in der Bahntangente, der Beschleunigungsvektor liegt in der Schmiegungsebene. Die Komponente der Beschleunigung in der Bahnrichtung heißt Tangentialbeschleunigung (auch wohl Bahnbeschleunigung), die darauf senkrechte heißt Normal- oder Zentripetalbeschleunigung; jene ist die relative Größenänderung der Geschwindigkeit, diese hängt von der

Bahnkrümmung ab und ist — bei gleicher Geschwindigkeit — der Krümmung direkt, dem Krümmungsradius der Bahn, r, umgekehrt proportional.

Man kann aber auch, mit Benutzung der Formel (27), die Winkelgeschwindigkeit ω einführen, und dann wird die Zentripedalbeschleunigung mit dem Krümmungsradius direkt, mit der Krümmung umgekehrt proportional. Man hat somit folgende Formeln ($B_{\parallel}$ Tangential-, $B_{\perp}$ Zentripetalbeschleunigung):

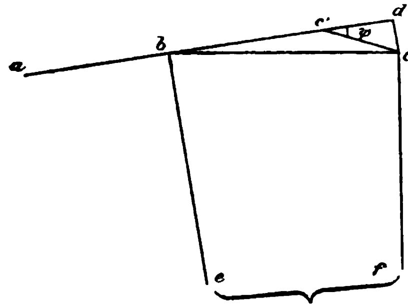
(35) $$B_{\parallel} = \frac{dG}{dt} \quad , \qquad B_{\perp} = \frac{G^2}{r} = \omega^2 r$$

(36) $$B = \sqrt{(B_{\parallel})^2 + (B_{\perp})^2} = \sqrt{\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 + \left(\frac{G^4}{r^2}\right)} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \quad ,$$

(37) $$\begin{cases} \xi = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{d\left(G\dfrac{dx}{dt}\right)}{dt} = \dfrac{dG}{dt}\dfrac{dx}{dt} + G^2\dfrac{d^2x}{dt^2} \quad , \\ \eta = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\left(G\dfrac{dy}{dt}\right)}{dt} = \dfrac{dG}{dt}\dfrac{dy}{dt} + G^2\dfrac{d^2y}{dt^2} \quad , \\ \zeta = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d\left(G\dfrac{dz}{dt}\right)}{dt} = \dfrac{dG}{dt}\dfrac{dz}{dt} + G^2\dfrac{d^2z}{dt^2} \quad . \end{cases}$$

In Figur 10 ist $a\,b$ die im ersten, $b\,c$ die im nächsten Zeitteilchen zurückgelegte Strecke, während $b\,c'$ die Strecke ist, die im zweiten Zeitteilchen zurückgelegt werden würde, wenn die Bewegung geradlinig und gleichförmig wäre; $c'c$ ist dann die Beschleunigung, $c'd$ ihre Tangential-, $d\,c$ ihre Zentripetalkomponente, $b\,e$ und $c\,f$, bis zum Schnittpunkt verlängert, geben den Krümmungsradius r, und für den Winkel ψ zwischen G und B gilt die Formel:

(38) $$\operatorname{tg}\psi = \frac{G^2}{r\dfrac{dG}{dt}} = \frac{\omega^2 r}{\dfrac{d(\omega r)}{dt}} \quad .$$



Figur 10.

Bei geradliniger Bahn ($r = \infty$) ist $B_{\perp} = 0$, also $B = B_{\parallel}$; bei gleichförmiger Bewegung auf krummer Bahn ist $B_{\parallel} = 0$, also $B = B_{\perp}$.

Einige typische Beschleunigungen:

Mond gegen die Erde	0,27
Erde gegen die Sonne	0,58
Fall auf der schiefen Ebene mit 1° Neigung . .	17
Abfahrender Schnellzug	60
Freier Fall auf dem Monde	158
Freier Fall auf der Erde	980
Freier Fall auf der Sonne	26000

Wie aus der Geschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit, so kann man auch aus der Beschleunigung einen neuen Begriff ableiten, die Winkelbeschleunigung β

(39) $$\beta = \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{B}{r}$$

mit der Dimensionsformel

(40) $$[\beta] = T^{-2} \quad .$$

Die Begriffe Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung können in folgende Skala gebracht werden: 1. Bei Ruhe bleibt der Ort unverändert; 2. bei der gleichförmigen Bewegung bleibt die Geschwindigkeit unverändert; 3. bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung bleibt die Beschleunigung unverändert. Man könnte nun, rein formal, so fortfahren und zum dritten und den höheren Differentialquotienten der Strecke fortschreiten; schon der nächste Begriff würde einen Vektor darstellen, der weder in der Bahnrichtung noch in der Schmiegungsebene liegt.[1] Die in der theoretischen Physik gemachten Erfahrungen haben nun gelehrt, daß man im allgemeinen mit den Begriffen von Geschwindigkeit und Beschleunigung auskommt, und daß es zu keinen Vereinfachungen oder sonstigen Vorteilen führt, wenn man die höheren Differentialquotienten als selbständige Begriffe einführt.

Stationäre, zyklische, verborgene Bewegung. Zum Schlusse dieses Abschnitts ist noch eine wichtige Betrachtung anzugliedern, an die dann später wiederholt anzuknüpfen sein wird. Eine Bewegung eines Systems, bei der die Bewegung nach Größe und Richtung an einem bestimmten Orte des Raumes — und ebenso an allen anderen — mit der Zeit unveränderlich ist, die also mit der Ruhe das gemeinsam hat, daß die Zeit explizite keinen Einfluß hat, heißt eine stationäre Bewegung; sie steht gewissermaßen in der Mitte zwischen Ruhe und Bewegung.

Andererseits kann man eine Bewegung, bei der jedes Teilchen nach einiger Zeit immer wieder an den Ausgangsort zurückkommt, eine zyklische Bewegung nennen. Es ist nun einleuchtend, daß eine stationäre Bewegung im allgemeinen von zyklischem Charakter sein wird; und umgekehrt wird eine zyklische Bewegung diesen Namen in einem engeren und strengeren Sinne verdienen, wenn sie stationär ist.

Eine streng zyklische Bewegung hat nun eine besonders merkwürdige Eigenschaft: sie ist nicht wahrnehmbar, das Nacheinander der Systemelemente ist von ihrem Nebeneinander nicht zu unterscheiden. Es ist das einleuchtend, da doch jedes einen Ort verlassende Teilchen sofort durch ein neues ersetzt wird, das in jeder Hinsicht seine Rolle übernimmt — von anderen Merkmalen, als Form- und Farbeverschiedenheit wird hier natürlich gänzlich abgesehen. Man kann auch leicht solche Bewegungen, wenigstens annähernd, herstellen, z. B. mit Wasserstrahlen, die dann wie feste Glaskörper aussehen oder doch aussehen würden, insoweit sie sich nicht durch unvermeidliche Schwankungen, Stäubchen u. s. w. als Bewegungserscheinung verrieten.

Bewegungen dieser Art nennt man unsichtbare oder verborgene Bewegungen, und es ist nach dem Gesagten klar, wie eng ihre Beziehung zum zyklischen oder stationären Charakter ist. Eine besondere Rolle spielen sie bei Bewegungen, bei denen die Bahnen der einzelnen Teilchen sich nicht, wie bei dem angeführten Beispiel, in weitem, sondern in ganz engem Rahmen abspielen, also etwa in kleinen Schwingungen oder Drehungen bestehen; sie sind deshalb in neuerer Zeit, namentlich durch H. v. HELMHOLTZ und HERTZ, zum Gegenstand interessanter Studien gemacht worden.

Dabei ist endlich noch eine weitere Unterscheidung möglich und wichtig. Ganz allgemein nämlich, welcher Art auch die Bewegung sein mag, hat man zu unterscheiden zwischen Bewegungen mit einem Freiheitsgrade, oder mit zwei

[1] Vgl. J. SOMOW, Mém. s. l. accél. de div. ordres, Petersb. Abh. 8. Nr. 5. 1864. Die drei Komponenten sind (r' zweiter Krümmungsradius, B_+' Komponente nach der Binormale):

$$B_\parallel' = \frac{d^2 G}{d t^2} - \frac{G^3}{r^2} , \quad B_\perp' = 3 \frac{G}{r} \frac{d G}{d t} - \frac{G^2}{r^2} \frac{d r}{d t} , \quad B_+' = \frac{G^3}{r r'} \quad .$$

solchen u. s. w., je nachdem die Gesamtbewegung durch eine oder zwei oder mehr Variable vollkommen bestimmt ist. Insoweit nun diese Variable zyklischen Charakters sind, erhält man zyklische Bewegungen mit einem, zwei oder mehr Freiheitsgraden der zyklischen Bewegung (zu der dann natürlich noch andere Bewegung hinzutreten kann); man unterscheidet deshalb zwischen monozyklischer, dizyklischer und polyzyklischer Bewegung.

D. Masse und Kraft.

Dauerkonfigurationen. Alles, was uns die Sinnesorgane übermitteln, stellt sich uns im Raume dar; in Mannigfaltigkeiten der Formen und Farben sowie in zahlreichen entsprechenden, weniger markanten und wichtigen Qualitäten. Diese räumlichen Konfigurationen unterliegen ferner mit der Zeit fortwährendem Wechsel, nämlich Ortsänderungen, Form- und Farbeänderungen u. s. w. Diese Änderungen erfolgen oft sehr rasch, in anderen Fällen langsam und in manchen so langsam, daß wir längere Zeit hindurch den Eindruck von Unverändertheit bekommen. Auch sehr rasche Bewegungen können, wenn sie zyklischen Charakters sind, uns gänzlich verborgen bleiben (s. o.) und so den Eindruck von etwas Feststehendem, von etwas Totem hervorrufen. Solche Dauerkonfigurationen, die unseren Gesichts- und Tastsinn immer in gleicher Weise affizieren, halten wir für etwas Besonderes, für zusammengehörige Komplexe, für Körper oder Gegenstände, und durch verallgemeinernde Abstraktion gelangen wir so zu dem Begriff der Materie. Dabei zeigt die Geschichte, daß der somit gewonnene neue Begriff durchaus nicht völlig feststeht, daß er vielmehr sozusagen Grade aufweist und an den Grenzen verschwimmt. Dabei wollen wir von den Lebewesen, als unserem Thema fernerstehend, ganz absehen und nur an sogen. anorganische Komplexe denken. Aber auch hier bestehen große Unterschiede. So wird z. B. der naive Mensch die Luft nicht für einen Körper erachten, und in bezug auf den Äther herrscht auch unter den Gelehrten Unsicherheit, inwieweit er als Materie zu bezeichnen sei. Offenbar ist mit dem unbestimmten Begriff der Materie wissenschaftlich nichts anzufangen; und es erhebt sich die Aufgabe, ihn derart zu präzisieren, daß er fähig wird, eine mathematische Größe darzustellen.

Gegenstand und Widerstand. Hier ist nun die sprachliche Entwickelung sehr bezeichnend. Die Ausdrücke „Gegenstand" und „Widerstand" haben sich nämlich erst ganz allmählich in der Weise differenziert, daß der eine, wie man sagt, ein Konkretum, der andere ein Abstraktum bezeichnet. Ein Gegenstand ist eben etwas, was Widerstand leistet, und es fragt sich nur, wem es diesen Widerstand leistet. Hier eröffnet sich nun eine ganze Anzahl von Möglichkeiten, und zwar nach zwei Richtungen. Zunächst kommen die verschiedenen Sinnesorgane in Betracht, in bezug auf die das in Rede stehende Verhalten offenbar sehr verschieden ist. Ziehen wir wieder die beiden in diesem Zusammenhange wichtigsten Sinne, Auge und Tast- oder Drucksinn, in Vergleich, so leistet z. B. eine Fensterscheibe dem Tastsinne großen, dem Auge fast gar keinen Widerstand; sie ist also wohl für jenen, aber kaum für diesen ein „Gegenstand". Umgekehrt verhält es sich etwa mit dichtem Nebel, der den Gesichtssinn völlig behindert, dem Tasten aber kaum einen Widerstand bietet. Überhaupt ist nicht einzusehen, warum sich ein und derselbe Körper nicht verschiedenen Einflüssen gegenüber ganz verschieden verhalten solle; und es ist hiernach schwer abzusehen, ob man eine und welche von diesen vielen Eigenschaften der Materie man auswählen solle, um sie zu messend zu charakterisieren. Nur weil der Widerstand gegen Druck, — sei es nun der im Tastsinn zum Bewußtsein kommende Druck des Fingers oder dergl. oder sei es der Druck gegen etwas unpersönliches — dem Raumbegriff und seinen Maßen näher steht als die erst noch näher zu

analysierenden optischen Eigenschaften, wird man sich an diesen Druck halten, und gelangt so zu dem Widerstande gegen Bewegung (z. B. des Fingers oder eines nichtfühlenden Körpers) als Charakteristikum des Gegenstandes.

Trägheitswiderstand; Masse. Aber auch hier dürfen wir noch nicht stehen bleiben. Der Widerstand, den ein Körper der Bewegung meines Fingers oder eines anderen Körpers entgegenstellt, findet seine Grenze da, wo dieser letztere jenen ersten Körper zwingt, an der Bewegung teilzunehmen, ihn selbst in Bewegung setzt. Und nun vereinfachen wir die Frage wesentlich, wenn wir von dem erregenden Körper ganz absehen und nur den Widerstand jenes Körpers gegen seine eigene Bewegung in Betracht ziehen. Es ist nur noch zu untersuchen, ob dieser Widerstand gegen eigene Bewegung eine wohldefinierte Größe ist, oder ob sie etwa verschieden ausfällt, je nach der Art der Bewegung. Das Letztere ist nun tatsächlich der Fall. Zunächst ist das Verhalten wesentlich verschieden gegenüber Translation und Rotation; man wird von letzterem als dem komplizierteren absehen und sich auf ersteres beschränken. Und hier wiederum fragt es sich, wie sich ein Körper gegenüber der Bewegung mit bestimmter Geschwindigkeit und wie er sich gegenüber der Bewegung mit bestimmter Beschleunigung verhält. Unsere Wahrnehmungen am eigenen Körper und die Beobachtung der Erscheinungen in der Natur legen uns die Auffassung nahe, daß die gleichförmige Bewegung „von selbst" fortbesteht, daß also Widerstand nur gegen Beschleunigung geleistet wird. Dieser Widerstand gegen Beschleunigung in der geradlinigen Bewegung ist das, was man als Masse bezeichnet. Der allgemeine Fall ist dabei der, wo die Beschleunigung fortdauert; es ist aber auf den Spezialfall noch besonders hinzuweisen, wo die Beschleunigung nur sehr kurze Zeit andauert, wo also ein Körper von der Ruhe zu gleichförmiger Bewegung oder von der gleichförmigen Bewegung mit bestimmter zu einer solchen mit anderer Geschwindigkeit übergeht; in diesem Spezialfalle läßt sich also der Massenbegriff auch aus der Geschwindigkeit ableiten.

Um nun die Masse exakt zu definieren, kann man in zwei verschiedener Weisen vorgehen. Das Nächstliegende ist zu sagen: die Massen zweier Körper verhalten sich umgekehrt wie die Beschleunigungen, die sie unter gleichen Umständen oder bei gleicher Konfiguration annehmen. Indessen kann doch die Klarstellung dessen, was unter „gleichen Umständen" oder unter „gleicher Konfiguration" zu verstehen sei, Schwierigkeiten machen; sie muß das sogar in jedem Falle deshalb tun, weil doch hier zwei Fälle miteinander verglichen werden, bei denen es sich um zwei verschiedene Körper handelt, und weil diese beiden Körper doch selbst mit zu der „Konfiguration" gehören, diese also in beiden Fällen gar nicht identisch sein kann. Eine derartige Schwierigkeit fällt gänzlich fort bei einer anderen Betrachtungsweise, bei der man nicht zwei Vorgänge miteinander vergleicht, sondern einen einzigen Vorgang ins Auge faßt, bei dem die beiden Körper, um deren Massen es sich handelt, in gleicher Weise beteiligt sind; man nennt das eine Wechselwirkung. Daß dieses auf den ersten Anblick ein sehr spezieller Fall ist, macht nichts aus; denn bei näherer Untersuchung stellt es sich heraus, daß man alle Naturerscheinungen in gewissem Sinne als Wechselwirkungen auffassen kann. Man hat nunmehr eine einzige, ganz bestimmte Konfiguration vor sich, und kann nun sagen: die Massen zweier Körper verhalten sich umgekehrt wie die Beschleunigungen, die sie bei ihrer Wechselwirkung annehmen. Von Schwierigkeiten frei ist freilich diese Definition auch nicht. Erstens setzt sie voraus, daß kein dritter Körper im Spiele sei, und das ist nicht immer deutlich festzustellen, würde aber, wenn es stattfände, das Resultat stark beeinflussen können. Um dieses Bedenken zu beseitigen, kann man dem Ausspruche die etwas veränderte Fassung geben: die Massen verhalten sich umgekehrt wie die Beschleunigungen, die sie sich gegenseitig erteilen. Dadurch, durch den Ausdruck „erteilen", kommt aber eine prinzipielle Zweideutigkeit in den

Massenbegriff hinein. Denn während er bisher die Materie ausschließlich als etwas passives, widerstehendes charakterisierte, fügt er jetzt, ohne die erste Charakterisierung fallen zu lassen, zu gleicher Zeit eine zweite, aktive hinzu, indem er die Wirkung eines Körpers von seiner Masse abhängig macht. Der Gegensatz zwischen aktiver und passiver Masse findet seinen anschaulichsten Ausdruck in dem Gegensatze der zur Bestimmung von Massen möglichen Methoden: bei der Fortschleuderung einer Kugel durch die Muskelkraft wird z. B. die passive Masse der Kugel bestimmt, in der Astronomie dagegen wird gewöhnlich die aktive Masse ermittelt; und es gibt eine dritte Klasse von Erscheinungen, für die der freie Fall das typische Beispiel ist, wo aus der Bewegung des Körpers ein Schluß auf seine Masse überhaupt nicht möglich ist, weil sich hier aktive und passive Masse ausgleichen. Wie diese Unklarheiten zu beseitigen sind, kann nicht in Kürze dargelegt werden, zumal dabei eine ganze Reihe von Fragen, so namentlich die der absoluten und relativen Beschleunigung herangezogen werden muß; auch wird ohnehin bei der Betrachtung des Kraftbegriffs auf das Problem zurückgekommen werden müssen. Vorläufig sei Masse lediglich passive Masse.[1]

Wahre und scheinbare Masse. Um die Masse eines Körpers zu ermitteln, muß man ihn in Bewegung setzen; ist die Masse einmal bestimmt, so hat der Massenbegriff mit Bewegung nichts mehr zu tun: auch der ruhende Körper hat Masse, und zwar die auf dem angegebenen Wege bestimmte. Nun bestehen aber zwischen dem Widerstande, den ein ruhender und dem, den ein bewegter Körper darbietet, ganz offensichtige Unterschiede. Ein ausgezeichnetes Beispiel hierfür bietet der bekannte Apparat, bei dem in einer — aus zwei Hälften zusammengesetzten — Hohlkugel, die man in der Hand hält, ein Kreisel steckt. Ruht dieser, so kommt die normale Masse des ganzen Körpers als Bewegungswiderstand zur Geltung; kreiselt er aber, so ist der Widerstand gegen bestimmte Bewegungen, nämlich gegen alle diejenigen, welche die Drehungsachse ändern wollen, ganz erheblich gesteigert. Dieses Mehr an Bewegungswiderstand ist eine Folge der in der Kugel versteckten — in diesem Falle sehr offenkundig versteckten — Bewegung. Es liegt nun der Gedanke nahe, die Masse von Körpern, die allem Anschein nach innerlich ruhen, doch teilweise — oder gar vollständig — auf innere, verborgene Bewegungen zurückzuführen, eine Idee, die mit Rücksicht auf unsere Vorstellungen über die Konstitution der Materie (s. w. u.) sogar einen gewissen Halt hat. In einem besonderen Falle ist es geradezu möglich gewesen, der Idee nachzugehen und sie experimentell zu prüfen. Die Kathodenstrahlen sowie die Radiumstrahlen stellt man sich mit Rücksicht auf ihre Eigenschaften als aus sehr kleinen, mit großer Geschwindigkeit bewegten, elektrisch geladenen Teilchen bestehend vor. Die Ladung eines solchen Teilchens ist, wie man anzunehmen Grund hat, einmal für allemal bestimmt, die Geschwindigkeit aber kann man variieren und bis nahe an die Lichtgeschwindigkeit heranbringen; dabei zeigt sich nun, daß die Masse mit zunehmender Geschwindigkeit immer größer wird. Und wenn man das Gesetz dieser Zunahme mit der theoretischen Formel vergleicht, so kommt man zu dem überraschenden Ergebnis, daß, wenn man die Masse in einen festen und einen von der Geschwindigkeit abhängigen Bestandteil zerlegt, der erstere sehr klein ausfällt, vielleicht sogar geradezu null ist. Man

---

[1] Die exakte Definition der Masse aus der Beschleunigung hat sich ganz allmählich entwickelt und dabei verschiedene Formen angenommen, je nachdem gleiche Konfiguration oder Wechselwirkung und je nachdem Stoß oder Fernwirkung zugrunde gelegt wurde. Am häufigsten unter besonderem Namen zitiert werden die KIRCHHOFFsche (Vorl. über Mechanik) und die MACHsche (CARL, Rep. d. Phys. **4.**) Massendefinition. Man vergleiche für didaktische Zwecke auch die Lehrbücher (z. B. HOEFLER) sowie TH. WULF, Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **12.** 205. 1899. — E. GRIMSEHL, Ztschr. math. nat. Unter. **34.** 98. 1903; letzterer gibt auch entsprechende Demonstrationsversuche an. Über die Schwierigkeiten der Definition durch Kräfte bezw. Konfiguration vgl. u. a. L. BOLTZMANN, Prinz. d. Mech. **1.** 38 ff.

kann also sagen, daß vielleicht die ganze Masse nur scheinbare, durch die Bewegung vorgetäuschte ist, die man in diesem Falle als elektromagnetische Masse bezeichnet.[1] Geht man nun von diesem Falle zu dem eines mechanisch ruhenden Körpers über, in dessen Innern man verborgene Bewegungen annimmt, so kann man diesen Bewegungen elektromagnetischen Charakter beilegen und gelangt so zu der Hypothese, daß die gewöhnliche Masse auch nur scheinbare, elektromagnetische sei. Es muß aber betont werden, daß der elektromagnetische Charakter eine Spezialisierung der Hypothese ist, und daß es allgemeiner ist zu sagen: alle Masse ist möglicherweise nur verborgene Bewegung. — Bedenkt man schließlich, daß das Charakteristische der angenommenen verborgenen Bewegungen ihre Beständigkeit, ihre Dauerhaftigkeit ist, und daß, wie schon eingangs gesagt wurde, Materie überhaupt nichts ist als Dauerkomplex, so kann man diesem Dauerkomplex nunmehr kinetischen Charakter zuschreiben und sagen: Was uns als Materie erscheint, ist in Wahrheit verborgene Dauerbewegung.[2] Damit ist zugleich auch die Grenze des Begriffs der Materie festgelegt, und zwar empirisch und theoretisch, wie das Beispiel des Äthers zeigt, in übereinstimmender Weise: der Äther ist einerseits masselos, andererseits muß er, wenigstens auf Grund der Mehrheit der Tatsachen, als ruhend angenommen werden; und eben, weil er ruht, und insoweit er im weitesten Wortsinne ruht, ist er masselos und deshalb keine Materie.

Masseneinheit; Gramm. Aus der Definition der Masse, gleichviel, ob rein passiv oder durch die Wechselwirkung, folgt, daß es sich hier nur um einen relativen Begriff handelt, daß man also für irgend einen Körper die Masse beliebig festsetzen darf und muß. Als solchen hat man diejenige Menge reinen Wassers gewählt, die bei einer bestimmten Temperatur, nämlich bei 4° C, gerade ein Kubikzentimeter Raum einnimmt; diese Masse ist durch ein in Paris (BRETEUIL) aufbewahrtes Gewichtsstück festgelegt.[3] Indessen hat sich auch hier bei genauerer Messung eine kleine Differenz herausgestellt, deren ungeachtet man den einmal hergestellten und eingeführten Normalkörper beibehalten hat; man vergleiche das bei dem Volumenmaß über den Unterschied zwischen Kubikdezimeter und Liter Gesagte. Man nennt die so festgelegte Masse ein Kilogramm, abgekürzt kg; für Deutschland dient ein Prototyp aus Platiniridium, das bei der Normaleichungskommission aufbewahrt wird, und um etwa 0,053 mg zuviel Masse hat.[4] Die wahre Masse von einem Kubikdezimeter Wasser bei 4° ist nach einer von CHAPPUIS nach der Methode von MICHELSON durchgeführten Untersuchung 1 kg weniger 24 mg, oder 0,999976 kg; MACÉ DE LÉPINAY findet das Manko zu 21, GUILLAUME zu 45 mg, MENDELEJEW noch größer.[5]

Da das Kilogramm für die meisten physikalischen Zwecke unbequem groß ist, benutzt man nicht dieses, sondern seinen tausendsten Teil als Einheit und nennt ihn Gramm, abgekürzt g oder gr (letzteres zur Vermeidung von Verwechslungen mit der Schwerkraft vorzuziehen) oder (in bestimmtem Zusammenhang) G. Aus dem Gramm werden dann folgende Einheiten abgeleitet:

Tonne = t	= Megagramm = 1000 kg. . =	1000000 g
Doppelzentner oder Meterzentner	= 100 kg =	100000 g
Kilogramm	= kg . . . . =	1000 g
Hektogramm	= hg . . . . =	100 g
Dekagramm	= dg . . . . =	10 g

[1] Vgl. W. KAUFMANN, Gött. Nachr. 1903. p. 90. 148. — M. ABRAHAM, Ann. d. Phys. **10.** 106. 1903. — G. C. SCHMIDT, Die Kathodenstrahlen. Braunschw. 1904. Kap. 14. — [2] Hierüber hatte H. v. HELMHOLTZ noch kurz vor seinem Tode einen Vortrag angekündigt. — [3] Zur Geschichte vgl. B. WEINSTEIN, Handbuch der physikalischen Maßbestimmungen **2.** 25. 1888. — [4] Wiss. Abh. der Normaleichungskommission, **1.** 10. — [5] CHAPPUIS, Trav. Bur. int. poids et mesures. — MACÉ DE LÉPINAY, C. R. **122.** 595; Journ. de Phys. (3) **5.** 477. 1896. — CH. GUILLAUME, Congr. int. **1.** 99. 1900.

Dezigramm = dg . . . . = 0,1 g
Zentigramm = cg . . . . = 0,01 g
Milligramm = mg . . . . = 0,001 g
Mikrogramm = μg = 0,001 mg . . . . . = 0,000001 g

Von anderen, früher und zum Teil jetzt noch stellenweise gebräuchlichen Massen seien folgende mit ihren Werten in Gramm angeführt:

Metrisches Pfund	500	Schwedisches Pfund	425,3
Preußisches Pfund	466,7	Zentner	50000
Bayrisches Pfund	560	Pud	16381
Österreichisches Pfund	560	Unze	28.35
Französisches Pfund	489,5	Lot (preußisch)	16,67
Englisches Pfund	453,6	Gran	0,0648
Russisches Pfund	409,5		

Einige typische Massen in runden Zahlen.

Sonne	$19 \cdot 10^{32}$	Luft in einem Wohnzimmer .	10^{5}
Jupiter	$18 \cdot 10^{29}$	Kegelkugel	$3 \cdot 10^{3}$
Erde	$6 \cdot 10^{27}$	Billardkugel	$3 \cdot 10^{2}$
Mond	$75 \cdot 10^{24}$	Doppelkrone	$8 \cdot 10^{0}$
Wasserhülle der Erde . . .	$18 \cdot 10^{23}$	Silberabscheidung in der Ampèrestunde	4,026
Großer Planetoid	10^{22}	Luft in einer Bierflasche . .	$6 \cdot 10^{-1}$
Atmosphäre der Erde . . .	$53 \cdot 10^{20}$	Wassertropfen	$5 \cdot 10^{-3}$
Kleiner Planetoid	10^{19}	Stäubchen	10^{-6}
Größter Eisberg	10^{17}	Luftteilchen	$6 \cdot 10^{-23}$
Größter Dampfer mit Ladung	$3 \cdot 10^{10}$	Wasserstoffteilchen	$5 \cdot 10^{-24}$
Lokomotive	$4 \cdot 10^{7}$	Kathodenstrahl- oder Radiumstrahlteilchen	$25 \cdot 10^{-28}$
Größter Meteorstein	$8 \cdot 10^{6}$		
Größtes Geschoß	10^{6}		

Dichte. Wenn auch die Masse als selbständiger Begriff eingeführt wird, so steht sie doch — vorbehaltlich noch weiterer Reduktion (s. w. u.) — mit dem Raume in einer sich unmittelbar aufdrängenden Beziehung. Vergleicht man z. B. die Bewegungswiderstände von Kegelkugeln, so findet man, wenn man zunächst ein und dasselbe Material verwendet, Proportionalität mit dem Volumen; und dann zweitens, bei gleicher Größe und verschiedenem Material, noch eine spezifische, für jedes Material andere Größe. In ersterer Hinsicht kann man also den Satz aufstellen: Die Masse ist bei gleichem Material dem Volumen proportional. Geht man indessen der Bedeutung dieses Satzes auf den Grund, so findet man, daß er bis zu einem gewissen Grade logisch einleuchtend, darüber hinaus noch ein Stück weit Erfahrungssatz, schließlich aber, in allen weniger einfachen Fällen lediglich Definition dessen, was man „gleiches Material" nennt, ist. So gilt er z. B. für kaltes und warmes Wasser nicht mehr, man muß das also für zwei verschiedene Stoffe erklären; und ähnliches gilt für allotrope Modifikationen von Stoffen und in zahlreichen anderen Fällen.

Da hiernach die Masse ein zusammengesetzter Begriff ist, kann man eine Spaltung in zwei Faktoren vornehmen; deren erster ist das Volumen, der andere heißt spezifische Masse oder kurz Dichte (auch Dichtigkeit). Während die Masse ein Charakteristikum eines individuellen Körpers ist, ist die Dichte ein solches einer Stoffart. Wenn also häufig — und mit Recht — gesagt wird, der Grundbegriff sei nicht die das Volumen als Faktor enthaltende Masse, sondern die Dichte, so steht dem doch gegenüber, daß nur die Masse ein empirischer Begriff ist, während der Dichtebegriff die Abstraktion von wirklichen Körpern auf Stoffarten voraussetzt; man wird deshalb wohl doch besser bei der Masse als drittem Grundbegriff bleiben.

Geht man nunmehr dazu über, die Dichte eines beliebigen Körpers durch seine Masse und sein Volumen zu definieren, so muß man den allgemeinsten

Fall ins Auge fassen, in dem diese Dichte innerhalb des Körpers von Ort zu Ort variiert. Man muß dann, wie bei der Geschwindigkeit (p. 29) u. s. w., einen Grenzwert bilden und sagen: Dichte eines Körpers in einem Punkte ist der Grenzwert, dem sich das Verhältnis der Masse eines den Punkt umgebenden Teiles des Körpers zu dem Volumen dieses Teiles nähert, wenn der Teil kleiner und kleiner genommen wird. Ob ein solcher Grenzwert existiert, wird von der inneren Konstitution des Körpers (s. w. u.) abhängen; eventuell muß man die Dichte anders definieren. Ein Körper, dessen Dichte überall dieselbe ist, braucht darum noch nicht „homogen", d. h. von überall gleicher Beschaffenheit zu sein, wie das Beispiel einer in einer Alkoholmischung schwimmenden Ölkugel von gleicher Dichte oder eine Salzlösung lehrt, bei der z. B. der Salzgehalt, aber auch die Temperatur von oben nach unten derart zunimmt, daß alle Schichten gleich dicht sind.

Eine andere Frage ist die, ob die Dichte, wie in verschiedenen Punkten eines Körpers, so auch in jedem dieser Punkte in verschiedenen Richtungen verschieden groß sein kann. Es kommt das darauf hinaus, ob der obige Grenzwert von der Gestalt des gewählten, den Punkt umgebenden Raumteiles abhängt, insbesondere verschieden ausfällt, je nachdem man als diesen Raumteil einen im Vergleich zur Länge dünnen Zylinder wählt und für die Achse dieses Zylinders etwa einmal die x-Achse, sodann die y-Achse und zuletzt die z-Achse wählt. Man hätte alsdann einen Begriff, den man als Vektordichte bezeichnen könnte. Indessen leuchtet logisch ein, daß man durch Messungen an endlichen Körperstücken von dieser Richtungsverschiedenheit niemals ein Anzeichen erhalten kann; es bleibt also nur die Frage der inneren Konstitution übrig, auf die noch zurückgekommen werden wird.

Zuweilen, namentlich in der Chemie, bedient man sich an Stelle der Dichte des reziproken Begriffs, d. h. des Volumens der Masseneinheit (die eventuell nötigen allgemeineren Definitionen ganz entsprechend wie oben) und nennt es das spezifische Volumen.

Nicht selten handelt es sich um materielle Körper, bei denen eine der drei Dimensionen klein im Vergleich zu den beiden anderen und eventuell außerdem auch an allen Stellen gleich groß ist; man nennt einen solchen Körper eine materielle Fläche oder Massenfläche (Scheibe, Platte, Schicht u. s. w.) und die dritte Dimension ihre Dicke. Bei einer derartigen Fläche ersetzt man die Dichte durch einen für sie charakteristischeren Begriff, nämlich durch die Flächendichte, d. h. durch die Masse pro Flächeneinheit. Ganz entsprechend nennt man einen Körper mit zwei sehr kleinen (und event. überall gleichen) Dimensionen eine materielle Linie oder Massenlinie (Stab, Draht, Faden u. s. w.), stellt die ausgebildete Dimension als seine Länge den beiden anderen als seinem Querschnitt gegenüber, und führt statt der Dichte seine Liniendichte ein, d. h. die auf die Längeneinheit entfallende Masse.

Die Dichte der Stoffe ist außerordentlich verschieden; außerdem wird sie durch Druck, Temperatur und andere Wirkungen stark beeinflußt; man vergleiche hierüber die Artikel: „Dichte", „Elastizität", „Ausdehnung durch die Wärme" u. s. w.

Für die Dichte ϱ und das spezifische Volumen v_1 in Beziehung zur Masse m und zum Volumen v sowie für die Flächen- und Liniendichte ϱ_f und ϱ_l in Beziehung zu Masse, Fläche f und Linie l, Dicke d und Querschnitt q gelten die folgenden Formeln:

(41) $$\varrho = \frac{dm}{dv} \quad , \qquad dm = \varrho\, dv \quad , \qquad m = \int \varrho\, dv \quad ,$$

speziell:

(42) $$\varrho = \frac{m}{v} \quad , \qquad m = \varrho\, v \quad ;$$

(43) $$v_1 = \frac{dv}{dm} \quad , \quad dv = v_1\, dm \quad , \quad v = \int v_1\, dm \quad ,$$

speziell:

(44) $$v_1 = \frac{1}{\varrho} = \frac{v}{m} \quad , \quad v = v_1 m \quad ;$$

(45) $$\varrho_f = \frac{m}{f} = \varrho \cdot d \quad , \quad m = \varrho_f \cdot f \quad , \quad \varrho = \frac{\varrho_f}{d} \quad ,$$

(46) $$\varrho_l = \frac{m}{l} = \varrho \cdot q \quad , \quad m = \varrho_l \cdot l \quad , \quad \varrho = \frac{\varrho_l}{q} \quad .$$

Versteht man ferner unter M die Massendimension, so hat man die Dimensionsformeln:

(47) $$[\varrho] = L^{-3} M \quad , \quad [v_1] = L^3 M^{-1} \quad ,$$

(48) $$[\varrho_f] = L^{-2} M \quad , \quad [\varrho_l] = L^{-1} M \quad .$$

Übrigens kann man die Dichte eines Stoffes noch in etwas anderer Weise definieren, indem man das Wasser, durch das doch die Masseneinheit definiert ist und dessen Dichte deshalb 1 ist, als Vergleichsstoff heranzieht und sagt: Dichte eines Stoffes ist seine Masse im Verhältnis zu der Masse eines gleichen Volumens Wasser von 4° C. An dem Zahlenwert der Dichte wird durch diese Definition der ersten gegenüber natürlich nichts geändert; aber die Dimension wird jetzt eine andere: die Dichte, als reines Verhältnis, wird eine reine Zahl.

Negative Masse. Da die Masse als Widerstand gegen Bewegung definiert ist und Bewegung ein Begriff mit Richtungssinn ist, kann es entgegengesetzte Massen geben, die man passend als positive und negative bezeichnen wird. Zwei Massen würden entgegengesetzt gleich sein, wenn sie unter gleichen Umständen gleiche, aber entgegengesetzte Bewegungen annähmen; oder wenn sie, bei der Wechselwirkung, sich die entgegengesetzte relative Bewegung erteilen, wie zwei gleiche Massen (Entfernung statt Annäherung und umgekehrt). Bei Massen, die als solche durch ihren Bewegungswiderstand wirklich beglaubigt sind, kommt ein derartiges Verhalten nicht vor; wirkliche Massen sind also stets positiv. Dagegen spielt das gegensätzliche Verhalten bei gewissen hypothetischen Massen oder Mengen eine wesentliche Rolle, nämlich bei den elektrischen und magnetischen Massen, die man auch Stärken oder Ladungen nennt. Diese können also positiv oder negativ sein, wobei sich allerdings neuerdings herausgestellt hat, daß das entgegengesetzte Vorzeichen das verschiedene Verhalten, um das es sich hier handelt, nicht erschöpft, daß vielmehr qualitative Verschiedenheiten stattfinden; das nähere gehört in die Elektrizitätslehre.

Bei Massen, die positiv oder negativ sein können, tritt zu den gewöhnlichen Typen von Gebilden — Körpern, Flächen, Linien, Punkten — noch eine besondere Klasse hinzu, nämlich das Punktpaar oder der Doppelpunkt, bestehend aus zwei gleichen und entgegengesetzten Massen in gewissem, kleinem Abstande voneinander; und entsprechend die Doppellinie und die Doppelfläche oder Doppelschicht. Bei diesen Gebilden kann die Gesamtmasse nichts besagen, da sie null ist; man muß also hier ein anderes Charakteristikum einführen. Als solches bietet sich naturgemäß das Massenmoment dar, d. h. zunächst für das Punktpaar das Produkt aus dem Zahlenwert der Masse eines der Punkte in seinen Abstand von dem anderen; entsprechende Bedeutung hat dann für die Doppellinie und für die Doppelfläche die Momentdichte oder das Dichtemoment, d. h. das Produkt der Linien- bezw. Flächendichte in den Abstand. Übrigens erhält man eine Verallgemeinerung solcher Gebilde, indem man nur verlangt, daß das Dichtemoment überall dasselbe sei, während seine beiden Faktoren: Dichte und Abstand, variieren dürfen.

Kraft. Die Masse ist definiert worden als die der Beschleunigung unter gegebenen Umständen umgekehrt proportionale Größe; daraus folgt, daß das Produkt aus Masse und Beschleunigung eine für die „Umstände", für die „Konfiguration" charakteristische Größe ist: unter gleichen Umständen ist das Produkt das gleiche, unter verschiedenen hat es verschiedene Werte, und diese Werte werden geradezu ein Maß für jene Umstände abgeben. Man nennt dieses Produkt die unter den betreffenden Umständen, in der betreffenden Konfiguration vorhandene oder wirkende Kraft. Solange man es nur mit einem einzigen Körper zu tun hat, hat der Begriff „Kraft" keine über den Begriff der Beschleunigung hinausgehende Bedeutung; erst bei der Vergleichung verschiedener Vorgänge gewinnt er eine solche. Und zwar gelten dann die beiden folgenden Sätze: 1. Die Kräfte, die man annehmen muß, wenn ein Körper verschiedene Beschleunigungen zeigt, verhalten sich direkt wie diese Beschleunigungen; 2. die Kräfte, die man annehmen muß, wenn verschiedene Körper dieselbe Beschleunigung zeigen, verhalten sich direkt wie die Massen dieser Körper. Und beide Sätze zu einem vereinigt: 3. Die Kraft ist das Produkt aus Masse und Beschleunigung.

Kausalität. Man kann die Form, in der die obigen Sätze ausgesprochen sind, als die induktive Form des „Kraftprinzips" (s. Art. „Mechanik") bezeichnen. Es ist aber noch eine andere, in gewissem Sinne umgekehrte Formulierung möglich, die von deduktivem Charakter ist und von dem gewöhnlichen menschlichen Empfinden bevorzugt wird. Man stellt sich nämlich mit Vorliebe alle Geschehnisse als Wirkungen vor und stellt ihnen gewisse Ursachen gegenüber: diese Ursachen nennt man dann Kräfte. Man geht dabei aus von einer Kraft, bei der die Berechtigung einer solchen Deduktion im eigenen Bewußtsein wurzelt, von der Muskelkraft, durch die z. B. eine Kegelkugel in Bewegung versetzt wird; diese Bewegung empfindet man direkt als Folge der Muskelanstrengung. Man überträgt nun diese Vorstellung auf Fälle, wo ihr eine Empfindung nicht oder doch nicht in gleich unmittelbarem Sinne entspricht; bei der Schwerkraft z. B., die man als Ursache des Falles der Körper ansieht, ist eine Empfindung noch in dem Schweregefühl, mit dem wir begabt sind, vorhanden; bei den magnetischen Kräften z. B. fehlt sie aber gänzlich. Die physikalischen Kräfte sind also sozusagen Erfindungen, die man macht, um das einem innewohnende Kausalitätsbedürfnis zu befriedigen, um die Naturerscheinungen, wie man sich ausdrückt, zu erklären. Daß die hierbei geleistete Befriedigung des Kausalitätsbedürfnisses eine rein äußerliche ist, und was es mit der angeblichen Erklärung auf sich hat, zeigt eine nur einigermaßen tiefere Prüfung, die hier zu weit führen würde. Ein Körper fällt nicht deshalb mit gleichförmiger Beschleunigung, weil die konstante Schwerkraft auf ihn wirkt, sondern: statt zu sagen, er fällt mit gleichförmiger Beschleunigung, kann man auch sagen: es wirkt auf ihn eine konstante Kraft, die Schwerkraft. Und doch hat die Einführung von Kräften offenbar eine höhere Bedeutung, als die des bloßen Ausdrucks. Diese ihre Bedeutung liegt in der Erzielung einer größeren Einfachheit und damit, was die Hauptsache ist, in der Erziehung einer höheren Einheit. In Fällen, wo sich Masse und Beschleunigung noch kompliziert verhalten, verhält sich die Kraft wesentlich einfacher; Erscheinungen verschiedenen Charakters können oft durch dieselbe Kraft oder, wo dies nicht angeht, durch Kräfte dargestellt werden, die sich in einfacher Weise aufeinander zurückführen lassen; und schließlich wird so die Beschreibung der Tatsachen durch die Hypothese der Kräfte in gewissem Sinne, wenn auch nicht im kausalen, zur Erklärung.

Legt man nunmehr den Kraftbegriff zugrunde, so kann man die obigen Sätze in der folgenden deduktiven Form aussprechen: 1. Die Beschleunigungen, die ein und derselbe Körper unter der Wirkung verschiedener Kräfte erfährt, sind mit diesen Kräften direkt proportional; 2. die Beschleunigungen, die verschiedene Körper durch dieselbe Kraft erfahren, sind ihren Massen umgekehrt proportional;

und durch Zusammenfassung: 3. die Beschleunigung ist mit der Kraft direkt und mit der Masse umgekehrt proportional.

Schließlich kann man auch rückwärts die Masse durch die Kraft definieren und sagen: Masse ist das Verhältnis der Kraft zur Beschleunigung; oder: Masse eines Körpers ist die Kraft, die ihm die Beschleunigung eins erteilt; oder endlich: Masse ist die Kapazität eines Körpers für bewegende Kraft (s. w. u.).

Den Kraftbegriff kann man nun in verschiedenen Richtungen ausbilden und verallgemeinern. Zunächst kann auch die Ursache einer Verzögerung von Bewegung als Kraft bezeichnet werden; man nennt solche Kräfte Widerstandskräfte oder, in bestimmten Fällen, Reibungskräfte. Man tut jedoch gut, den Begriff der Widerstandskraft von dem des Widerstandes — sei es die uns schon bekannte Masse oder andere Widerstände, wie elektrischer u. s. w. — streng zu trennen.

Sodann ist es notwendig, auch die gleichförmige Bewegung, also die Geschwindigkeit, mit einer Ursache, mit einem modifizierten Kraftbegriff in Beziehung zu setzen. Aus der Ruhe geht die gleichförmige Bewegung offenbar durch eine einmalige, aber nicht andauernde Beschleunigung hervor; die entsprechende Kraft, über den Zeitraum ihrer kurzen Dauer integriert, nennt man Impulskraft oder **Impuls**. Der Impuls ist hiernach das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Dieses Produkt heißt **Bewegungsgröße** (auch wohl, nach englischem Vorbilde, Bewegungsmoment); der Impuls ist also die Ursache der Bewegungsgröße. Man kann dann weiter das Produkt aus Masse und Beschleunigung als Änderung der Bewegungsgröße in der Zeiteinheit und die Kraft als Ursache dieser Änderung auffassen.

Hiernach kann man die aufsteigende Reihe bilden: ein Körper ist von selbst in Ruhe; er bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit, wenn ein Impuls auf ihn gewirkt hat; er bewegt sich mit gleichförmiger Beschleunigung, wenn eine konstante Kraft auf ihn wirkt.

Andererseits kann man, wie der Impuls gewissermaßen eine Kraft niederer Ordnung ist, auch Kräfte höherer Ordnung einführen, bei denen die Beziehung zu den räumlichzeitlichen, die Bewegung charakterisierenden Größen eine allgemeinere oder verwickeltere ist (C. Neumann, Voigt, Koenigsberger u. a.).

Schließlich kann man den Kraftbegriff dahin erweitern, daß man ihn zur einfacheren Beschreibung, vulgo ursächlichen Erklärung nicht bloß von Bewegungsvorgängen, sondern allgemein von Naturerscheinungen benutzt. So ist die elektromotorische Kraft die Ursache der elektrischen Strömung, die magnetisierende Kraft die Ursache des Magnetismus, die Wärmekraft die Ursache von Temperaturänderungen u. s. w. Es ist aber in jedem dieser Fälle einzeln zu untersuchen, ob die betreffende Kraft auch dimensional eine Kraft oder etwas anderes ist.

Bezeichnet man eine Kraft mit K, einen Impuls mit I, so hat man die Beziehungen:

(49) $$K = m B \quad , \qquad B = \frac{K}{m} \quad , \qquad m = \frac{K}{B} \quad ,$$

(50) $$I = m G \quad , \qquad G = \frac{I}{m} \quad , \qquad m = \frac{I}{G} \quad ,$$

(51) $$I = \int K \, dt$$

und die Dimensionsformeln

(52) $$[K] = L T^{-2} M \quad , \qquad [I] = L T^{-1} M \quad .$$

Kraftmaß. Dyne. Die Einheit für die Kraft ergibt sich aus der Definition ohne weiteres: die Krafteinheit ist diejenige Kraft, welche der Masse 1 g in 1 sec die Beschleunigung 1 cm erteilt (oder ihr vom Ruhezustande aus in 1 sec die

Geschwindigkeit 1 erteilt). Man nennt diese Krafteinheit Dyne und bildet aus ihr größere und kleinere Einheiten nach dem bekannten Verfahren:

1 Megadyne	=	1000000	Dynen
1 Kilodyne	=	1000	„
1 Millidyne	=	0,001	„
1 Mikrodyne	=	0,000001	„

Gewichtsmaß. In der Praxis wurden bisher und werden zum Teil noch gegenwärtig Kräfte in einem anderen Maße angegeben, nämlich nicht als Produkte von Massen und Beschleunigungen, sondern als primäre Größen. Dabei dient als Vergleichskraft eine ganz bestimmte, nämlich der Druck, den eine Masse an einem bestimmten Orte auf ihre Unterlage ausübt, und den man das Gewicht des Körpers nennt. Wie groß dieses Gewicht in Dynen ausgedrückt ist, leuchtet ein; es ist gleich der Masse des Körpers multipliziert mit der Beschleunigung der Bewegung, die er annehmen würde, wenn man ihm die Unterlage entzöge. Im praktischen Maße führt man aber, wie gesagt, diese Multiplikation nicht aus, sondern vergleicht das Gewicht eines Körpers direkt mit dem eines Normalkörpers. Daß man als solchen 1 ccm Wasser von 4° C wählt, liegt nahe und würde an sich nichts schaden; wenn man aber nun das Gewicht dieses Körpers als Gramm bezeichnet, so ist das sehr mißlich und muß, da derselbe Name schon für einen anderen Begriff vergeben ist, zu Unklarheiten Anlaß geben. Es ist deshalb zu empfehlen, die in Rede stehende Größe deutlicher Grammgewicht zu nennen und auch in Formeln von der Grammasse irgendwie zu unterscheiden, z. B. durch einen beigefügten Stern: g* und entsprechend kg* u. s. w.

Es entsteht aber noch eine weitere Schwierigkeit. Während nämlich die Massendefinition vom Orte unabhängig ist, ist das bei dem Gewichte, das sich doch auf einer ganz speziellen lokalen Erscheinung begrifflich aufbaut, nicht der Fall. Man hat also nur die Wahl zwischen zwei Verfahren: entweder man erklärt als Gewichtseinheit das Gewicht eines ccm Wasser an dem Orte, wo man eben wägen will, dann ist das Gewicht eines Körpers eine vom Orte unabhängige Größe; oder man erklärt als Gewichtseinheit das Gewicht von 1 ccm Wasser an einem bestimmten Orte — man wählt dafür den Meeresspiegel unter 45° Breite —, dann ändert sich das Gewicht eines Körpers von Ort zu Ort, je nach den Änderungen der Schwerkraft. Es ist klar, daß das erstere Verfahren das praktischere ist — und tatsachlich wird es ja bei allen Wägungen mit der Hebelwage geübt —, daß aber nur das zweite wissenschaftlich ist, weil es nur auf einer festen Einheit aufgebaut ist.

Über die Werte der Schwere-Beschleunigung sehe man im Artikel „Gravitation“; hier genügt es anzuführen, daß die extremen Werte auf der bewohnten Erdoberfläche 977 und 983 cm/sec^2 sind, und daß für Deutschland 981 ein sehr guter Mittelwert ist.[1] Man hat dann folgende Beziehungen: das Gewicht eines Körpers in Dynen ist das 981-fache seiner Masse in Gramm, es ist auch das 981-fache seines Gewichts in g*, dagegen ist das Gewicht eines Körpers in g* zahlenmäßig identisch mit seiner Masse in g. In Formel·

1 g* = 981 Dynen, 1 Dyne = 0,001019 g*,
1 kg* = 981000 Dynen = 0,981 Megadynen,
1 Dyne = 0,000001019 kg*, 1 Megadyne = 1,019 kg*;

angenähert kann man sagen: eine Dyne ist um 2% größer als ein mg*, eine Kilodyne um 2% größer als ein g*, eine Megadyne um 2% größer als 1 kg*.

Spezifisches Gewicht. Genau wie man aus der Masse die spezifische Masse oder Dichte, so leitet man aus dem Gewicht das spezifische Gewicht *s*

[1] Im internationalen Maß- und Gewichtsdienst wird g = 980,6 gesetzt.

ab. Es hat infolgedessen eine andere Dimension wie die Dichte, nämlich die eines Gewichts, d. h. einer Kraft, dividiert durch ein Volumen

(53) $$[s] = L^{-2} T^{-2} M \quad .$$

Was den Zahlenwert betrifft, so ist er bei Anwendung des wissenschaftlichen Systems der g-fache des Wertes der Dichte für denselben Stoff; im praktischen System ist er dagegen mit dem der Masse im wissenschaftlichen System identisch. Bezieht man das spezifische Gewicht auf das des Wassers als Einheit, so wird es überdies eine reine Zahl. Man kann nun an das spezifische Gewicht dieselben Betrachtungen anknüpfen wie an die Dichte: Ableitung des „spezifischen Gewichtsvolumens“ (reziproker Wert des spezifischen Gewichts); spezifisches Gewicht der Flächeneinheit bei zweidimensionalen, der Linieneinheit bei eindimensionalen Körpern u. s. w.

C.G.S.-System. Es sind bisher drei Fundamentalbegriffe mit den entsprechenden Einheiten aufgestellt worden: die Strecke (cm), die Zeitstrecke (sec) und die Masse (g). Man nennt dieses System von Fundamentaleinheiten, indem man die Anfangsbuchstaben der Einheiten in alphabetischer (nicht logischer) Reihenfolge anwendet, das C.G.S.-System. Es ist ein dreigliedriges System (vgl. p. 2), und es hat sich von allen möglichen bei dem bisherigen Stande unserer Erkenntnis und mit Rücksicht auf die Methoden naturwissenschaftlicher Arbeit am besten bewährt sowohl für wissenschaftliche als für didaktische Zwecke. Das „absolute“ System, als das es von Gauss bezeichnet wurde, ist es aber natürlich in keiner Weise; und es kann sehr leicht durch eine veränderte Auffassungsweise des Naturgeschehens durch ein anderes in den Hintergrund gedrängt werden; bei der Betrachtung des Energiebegriffs wird davon noch die Rede sein. Ein anderes dreigliedriges System ist das von dem sogenannten absoluten dadurch unterschiedene, daß die Masse durch das Gewicht ersetzt wird; man kann es entsprechend als das C.G*.S.-System bezeichnen. Wenn hierin allgemein die „Kraft“ benutzt wäre, so wäre es an Allgemeinheit dem C.G.S.-System völlig ebenbürtig; denn es ist ebenso berechtigt, die Kraft ursprünglich zu definieren und dann die Masse als Quotient aus Kraft und Beschleunigung abzuleiten, wie oben die Masse ursprünglich definiert und die Kraft dann als Produkt aus Masse und Beschleunigung abgeleitet wurde. Während aber in dem Massesystem alles allgemein bleibt, wird das Kraftsystem durch ein spezielles, das Gewichtssystem, ersetzt; und deshalb kann dieses letztere dem Massesystem nicht als ebenbürtig bezeichnet werden; dafür ist es aber anschaulicher und der experimentellen Nachprüfung besser zugänglich.[1]

Wechselkraft. Gravitationsmaß. Es ist schon bei der Masse auf die Zweideutigkeit der einmal passiven, das andere Mal aktiven Definition hingewiesen worden. Auch bei der Kraft findet etwas entsprechendes statt, und zwar wieder durch Einführung der Wechselwirkung in die Betrachtung. Der einfachste Fall einer Wechselwirkung ist offenbar die zwischen zwei punktförmigen Massen m_1 und m_2; in diesem Falle gilt das zuerst von Newton für gravitierende, dann von Coulomb für elektrische und magnetische Massen aufgestellte Wechselwirkungsgesetz

---

[1] Von der sehr ausgedehnten Literatur zum C.G.S.-System und den anderen Maßsystemen sei — außer den schon bei früheren Gelegenheiten genannten — noch angeführt: C. F. Gauss, Werke, Bd. 5. — W. Weber, Elektrodynamische Maßbestimmungen, Teil 2—4. 1852—57. — D. Everett, Units and phys. constants. London 1879. — H. Herwig, Physikalische Begriffe und absolute Maße. Leipzig 1880. — F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik. Anhang. — A. Serpieri, Die absoluten Maße. Leipzig 1885. — A. Czogler, Dimensionen und absolute Maße. Leipzig 1889. — F. Auerbach, Kanon der Physik. Leipzig 1899. — G. Bigourdan, Le systeme métrique etc. Paris 1901. (2 Bde.) — Wegen der vorwiegend elektrisch-magnetischen Literatur sehe man im 5. Bande.

(54) $$W = \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ,$$

wo r die Entfernung zwischen den beiden Punkten ist; die Wechselwirkung hat also die Dimension

(55) $$[W] = L^{-2} M^2$$

und ist somit ein von der Kraft gänzlich verschiedener Begriff. Will man trotzdem die Wechselkraft zu einer Kraft machen, so hat man drei Möglichkeiten.

Das erste, rein formale Verfahren besteht darin, daß man in die Formel für W einen Proportionalitätsfaktor γ einfügt:

(56) $$W = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

und diesem eine solche Dimension anweist, daß W eine Kraft wird; zu diesem Zwecke muß man offenbar

(57) $$[\gamma] = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

setzen. Der Zahlenwert dieses Faktors ist natürlich je nach der Art von Wirkung verschieden; für die Gravitationskonstante ist er

$$\gamma = 66{,}7 \cdot 10^{-9}$$

(näheres darüber im Artikel „Gravitation“). Das will sagen: als Kraft ausgedrückt, beträgt die Gravitation zweier Grammassen im Abstande 1 cm 0,0667 Mikrodynen; damit zwei gleiche Massen in 1 cm Abstand gerade eine Dyne ergeben, muß sonach jede von ihnen 3870 g betragen, und die Beschleunigung, die sie sich erteilen, würde 0,000257 cm/sec^2 betragen; zur Hervorbringung der Beschleunigung 1 in einer 1 cm entfernten Masse — einer wie großen, ist bei der Wechselwirkung gleichgültig — ist also eine aktive Masse von 3870·3870 g, also von rund 15 Tonnen erforderlich. Diese Masse kann man als die Gravitationseinheit der Masse und das auf diese Einheit gegründete Maß das Gravitationsmaß nennen.

Das zweite Verfahren ist eigentlich dasselbe wie das erste, nur daß man das rein äußerliche Vorgehen in der Dimensionsbestimmung des Faktors γ sachlich analysiert und durch sinngemäße Modifikation der Formel für die Wechselwirkung diese auf eine wirkliche Kraft zurückführt. Zu diesem Zwecke muß man zunächst die Entfernung r nicht in cm, sondern in Vielfachen einer Normalentfernung r_0 ausdrücken, so daß in den Nenner der Faktor $(r/r_0)^2$ oder in den Zähler der Faktor $(r_0/r)^2$ kommt; natürlich darf und wird man $r_0 = 1$ cm setzen, aber die Dimension des Faktors $(r/r_0)^2$ wird jetzt, da Zähler und Nenner gleichartig sind, eine reine Zahl. Ferner muß man von den beiden Massen die eine durch das entsprechende Gewicht, weil die aktive Masse eine Kraft ist, ersetzen und die andere Masse als Vielfaches einer Normalmasse ausdrücken; diese letztere wird dadurch ebenfalls eine reine Zahl, und so bleibt auf der rechten Seite nur das Gewicht übrig, d. h. die Wechselwirkung wird eine wirkliche Kraft.

Das dritte Verfahren ist am radikalsten; es ist wohl zuerst von GAUSS angegeben worden und führt zur Reduktion des dreigliedrigen Fundamentalsystems auf ein zweigliedriges. Die dimensionale Übereinstimmung von Kraft und Wechselwirkung läßt sich nämlich auch ohne Einfügung eines Faktors erzwingen, wenn man von den drei Grundbegriffen, auf denen sich die hier in Betracht kommenden Größen aufbauen, nur zwei beibehält und die dritte durch jene zwei derart bestimmt, daß die gewünschte Übereinstimmung erreicht wird. Behält man L und T bei, was doch am nächsten liegt, und beseitigt M, so erhält man für die

Masse sowie für die nunmehr dimensional identischen Begriffe Kraft und Wechselwirkung die Dimensionsformeln:

(58) $$[m] = L^3 T^{-2} \quad , \qquad [K] = [W] = L^4 T^{-4} \quad .$$

Man kann dieses zweigliedrige Fundamentalsystem als das GAUSSische bezeichnen. Um die Bedeutung von Masse und Kraft in ihm anschaulich anzugeben, kann man sagen: Masse ist das Produkt der Beschleunigung in das Quadrat der Entfernung, Kraft ist das Produkt des Quadrats der Beschleunigung in das Quadrat der Entfernung (das Verhältnis von Kraft zu Masse ist auch hier, wie man sieht und wie es sein muß, eine Beschleunigung). — Rein formell könnte man ebensogut auch T oder L beseitigen und würde dann neue Dimensionsformeln für diese Begriffe, ausgedrückt durch L und M, bezw. durch T und M, erhalten; es bietet das aber geringes Interesse dar. — Die in der obigen Dimensionsformel für die Masse ausgesprochene Beziehung des Massenbegriffs zu Strecke und Zeit hat durchaus nicht etwa lediglich abstrakte, erkenntnistheoretische Bedeutung, sie stellt vielmehr eine wirklich physische Beziehung dar; es genüge hierfür auf ein Beispiel hinzuweisen: Das erweiterte dritte KEPLERsche Gesetz besagt (mit einer gewissen Annäherung), daß sich die Quadrate der Umlaufszeiten von Nebenkörpern um Zentralkörper verhalten direkt wie die Kuben der Entfernungen und umgekehrt wie die Massen der Zentralkörper. Hieraus ergibt sich aber für die letzteren die Bestimmungsformel — die in der Astronomie eine große Rolle spielt — [$4\pi^2$ ist der hier nicht interessierende Zahlenfaktor]:

(59) $$m = 4\pi^2 r^3 t^{-2} \quad ,$$

die, wie man sieht, mit der Dimensionsformel übereinstimmt.

Hält man mit der hier besprochenen Beseitigung der Masse als Grundbegriff die schon früher (p. 23) angedeutete Möglichkeit zusammen, mit Hilfe eines auch die Zeit enthaltenden Wechselwirkungsgesetzes, z. B. des WEBERschen elektrodynamischen Grundgesetzes (Bd. 5) den Zeitbegriff zu eliminieren[1], so sieht man die prinzipielle Möglichkeit ein, das äußerste Ziel, die Aufstellung eines eingliedrigen Fundamentalsystems und die Ableitung aller Größen aus Strecken, zu erreichen. Natürlich ist dieser Monismus, wenn es erlaubt ist, ihn so zu nennen, rein formal; daß er aber auch physikalische Bedeutung gewinnen kann, geht aus den früheren Betrachtungen über scheinbare Masse und verborgene Bewegung, sowie aus mancherlei anderem hervor, worauf hier nicht eingegangen werden kann.

Schließlich seien noch zwei Bemerkungen angefügt. Die erste bezieht sich auf die schon berührte Frage, ob man besser von der Masse oder von der Kraft ausgehe. Daß man die Mechanik allgemeiner durch die Masse als durch das Gewicht begründet, ist schon betont worden; jetzt aber soll es sich nicht mehr um eine Spezialkraft handeln, sondern die Kraft soll ebenso allgemein gefaßt werden wie die Masse. Alsdann lassen sich durchschlagende Gründe für das eine oder andere Verfahren nicht angeben, und es wird von der Natur des Gebietes, das man behandelt oder richtiger von dem Stande unserer Kenntnis desselben bezw. unserer Auffassung desselben abhängen, wie man besser verfährt. Es sei in dieser Hinsicht darauf hingewiesen, daß z. B. HERTZ, also einer von den auf die erkenntnistheoretische Begründung besonderes Gewicht legenden Autoren, in der Mechanik umgekehrt verfährt wie in der Elektrodynamik; dort wird von vornherein die Masse und erst am Schlusse die Kraft nebenbei definiert; hier wird von der Kraft ausgegangen und die elektrische oder magnetische Masse erst später rein abstrakt definiert.

Es hängt das offenbar damit zusammen, daß elektrische und magnetische Massen erkenntnistheoretisch doch nicht mit mechanischen Massen — solange

[1] Neuerdings hat G. LIPPMANN das Gravitationsmaß der Zeit wieder in Vorschlag gebracht: C. R. **128.** 1137 und Journ. de Phys. (3) **8.** 401. 1899.

diese noch nicht auf jene reduziert sind — zu vergleichen sind; und das bringt uns auf die andere zu machende Bemerkung. Behält man nämlich bei den elektrischen und magnetischen Grundgesetzen den Wechselwirkungsfaktor bei, so ist man in der Lage, die Wechselwirkung einer Kraft gleich zu machen und doch die elektrische und die magnetische Masse als Massen zu erhalten — ganz wie im Gravitationssystem; dieses Verfahren ist augenscheinlich das natürliche und ist gerade von den hervorragendsten Physikern angewendet und empfohlen worden. Leider ohne Erfolg; es war ein anderes, gemischtes System schon zu festgewurzelt, bei dem man zwar die Wechselwirkung als Kraft setzt, trotzdem aber den Faktor wegläßt, wodurch man nunmehr für die elektrische und die magnetische Masse ganz neue und völlig unanschauliche Dimensionsformeln erhält. Man sehe das Nähere hierüber in der Elektrizitätslehre (Bd. 5).

Erhaltung des Stoffes. Aus einer sehr großen Zahl der verschiedenartigsten Beobachtungen hat man den Schluß ziehen können, daß bei allen qualitativen Veränderungen, die die Materie erfahren kann und die das Forschungsgebiet der Chemie ausmachen, doch die Quantität der Materie, d. h. ihre Masse immer dieselbe bleibt. Man nennt diesen Erfahrungssatz das Prinzip von der Erhaltung des Stoffes, oder von der Konstanz der Masse; Prinzip deshalb, weil man nach so vielen Erfahrungen nunmehr an die Allgemeingültigkeit des Satzes glaubt und ihn geradezu als Leitfaden für die Beurteilung empirischer Resultate benutzt. Natürlich gilt der Satz nur unter der Voraussetzung, daß der Körper oder das System, das die qualitativen Veränderungen durchmacht, dabei mit der Umgebung in keinem Stoffaustausch stehe; man nennt ein solches System ein materiell abgeschlossenes System; bei einem mit der Umgebung in Stoffaustausch stehenden System kann man nur sagen, daß es ebensoviel an Masse zunimmt wie die Umgebung abnimmt oder umgekehrt; und indem man die beteiligte Umgebung hinzunimmt, kann man das System vervollständigen und den Erhaltungssatz wieder in der ursprünglichen Form anwenden. In diesem Sinne spricht man auch von materiell vollständigen und unvollständigen Systemen. Das einzige absolut und exakt vollständige System ist offenbar das Weltganze; für dieses gilt also auch die Konstanz der Masse am exaktesten, und es ist damit zweierlei gesagt: daß im Weltall Materie weder erzeugt noch vernichtet werden könne. Man ersieht hieraus zugleich, daß das Prinzip die Grenze naturwissenschaftlichen Erkennens bezeichnet, indem jeder Schöpfungsakt und jeder Vernichtungsakt aus ihrem Bereich ausgeschlossen wird.

Konstanz oder Veränderung des Gewichts. Unser Prinzip läßt sich mit Rücksicht auf die praktische Identität von Masse und Gewicht auch als Satz von der Unveränderlichkeit des Gewichts formulieren; nur muß man sich jetzt auf einen bestimmten Ort an der Erdoberfläche beschränken. In dieser Form ist der Satz bekanntlich die Grundlage aller chemischen Forschung geworden, und man kann die Chemie geradezu als die Lehre von den qualitativen Veränderungen des Stoffes unter Wahrung seiner Quantität bezeichnen. Daß man bei Anwendung des Prinzips auf die Erfüllung der Vollständigkeit des Systems, an dem man beobachtet, sehen muß, versteht sich jetzt von selbst; in der älteren Chemie sind aus der Nichtbeachtung dieses Punktes bekanntlich die gröbsten Irrtümer entstanden. Erst Lavoisier hat bekanntlich eine in diesem Sinne wissenschaftliche Chemie begründet, und von ihm rühren auch die ältesten Versuche her zum Nachweis der Nichtveränderung des Gewichts bei chemischen Umsetzungen. Von physikalischer Seite wiederum hat um dieselbe Zeit Bessel nachgewiesen, daß das Verhältnis von Masse und Gravitation unabhängig von chemischen Kräften bis auf $^1/_{60000}$ seines Wertes konstant bleibt.

Seit man nun in neuerer Zeit in bezug auf den primären Charakter des Massen- und des Gewichtsbegriffs skeptisch geworden und geneigt ist, diese Äußerungen mit verborgenen Bewegungen eines unbekannten Substrates in Zu-

sammenhang zu bringen, hat man an jene älteren Versuche mit besseren Hilfsmitteln wieder angeknüpft. Namentlich sind hier die Arbeiten von KREICHGAUER, LANDOLT, HEYDWEILLER, Lord RAYLEIGH und J. JOLY[1] zu beachten. KREICHGAUER wog Brom oder Jod und Quecksilber in zugeschmolzenen Glasgefäßen vor und nach ihrer Verbindung, ferner essigsaures Natrium in überkältetem, flüssigem und kristallisiertem Zustande; das Ergebnis war trotz großer Empfindlichkeit der Wage negativ. LANDOLT prüfte folgende Umsätze: Silbersulfat und Ferrosulfat, in Silber und Ferrisulfat, Jod in Jodnatrium mittels Natriumsulfat, Jodsäure und Jodwasserstoff in Jod und Wasser, Chloralhydrat und Ätzkali in Chloroform und Kaliumformiat; auch hier war das Ergebnis negativ oder doch durchaus zweifelhaft. HEYDWEILLER erstreckte seine Messungen auf die Reaktion von Fe mit $CuSO_4 + H_2O$, $CuSO_4 + H_2O$ mit $KOH + H_2O$, $CuSO_4 + H_2O$ (fest) und H_2O, $CuSO_4 + H_2O$ (fest) und $H_2SO_4 + H_2O$, $C_2H_4O_2 + H_2O$ mit $NH_3 + H_2O$, $BaCl_2 + H_2O$ und $H_2SO_4 + H_2O$. Er fand stets Gewichtsabnahmen; diese sind mit den reagierenden Massen nicht proportional, sie treten mit Vorliebe bei den Anwesenheiten von für die eigentliche Umsetzung unwesentlichen Zusätzen (besonders Säure oder Basis) auf und sind daher wahrscheinlich gar nicht durch die Umsetzung selbst, sondern durch eine noch rätselhafte Nebenwirkung bedingt; mit elektrischen oder magnetischen Eigenschaften stehen sie in keinem ersichtlichen Zusammenhange.

Es fragt sich nun, ob die hiermit wenigstens wahrscheinlich gemachte Gewichtsänderung 1. zu Widersprüchen mit anderen Prinzipien führt, worüber man einen Einwand von Lord RAYLEIGH, den HEYDWEILLER widerlegte, nachlese; und 2. ob man diese Veränderung auch auf die Masse übertragen solle. Bejaht man diese Frage, so würde sich das Gewicht ändern, eben weil die Masse sich ändert; verneint man sie, so müßte sich die Beschleunigung durch die Schwere ändern. Zur Entscheidung könnte man verschiedene Anstalten treffen; so müßte untersucht werden, ob bei ganz empfindlicher Anordnung die Schwingungsdauer des Pendels oder die Länge des Sekundenpendels vom Material des Pendelkörpers abhängt. Ferner müßte bei wirklicher Massenänderung in bewegten Systemen sich auch die Beschleunigung ändern, und zwar müßte sie bei Abnahme der Masse offenbar zunehmen; JOLY wendet nun diese Überlegung auf die Erdbahngeschwindigkeit an und findet, daß ein Gewichtsverlust von 0,1 mg auf 200 g, wie ihn HEYDWEILLER fand, schon an der Drehwage erkennbar sein müßte. Die Beschleunigung im Sinne der Erdbewegung müßte zu Mittag als westlich, zu Mitternacht als östlich wirkende Kraft erscheinen; von den vierzehn sehr sorgfältigen Beobachtungen waren nun acht deutlich und günstig, drei ebenfalls günstig, aber undeutlich, die vierzehnte ganz fraglich. — Jedenfalls verdienen diese interessanten Fragen weiter verfolgt zu werden.

In erkenntnistheoretischer Hinsicht ist schließlich einleuchtend, daß das Prinzip von der Konstanz der Masse eine selbständige Bedeutung nur so lange hat und nur so lange als richtig gelten kann, als man die Masse als etwas Primäres und Irreduzibles betrachtet. Sobald man sie und damit die Materie überhaupt als äußeres Ergebnis verborgener Bewegungen ansieht oder gar nachweist, kann es in dieser Form nicht richtig bleiben oder braucht das wenigstens nicht zu tun; denn es ist doch denkbar und sogar wahrscheinlich, daß sich masseliefernde Bewegung in andere, nicht masseliefernde verwandeln kann; und damit geht das Prinzip von der Erhaltung des Stoffes in einem höheren, dem von der Erhaltung der Energie, auf; auf dieses kann erst später eingegangen werden.

---

[1] D. KREICHGAUER, Verh. phys. Ges. 1891. p. 13. — H. LANDOLT, Sitzber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1893. p. 301; Ber. chem. Ges. **26**. 1820. 1893; Ztschr. phys. Chem. **12**. 1. 1893. — A. HEYDWEILLER, Phys. Ztschr. **1**. 527. 1900; **3**. 425. 1902. — Lord RAYLEIGH, Nat. **64**. 181. 1901; **66**. 58. 1902. — J. JOLY, Dublin Trans. (2) **8**. 23. 1903.

Arten von Kräften. Solange man sich auf den formalen Standpunkt beschränkt, wonach die Kraft lediglich das Produkt aus Masse und Beschleunigung ist, bleibt für eine Mannigfaltigkeit von Kräften und für eine nähere Beschreibung dieser kein Raum. Anders, wenn man nun, dem uns innewohnenden Drange folgend, den Kraftbegriff gewissermaßen substanziiert und ihn als eine reale Ursache von Vorgängen auffaßt. Alsdann kann man Kräfte von verschiedenem Charakter unterscheiden und Klassifikationen nach verschiedenen Gesichtspunkten vornehmen. Das Nähere hierüber muß den einzelnen Disziplinen vorbehalten bleiben; hier kann es sich nur um eine Betonung der prinzipiellen Charaktere handeln.

Fernkräfte und Nahekräfte. Die Substanziierung der Kraft erhält ihren greifbarsten Ausdruck darin, daß man ihr einerseits einen „Sitz", andererseits einen „Wirkungsort" zuschreibt. Das führt nun sofort zu einer für die Darstellung der Naturerscheinungen wichtigen Gegenüberstellung. Verlegt man nämlich Sitz und Wirkung einer Kraft an zwei voneinander räumlich getrennte Stellen, derart, daß der Sitz nur hier, die Wirkung ausschließlich dort ist, so erhält man das, was man eine Fernkraft und eine Fernwirkung nennt. Das Charakteristische für eine Fernwirkung ist, daß der Raum und das Medium, das sich zwischen Sitz und Wirkungsort befindet, an dem Vorgang weder aktiv (als Kraftsitz) noch passiv (als Sitz von Wirkungen) beteiligt ist; damit ist das zweite Charakteristikum notwendig verbunden, daß die Wirkung eine augenblickliche ist, d. h. keine Zeit braucht, um von dem Kraftsitz an den Wirkungssitz zu gelangen. Denn anderenfalls müßte sie in der Zwischenzeit an einem anderen Orte sein, und das könnte wieder nur das Zwischenmedium sein. Der Fernkraft gegenüber steht die Nahekraft; sie wirkt da, wo sie ist und ihre Wirkung pflanzt sich von hier aus in endlicher Zeit in die Umgebung fort; diese Umgebung wird dadurch selbst zum Kraftsitz u. s. w. Man kann sogar unter Umständen von einem ursprünglichen Sitze der Kraft ganz absehen und den ganzen Raum, um den es sich bei der betreffenden Erscheinung handelt, als von Kraft erfüllt ansehen — eine Vorstellung, auf die bei der Betrachtung des Feldes näher eingegangen werden wird. Übrigens ist zu beachten, daß, wenn hier von Fern- und Nahewirkungen die Rede ist, damit nur der diskontinuierliche oder kontinuierliche Charakter des Vorganges bezeichnet, nicht aber irgend etwas über die Größe der Entfernung zwischen Kraft und Wirkung ausgesagt werden soll; diese kann vielmehr auch bei der Fernkraft, wo sie in gewissen Fällen (Astronomie) überaus groß ist, in anderen Fällen (Molekularkräfte) außerordentlich klein sein.

Die Diskussion darüber, ob zur Darstellung von Naturerscheinungen Fern- oder Nahekräfte vorzuziehen seien, ist ebenso alt wie unerschöpflich; zurzeit aber besteht unter den physikalischen Erkenntnistheoretikern kaum ein Zweifel über die Richtigkeit der folgenden Überlegung.[1] Zunächst ist freilich zuzugeben, daß die Idee der Fernkraft etwas Unbegreifliches in sich trägt, und daß die Nahekraft in dieser Hinsicht bei oberflächlicher Betrachtung als einfacher und sympathischer erscheint; eine nähere Untersuchung lehrt jedoch, daß der Vorgang der Nahewirkung ebenfalls Unbegreiflichkeiten in sich schließt und noch dazu solche, die auch rein formal viel komplizierter sind als die sozusagen elementare Unbegreiflichkeit der Fernwirkung. Sieht man daher als die Aufgabe der Naturwissenschaft die Einfachheit und Vollständigkeit der Beschreibung an, so kann

[1] Das neueste zusammenfassende Referat über Fernwirkungen verdankt man P. DRUDE, WIED. Ann. **62.** I—XLIX (vorgeheftet). 1898. Daselbst finden sich auch reiche Literaturangaben. — Vgl. auch P. DU BOIS-REYMOND, Naturw. Rundsch. **3.** 169. 1888. — C. ISENKRAHE, Über die Fernkraft u. s. w. Leipzig 1889. — A. KORN, Naturw. Wochenschr. (**2**) **1.** 330. 1902, wo die verschiedenen Vorstellungen zur Beseitigung der Fernwirkung nach eigenen und fremden Arbeiten besprochen werden. Im übrigen wird im Artikel „Gravitation" auf die Frage zurückzukommen sein.

es keinem Zweifel unterliegen, daß die Darstellung durch Fernwirkung, solange sie vollständig ist, ihrer Einfachheit wegen den Vorzug verdient. Es fragt sich also nur noch, wie lange sie vollständig bleibt, welches also die Kriterien dafür sind. Deren gibt es aber offenbar drei: es kommt darauf an: 1. ob das Zwischenmedium aktiv beteiligt ist, d. h. ob es einen Einfluß auf den Vorgang hat; 2. ob es passiv beteiligt ist, d. h. ob es durch den Vorgang beeinflußt wird; 3. ob die Erscheinung Zeit braucht, um sich auszubreiten. Ist auch nur eines von diesen dreien nachgewiesen, so muß man die Fernwirkungstheorie fallen lassen. Als lehrreiches und auch historisches Beispiel hierfür kann die Gravitation einerseits und der Elektromagnetismus andererseits gelten: bei der Gravitation sind alle drei obige Fragen trotz vielfacher Bemühungen, gegenteilige Nachweise zu führen, immer noch zu verneinen, und man wäre deshalb vom Standpunkte exakter Naturlehre nicht berechtigt, das Newtonsche Gesetz durch Nahewirkungsbetrachtungen ersetzen oder analysieren zu wollen; umgekehrt sind alle drei Fragen auf dem Gebiete der elektromagnetischen Vorgänge, wenigstens bei einer ganzen Klasse von ihnen, zu bejahen, und so mußte hier die Ferntheorie der Nahe- oder Feldtheorie weichen. Es handelt sich hier, wie in allen derartigen Fällen, nicht um wahr und falsch, sondern um einfach und zweckmäßig. Sehr bezeichnend in dieser Hinsicht ist das Verfahren Maxwells, der auf den beiden Gebieten, auf denen er die größten Erfolge erzielte, genau entgegengesetzte Wege einschlug und ebendadurch in beiden Fällen die Wissenschaft gewaltig förderte: in der Gastheorie führte er die scheinbaren Nahewirkungen auf die Fernkräfte zwischen Molekeln, in dem Elektromagnetismus die scheinbaren Fernkräfte auf Nahekräfte zurück.

Eiuen weiteren Schritt hat dann Hertz getan, indem er, um die Fernkräfte völlig entbehrlich zu machen, die Vorstellung der verborgenen Massen einführte, d. h. von Massen, die man zwar nicht wirklich nachweisen kann, die aber, mit den sichtbaren zusammen, die beobachteten Bewegungen begreiflich machen.

Druckkräfte. Die Vorstellung der Nahekräfte kann man nun, im Gegensatz zu der der Fernkräfte, noch näher präzisieren, indem man feststellt, auf was für einen Komplex sich die Wirkung dieser und jener Kräfte denn erstreckt. Eine Fernkraft wird naturgemäß als auf eine Masse wirkend angesehen, eben auf diejenige Masse, die als Faktor der empirischen Beschleunigung auftritt. Man kann in diesem Sinne Fernkräfte auch als Massenkräfte bezeichnen; und man wird als Einheitsfall den hinstellen können, wo die Masse, auf die die Kraft wirkt, die Einheit ist; das ist dann formal natürlich wieder die Beschleunigung, hat aber nun als Einheitskraft eine substanziierte Bedeutung. Ganz anders bei Nahekräften. Auch hier wird man sich zwar die Kraft auf eine Masse wirkend vorstellen, aber, wegen des Nahecharakters der Kraft, nur auf ein Massenelement und zwar von dem unmittelbar benachbarten Massenelement aus. Das gemeinsame dieser beiden Massenelemente ist aber ihre Berührungsfläche; auf diese wird also eigentlich die Kraft wirken. Eine solche Kraft, die also, im Gegensatz zu der Massenkraft, eine Flächenkraft ist, nennt man im gewöhnlichen Leben, dem sich die Wissenschaft angeschlossen hat, eine Druckkraft. Das Wesentliche dieser Vorstellung besteht hiernach darin, daß zwei Systeme durch die Gemeinsamkeit ihrer Berührungsfläche einen Einfluß aufeinander ausüben, und man kann diesen Einfluß, wie das Hertz getan hat, geradezu als Druckkraft oder kurz als Kraft (andere Kräfte kennt ja Hertz nicht) bezeichnen. Solche Systeme heißen dann gekoppelte Systeme.

Ferner, wie man aus der Massenkraft die Einheitskraft herausschält, so betrachtet man hier, als die für die Erscheinung im allgemeinen charakteristische Größe, die auf die Einheit — 1 qcm — der Fläche wirkende Druckkraft und nennt sie Einheitsdruckkraft oder kurz Druck. Zuweilen findet man auch die

Ausdrücke Gesamtdruck für die Kraft selbst und Einheitsdruck für die auf die Flächeneinheit wirkende Kraft. Übrigens muß der Druck aus der Druckkraft im allgemeinen natürlich infinitesimal abgeleitet werden: der Druck in einem Punkte einer Fläche ist der Grenzwert, dem sich das Verhältnis der Druckkraft zu der Fläche, auf die sie wirkt, nähert, wenn man diese Fläche immer kleiner wählt, derart, daß sie trotzdem immer den gegebenen Pnnkt umschließt. Diese Definition macht sich stets dann notwendig, wenn der Druck von Ort zu Ort variiert; für den Fall gleichförmigen Druckes kann man einfach die Druckkraft durch die Fläche dividieren. Für den Druck p (Druckkraft P) gelten offenbar die Formeln und Dimensionsformel:

(60) allgemein: $$p = \frac{dP}{df} \quad , \qquad \text{speziell:} \quad p = \frac{P}{f} \quad ,$$

(61) $$[p] = L^{-1} T^{-2} M \quad .$$

Bei variablem Drucke kann man auch über eine endliche Fläche den mittleren Druck p' bilden und hat dann die Formel:

(62) $$p' = \frac{1}{f}\int p\, df \quad .$$

Die Druckeinheit ist durch die Einheiten der Kraft und der Fläche gegeben, sie ist also im absoluten Maße eine Dyne pro qcm, im Gewichtssystem 1 g* pro qcm, meist aber 1 kg* pro qcm oder gar 1 kg* pro qmm. Eine weitere, sehr übliche Einheit ist der Atmosphärendruck, d. h. der Druck der über einem Erdoberflächenstück lagernden Luftsäule bei 76 cm Barometerstand und 0° C Temperatur. Dieses Maß ist ein Gewichtsmaß, hat also zwar, in kg* ausgedrückt, einen konstanten, in Dynen pro qcm ausgedrückt aber einen mit Breite und Höhe veränderlichen Wert. Man hat nämlich folgende Beziehungen:

allgemein: 1 Atm = 1,0333 kg* = 1033,3 g* pro qcm

für g = 981: 1 Atm = 1013667 Dynen = 1,0137 Megadynen pro qcm.

Eine Atmosphäre ist hiernach nur um etwa $1\,^1/_3\,^0/_0$ größer als eine Megadyne pro qcm; man kann sie genau einander gleich machen, wenn man statt 76 cm nur 75 cm Barometerstand wählt; es ist vorgeschlagen worden, aber nicht allgemein durchgedrungen, diesen Druck als Normaldruck und die entsprechende Säule als normale Atmosphäre zu bezeichnen. Vom Atmosphärendruck bildet man nun wiederum kleinere Einheiten durch Division mit 76 oder 760 und gelangt so zu den Einheiten des cm Hg oder mm Hg (Quecksilber).

Kraftkomponenten und Druckkomponenten. Eine Kraft ist vom Charakter eines Vektors (p. 16), sie läßt sich daher durch drei Komponenten nach rechtwinkligen Koordinatenachsen repräsentieren, und mit jeder von diesen kann man wie mit Skalaren rechnen. Nennt man sie X, Y, Z, die Winkel aber, die der Kraftvektor mit den Achsen bildet, α, β, γ, so hat man zwischen der Kraft, ihren Komponenten und denen der Beschleunigung (p. 32) folgende Beziehungen:

(63) $$X = m\xi = K\cos\alpha \quad , \qquad Y = m\eta = K\cos\beta \quad , \qquad Z = m\zeta = K\cos\gamma \quad .$$

(64) $$K = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad .$$

Entsprechendes gilt für die Komponenten eines Impulses und ihre Beziehungen zu den Komponenten der Geschwindigkeit.

Im Gegensatze hierzu ist der Druck vom Charakter eines Tensors (p. 17) und infolgedessen nicht durch drei Komponenten, sondern nur durch ein komplizierteres System ersetzbar. Der Druck ist eben nicht bloß, wie die Kraft, eine Funktion des Ortes, sondern auch in einem und demselben Punkte je nach der Orientierung der durch ihn gelegten kleinen Fläche verschieden, durch die

hindurch er wirken soll. Charakterisiert man die Fläche durch die Richtung ihrer Normalen n, so hat man den auf sie wirkenden Druck, der im allgemeinen schief sein wird, durch p_n zu bezeichnen, und man kann ihn in drei rechtwinklige Komponenten X_n, Y_n, Z_n zerlegen; für ein anderes Flächenelement werden diese Größen aber andere Werte haben. Nun läßt sich zeigen (vgl. Artikel „Elastizität"), daß sich die Werte für alle Flächenelemente durch die Werte für diejenigen drei ausdrücken lassen, deren Normalen die Richtungen der Achsen haben; man wird die Drucke auf diese Flächen mit p_x, p_y, p_z bezeichnen und ihre Komponenten mit X_x, Y_x, Z_x; X_y, Y_y, Z_y; X_z, Y_z, Z_z. Von diesen neun Größen erweisen sich je diejenigen beiden als gleich, die sich nur durch Vertauschung des großen mit dem kleinen Buchstaben unterscheiden; es bleiben also nur sechs übrig. Diese sechs Größen heißen die Druckkomponenten. Die Aufgabe, sie mit dem auf ein bestimmtes Flächenelement wirkenden, gegebenen Druck in Zusammenhang zu bringen und die gesamten Druckverhältnisse an dem betreffenden Orte durch sie ausdrücken, muß auf die Elastizitätslehre verschoben werden.

Normalkräfte und Tangentialkräfte. Anziehung, Abstoßung, Ablenkung. Eine weitere Unterscheidung betrifft, zunächst bei Fernkräften, das Verhältnis, in dem die Richtung der Kraft zu der Richtung steht, in der Sitz der Kraft und Sitz der Wirkung zueinander liegen. Fernkräfte, die in diese letztere Richtung fallen, nennt man Normalkräfte, häufiger aber, indem man den Kraftsitz als Zentrum der Erscheinung ansieht, Zentralkräfte. Dabei ist zu unterscheiden zwischen Kräften, die nach dem Zentrum hin und solchen, die von ihm fort wirken; jene heißen Anziehungskräfte, diese Abstoßungskräfte, ihr Ergebnis Anziehung bezw. Abstoßung. Im extremen Gegensatz zu ihnen stehen Kräfte, die senkrecht zur Abstandslinie wirken, die also seitlichen Charakter haben; im einfachsten Falle wird hier offenbar die Kraft in die Tangente der Bahn fallen, und deshalb heißen diese Kräfte Tangentialkräfte; eine andere Bezeichnung, die direkt an ihren seitlichen Charakter anknüpft, ist die als Ablenkungskräfte; das Ergebnis heißt dann Ablenkung. Verfolgt man diese Ablenkung Schritt für Schritt und läßt sie dabei immer senkrecht zur Zentrallinie bleiben, so sieht man, daß das Resultat eine Drehung um das Zentrum sein wird; man spricht daher auch von Drehkräften. Aus diesen Festsetzungen folgt übrigens keineswegs, daß man in allen Fällen Anziehungen auf Zentralkräfte, Drehungen auf Ablenkungskräfte zurückführen muß; es sind vielmehr Fälle denkbar und sie spielen tatsächlich eine große Rolle, wo es sich als zweckmäßiger erweist, anders zu verfahren. Ein Beispiel der einen Art ist die Bewegung der Weltkörper um ihre betreffenden Zentralkörper, z. B. der Erde um die Sonne, die nicht durch eine ablenkende, sondern durch eine anziehende Kraft, wozu dann noch die Nachwirkung eines früheren, einmaligen, seitlichen Impulses hinzugefügt werden muß, beschrieben wird; ein entgegengesetztes Beispiel bietet die Wirkung eines elektrischen Kreisstromes auf einen Magnetpol, der in seiner Achse, d. h. in der auf dem Mittelpunkte der Kreisfläche errichteten Normale liegt, und der einfach von der Kreisebene angezogen oder abgestoßen wird — trotzdem führt man die Wirkung auf Ablenkungskräfte zurück, die von den einzelnen Stromelementen ausgehen. Man verfährt eben immer so, daß man dadurch die verschiedenen, einem Gebiete angehörigen Erscheinungen in möglichst einheitlichen Zusammenhang miteinander bringt; und das geschieht in der Gravitation durch Zentralkräfte, im Elektromagnetismus durch Ablenkungskräfte.

Druckkräfte und Scherkräfte. Der ganz entsprechende Gegensatz läßt sich nun auch bei den Druckkräften durchführen: der Druck kann unter den vielen möglichen Richtungen zwei typische haben, er kann nämlich zur Druckfläche entweder senkrecht gerichtet sein oder in ihr selbst wirken. Man spricht daher von Normaldruck oder Druck im engeren Wortsinne, und von Tangentialdrucken oder Scherungsdrucken. Von den oben eingeführten sechs Druckkomponenten

sind offenbar diejenigen drei, deren Haupt- mit dem Indexbuchstaben übereinstimmt, also X_x, Y_y, Z_z Normaldrucke, die drei anderen, also $Y_z\,[= Z_y]$, $Z_x\,[= X_z]$, $X_y\,[= Y_x]$ Tangentialdrucke. Wie bei den Fernkräften, insoweit sie Zentralkräfte sind, zwischen Anziehung und Abstoßung zu unterscheiden ist, so hier bei Normaldrucken zwischen eigentlichem Drucke und seinem Gegenteile, dem Zug, wofür man, wenn es sich mehr um den Zustand des betreffenden Systems handelt, häufig auch Druckspannung und Zugspannung sagt.

Stoßkräfte. Endlich hat man bei Nahekräften noch zu unterscheiden zwischen statischen Dauerkräften, eben den Druckkräften, und einer Modifikation derselben, bei der der Druck nur als eine Episode im Verlaufe eines Bewegungsvorgangs auftritt; man nennt die Kraft alsdann Stoßkraft und den Vorgang selbst Stoß.

E. Eigenschaften und Konstitution der Materie.

Eigenschaften der Materie. Bei der Einführung der Idee der Materie ist bereits betont worden, daß diese sich den verschiedenen Sinnesorganen sowie den verschiedenen in der Natur vorhandenen oder von uns willkürlich hergestellten Einflüssen gegenüber völlig verschieden verhält, daß jedes einzelne Verhalten dieser Art durch eine besondere Konstante charakterisiert werden muß, und daß, wenn man aus diesen gerade die Masse herausgreift, um die Materie zu definieren und zu messen, dies mit Rücksicht auf die grundlegende und unserer Sinneswahrnehmung sich am gröbsten aufdrängende Bedeutung der Bewegung der Materie geschieht. Nachdem die Materie auf diese Weise definiert ist, erhebt sich nun aber die Aufgabe, auch alle ihre übrigen Eigenschaften festzustellen und durch charakteristische Konstanten auszudrücken — eine Aufgabe, die offenbar einen wesentlichen Teil der physikalischen Arbeit auf allen Einzelgebieten ausmachen wird; hier können deshalb nur einige Andeutungen über das Wesen dieser Eigenschaften und Konstanten gemacht werden. Erinnert man sich zunächst daran, daß die Materie bisher durch die Masse einerseits, durch das Gewicht andererseits charakterisiert wurde, und daß jene sie in ihrem passiven, diese sie in ihrem aktiven Verhalten kennzeichnet, so wird man vermuten, daß auch alle übrigen Konstanten in eine dieser beiden Kategorien fallen werden. Die Masse ist der Widerstand gegen Bewegung; hieran werden sich nun also weitere Widerstandsgrößen anschließen: so zunächst der Widerstand gegen Konfigurationsänderungen der Teile eines Körpers, die Elastizität der Stoffe, gemessen durch ihre Elastizitätskonstanten; der Widerstand gegen innere seitliche Bewegungen: Zähigkeit; dann der Widerstand gegen Temperaturänderung: Wärmekapazität (entsprechend der Masse) und spezifische Wärme (entsprechend der Dichte); die Widerstände gegen elektrische, magnetische und optische Erregung oder Durchströmung u. a. m. Man kann für Größen dieser Art, statt sie als Widerstände zu bezeichnen, noch einen anderen Namen gebrauchen, der sie in gewisser Hinsicht treffend kennzeichnet, und der in einem der obigen Fälle sogar allgemein üblich ist: man kann sie als Kapazitätskonstanten bezeichnen; sie besagen nämlich, welchen Betrag an verursachender Kraft ein Stoff braucht, bildlich gesprochen in sich aufnehmen muß, damit die Einheit der Wirkung zustande komme; so ist Masse Kapazität für bewegende Kraft, Elastizität Kapazität für deformierende Kraft, die Wärmekapazität ist ohne weiteres verständlich u. s. w. Wenn ein Stoff für irgend eine Einwirkung große Kapazität hat, so ist das in der Hauptsache, nämlich ökonomisch, ungünstig, in einer anderen aber günstig, insofern er zur Aufbewahrung großer Mengen des betreffenden Agens geeignet ist. Andere Eigenschaften der Materie werden zweckmäßig in aktivem Sinne eingeführt, bei noch anderen sind beide

Charakterisierungen wichtig — jedoch würde ein Eingehen hierauf an dieser Stelle zu weit führen.

Aggregatzustände. Eine besonders wichtige Unterscheidung der verschiedenen Stoffe in physikalischer Hinsicht ist die nach ihrem Verhalten in bezug auf Kräfte, die die relative Konfiguration, also die Größe und Gestalt der Körper beeinflussen; d. h. ihr Verhalten in bezug auf das, was man als Elastizität im allgemeinsten Sinne bezeichnen kann. Man unterscheidet in dieser Hinsicht drei Aggregatzustände, die man, vorbehaltlich eingehenderer Erörterung in den betreffenden Spezialkapiteln, in idealer Abstraktion folgendermaßen kennzeichnen kann: 1. Stoffe von unendlich großem Widerstande sowohl gegen Volumenänderung als auch gegen Gestaltsänderung heißen starre oder ideale feste Körper. 2. Stoffe von unendlich großer Volumenelastizität, aber unendlich kleiner Gestaltselastizität heißen ideale inkompressible Flüssigkeiten. 3. Stoffe von einer für Volumenverkleinerung endlichen, für Volumenvergrößerung unendlich kleinen Volumenelastizität und von unendlich kleiner Gestaltselastizität heißen ideale kompressible Flüssigkeiten oder kürzer ideale Gase. In Wahrheit sind die verschiedenen, hier als unendlich groß oder klein bezeichneten Widerstände nur mehr oder weniger groß oder klein, und so erhält man an Stelle der obigen Grenztypen graduell sich ordnende wirkliche Stoffklassen; und man erhält alsdann ferner Übergänge zwischen den drei Aggregatzuständen, bei denen die Zugehörigkeit zweifelhaft wird. Übrigens ist der Aggregatzustand nicht eine bleibende Eigenschaft einer Stoffart, es können vielmehr physikalische Einflüsse, namentlich Druck und Temperatur, denselben Stoff aus einem in einen anderen Aggregatzustand überführen; diese Überführungen heißen Schmelzung und Erstarrung, Verdampfung und Verflüssigung sowie Sublimation.

Im Laufe der Entwickelung der Wissenschaft und aus Anlaß des Bekanntwerdens neuer, zunächst unverständlicher Tatsachen ist wiederholt der Versuch gemacht worden, weitere Aggregatzustände, namentlich einen vierten, jenseits des gasförmigen liegenden, aufzustellen; es hat sich aber in allen diesen Fällen gezeigt, daß das zum Verständnis der betreffenden Erscheinungen nicht notwendig ist. Dagegen gibt es noch eine ganze Anzahl Sonderzustände von Materie, von denen hier die folgenden erwähnt seien: die Lösungen, und zwar gewöhnliche und kolloidale, die Suspensionen und Emulsionen, die Schaumgebilde und die Pulver. Sie bieten alle in mehreren Hinsichten besondere Erscheinungen dar, worüber man in den betreffenden Sondergebieten Angaben findet.

Stoffarten. Unabhängig von dieser physikalischen Gliederung der Stoffe ist eine andere, die chemische, von entscheidender Bedeutung, und zwar nicht bloß für ihr chemisches, sondern vielfach auch für ihr physikalisches Verhalten. Die Zahl der chemisch verschiedenen Stoffe ist außerordentlich groß; es hat sich aber gezeigt, daß man die meisten von ihnen auf andere zurückführen, wie man sagt, in andere zerlegen kann. Die nicht weiter, wenigstens mit den gegenwärtigen Mitteln nicht zerlegbaren Stoffe heißen chemische Elemente, die übrigen chemische Verbindungen. Daß bei allen chemischen Umsetzungen die Gesamtmasse der beteiligten Stoffe ungeändert bleibt, wurde schon erörtert; es gilt aber noch ein anderes grundlegendes Gesetz der chemischen Prozesse, das Gesetz der Äquivalenz verschiedener Stoffe oder der konstanten Verbindungsverhältnisse: bei allen Stoffverwandlungen stehen die Massen verschiedener Stoffe, die einander ersetzen oder sich miteinander verbinden, in bestimmten Verhältnissen. Jedem Stoffe gehört also eine charakteristische Größe, die Äquivalentzahl, zu. Man glaubte früher, daß diese Zahlen, die natürlich keine absolute Bedeutung haben, sondern auf irgend einen Stoff, z. B. Wasserstoff als Einheit bezogen werden müssen, ganze Zahlen wären; es ist das aber, wie genauere Bestimmungen gezeigt haben, nicht der Fall, und auch die Frage, ob die Zahlen wenigstens ganzen Zahlen nahekommen, läßt sich nicht allgemein bejahen. Von der Angabe von

Äquivalentzahlen möge hier abgesehen werden, da bei der Molekulartheorie, durch die die in Rede stehende Tatsache erst ihre anschauliche Bedeutung gewinnt, darauf zurückzukommen sein wird.

Auch auf die weiteren chemischen Grundgesetze, wie das Gesetz der Valenzen, das Massenwirkungsgesetz u. s. w. kann hier, obgleich diese nicht selten auch für physikalische Fragen wichtig werden, nicht eingegangen werden; es muß vielmehr auf die Lehr- und Handbücher der allgemeinen Chemie verwiesen werden.[1]

Homogenität und Heterogenität. Isotropie und Heterotropie. Einen Körper, der sich in bezug auf alle Einwirkungen, denen er ausgesetzt werden kann, in irgend einem seiner Punkte ebenso verhält wie in jedem anderen, nennt man homogen; der Gegensatz hierzu ist heterogen. Die Heterogenität kann von grober Art sein, wie bei einer aus einer eisernen und einer kupfernen Halbkugel zusammengesetzten Kugel oder wie bei dem unter dem Namen Granit bekannten Gestein; hier finden Unstetigkeiten im Material statt; oder sie kann von stetigem Charakter sein, derart, daß sich die Eigenschaften von Ort zu Ort nur ganz allmählich ändern, sei es nun in einseitigem Sinne oder in mehr oder weniger unregelmäßiger Weise. Wenn bei einem Körper die Beschaffenheit zwar an verschiedenen Stellen verschieden ist, jedoch so, daß sie nur um geringe Beträge hin und her schwankt und schon für kleine Komplexe den richtigen Mittelwert besitzt, so kann man ihn als quasihomogen bezeichnen. Ein heterogener Körper kann sich in der einen oder anderen Hinsicht wie homogen verhalten; wirklich homogen ist er nur dann, wenn er sich in allen Hinsichten, gegenüber allen Einwirkungen homogen verhält.

Einen Körper nennt man isotrop, wenn er sich in einem seiner Punkte nach allen Richtungen gleich verhält, und zwar in bezug auf alle Einwirkungen, denen man ihn aussetzen kann; und wenn er diese Eigenschaft in jedem seiner Punkte hat (dabei kann er sich in verschiedenen Punkten nach derselben Richtung verschieden verhalten); im entgegengesetzten Falle nennt man den Körper heterotrop. Auch die Heterotropie kann grob und unstetig oder fein und stetig sein; der letztere Fall beansprucht aber hier ein ganz besonderes Interesse, weil er bei einer überaus großen und wichtigen Klasse von Körpern, den Kristallen, verwirklicht ist; man neigt sogar vielfach der Ansicht zu, daß alle Körper heterotrop und auch die sogenannten isotropen nur quasi-isotrop sind, d. h. aus lauter, freilich sehr kleinen heterotropen Komplexen bestehen, deren Aufbau aber unter gleicher Berücksichtigung aller Richtungen erfolgt ist, so daß der Effekt nach außen Isotropie ist. Auch die Isotropie setzt ein entsprechendes Verhalten in allen Hinsichten voraus; unter den heterotropen Körpern sind manche in gewisser Hinsicht, z. B. in optischer, isotrop, in anderen aber nicht.

Kristalle. Körper von homogener, aber stetig-heterotroper Beschaffenheit heißen Kristalle. Durch ihre Homogenität unterscheiden sie sich von den Hölzern und anderen organischen Gebilden, die nicht nur heterotrop, sondern auch heterogen sind, und bei denen die Heterotropie meist erst eine Folge der Heterogenität ist. Eine Einschränkung muß man der Definition noch in der Richtung geben, daß die Heterotropie bei Kristallen eine natürliche, ihnen ursprünglich anhaftende Eigenschaft ist, während z. B. bei gepreßten oder grob gekühlten Gläsern die Heterotropie eine künstliche ist.

Die Heterotropie eines Kristalls offenbart sich schon bei seiner Entstehung und bei seinem Wachstum, indem bei gegebenem Material an Bildungsflüssigkeit sich eine bestimmte Form bildet; auch ein ursprünglich kugeliges, in seiner Lösung schwebendes Stück bleibt bei seinem Wachstum nicht kugelig, sondern nimmt eine ganz bestimmte Form an. Diese Kristallformen sind polyedrisch, d. h. sie sind begrenzt durch ebene Flächen, und diese stoßen in geraden Kanten

[1] W. OSTWALD, Lehrbuch und Grundriß, W. NERNST, u. A.

aneinander. Wie sich nun bei der Untersuchung der überaus reichen Mannigfaltigkeiten von Kristallformen, die die Natur darbietet, gezeigt hat, ist das für einen bestimmten Stoff Charakteristische nicht die Größe des ganzen Kristalls, auch nicht die Gestalt als solche (es können z. B. verschiedene Richtungen in verschiedenem Maße ausgebildet sein), sondern die Größe der Flächenwinkel, wie dies schon STENO 1669 gefunden und dann ROMÉÉ DE l'ISLE bestätigt hat.

Wählt man irgend einen Punkt im Kristall zum Anfangspunkt und legt durch ihn drei Ebenen, die zu drei beliebigen eine Ecke bildenden Kristallflächen parallel sind, so nennt man diese Ebenen Achsenebenen, ihre Schnittlinien Achsen, deren Winkel miteinander Achsenwinkel, die acht Teile, in die die Achsenebenen den Raum teilen, Oktanten, die von irgend einer anderen Kristallfläche abgeschnittenen Achsenstücke deren Parameter und die Parameter einer geeignet ausgewählten Fläche Achsenlängen. Da es zur Charakterisierung eines Kristallpoyeders sich nur um Richtungen handelt, kommt es nicht auf die absoluten Werte der Parameter bezw. Achsenlängen an, sondern nur auf das Verhältnis der zweiten und dritten dieser Größen zur ersten; diese beiden Verhältnisse $b:a$ und $c:a$ nebst den drei Achsenwinkeln α, β, γ heißen die Elemente des Kristalls. Endlich heißen die Verhältnisse der Achsenlängen zu den Parametern einer bestimmten Kristallfläche deren Indizes.

Auf diese Indizes bezieht sich nun das Gesetz, das man im Laufe der Zeit als das Grundgesetz der geometrischen Kristallographie kennen gelernt hat, über dessen Bedeutung und Begrenzung indessen neuerdings wieder eine Diskussion eingesetzt hat: das Gesetz der Rationalität der Indizes. Es besagt: die Indizes jeder Kristallfläche sind drei ganz rationale Zahlen (und zwar meist kleine ganze Zahlen). Man kann hiernach Kristallflächen in sehr einfacher Weise symbolisch bezeichnen, nämlich durch $(h\,k\,l)$, wo h, k, l drei kleine ganze Zahlen sind, die sich auf die Richtungen nach vorn, rechts, oben (bei Minuszeichen entgegengesetzt) beziehen; bei manchen Kristallen tritt noch ein vierter Buchstabe hinzu. Durch diese sogenannte MILLERsche Bezeichnungsweise sind die anderen mehr in den Hintergrund gedrängt worden. — Außer dem Indizesgesetz gibt es noch einige andere kristallographische Grundgesetze, namentlich das Zonengesetz, auf die hier aber nicht eingegangen werden kann.

Symmetrie der Kristalle.[1] Was den Physiker am meisten interessiert, sind die Symmetrieverhältnisse der Kristalle, also diejenige Eigenschaft, durch die sie sich, je mehr dieselbe ausgebildet ist, von der völligen Symmetrielosigkeit mehr und mehr der Isotropie nähern. Ein Kristall besitzt Symmetrie, wenn er durch Drehung um einen ganzen Bruchteil von 360^0 oder durch Spiegelung oder durch eine Kombination beider Operationen in eine Lage kommt, in der er sich mit seiner ursprünglichen Lage deckt. Die Spiegelungsebene heißt Symmetrieebene; die Drehungsachse heißt Symmetrieachse, und zwar n-zählig, wenn Drehung um den n. Teil von 360^0 zur Deckung genügt; der Punkt endlich, der alle durch ihn gezogenen und durch die Kristallflächen begrenzten Geraden halbiert, heißt Symmetriezentrum und ist zugleich geometrischer Mittelpunkt (letzterer aber nicht notwendig ersteres). Aus der Kombination dieser verschiedenen möglichen Symmetriearten entsteht nun, wie man sich denken kann, eine große Zahl von

[1] J. CH. FR. HESSEL, GEHLERS Wört. Art. „Kristall" (1829); Universitätsschrift Marburg 1862. — A. BRAVAIS, Journ. Ecole polyt. **19.** 1. 1848; **20.** 101. 1849; C. R. **32.** 284; LIOUV. Journ. **14.** 141. — GADOLIN, Acta Soc. fenn. **9.** 1. — E. v. FEDOROW, Verh. Min. Ges. Petersb. 1884. **20.** 334. — P. CURIE, Bull. Soc. min. de France **7.** 89. 418. 1884. — B. MINNIGERODE, N. Jahrb. f. Min., Beil.-Bd. **5.** 145. 1887. — A. MÖBIUS, Ber. Sächs. Wiss. **1.** 65. 1849; **3.** 19. 1851; Werke **2.** 567. — A. SCHÖNFLIES, Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig 1891. — C. VIOLA, Ztschr. f. Krist. **27.** 1. 1897; **34.** 353. 1901. — F. WALLERANT, Bull. Soc. Min. **24.** 159. 1901. — W. BARLOW, Ztschr. f. Krist. **34.** 1. 1901. — Vgl. auch die Lehrbücher von P. GROTH, TH. LIEBISCH und W. VOIGT.

Symmetrieformen. Sie würde überhaupt unbegrenzt sein, wenn nicht das Gesetz der rationalen Indizes alle anderen als die zwei-, drei-, vier- und sechszähligen Symmetrieachsen ausschlöße. Dadurch reduziert sich, wie zuerst HESSEL im Jahre 1830 gezeigt hat, die Zahl der Symmetriearten der Kristallpolyeder auf 31 und, wenn die völlige Symmetrielosigkeit hinzugenommen wird, auf 32. Die Feststellung dieser Tatsache bedeutet den größten Fortschritt der wissenschaftlichen Lehre von den Kristallen. Man nennt diese Arten Kristallklassen oder Kristallgruppen. Ihnen gegenüber haben die bekannten und früher ausschließlich, aber auch jetzt noch überwiegend benutzten Kristallsysteme eine mehr äußerliche und praktische Bedeutung; man gelangt zu ihnen, indem man, was immer möglich ist, die Wahl der Achsen derart trifft, daß die Indizes gleichwertiger Flächen gleich werden. Von diesen, im ganzen sieben Systemen hat das trikline oder asymmetrische drei schiefwinklige, ungleichwertige Achsen; das monokline, klinorrhombische oder monosymmetrische zwei schiefe und eine auf ihrer Ebene senkrechte dritte Achse, alle drei ungleichwertig; das rhombische drei aufeinander senkrechte ungleichwertige Achsen; das tetragonale oder quadratische drei senkrechte Achsen, darunter zwei gleichwertige; das trigonale oder rhomboedrische drei gleichwertige Achsen in einer Ebene unter 60^0 gegeneinander und eine vierte auf dieser Ebene senkrechte ungleichwertige dreizählige; beim hexagonalen System ist alles ebenso, nur die vierte Achse ist sechszählig; das reguläre oder kubische System endlich hat drei zueinander senkrechte gleichwertige Achsen. In jedem System gibt es dann noch weitere Unterschiede, indem entweder alle Flächen oder nur die Hälfte, diese aber auf Kosten der anderen weiter ausgebildet sind, oder gar nur $^1/_4$, $^1/_8$ u. s. w. — Fälle, die man als Holoedrie, Hemoedrie, Tetartoedrie, Ogdoedrie bezeichnet (alle außer dem ersten zusammen als Meroedrie); indem ferner die Ausbildung in den beiden Richtungen einer Achse verschieden ist — Hemimorphie; und indem endlich, was hier nicht näher ausgeführt werden kann, die Hemiedrie von verschiedenem Charakter: paramorph, hemimorph und enantiomorph (vgl. p. 21) sein kann. Schließlich erhält man folgende Tabelle der Systeme und Klassen (nach SCHÖNFLIES; andere Autoren geben in den Einzelheiten Abweichungen):

Kristallsysteme und Kristallklassen nach SCHÖNFLIES und VOIGT.

Im großen und ganzen nach steigender Symmetrie geordnet. Z = Symmetriezentrum, E = Symmetrieebene, A_n = n-zählige Symmetrieachse, S_n = Spiegeldrehachse; $\sim$ bedeutet Gleichwertigkeit.

System	Charakter	Symmetrie	Klasse
Triklin	Hemiedrie	—	1
	Holoedrie	Z	2
Monoklin	Hemimorphie	A_2	3
	Hemiedrie	E	4
	Holoedrie	Z, A_2 oder Z, E	5
Rhombisch . . .	Hemimorphie	$A_2 \parallel E$	6
	Hemiedrie	$A_2 \perp A_2$	7
	Holoedrie	$Z, A_2 \perp A$ oder $Z, A_2 \parallel E$	8
Rhomboedrisch . .	Tetartoedrie	A_3	9
	Paramorphe Hemiedrie	Z, A_3	10
	Hemimorphe Hemiedrie	$A_3 \parallel E$	11
	Enantiomorphe Hemiedrie	$A_3 \perp A_2$	12
	Holoedrie	$Z, A_3 \perp A_2$ oder $Z, A_3 \parallel E$	13
Tetragonal . . .	Tetartoedrie mit Spiegelachse	S_2	14
	Hemiedrie mit Spiegelachse	$S_2 A \perp A_2$	15
	Tetartoedrie	A_4	16
	Paramorphe Hemiedrie	Z, A_4	17
	Hemimorphe Hemiedrie	$A_4 \parallel E$	18
	Enantiomorphe Hemiedrie	$A_4 \perp A_2$	19
	Holoedrie	$Z, A_4 \perp A_2$ oder $Z, A_4 \parallel E$	20

(Fortsetzung.)

System	Charakter	Symmetrie	Klasse
Hexagonal	Tetartoedrie mit dreizähliger Achse	$A_3 \perp E$	21
	Hemiedrie mit dreizähliger Achse	$A_3 \perp E \parallel A_2$	22
	Tetartoedrie	A_6	23
	Paramorphe Hemiedrie	Z, A_6	24
	Hemimorphe Hemiedrie	$A_6 \parallel E$	25
	Enantiomorphe Hemiedrie	$A_6 \perp A_2$	26
	Holoedrie	$Z, A_6 \perp A_2$ oder $Z, A_6 \parallel E$	27
Regulär	Tetartoedrie	$A_2 \sim A_2 \sim A_2$	28
	Paramorphe Hemiedrie	$Z, A_2 \sim A_2 \sim A_2$	29
	Hemimorphe Hemiedrie	$S_2 \perp S_2$	30
	Enantiomorphe Hemiedrie	$A_4 \perp A_4$	31
	Holoedrie	$Z, A_4 \perp A_4$	32

Von diesen 32 Klassen hat eine, wie man sieht, gar keine Symmetrieeigenschaft, eine nur ein Zentrum, eine nur eine Ebene, zehn haben nur Achsen; sechs haben Zentrum und Ebenen, neun Achsen und Ebenen; endlich vier alle drei Symmetrieelemente. Ferner gibt es im ganzen 11 Klassen mit, 21 ohne Symmetriezentrum.

Triklin	Monoklin		Rhombisch
Axinit	Augit	Kaliumchromat	Anhydrit
Borsäure	Biotit	Kryolith	Antimonglanz
Disthen	Bleiacetat	Malachit	Aragonit
Kupfervitriol	Blutlaugensalz	Milchzucker	Arsenkies
Natronkalkfeld-	Borax	Natriumacetat	Bittersalz
späte	Eisenvitriol	Orthoklas	Brechweinstein
Saures weinsaures	Epidot	Oxalsäure	Carnallit
Strontium	Gadolinit	Realgar	Cölestin
Traubensäure	Gips	Rohrzucker	Kalisalpeter
	Glaubersalz	Salicylsäure	Kupferglanz
	Glimmer	Schwefel β	Olivin
	Hornblende	Soda	Schwefel α
	Kainit	Weinsäure	Schwerspat
			Strontianit
			Topas
			Zinkvitriol

Trigonal	Tetragonal	Hexagonal	Regulär	
Antimon	Anatas	Apatit	Alaun	Lasurstein
Arsen	Apophyllit	Beryll	Baryumnitrat	Magnetit
Dioptas	Bor	Jodsilber	Blei	Natriumchlorat
Dolomit	Harnstoff	Kalium-Lithium-	Bleiglanz	Pechblende
Eis	Kupferkies	sulfat	Bleinitrat	Phosphor α
Eisenglanz	Honigstein	Nephelin	Boracit	Platin
Eisenspat	Quecksilber-	Zink	Chromeisenerz	Quecksilber
Graphit	chlorür		Diamant	Rotkupfererz
Kalkspat	Rutil		Eisen	Salmiak
Korund	Scheelit		Eisenkies	Silber
Natronsalpeter	Thorit		Fahlerz	Silberglanz
Phosphor γ	Wulfenit		Flußspat	Spinell
Quarz	Zinnerz		Gold	Steinsalz
Tellur	Zinnstein		Granat	Sylvin
Turmalin	Zirkon		Iridium	Zinkblende
Wismut			Kupfer	
Zinnober				

Es wird nun die Frage aufzustellen sein, wie sich diese verschiedenen Gebilde den einzelnen physikalischen Vorgängen gegenüber verhalten, inwieweit

sie überhaupt fähig sind, eine bestimmte physikalische Erscheinung zu zeigen, welchen Vorgängen gegenüber sich mehrere Klassen gleich verhalten u. s. w. Es wird das offenbar davon abhängen, ob die betreffenden Erscheinungen durch Skalare, Vektoren oder Tensoren bestimmt sind oder durch eine Kombination mehrerer von diesen Größen. Hiermit wird es offenbar zusammenhängen, welche Funktionen die verschiedenen Eigenschaften der Kristalle von der Richtung sind; was für eine Fläche — geometrisch-graphisch gesprochen — man erhält, wenn man diese Eigenschaft durch gerade Linien in den betreffenden Richtungen darstellt und deren Endpunkte verbindet — eine Fläche, die eine Kugel oder ein Rotations- oder ein dreiachsiges Ellipsoid oder eine kompliziertere Fläche sein kann. In allen diesen Hinsichten muß auf das Buch von VOIGT über die Eigenschaften der Kristalle (p. 16) sowie auf die Einzeldisziplinen verwiesen werden. Es sei aber wenigstens folgendes angeführt: Für azentrische Vorgänge gibt es höchstens **21** sich verschieden verhaltende Klassen, wahrscheinlich aber immer noch weniger, für zentrische höchstens **11**, in Wahrheit aber nur **9**, für Eigenschaften, die durch ein Ellipsoid dargestellt werden (s. oben) reduziert sich die Klassenzahl auf **5** — triklin, monoklin, rhombisch, einachsig, regulär — (bei einachsig wird die Fläche ein Rotationsellipsoid, bei regulär eine Kugel); endlich gibt es Erscheinungen, bei denen es nur darauf ankommt, ob der Kristall zweiachsig oder einachsig oder regulär ist, hier bleiben also nur drei Gruppen übrig.

Zur Orientierung bei physikalischen Untersuchungen findet sich umstehend (p. 59) eine Auswahl von Mineralien mit Angabe des Kristallsystems (nach des Verfassers Tabelle im „Kanon der Physik", Leipzig 1899, mit Ergänzungen).

Flüssige Kristalle. Wenn man einen Kristall als einen Körper definiert, der sich in allen Punkten gleich, aber in verschiedenen Richtungen verschieden verhält, und wenn man damit die Definitionen der Aggregatzustände zusammenhält, wonach nur feste Körper eine selbständige äußere und innere Gestalt besitzen, so kommt man zu dem Schlusse, daß Kristalle notwendig feste Körper sind; in der Tat hat man früher hieran nie gezweifelt. Nun hat aber O. LEHMANN eine Reihe sehr schöner und interessanter Erscheinungen beschrieben, die ganz analog denen sind, die Kristalle darbieten, die sich aber an Flüssigkeiten zeigen; er nennt diese Körper dementsprechend flüssige Kristalle. Von verschiedenen Seiten ist diese Bezeichnung angegriffen und erklärt worden, daß es sich hier — wie übrigens der trübe Charakter der Stoffe lehre — nicht um homogene Materie, sondern um sogenannte Emulsionen handle, und es ist dies auch experimentell verfolgt worden. Von seiten der Anhänger der LEHMANNschen Anschauung ist darauf erwidert worden, daß die flüssigen Kristalle allerdings nicht mit festen Kristallen, wohl aber mit Kristallpulver zu vergleichen sind. Es muß abgewartet werden, wie sich die Frage etwa noch weiter gestalten wird.[1]

Hypothesen über die Konstitution der Materie. Stetigkeitshypothese. Von altersher hat man sich bemüht, die innere Konstitution der Materie zu analysieren, und diese Bemühungen setzen sich bis in die Gegenwart mit gesteigertem Eifer fort; nur ist man dabei, wenigstens auf erkenntniskritischer Seite, vorsichtiger in der Fragestellung geworden, indem man nicht mehr nach einer absoluten Wahrheit, sondern danach fragt, welches „Bild", das man sich von der inneren Beschaffenheit der Materie macht, am geeignetsten sein möchte, um die Gesamtheit der Tatsachen einfach und vollkommen zu beschreiben. Da kann es nun auf den ersten Blick keinem Zweifel unterliegen, daß die einfachste mögliche Vorstellung die ist, daß die Materie, wie es den Anschein hat, den Raum stetig

[1] O. LEHMANN, Flüssige Kristalle, Leipzig 1904; daselbst auch die Spezialliteratur. Vgl. insbesondere: G. TAMMANN, Ann. d. Phys. **8**. 103. 1902. — R. SCHENCK, ibid. **9**. 1053. — R. SCHENCK und E. EICHWALD, Chem. Ber. **36**. 3873. 1903. — TH. ROTARSKI, ibid. 3158. — O. LEHMANN, Ann. d. Phys. **12**. 311. 1903; **17**. 728; **18**. 796. 808. 1905; **19**. 1. 22. 1906; Ztschr. f. Elektrochemie 1905. p. 955.

erfüllt; daß also, wenn man sie sich in Teile geteilt denkt, diese Teile lückenlos aneinander stoßen, selbst wieder in kleinere, ihrerseits lückenlos aneinander stoßende Teile geteilt gedacht werden können und so fort in infinitum. Die Eigenschaft der Stetigkeit der Raumerfüllung läßt die Anwendung derjenigen Rechnungsweise zu, durch die die exakte Naturlehre es zu ihren gewaltigen theoretischen Erfolgen gebracht hat: der Infinitesimalrechnung. Wie sehr die Einfachheit durch die räumliche Stetigkeit bedingt ist, sieht man aus den auch in der Stetigkeitstheorie nicht zu vermeidenden Fällen und Stellen, wo Unstetigkeiten stattfinden, so namentlich an der Grenze verschiedener Körper, wo man besondere Grenzuntersuchungen anstellen muß, die häufig die einzige Schwierigkeit eines mathematisch-physikalischen Problems ausmachen, und die man vielfach sogar dadurch zu beseitigen sucht, daß man auch den Übergang von einem Körper zu einem anderen als einen stetigen, wenn auch in einer sehr dünnen Schicht sich abspielenden betrachtet. Der einzige Einwand, der sich gegen die Einfachheit dieser Vorstellung erheben läßt, ist der, daß der Begriff der Stetigkeit und demgemäß auch die Formeln der Infinitesimalrechnung nur die Bedeutung einer Grenzbetrachtung haben, und daß wir zu ihr nur aus endlichen Betrachtungen gelangen können, bei denen wir das Stetigkeitsprinzip nicht ohne weiteres wahren können; hierauf wird sogleich noch zurückgekommen werden. Dazu kommt nun die im Laufe der Zeiten gemachte Erfahrung, daß die Stetigkeitstheorie vielen Tatsachen nicht oder nicht in annehmbarer Weise gerecht zu werden vermag, daß also die Vollständigkeit der Darstellung ihre Grenzen hat. Das führt uns zur zweiten Hypothese.

Molekularhypothese.[1] Nach dieser stellt man sich die Körper als aus äußerst zahlreichen und kleinen Teilchen bestehend vor, die durch Zwischenräume voneinander getrennt sind, und die man Molekeln nennt. Als außerordentlich klein muß man diese Teilchen ansehen, weil man sie mit den stärksten Vergrößerungen nicht wahrnehmen kann und weil sich die Materie in Formen von äußerst kleinen Dimensionen bringen läßt; so kann man Platindrähte von 0,00008 cm Dicke herstellen, von denen erst 140 nebeneinander gelegt die Dicke eines Kokonfadens ausmachen; Gold wird sogar in Blättchen von 0,00001 cm Dicke geschlagen, die Goldteilchen in kolloidalen Lösungen haben, wie die ultramikroskopische Methode von SIEDENTOPF und ZSIGMONDY gezeigt hat, Durchmesser von nur 0,0000004 cm, und auf Wasser kann man Ölschichten erzeugen, die nach RÖNTGEN gar nur 0,00000006 cm dick sind; in allen diesen Fällen muß man doch immer noch eine größere Anzahl von Molekeln nebeneinander sich vorstellen. Aus den Erscheinungen an Gasen endlich ergibt sich, daß der Durchmesser z. B. einer Kohlensäuremolekel nicht viel größer ist als der hundertmillionte Teil eines cm.

Die Molekularhypothese erlaubt nun eine große Anzahl von Tatsachen in neuem Lichte anzusehen. So die Ausdehnung der Körper durch die Wärme oder ihre Zusammenziehung durch Druck, wobei die Molekeln selbst ungeändert

[1] Die Namen Molekel und Atom sowie gewisse damit verbundene Vorstellungen stammen schon aus dem Altertum, wie es scheint namentlich von LEUKIPP und DEMOKRIT; die erste ausführliche Festlegung findet sich bei LUCREZ (De rerum natura). In der Neuzeit nahmen BRUNO, GASSENDI und BOYLE die Ideen wieder auf, die eigentliche Ausbildung im heutigen Sinne erfolgte aber erst anfangs des 19. Jahrhunderts.

Von größeren Werken seien aus neuerer Zeit genannt: TH. FECHNER, Die phys. u. phil. Atomlehre. Leipzig 1855 (2. Aufl. 1864). — K. LASSWITZ, Atomistik und Kritizismus. Braunschweig 1878. — K. LASSWITZ, Geschichte der Atomistik. 2 Bde. Hamburg 1890. — Vgl. auch die eingangs zitierten allgemeinerkenntnistheoretischen Werke.

Trotz aller praktischen Aussichtslosigkeit kann nicht unterlassen werden, zu betonen, daß es „Molekel" heißt (vgl. H. v. HELMHOLTZ, O. E. MEYER u. s. w.), und daß „Molekül" eine der stärksten sprachlichen Mißbildungen ist, die es gibt; es ist nämlich die Übernahme eines an sich falsch gebildeten französischen Wortes, das richtig „molècle" heißen müßte.

bleiben, aber ihre Abstände zu- oder abnehmen; die Erscheinung des Druckes, der auf die Stöße der Teilchen zurückgeführt wird; die Tatsache der Mischbarkeit von Flüssigkeiten, der Lösungen und vieles andere. Diejenige Wissenschaft aber, der sich die Molekularhypothese geradezu aufdrängte, ist die Chemie; der Satz von den konstanten Verbindungsverhältnissen führt hier unmittelbar zur Idee der Molekeln über, und die Tatsache der Verbindungen im Gegensatze zu den Elementen sowie eine Reihe von weiteren Erscheinungen zu der Notwendigkeit, auch die Molekeln noch nicht als einfache Körper zu betrachten, sondern als aus Atomen bestehend anzusehen. Die ganze Hypothese heißt deshalb gewöhnlich Atomhypothese oder Atomistik.

Eine Erklärung der Naturerscheinungen im dogmatischen Sinne liefert natürlich auch die Atomistik nicht; sie gibt nur ein in gewissem Sinne anschauliches Bild der inneren Vorgänge in der Materie. Geht man nun aber auf die Theorie auch nur der einfachsten physikalischen Vorgänge näher ein, so findet man, daß man hier auf nicht geringere Schwierigkeiten stößt; insbesondere muß man entweder Stöße zwischen den Teilchen annehmen und, um deren Natur festzulegen, den Teilchen bestimmte Eigenschaften beilegen, wodurch sie aufhören, einfache Massenzentren zu sein, Elemente einer Konfiguration, durch die allein die Erscheinungen zu beschreiben sind; oder man sieht von Stößen ab, dann muß man Fernkräfte zwischen den Teilchen einführen, mit denen man aber nach dem früher Erörterten nur so lange auskommt, als gewisse Bedingungen erfüllt sind (vgl. auch weiter unten). Man kann hiernach sagen, daß die einzige, aber freilich im einzelnen oft großartige Leistung der Atomistik die Zurückführung der komplizierteren Erscheinungen des Makrokosmos auf die in vielen Hinsichten einfacheren eines angenommenen Mikrokosmos ist.

In neuester Zeit ist die Diskussion über Stetigkeits- und Atomhypothese aus besonderem Anlasse wieder sehr lebhaft geworden, nämlich in Verbindung mit der Frage, ob es nicht einen Fortschritt bedeute, wenn man die Masse und damit das materielle Element überhaupt aus dem System der Grundbegriffe verdränge oder es mindestens mehr in den Hintergrund treten lasse zugunsten eines anderen Begriffs, der Energie, von dem später die Rede sein wird. Es sind dabei sehr interessante Gesichtspunkte zutage gefördert worden, und es ist das Problem nicht nur in erkenntnistheoretischer, sondern auch in didaktischer Hinsicht wesentlich geklärt worden.[1] Wenn dabei von der einen Seite die Atomistik verworfen wird, weil man sich keine Bilder machen solle, so wird dem von der anderen Seite entgegengehalten, daß auch die Stetigkeitshypothese ein solches sei; ja, daß, wenn man der Sache auf den Grund gehe, in der Stetigkeitslehre und in den sie ausdrückenden Differentialgleichungen schon ein gut Teil Atomistik stecke, indem sich alle Vorstellungsbegabung und wahrscheinlich auch alle sinnliche Fähigkeit des Menschen auf endliches und diskretes beschränke und von da erst der Übergang zur Stetigkeit und Unendlichkleinheit gemacht werden müsse. Dazu kommt, daß der Mensch, um sich auf unbekannten Gebieten zurecht zu finden, einer ins einzelne gehenden Anschaulichkeit oft nicht entbehren kann, wie sie ihm auf manchen Gebieten nur die Atomistik bietet. Man wird also gut tun, sich beider Methoden, der sogenannten phänomenologischen und der atomistischen je nach Zweckmäßigkeit zu bedienen und abzuwarten, ob sich nicht, was mit Rücksicht auf ihren nach obigem nicht unüberbrückbaren Gegensatz sehr wohl möglich ist, in Zukunft einmal beide zu einer höheren Einheit der Naturbeschreibung verschmelzen werden. An diesen Andeutungen über die in Rede stehende Diskussion muß es genügen.

Über die Natur und die äußeren Eigenschaften der Atome und Molekeln

---

[1] Man vgl. u. a. den Aufsatz von L. BOLTZMANN, Die Unentbehrlichkeit der Atomistik: WIED. Ann. **60.** 231; **61.** 790. 1897.

sind im Laufe der Zeit sehr zahlreiche Hypothesen gemacht worden, die entweder mehr in das Gebiet der Chemie gehören oder, soweit sie physikalischen Charakters sind, mehr oder weniger Phantasiegebilde enthalten; sie haben meist ein zeitlich sehr beschränktes Interesse und werden fortwährend durch neue verdrängt, so daß sie hier übergangen werden dürfen.[1] Nur eine von ihnen beansprucht ein hohes prinzipielles Interesse, die von Lord KELVIN[2] aufgestellte Hypothese der Wirbelatome; sie wurde veranlaßt durch eine merkwürdige Eigenschaft der Wirbelbewegungen, nämlich Komplexe zu bilden, die in einer idealen Flüssigkeit weder zerstört noch neu erzeugt werden können. Da es außerdem möglich ist, eine große Mannigfaltigkeit von verschiedenen Wirbelformen sich vorzustellen, so sind alle Voraussetzungen für eine Theorie der Materie erfüllt. Die Materie besteht hiernach aus einem Substrat, das an sich noch nicht Materie ist, aber durch die dauernde Wirbelbewegung, in der seine Teile begriffen sind, zur Materie wird. Diese Teile stoßen zwar überall unmittelbar aneinander, erfüllen also den Raum stetig, sind aber doch wegen der genannten Eigenschaften von Wirbelkomplexen in hohem Grade selbständige Gebilde; es sind die Atome der Materie; sie können sich vorübergehend in sehr mannigfacher Weise verketten und zusammenlegen und auf diese Weise Molekeln bilden. Leider ist die exakte Durchführung und Berechnung von Vorgängen in Wirbelmaterie so verwickelt, daß schon die einfachsten Probleme nur mit großem Aufwande, höhere aber, wie es scheint, gar nicht zu lösen sind; die Theorie ist daher nach den vielversprechenden Anfängen wieder sehr in den Hintergrund getreten.

Atomgewicht und analoge Konstanten. Auf die Atome und die Molekeln werden die Begriffe Masse, Gewicht, Volumen übertragen und so die Größen: Atommasse und Molekularmasse, Atomgewicht und Molekulargewicht, Atomvolumen und Molekularvolumen, erhalten. Jedoch haben alle diese Größen zunächst nur relative Bedeutung und sind demgemäß begrifflich reine Zahlen; sie werden nämlich ausgedrückt in Vielfachen des Wertes, den sie für eine als Normalsubstanz gewählte Substanz haben. Als Vergleichsstoffe kommen nur Wasserstoff und Sauerstoff in Betracht; jener hat den Vorzug, das kleinste Atomgewicht zu haben, so daß alle Atomgewichte größer als 1 werden; der Sauerstoff hat den Vorzug, bei den chemischen Analysen, aus denen man die Atomgewichte ermittelt, eine viel häufigere und grundlegendere Rolle zu spielen, so daß der Bezug auf ihn sicherer ist. Man hat sich neuerdings dahin geeinigt, den Sauerstoff als Normalstoff zu benutzen, sein Atomgewicht aber nicht gleich 1, sondern gleich 16 zu setzen; der Wasserstoff erhält alsdann den von 1 etwas abweichenden Wert 1,008; die meisten Zahlen werden aber abgerundeter als bei Bezug auf den Wasserstoff. Für die zurzeit bekannten und als Elemente betrachteten Stoffe folgt hier eine Tabelle der Formelzeichen und der Atomgewichte (s. folgende Seite).

An dem Aufbau der Erdoberfläche — festen, flüssigen und luftförmigen Aggregatzustandes — sind diese Elemente bekanntlich in außerordentlich ungleichem Maße beteiligt; eine von CLARKE[3] berechnete Zusammenstellung der Prozentanteile läßt dies erkennen (s. folgende Seite).

Um die große Zahl chemischer Elemente in ein System zu bringen, hat man sich seit langer Zeit bemüht; das sogenannte periodische System der Elemente ist ihr schließliches Ergebenis, wonach sich gewisse Eigenschaften zu den Atomgewichten in mehr oder weniger annähernde Beziehung bringen lassen. Von NEWLAND, MENDELEJEW, LOTHAR MEYER, CROOKES, WIECHERT, LÖW u. a. ist

---

[1] Diejenige Theorie, die wohl noch am meisten das Interesse der Physiker wach erhalten hat, und noch neuerdings viel diskutiert wird, ist die Theorie von BOSCOVICH, Philosophiae nat. Theoria etc. Wien 1759. — Vgl. hierzu auch W. THOMSON, Nat. **40.** 445. 1889; C. R. **109.** 337. 1889. — [2] WILLIAM THOMSON, Edinb. Trans. **25.** 217. 1869. — Vgl. J. J. THOMSON, Vortex atoms. — [3] F. W. CLARKE, Phil. Soc. Wash. **11.** 131. 1889.

diese Beziehung in besondere Form gebracht und graphisch in verschiedener Weise dargestellt worden.[1]

Atom	Zeichen	Atom-gewicht	Atom	Zeichen	Atom-gewicht
Aluminium	Al	27,1	Nickel	Ni	58,7
Antimon	Sb	120,2	Niobium	Nb	94
Argon	A	39,9	Osmium	Os	191
Arsen	As	75	Palladium	Pd	106,5
Baryum	Ba	137,4	Phosphor	P	31
Beryllium	Be	9,1	Platin	Pt	194,8
Blei	Pb	206,9	Praseodym	Pr	140,5
Bor	Cr	11	Quecksilber	Hg	200
Brom	B	79,96	Radium	Ra	225
Cadmium	Br	112,4	Rhodium	Rh	103
Cäsium	Cd	132,9	Rubidium	Rb	85,4
Calcium	Cs	40,1	Ruthenium	Ru	101,7
Cerium	Ca	140,3	Samarium	Sa	150,3
Chlor	Ce	35,45	Sauerstoff	O	16
Chrom	Cl	52,1	Skandium	Sc	44,1
Eisen	Fe	55,9	Schwefel	S	32,06
Erbium	Er	166	Selen	Se	79,1
Fluor	F	19	Silber	Ag	107,93
Gadolinium	Gd	156,8	Silicium	Si	28,4
Gallium	Ga	70	Stickstoff	N	14,04
Germanium	Ge	72,5	Strontium	Sr	87,6
Gold	Au	197,2	Tantal	Ta	183
Helium	He	4	Tellur	Te	127,6
Indium	In	115	Terbium	Tb	160
Iridium	Ir	193	Thallium	Tl	204,1
Jod	J	126,95	Thorium	Th	232,5
Kalium	K	39,15	Thulium	Tu	170,7
Kobalt	Co	59	Titan	Ti	48,1
Kohlenstoff	C	12	Uran	U	238,5
Krypton	Kr	81,8	Vanadin	V	51,2
Kupfer	Cu	63,6	Wasserstoff	H	1,008
Lanthan	La	138,9	Wismut	Bi	208,5
Lithium	Li	7,03	Wolfram	W	184
Magnesium	Mg	24,36	Xenon	X	128
Mangan	Mn	55	Ytterbium	Yb	173
Molybdän	Mo	96	Yttrium	Y	89
Natrium	Na	23,05	Zink	Zn	65,4
Neodym	Nd	143,6	Zinn	Sn	119
Neon	Ne	20	Zirkonium	Zr	90,6

Sauerstoff	49,98	Wasserstoff	0,94
Silicium	25,30	Titan	0,30
Aluminium	7,26	Kohlenstoff	0,21
Eisen	5,08	Chlor } Brom }	0,15
Calcium	3,51		
Magnesium	2,50	Phosphor	0,09
Natrium	2,28	Mangan	0,07
Kalium	2,23	Alle anderen	0,12

Die Molekeln bestehen bei den Elementen aus gleichartigen, bei den Verbindungen aus verschiedenartigen Atomen, deren Anzahl heißt die Atomzahl und

[1] Vgl. die Lehrbücher der allgem. Chemie und ferner: L. MEYER, Die mod. Th. der Chemie. — W. RAMSAY (Vortrg. Naturf.-Vers. Kassel) Leipzig 1803. — G. RUDORF, Das periodische System. Hamburg 1904.

ist außerordentlich verschieden; auch bei den Elementen ist sie nur in wenigen Fällen eins, bei den meisten aber zwei, so daß ihr Molekulargewicht doppelt so groß wie ihr Atomgewicht ist. Bei den Verbindungen ergibt sich das Molekulargewicht durch Addition der Atomgewichte der Bestandteile; eine Auswahl der wichtigsten ist hier zusammengestellt:

Acetylen	C_2H_2	26,02	Kieselerde	SiO_2	60,4
Äthan	C_2H_6	30,04	Kohlensäure	CO_2	44
Äther	$C_4H_{10}O$	74,08	Kupfervitriol	$SO_4Cu + 5\,H_2O$	244,7
Äthylen	C_2H_4	28,03	Magnetit	Fe_3O_4	231,7
Alkohol	C_2H_6O	46,05	Methan	CH_4	16,03
Ameisensäure	CH_2O_2	48,02	Methylalkohol	CH_4O	32,03
Ammoniak	NH_3	17,02	Nikotin	$C_{10}H_{14}N_2$	162
Amylalkohol	$C_5H_{12}O$	88,1	Pechblende	U_3O_8	844
Anilin	C_6NH_7	93,06	Phenol	C_7H_6	90,1
Baryt	$Ba[OH]_2$	171,6	Phosphorsäure	PO_4H_3	98
Benzol	C_6H_6	78,05	Propylalkohol	C_3H_8O	60,06
Bittersalz	SO_4Mg	120,4	Rohrzucker	$C_{12}H_{22}O_{11}$	342
Blausäure	CNH	27,01	Salpeter	NO_3K	101,2
Borsäure	BO_3H_3	62,02	Salpetersäure	NO_3H	63,05
Butylalkohol	$C_4H_{10}O$	74,08	Salmiak	NH_4Cl	53,5
Chinin	$C_{20}H_{24}N_2O_2$	323,3	Salzsäure	HCl	36,5
Chloroform	CH_3Cl	50,5	Schwefelsäure	H_2SO_4	98
Eiweiß[1]	$C_{72}H_{112}SN_{18}O_{22}$	1612	Schwefelkohlenstoff	CS_2	76,1
Eisenvitriol	SO_4Fe	152,0	Schwefelwasserstoff	H_2S	34,1
Essigsäure	Si_3O_4AlK	279,5	Soda	CO_3Na_2	106,1
Feldspat	$CaFl_2$	78	Steinsalz	NaCl	58,6
Flußspat	$C_2H_4O_2$	60,03	Terpentinöl	$C_{10}H_{16}$	136,1
Gips	$CaSH_4O_6$	172	Tolulol	C_7H_8	92,1
Glaubersalz	SO_4Na_2	142,2	Wasser	H_2O	18,02
Indigo	$C_{16}H_{10}N_2O_2$	252	Zinnober	HgS	232,4
Kalkspat	$CaCO_3$	100			

Die Atomgewichte sind mit den früher erwähnten Äquivalentzahlen (p. 55) entweder identisch oder ganze Vielfache von ihnen; der Faktor gibt die sogenannte Wertigkeit oder Valenz an, es ist also zwischen einwertigen, zweiwertigen Atomen u. s. w. zu unterscheiden. Indessen ist, wie sich herausgestellt hat, die Wertigkeit keine allgemeine Eigenschaft des betreffenden Elements an sich, sondern nur charakteristisch für sein Verhalten gegen verschiedene andere Elemente und sogar gegen ein und dasselbe Element unter verschiedenen Umständen. Besonders typisch ist die Wertigkeit in bezug auf den Wasserstoff, dessen eigene Wertigkeit gleich eins gesetzt wird; es sind nämlich

einwertig		zweiwertig			dreiwertig		vierwertig		fünfwertig	sechswertig
Br	K	O	Ca	Pb	N	B	C	Cr	Ta	Mo
Cl	Na	S	Ba	Cu	As	Tl	Si	Sn	Vn	W
Fl	Li	Se	Be	Hg	P	Bi	Al	Pt		
J	Rb	Te	Mg		Sb	Au	Fe			
	Cs		Zn				Li			
	Ag		Cd							

[1] Nur als ein Vertreter dieser besonders hochatomigen Gruppe.

Die Atom- und Molekulargewichte haben, wie gesagt, nur relative Bedeutung. Um trotzdem mit wirklichen Gewichten rechnen zu können, führt man die Begriffe Grammatom, Grammolekel, Grammäquivalent ein; man versteht darunter eine Gewichtsmenge der betreffenden Substanz, die, in Grammen ausgedrückt, gleich ihrem Atom-, Molekular- oder Äquivalentgewicht ist; zur Abkürzung von Grammolekel wird vielfach der Ausdruck „Mol" gebraucht. Nimmt man von verschiedenen Stoffen je ein Mol, so nimmt man von allen dieselbe Molekelzahl, nämlich so viel wie in 2 g Wasserstoff enthalten sind; man kann dann also, von einem Faktor abgesehen, so rechnen, als ob man von jedem Stoffe eine Molekel hätte.

Eine ins einzelne gehende Vorstellung von der molekularen Konstitution hat man sich bisher nur bei einer bestimmten Art von Stoffen, bei den Gasen zu bilden vermocht. Hier hat sich die Annahme von Molekeln, die im allgemeinen geradlinig und gleichförmig sich bewegen und nur in großer Nähe von anderen Molekeln eine Bahnkrümmung erfahren, ausgezeichnet bewährt; man kann die Bahngeschwindigkeit, die Weglänge, die Schwirrungszahl und bis zu einem gewissen Grade auch die absoluten Verhältnisse der Molekeln ermitteln; für die in 1 Mol enthaltene Molekelzahl (den obigen Faktor) findet man z. B. rund $4 \cdot 10^{23}$. Das Nähere sehe man in Bd. **3**. Vielfache Analogie mit dieser „kinetischen Theorie der Gase" bietet die Theorie der flüssigen Lösungen (vgl. ebenda). — Wegen der kinetischen Theorie der festen und flüssigen Körper s. w. u. („Elastizität", „Hydrodynamik", „Wärmelehre").

Molekulartheorie der Kristalle. Diejenige Klasse von Körpern, welche zu Hypothesen über die innere Struktur am meisten herausfordert, bilden unzweifelhaft die Kristalle; die Zahl der hierher gehörigen Untersuchungen ist demgemäß außerordentlich groß. Einen bleibenden Wert können solche Theorien aber offenbar nur dann beanspruchen, wenn sie das Allgemeinste leisten, was überhaupt zu leisten ist und wenn sie, von allem willkürlichen frei, zwingende Schlüsse erlauben. In diesem Sinne ist das Problem erst in neuester Zeit im großen gelöst worden, wenn auch im einzelnen noch mancherlei Abweichungen und Ansichtsdifferenzen übrig geblieben sind; man vergleiche die reiche Literatur, namentlich aber die Arbeiten von BRAVAIS, WIENER, SOHNCKE, SCHÖNFLIES, Lord KELVIN, BARLOW, FEDOROW, VIOLA, FOCK, RIECKE und CESARO.[1] Die grundlegenden Untersuchungen und zugleich die die Möglichkeiten erschöpfenden sind die von SCHÖNFLIES, an die sich auch die folgenden Andeutungen anlehnen.

Ein Kristall besteht aus Elementen, die man (ohne sie mit den chemischen Molekeln identifizieren zu wollen) auch Kristallmolekeln nennen kann; sie bilden Punktreihen mit überall und auch in parallelen Reihen gleichgroßem, dagegen in Reihen von verschiedener Richtung verschieden großem Abstande der Punkte. Eine Ebene von Punkten heißt Netzebene, sie wird in lauter kongruente Parallelogramme geteilt; in einer anderen Netzebene sind aber die Parallelogramme andere, und es besteht die Beziehung, daß, je dichter eine Ebene mit Punkten besetzt ist, desto größer der Abstand der nächsten Parallelebene ist. Alle Punkte zusammen bilden ein Raumgitter, das durch sie in lauter kongruente Parallelepipeda geteilt ist. Ein Raumgitter besteht, wie man ersieht, aus orientierten Molekeln, und zwar aus lauter gleich orientierten; die Molekeln selbst zeigen also gar keine Mannigfaltigkeit, alle Mannigfaltigkeit entsteht erst aus der räumlichen

[1] A. BRAVAIS, a. a. O. (p. 57). — CH. WIENER, Grundzüge der Weltordnung. 2. Ausg. 1869. p. 82. — L. SOHNCKE, Theorie der Kristallstruktur. Leipzig 1879; Ztschr. f. Krist. **20**. 445. 1892. — A. SCHÖNFLIES, Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig 1891; Ztschr. f. phys. Chem. **9**. 158. 1892; **10**. 517. 1892. — Lord KELVIN, Proc. Roy. Soc. **55**. 1. 1894. — W. BARLOW, Ztschr. f. Krist. **23**. 1. 1894; **25**. 86. 1895. — E. v. FEDOROW, ibid. **25**. 113. 1895; **28**. 232. 1897. — A. FOCK, ibid. **25**. 565. 1895. — E. RIECKE, Ann. d. Phys. **3**. 545. 1900. — G. CESARO, Bull. de Belg. 1901. p. 303. — C. VIOLA, Ztschr. f. Krist. **34**. 353. 1901. — Nach Abschluß erschienen: A. NOLD, Ztschr. f. Krist. **40**. 13. 433. 1905.

Struktur. Man kann solche Theorien reine Strukturtheorien nennen, im Gegensatz zu denen, die, wie die älteste BRAVAIS sche, alles in die Molekeln selbst hineinlegen; es bedeutet das offenbar einen wesentlichen Fortschritt in der Darstellung, und es fragt sich nur, ob man damit auskommt. Das ist nun allerdings zunächst nicht der Fall, wohl aber, wenn man eine einzige Erweiterung vornimmt, wenn man nämlich zweierlei Molekeln, und zwar spiegelbildlich gleiche, d. h. entgegengesetzt orientierte, zuläßt, und die zwei Raumgitter, die man so erhält, zu einem ganzen kombiniert; man nennt das Ergebnis ein regelmäßiges Punktsystem oder einen regelmäßigen Molekelhaufen. Es läßt sich nun exakt nachweisen, daß es im ganzen nicht mehr und nicht weniger als 230 (nämlich 65 + 165) kristallographisch verwendbare Molekelhaufen gibt; so groß ist also streng genommen auch die Anzahl der verschiedenen Kristallarten, und es ist nur eine Heraushebung des wesentlicheren oder in der Natur sich leichter differenzierenden, wenn man daraus 32 Klassen oder gar 7 Systeme bildet. Auf das trikline System kommen nur 2, auf das monokline 13, auf das rhombische 59, auf das trigonale 25, auf das tetragonale 68, auf das hexagonale 27 und auf das reguläre System 36 Arten von Molekelhaufen.

Auch bei isotropen Körpern kommt man auf verschiedenen Gebieten, so bei der Elastizität (s. daselbst), mit punktförmigen Molekeln nicht aus, muß ihnen vielmehr Orientierung oder Polarität zuschreiben. Dies führt dann zu der weiteren Vorstellung, daß diese Körper nicht im strengen Sinne isotrop, sondern nur durchschnittlich oder quasi isotrop sind. Auch vergleiche man die Molekulartheorie des Magnetismus, in der ein magnetisierter Körper als einem kristallischen, ein unmagnetischer als einem quasi isotropen Körper entsprechend aufgefaßt wird (Bd. 5. 47).

Ionen. Elektronen. An der Hand der neueren Entwickelung der Elektrizitätslehre haben sich besondere Anschauungen über die Konstitution der Materie herausgebildet und angefangen auch auf die allgemeine Physik so wesentlichen Einfluß zu nehmen, daß sie hier wenigstens erwähnt werden müssen, obgleich die Anschauungen noch wenig geklärt sind und die Definitionen der Begriffe zum Teil stark voneinander abweichen. Zunächst also nannte FARADAY die bei der Elektrolyse vorkommenden elektrisch geladenen Massenteilchen Ionen, und zwar je nach dem Sinn ihrer Ladung positive oder negative Ionen; die allgemeinphysikalische Bedeutung der Ionen geht über die der Atome oder Atomkomplexe nicht wesentlich hinaus. Wichtig ist nur, daß, worauf wohl MAXWELL zuerst hinwies, die Ladung eines Ions einen bestimmten konstanten Wert besitzt: Elementarquantum; dieser erhielt von STONEY den Namen Elektron. Dieser Name wurde dann in verändertem Sinne wieder aufgenommen, als man zu der Ansicht kam, daß die Kathodenstrahlen aus sehr rasch bewegten, sehr kleinen Teilchen bestehen, sehr klein auch im Vergleich zu den chemischen Atomen. Diese äußerst kleinen Teilchen, von denen man schon öfters als von den „Uratomen" oder Teilchen der Urmaterie in verschwommener Weise gesprochen hatte, nennen einige Autoren jetzt Elektronen, während andere darunter nur die Ladung dieser Teilchen verstehen; auch hat man zu weiterer Unterscheidung die Ausdrücke: Molionen, Atomionen und Elektronionen eingeführt. Erinnert man sich nun noch dessen, was früher (p. 37) über die Reduktion scheinbarer Masse auf elektromagnetische Bewegungen gesagt wurde, so sieht man ein, daß, wenn die in Rede stehenden Theorien, gestützt durch neue Erfahrungstatsachen, eine weitere Festigung erfahren haben werden, eine wesentliche Umwälzung unserer Anschauungen über die Konstitution der Materie sich möglicherweise vollziehen wird. Die näheren Ausführungen dieses Themas gehören indessen in die Theorie der elektrischen Erscheinungen (vgl. Bd. 4 und 5).[1]

[1] In dem Artikel von J. STARK, Die Elektrizität in Gasen: dieses Handb. 4. 455, findet man Näheres über Geschichte und Literatur der Ionen und Elektronen. — Man vgl. ferner

Imponderabilien. Äther. In der Geschichte der Physik haben wiederholt Substrate eine Rolle gespielt, die man zur Beschreibung von Erscheinungsgebieten einführte, und denen man eine mehr oder weniger reale Existenz zuschrieb. Nach den früheren Festsetzungen über die Charakteristik der Materie darf man solche Substrate so lange nicht als Materie bezeichnen, als sie keine Masse, keine Trägheit, keinen Widerstand gegen Bewegung oder, was doch schließlich auch auf dasselbe hinausläuft, kein Gewicht verraten; man hatte daher längere Zeit für sie den Ausdruck „Imponderabilien" im Gebrauch. Heutzutage sind einige von ihnen, wie die Wärme, in diesem Sinne gänzlich von der Bildfläche verschwunden, andere, wie das elektrische und das magnetische Fluidum, haben Wandlungen durchgemacht, durch die sie ihren substantiellen Charakter eine Zeitlang so gut wie ganz eingebüßt haben, um ihn neuerdings wiederzugewinnen — vgl. das soeben über Ladungen Gesagte —, und es sind eigentlich nur noch zwei derartige Substrate, die allerdings dadurch erhöhte Bedeutung gewonnen haben, übrig geblieben, der Äther, oder, wie er in bestimmten Zusammenhängen auch zuweilen spezieller genannt wird, der Lichtäther oder Weltäther einerseits und die durch das Elementarquantum charakterisierte „Elektrizität" andererseits — auf das noch vielfach ungeklärte Verhältnis zwischen beiden kann hier nicht eingegangen werden. Was nun den Äther betrifft, so hat man sich vielfach bemüht, seine Masse bezw. seine Dichte zu bestimmen; es ist auch verhältnismäßig leicht gelungen, für diese Größe obere Grenzen festzustellen und diese immer mehr herabzudrücken; dagegen sind die Versuche, die untere Grenze zu fixieren, teils gänzlich fehlgeschlagen, teils beruhen sie auf Voraussetzungen, die selbst noch nicht über jeden Zweifel erhaben sind.[1] Auch in bezug auf die Frage, ob man sich den Äther als stetig oder atomistisch aufgebaut vorzustellen habe, besteht keine Einigkeit; beide Ansichten werden vertreten und auf gewissen Gebieten mit Erfolg zur Darstellung komplizierterer Erscheinungsgruppen benutzt; und es spielt dabei auch diejenige Auffassung eine große Rolle, bei der man sich zwar die ponderable Materie sowie die Elektrizität atomistisch, den Äther aber, in den diese Atome eingebettet sind, stetig vorstellt. Bei den einzelnen Disziplinen wird in diesem Werke sich wiederholt Gelegenheit bieten, auf diesen Gegenstand zurückzukommen.[2]

F. Feld, Potential, Arbeit, Energie und Entropie.

Das Feld und seine Konfiguration. Einen Raum, in dem bestimmte physische Zustände herrschen oder in dem sich bestimmte physische Prozesse abspielen, nennt man im physikalischen Sinne des Wortes ein Feld. Jeder, sozusagen von Leben erfüllte Raum ist hiernach ein Feld. Die Größen, die den Zustand oder die Prozesse charakterisieren, charakterisieren auch das Feld. Sie sind Funktionen der Zeit und in einem bestimmten Zeitpunkte, den wir zunächst

G. C. SCHMIDT, Das Problem der Urmaterie: Chem. Ztschr. **1.** 177. 209. 1902. — W. KAUFMANN, Gött. Nachr. 1901—03. — M. ABRAHAM, ibid. 1902. — H. A. LORENTZ, Vers. einer Theorie u. s. w. Leiden 1895; Versl. Ak. Wet. Amst. 1904; Enz. d. math. Wiss. Bd. V. — A. EINSTEIN, DRUDES Ann. **17.** 891. 1905. — A. BUCHERER, Math. Einf. in die Elektronentheorie. Leipzig 1904. — W. KAUFMANN, DRUDES Ann. **19.** 487. 1906 (Zusatz bei der Korrektur).

[1] Man vgl. u. a. L. GRAETZ, WIED. Ann. **25.** 165. 1885. — G. MIE, Verh. Naturf.-Ges. **72.** 26. 1900. — Lord KELVIN, Phil. Mag. (6) **2.** 161. 1901. — [2] Über die Rolle des Äthers in der Physik vgl. V. A. JULIUS, Der Äther. Leipzig 1902. — Eine populäre Darstellung des Wesens des Äthers im Verhältnis zu dem der Materie gibt G. MIE, Moleküle, Atome, Weltäther. Leipzig 1904. — S. auch CH. V. BURTON, Phil. Mag. (5) **33.** 191. 1892. — H. JANUSCHKE, Progr. Oberrealschule Teschen 1893. — Den Versuch, den Äther als chemisches Element aufzufassen, macht D. J. MENDELEJEW, vgl. Beibl. 1904. p. 755.

betrachten, Funktionen des Ortes im Felde. Bei wirklichen Feldern sind diese Funktionen stetig und endlich, außer an singulären Stellen des Feldes, wo sie unstetig oder unendlich werden. Andere singuläre Stellen sind solche, wo die betreffende Größe ein Maximum oder ein Minimum oder ein gemischtes Maximum-Minimum ist, d. h. von wo aus ihr Wert nach allen Richtungen abnimmt oder nach allen Richtungen zunimmt oder nach den beiden Richtungen einer bestimmten, durch den Punkt gelegten Linie abnimmt, nach den beiden Richtungen einer anderen Linie aber zunimmt. Von solchen Stellen abgesehen, wird die Größe in einer gewissen Richtung, von dem betrachteten Punkte aus, am meisten abnehmen, in der entgegengesetzten am meisten zunehmen; auf jedem Wege — und deren gibt es unendlich viele, auf denen man von dem ersten dieser Nachbarpunkte unter Umgehung des ursprünglichen Punktes zu dem anderen Nachbarpunkte gelangen kann, muß es folglich einen Punkt geben, in dem die Größe denselben Wert hat wie im ursprünglichen; der letztere ist also von einem Kranze von Punkten umgeben, in denen die Größe denselben Wert wie in ihm selbst hat; und wenn man nun dieselbe Operation auf diese Kranzpunkte anwendet und entsprechend fortfährt, gelangt man zu dem Ergebnis, daß es eine durch den betrachteten Punkt gelegte Fläche gibt, von der Eigenschaft, daß die das Feld charakterisierende Größe in allen ihren Punkten denselben Wert hat. Man kann eine solche Fläche allgemein eine Isofläche nennen, und man sieht ein, daß durch jeden Punkt im Felde eine solche Isofläche geht, daß diese Flächen sich stetig aneinander schließen, jede folgende mit einem um unendlich wenig verschiedenen Werte jener Größe, und daß diese Flächen somit das Feld vollständig erfüllen. Man kann aber auch eine Auswahl aus den Isoflächen in der Weise treffen, daß man festsetzt, der Wert der Größe solle sich von einer zur folgenden um einen endlichen Betrag ändern, dieser Betrag solle aber für den Übergang von irgend einer zur nächsten Isofläche gleichgroß sein; man erhält dann die Schar der Isoflächen im engeren Sinne des Wortes. Es ist klar, daß sich zwei Isoflächen nie schneiden können, daß sie vielmehr entweder in sich geschlossen sind oder erst an den Grenzen des Feldes enden; im übrigen können sie die verschiedensten Gestalten haben. Ihr Abstand voneinander ist — und zwar sowohl an verschiedenen Stellen zwischen denselben beiden Flächen, als auch zwischen verschiedenen Flächen — umgekehrt proportional der Änderungsstärke der Feldgröße; ihre „Dichte" ist der letzteren also direkt proportional, und so liefern sie ein anschauliches Bild von den Richtungs- und Stärkeverhältnissen des Feldes.

Die Charakterisierung des Feldes läßt sich, statt durch die Isoflächen, auch durch gewisse Linien geben, die die gleichen Verhältnisse in anderer Weise veranschaulichen, und die man auch, obgleich das nicht notwendig ist, mit jenen Flächen kombinieren kann. Es sind das die Linien, die in jedem ihrer Punkte die Richtung angeben, in der sich die das Feld charakterisierende Größe am stärksten ändert, in dem einen Sinne wachsend, in dem anderen abnehmend; man kann sie allgemein als Änderungslinien oder Linien größter Änderung bezeichnen. Dafür gibt es auch noch eine andere Bezeichnung, und zwar sowohl für jene Flächen als auch für diese Linien; eine Bezeichnung, die von einem speziellen Falle entlehnt und auf die Allgemeinheit übertragen ist: man nennt die Isoflächen Niveauflächen und die Änderungslinien Böschungslinien oder Gefällinien. Die Böschungslinien schneiden die Niveauflächen überall senkrecht; untereinander können sie sich ebenfalls nicht schneiden, wohl aber können sie sich in großer Zahl in den singulären Punkten des Feldes treffen. Auch die Böschungslinien erfüllen das Feld vollständig; eine Auswahl ist aber hier nicht in so einfacher Weise wie bei den Niveauflächen zu treffen, weil es für eine Böschungslinie keine charakteristische Konstante gibt, an deren Änderung man sich halten kann; man muß hier die Auswahl nach einem anderen Gesichtspunkte treffen, und zwar so, daß diese Linien nicht nur in einer Richtungsbeziehung,

sondern auch — wie die Niveauflächen — in einer Größenbeziehung zu der Feldgröße stehen. Das aber kann in folgender Weise geschehen.

Denken wir uns zunächst den einfachen Fall, daß die das Feld charakterisierende Größe im Punkte P ein Maximum habe, sagen wir geradezu, daß sie hier unendlich groß sei, und daß radiale Symmetrie um den Punkt herrsche, d. h. daß alle Richtungen, die von ihm ausgehen, gleichwertig seien. Dann wird irgend eine um ihn geschlagene Kugel eine Niveaufläche, deren sämtliche Radien werden die Böschungslinien sein, und an allen Stellen der Kugeloberfläche wird nicht nur die Größe, sondern auch ihre Böschung denselben Wert haben. Es leuchtet nun ohne weiteres ein, daß wir in diesem Falle eine unter den Böschungslinien vorzunehmende Auswahl in gleichförmigem Sinne treffen werden, d. h. so, daß auf jedes qcm der Niveaufläche dieselbe Anzahl von Böschungslinien entfällt. Es sei hier eingeschaltet, daß man an die Stelle der Böschungslinien und ihrer Anzahl eine etwas andere Vorstellung setzen kann; denkt man sich nämlich immer ein ganzes Bündel Böschungslinien zu einem „Böschungsbündel", einem „Böschungsfaden" oder einer „Böschungsröhre" vereinigt, derart, daß diese Fäden, mit veränderlichem Querschnitt, das Feld vollständig erfüllen, so wird man die in unserem einfachen Falle kegelförmigen Röhren, die ihre Spitzen im Punkte P haben, offenbar alle mit gleichem Kegelwinkel auswählen müssen, weil kein Grund zum Gegenteil vorliegt; und es werden dann auch die — als sphärische Vierecke vorzustellenden Schnitte der Fäden mit der Niveaufläche sämtlich gleichgroß sein. Man kann also ein Feld entweder durch die Böschungslinien und ihre Anzahl oder durch die Böschungsfäden und ihren Querschnitt charakterisieren; in der Wissenschaft ist die letztere, in der Praxis die erstere Vorstellung üblicher. — Wenn nun keine Symmetrie um den Punkt P herum herrscht, wenn also die Niveaufläche, statt der kugeligen, irgend eine andere Gestalt hat, und wenn in ihren verschiedenen Punkten zwar die Feldgröße, nicht aber deren Böschung gleiche Werte hat, so wird man eine andere Auswahl aus den Böschungslinien treffen; und man kann sie — das ist ein naheliegender Gedanke — derart treffen, daß die Anzahl der durch die Einheit der Niveaufläche — 1 qcm — hindurchtretenden Böschungslinien — oder auch der Querschnitt der Böschungsfäden — proportional sei der an der betreffenden Stelle herrschenden Böschung. Man wird sogar noch einen Schritt weiter gehen können und den Proportionalitätsfaktor gleich 1 machen, so daß jetzt die Anzahl der Böschungslinien pro qcm der geschnittenen Niveaufläche geradezu die dort herrschende Böschung in absolutem Maße angibt; im Falle sphärischer Symmetrie muß man z. B. das 4π-fache derjenigen Anzahl von — gleichförmig rundum verteilten — Linien auswählen, die den Wert der Böschung in 1 cm Abstand von dem Punkte P angibt; bei mangelnder Symmetrie wird man anders, aber in ganz bestimmter Weise verfahren müssen und können. Für die verschiedenen Stellen einer und derselben Niveaufläche ist somit alles in schönster Ordnung.

Nun fragt es sich aber, wie es beim Übergange von einer Niveaufläche zur nächsten steht. Nehmen wir wieder zunächst jenen Punkt P und um ihn herum radiale Symmetrie, so daß wir zwei konzentrische Kugeln als Niveauflächen haben, deren Radien sich etwa wie $1:2$ verhalten mögen, so ist klar, daß, da neue Böschungslinien unterwegs nicht entstehen sollen, sich die die erste Kugelfläche auf einem qcm durchschneidenden Böschungslinien auf der zweiten Kugelfläche schon über 4 qcm verteilen werden, daß also auf 1 qcm hier nur ein Viertel der Böschungslinien wie bei der ersten Kugel entfallen wird. Soll dieses Viertel den Zahlenwert der Böschung an dieser Stelle in demselben Maße wie an dem Durchschnitt mit der ersten Kugel darstellen, so ist dies nur möglich, wenn die Böschung hier auch nur ein Viertel so groß ist; allgemein, wenn die Böschung von dem Punkte P aus im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung abnimmt. — Geht man nicht von einem Maximumpunkt, sondern von einer

Maximumlinie aus, so verlangt unsere Darstellung offenbar, daß die Böschung von dieser Linie aus im umgekehrten Verhältnis der Entfernung selbst abnehme; von einer Maximumebene aus darf sie gar nicht abnehmen; und so ist es möglich, in jedem Falle anzugeben, wie sich die Böschung verhalten muß, wenn die geometrische Darstellung durch Böschungslinien, nicht nur der Richtung, sondern auch der Größe nach, möglich sein soll. Man kommt also zu dem Ergebnis, daß die Charakterisierung des Feldes durch Böschungslinien in der angedeuteten Weise nur möglich ist, wenn die Böschung sich überall in der Weise ändert, daß, auf das Punktgesetz reduziert, die Änderung in irgend einer Richtung umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ist. Die Betrachtung der physikalischen Einzelgebiete zeigt, daß dieser Fall außerordentlich häufig realisiert ist.

Die Punkte, in denen die das Feld charakterisierende Größe ein positives oder negatives Maximum bezw. ein Maximum oder Minimum aufweist, könnte man, unter Festhaltung des Bildes vom Niveau und der Böschung, Gipfelpunkte und Kesselpunkte nennen; und entsprechende Bezeichnungen könnte man in den Fällen anwenden, wo diese singulären Stellen nicht punktförmig sind. Man pflegt aber diese Stellen Pole, und zwar positive und negative, zu nennen; in vielen Fällen ist auch der Ausdruck Quelle und Senke gebräuchlich und bezeichnend; in noch anderen spricht man von Anode und Kathode.

Ein Spezialfall ist der, wo eine der drei Dimensionen des Feldes sehr klein und überall gleich ist; sie bietet dann für die Betrachtung kein weiteres Interesse dar, und man kann das Feld als zweidimensional ansehen. An die Stelle der Niveauflächen treten dann die Niveaulinien, diese werden von den Böschungslinien überall senkrecht geschnitten. Derartige zweidimensionale Felder werden auch noch in einem anderen Falle betrachtet: wenn nämlich das dreidimensionale Feld in einer seiner Ausdehnungen keine Mannigfaltigkeit aufweist, wenn also die Erscheinungen und die das Feld charakterisierende Größe eine Funktion nur der beiden ersten Dimensionen sind. Die Niveauflächen sind dann zylindrische Flächen, und es genügt, irgend einen Schnitt senkrecht zur gleichgültigen Dimension zu machen: das ist das zweidimensionale Feld; in allen anderen Schnitten würden die Verhältnisse genau die gleichen sein. — Über eindimensionale Felder ist nichts besonderes zu sagen.

Verschiedene Arten von Feldern. Was bisher über die Konstitution des Feldes gesagt wurde, gilt ganz allgemein, unabhängig von der Bedeutung, die das Feld in der Wirklichkeit hat. Je nach der Natur der für das Feld charakteristischen Größe kann es nun sehr verschiedene Felder geben. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß in der Wirklichkeit in einem Felde meist mehrere Größen eine wesentliche Rolle spielen, und daß es daher darauf ankommt, welche dieser Größen bei dem betreffenden Problem von Wichtigkeit ist oder sind. So gibt es das Masse- oder Dichtefeld und das Temperaturfeld; in Wahrheit ist dasselbe Feld zugleich Dichte- und Temperaturfeld, beide Größen variieren von Ort zu Ort und eventuell auch von Zeit zu Zeit, und ihre Änderungen werden im allgemeinen auch miteinander in Beziehung stehen, so daß man, wenn man nur die einen oder nur die anderen behandelt, nur ein Teilproblem löst. Ein und dasselbe Feld ist ferner Bewegungsfeld oder Kraftfeld, je nachdem man sein Augenmerk auf das Tatsächliche des Vorganges oder auf seine Beschreibung durch eine Kraft lenkt. Von den Bewegungsfeldern wird es wiederum, je nach dem Charakter der Bewegung, verschiedene Arten geben; die drei wichtigsten darunter sind, entsprechend den Haupttypen der Bewegung, das Strömungsfeld, das Wirbelfeld und das Wellen- oder Strahlungsfeld; dabei kann das, was strömt, wirbelt oder strahlt, entweder ponderable Materie oder ein imponderables Substrat von der Natur des Äthers sein. Entsprechende Klassifikationen kann man hinsichtlich der Kraftfelder vornehmen; es gibt hier u. a. das Schwerefeld oder allgemeiner das Gravitationsfeld, ferner das Wärmefeld, das elektrische und das magnetische, allgemein

das elektromagnetische Kraftfeld, das Schallfeld, das Lichtfeld u. s. w. Endlich wird noch später von dem Energiefelde wiederholt die Rede sein.

Skalarfeld, Vektorfeld, Tensorfeld. Alle die soeben gemachten Unterscheidungen haben mehr äußerlich phänologische als prinzipielle Bedeutung; um eine prinzipielle Einteilung zu gewinnen, muß man sich an die Natur der das Feld charakterisierenden Größe halten; diese Größe kann nach früherem (p. 16) entweder ein Skalar oder ein Vektor oder ein Tensor sein; man würde also zu Skalar-, Vektor- und Tensorfeldern gelangen. Indessen ist damit der interessanteste Punkt der geometrischen Darstellung physikalischer Prozesse und Zustände durch Felder noch nicht getroffen; dieser liegt vielmehr in der kombinierten Rolle, die Skalar und Vektor (oder Tensor) im Felde spielen, auch wenn die eigentliche Feldgröße ein reiner Skalar ist. Es ergibt sich das schon in dem Falle, der für die Nomenklatur der Flächen und Linien im Felde zum Ausgangspunkt gedient hat: das Niveau an sich ist ein Skalar (z. B. die Höhe über dem Meeresspiegel); dagegen ist ihre Änderung von Ort zu Ort, also die Böschung, ein Vektor. Ein Skalarfeld gibt also, außer über diesen Skalar, auch über den ihm zugehörigen Vektor Auskunft. In Wahrheit wird die Sache sogar meist umgekehrt liegen: man wird den Vektor kennen oder messen können, und das Feld gibt dann nicht nur über ihn, sondern auch über den zugehörigen Skalar Auskunft.

Es sei S der Skalar des Feldes, dann ist sein Gefälle in der x-, y-, z-Richtung (Wertabnahme auf der Streckeneinheit) gleich

$$(65) \qquad -\frac{\partial S}{\partial x} \quad , \quad -\frac{\partial S}{\partial y} \quad , \quad -\frac{\partial S}{\partial z} \quad ,$$

und die Böschung, d. h. das Gefälle in der Richtung der stärksten Abnahme ist die Resultante dieser Größen

$$(66) \qquad -\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2} \quad .$$

Diese Resultante ist der Zahlenwert, obige drei Größen sind die Komponenten eines Vektors; um diesen Vektor selbst hinschreiben zu können, bedient man sich der von Hamilton eingeführten Schreibweise

$$(67) \qquad \nabla S = i\frac{\partial S}{\partial x} + j\frac{\partial S}{\partial y} + k\frac{\partial S}{\partial z} \quad ,$$

wo i, j, k symbolische Faktoren sind und das ganze natürlich keine Summe im gewöhnlichen Sinne, sondern eine Vektorsumme ist. Man nennt zuweilen diesen Vektor Gefälle oder Gradient im engeren Wortsinne. Ein Skalarfeld ist zugleich, wie man sieht, stets auch ein Vektorfeld; dagegen muß die Frage, ob es zu einem gegebenen Vektorfelde auch ein Skalarfeld gibt, besonders untersucht werden — eine Untersuchung, die augenscheinlich darauf hinausläuft, ob es möglich ist, die Vektorkomponenten als die Differentialquotienten einer und derselben Funktion nach den Koordinatenachsen darzustellen. Hierzu ist es notwendig, das Vektorfeld näher zu betrachten.

Ist wieder P ein polarer Vektor (vgl. p. 17), und sind P_x, P_y, P_z seine Komponenten, so ist die Funktion $div\, P$ (vgl. p. 18) ein Skalar; er stellt, wie man sich leicht vorstellt, die „Ergiebigkeit" der Quelle dar, aus der das Feld gespeist wird. Einen zweiten Skalar erhält man, wenn man für eine Fläche f mit der Normale n den Ausdruck

$$(68) \qquad F = \iint df (P_x \cos n x + P_y \cos n y + P_z \cos n z) \quad ,$$

oder für eine Linie l das Integral

$$(69) \qquad L = \int dl(P_x \cos lx + P_y \cos ly + P_z \cos lz)$$

bildet. Der Wert dieses letzteren Integrals ist, bei gegebenen Grenzen, im allgemeinen vom Wege abhängig; ist er es nicht, so erhält man $S_2 - S_1$, es gibt zu dem Vektor P einen Skalar S, und P ist das Gefälle von S. Anders ausgedrückt: P_x, P_y, P_z sind die Differentialquotienten von S nach x, y, z. Folglich wird

$$(70) \qquad div\, P = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right) = -\Delta S \quad .$$

Zu dem polaren Vektor P gehört ferner ein axialer A, dessen Komponenten die Quirlkomponenten (p. 18) von P sind; in dem eben in Rede stehenden Spezialfalle aber werden diese Quirlkomponenten und damit der Quirl selbst null. Man nennt ein Vektorfeld, das in der angegebenen Weise auf einen Skalar führt, ein wirbelfreies oder potentielles Feld, und den Skalar selbst nennt man Potential im allgemeinsten Sinne des Wortes.

Andererseits kann auch die Divergenz null werden; es wird das offenbar in quellenfreien Feldern geschehen; solche Felder heißen auch solenoidal, und im Gegensatz dazu die zuerst betrachteten lamellar. Im quellenfreien Felde kann man die Vektorkomponenten als die Quirlkomponenten eines Vektors darstellen, den man dann, wenn seine Divergenz null ist, als Vektorpotential U bezeichnet (vgl. z. B. „Magnetismus", Bd. 5, p. 61). Es bestehen dann die Beziehungen

$$(71) \qquad P_x = \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \quad , \qquad P_y = \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \quad , \qquad P_z = \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \quad ,$$

$$(72) \qquad \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad ,$$

$$(73) \qquad \frac{\partial P_y}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial y} = \Delta U_x , \quad \frac{\partial P_z}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial z} = \Delta U_y , \quad \frac{\partial P_x}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial x} = \Delta U_z \quad .$$

Schließlich kann ein Feld auch wirbelfrei und quellenfrei zugleich sein, d. h. lamellar und solenoidal zugleich; es heißt alsdann LAPLACEsches Feld, weil es der betreffenden Gleichung (Artikel „Potentialtheorie") genügt. — Auf die axialen Vektorfelder sowie auf die Tensorfelder, für die kompliziertere Beziehungen gelten, kann hier nicht eingegangen werden; es bietet sich dazu an den Stellen, wo Anwendungen gemacht werden, passendere Gelegenheit.[1]

Potentiale verschiedener Art. Die beiden wichtigsten Potentiale in der Physik sind diejenigen, die zur Geschwindigkeit und zur Beschleunigung gehören. Das Geschwindigkeitspotential ist also derjenige Skalar, dessen Differentialquotienten nach den Koordinatenachsen, negativ genommen, die Komponenten der Geschwindigkeit ergeben; leider findet man es meistens in der der obigen entgegengesetzten Weise, d. h. durch die positiven Differentialquotienten, definiert, wodurch ein Mangel an Übereinstimmung zwischen den beiden Potentialen (s. w. u.)

[1] Die Einführung des Ausdrucks „Feld" in die Physik wird gewöhnlich auf Lord KELVIN zurückgeführt: W. THOMSON, Phil. Mag. (4) **1.** 179. 1851; Rep. of papers p. 467. — Zur Feldtheorie ist u. a. auf folgende Werke und Monographien hinzuweisen: J. C. MAXWELL, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Berlin 1883. — O. HEAVISIDE, Electromagnetic Theory. London 1894. — A. FÖPPL, Einführung in die MAXWELLsche Theorie. Leipzig 1894. — A. FÖPPL, Geometrie der Wirbelfelder. Leipzig 1897. — G. FERRARIS, Teor. geom. dei campi vettoriali, Mem. di Torino (2) **47.** 259. 1897. — A. BROCA, C. R. **130.** 108. 1900. — L. DONATI, Mem. di Bol. (5) **11. 147.** 1899. — M. ABRAHAM, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaft **4.** Teil 2. 1901. — H. EBERT, Magnetische Kraftfelder. 2. Aufl. Leipzig 1905.

entsteht. Die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials besagt, daß in dem Felde nur strömende, nicht aber wirbelnde Bewegungen vorkommen, daß es sich also um ein Strömungsfeld, nicht um ein Wirbelfeld handelt. Eine Modifikation des Geschwindigkeitspotentials ist das Verrückungspotential, das, statt durch die Differentialquotienten, durch die Differentiale definiert ist, und das besonders bei statischen Feldern, bei Deformationszuständen, Anwendung findet. — Ganz entsprechend wie das Geschwindigkeitspotential aus den Geschwindigkeitskomponenten wird nun aus den Komponenten der Beschleunigung das Beschleunigungspotential abgeleitet. Es wird aber gewöhnlich kausal gefaßt, d. h. es wird an die Stelle der Beschleunigung die sie erzeugende Kraft gesetzt, und es wird demgemäß als Kraftpotential oder kurz als Potential bezeichnet. In diesem Falle nun herrscht, wenigstens in der modernen Physik (in älteren Werken sowie in neueren mathematischen findet man vielfach das Entgegengesetzte), Einigkeit darüber, diejenige Größe Potential zu nennen, deren negative Differentialquotienten die Kraftkomponenten liefern. — Wenn es sich nicht um Kraft im Vektorsinne, sondern um tensorartige Kräfte, z. B. Drucke handelt, erhält man eine Modifikation des Potentials, für die das elastische Potential ein Beispiel gibt. Von den eigentlichen Vektorpotentialen endlich war schon die Rede. Es möge an diesen kurzen Andeutungen genügen, da später ein besonderes, der Potentialtheorie gewidmetes Kapitel folgen soll. Nur seien noch die Dimensionen des Geschwindigkeitspotentials φ, des Beschleunigungspotentials V und des Kraftpotentials V_m angegeben:

$$(74) \qquad [\varphi] = L^2 T^{-1} \quad , \qquad [V] = L^2 T^{-2} \quad , \qquad [V_m] = L^2 T^{-2} M \quad .$$

Arbeit. Wie der Kraftbegriff aus dem Bereich persönlichen Bewußtseins (Muskelkraft) auf das Gebiet unpersönlicher Natur übertragen wird, so geschieht dies auch mit einem weiteren Begriff, der in den letzten hundert Jahren von immer steigender Bedeutung für wissenschaftliche und technische Betrachtung von Naturprozessen geworden ist. Es ist das der Begriff der Arbeit. Arbeit ist das Ergebnis von Kraftaufwand, und somit ist so viel zweifellos, daß der Arbeitsbegriff, als mathematische Größe gefaßt, die Größe der Kraft in sich als Faktor enthalten muß; es fragt sich nur, was man als zweiten Faktor hinzuzufügen hat, eben um jenes Ergebnis auszudrücken. Hier sind nun zwei verschiedene Möglichkeiten vorhanden, die Wahl einer jeden von ihnen bietet gewisse Vorteile, und beide haben einerseits in der Geschichte der exakten Wissenschaft ihre Rolle gespielt, andererseits spielen sie diese Rolle noch jetzt nebeneinander in der Praxis; in der Wissenschaft dagegen ist die eine durch die andere gänzlich, in gewissem Sinne bedauerlicherweise, verdrängt worden.

Die eine Definitionsmöglichkeit besteht in der Heranziehung der Zeit, während deren die Kraft wirkt; man muß dann, da im allgemeinen die Kraft veränderlich ist, infinitesimal verfahren und das Integral

$$(75) \qquad A' = \int_{t_0}^{t_1} K\,dt$$

bilden, wo K die Kraft und t_0 bis t_1 das Zeitintervall ist, währenddessen die Kraft wirkt; für den Spezialfall konstanter Kraft kann man einfacher das Produkt aus Kraft und Zeit setzen und schreiben:

$$(76) \qquad A' = K(t_1 - t_0) = K \cdot T \quad .$$

Diese Definition der Arbeit hat den Vorteil, daß sie immer anwendbar ist und zu stets meßbaren Werten führt; nun ist allerdings, was ihr so oft vorgeworfen wird, richtig, daß die Zeitdauer an sich kein vollgültiges Maß der Leistung ist — das hat aber auch nichts zu besagen, wie man einsieht, wenn

man bedenkt, daß durch die Größe der Kraft schon alles festgelegt ist und daß eine bestimmte Kraft verschiedene Leistungen eben nur nach Maßgabe der Zeitdauer ihres Wirkens vollziehen kann. Es muß dieser Sachverhalt betont werden, um zu zeigen, daß der dem Zeitbegriff der Arbeit oft gemachte Vorwurf innerlich völlig unberechtigt ist. Man ist zu diesem Vorwurf durch das Beispiel menschlicher Arbeitsleistung, die honoriert werden soll, gekommen, und für die bekanntlich das hier in Rede stehende Arbeitsmaß, der sogenannte Zeitlohn, große Mängel hat; diese Mängel rühren aber nur daher, daß man im vorliegenden Falle die Kraft nicht kennt und auf diese erst durch die Arbeit einen Rückschluß machen kann, und zu diesem Rückschluß ist das Zeitmaß offenbar nicht geeignet; in Fällen dagegen, wo man von vornherein weiß, wie groß die Kraft ist und wie sie sich von Augenblick zu Augenblick ändert, ist das Zeitintegral ein Arbeitsmaß, das alles berücksichtigt, was überhaupt zu berücksichtigen ist.

Die andere Möglichkeit besteht darin, daß man die Kraft mit einem Faktor multipliziert, der in irgend einer Weise das quantitative Ergebnis des Wirkens der Kraft zum Ausdruck bringt, also bei bewegenden Kräften die zurückgelegte Strecke, bei elektromotorischen Kräften die fortgetriebene Elektrizitätsmenge, bei magnetisierenden Kräften die erzielte Magnetisierung u. s. w. Man kann alle diese Fälle auf den mechanischen zurückführen, indem man in den anderen Fällen die Wirkung sich in irgend einer Weise ebenfalls unter dem Bilde einer Strecke vorstellt. Dann ist also die Arbeit, die jetzt A heißen soll, definiert durch

(77) $$A = \int_1^2 K\,dl \quad ,$$

wo dl ein Streckenelement ist und 1 und 2 Anfang und Ende der Strecke sind; für konstante Kraft kann man wieder einfacher setzen:

(78) $$A = K \cdot l \quad .$$

Dabei versteht sich von selbst, daß nur diejenige Strecke zu rechnen ist, deren Zurücklegung als eine Wirkung der Kraft K anzusehen ist; die in Wahrheit zurückgelegte Strecke kann infolge früherer Impulse oder gleichzeitig wirkender Kräfte oder Hindernisse eine andere sein, es ist dann also die Projektion auf die Richtung der Kraft zu nehmen. Ferner ist zu beachten, daß, wenn man die Arbeit in Beziehung zu einem materiellen System setzt, sie positiv oder negativ sein kann, je nachdem von außen Arbeit auf das System geleistet wird oder das System mit seinen inneren Kräften Arbeit nach außen leistet.

Der Nachteil, den der Streckenbegriff der Arbeit gegenüber dem Zeitbegriff hat, liegt darin, daß er nicht alles das umfaßt, was man im allgemeinen Sprachgebrauch und in der Technik als Arbeit bezeichnet, und daß, selbst wo er dies tut, nicht immer ein Maß für die bildliche Strecke zu finden ist. In der technischen Praxis wird die in Rede stehende Arbeitshonorierung bekanntlich Akkordlohn genannt, und es gibt zahlreiche Arten von Arbeit, wo es unmöglich ist, denselben festzustellen. Ein typisches Beispiel für den Fall, wo die Strecke null ist und doch im allgemeineren Wortsinne Arbeit geleistet wird, ist das Halten eines Gewichts mit ruhig ausgestrecktem Arme; im mechanischen Sinne liegt hier eine Arbeit nicht vor.[1] Will man diesen Widerspruch beseitigen, so kann man folgende zwei Betrachtungen anstellen. Das Gleichgewicht des Gewichtsstückes ist eine Folge des Zusammenwirkens zweier Kräfte: meiner Muskelkraft und der Schwerkraft; um die Arbeit meiner Muskelkraft zu bekommen, muß man die

[1] Man hat für diese Art von Arbeit sogar den besonderen Namen „statische Arbeit" vorgeschlagen, und es findet seit Jahren eine lebhafte Diskussion über ihre Bedeutung statt; aus neuester Zeit z. B. von E. SOLVAY, C. R. **138**. 1261. 1904 und E. LEBERT, ibid. **138**. 1481. 1904.

Strecke ermitteln, um die sie das Gewicht bei ungeänderter Anstrengung heben würde, wenn die Schwerkraft nicht da wäre, oder, was dasselbe ist, die Strecke, durch die es fallen würde, wenn es nicht von der Muskelkraft gehalten würde. Man müßte hiernach den Arbeitsbegriff dahin erweitern, daß er das Produkt der Kraft in die Strecke ist, durch die sie den Körper bewegt oder an dessen Zurücklegung infolge des Wirkens einer anderen Kraft sie ihn hindert. Man kann aber, an das obige Beispiel anknüpfend, noch eine spezielle Betrachtung anstellen, durch die man das Gleichgewicht zwischen Schwerkraft und Muskelkraft näher analysiert; man kann sich nämlich vorstellen — und tatsächlich findet etwas derartiges statt — daß in Wahrheit das Gewichtsstück sich nicht in Ruhe befindet, sondern, daß es fortwährend ein Stück Weges infolge der Schwerkraft hinabsinkt, aber durch die Muskelkraft wieder um ebensoviel gehoben wird, daß es also auf und ab zittert; die Summation aller Aufwärtswege ergibt dann eine tatsächliche und beträchtliche Strecke, und demgemäß hat die Arbeit auch im Streckensinne einen von null verschiedenen Wert.

Wenn somit aus dem Gesagten folgt, daß beide Arbeitsdefinitionen gleiche Berechtigung haben, so spricht doch der Dimensionscharakter und die damit zusammenhängende Beziehung zu einem sogleich einzuführenden Begriff, der Energie, zugunsten des Streckenbegriffs. Es gelten nämlich die Dimensionsformeln

(79) $$[A'] = L T^{-1} M \quad , \qquad [A] = L^2 T^{-2} M \quad ,$$

der Zeitbegriff der Arbeit enthält also eine Geschwindigkeit, der Streckenbegriff das Quadrat einer Geschwindigkeit; da nun in der kinetischen Energie (s. w. u.) das letztere die maßgebende Größe ist, ordnet sich der Streckenbegriff besser in das Begriffssystem der Naturlehre ein; und in der Tat ist das auch, wie ein Blick auf die Geschichte lehrt, die hauptsächliche Veranlassung gewesen, den — älteren — Zeitbegriff zugunsten des Streckenbegriffs fallen zu lassen.[1]

In besonderen Fällen kann man übrigens noch eine andere Art von Arbeitsbegriff einführen, nämlich die Impulsarbeit; sie verhält sich zum Impuls (p. 43) wie die Kraftarbeit zur Kraft; es gelten also für sie die folgende Formel und Dimensionsformel:

(80) $$\mathfrak{A} = I \cdot l \quad , \qquad [\mathfrak{A}] = L^2 T^{-1} M \quad .$$

Über die Streckenarbeit ist noch folgendes zu bemerken. Sie ist als Produkt zweier Größen mit jeder von ihnen proportional, sie kann also groß sein entweder infolge Größe der wirkenden Kraft oder, bei kleiner Kraft, infolge Größe der wirklichen oder bildlichen Strecke; sie ist in zwei verschiedenen Fällen gleich groß, wenn sich die Strecken umgekehrt verhalten wie die Kräfte. Auf diesen Beziehungen beruht ein großer Teil der Leistungen und Vorzüge technischer Einrichtungen, wovon an den betreffenden Stellen noch im einzelnen die Rede sein wird.

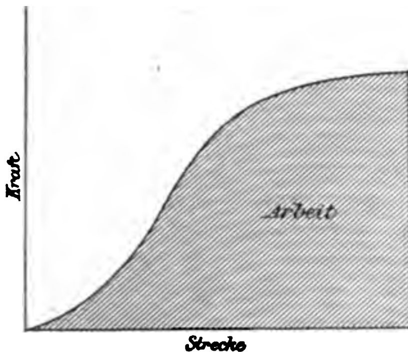
Wenn der Arbeitsbegriff hier als ein aus dem Kraftbegriff abgeleiteter erscheint, so wird man geneigt sein, ihm noch abstrakteren Charakter als dem Kraftbegriff, der doch nach den früheren Ausführungen auch schon eine Abstraktion aus Beschleunigung und Masse darstellt, beizulegen. Daß das den Kern des Begriffs indessen nicht trifft, zeigt schon die banale Tatsache, daß Arbeit im Leben bezahlt wird, und zwar nicht bloß in Fällen, wo sie von Kräften ausgeht,

---

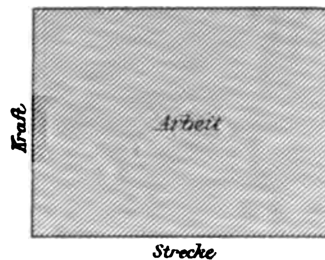
[1] Die Streckendefinition der Arbeit rührt von G. CORIOLIS her: Tr. de mécan. etc. 1829; er ist namentlich durch PONCELET und seine Nachfolger eingebürgert worden, natürlich zunächst in der Mechanik; die Ausdehnung auf die ganze Physik hat dann allmählich stattgefunden. Einspruch gegen den Streckenbegriff ist wiederholt erhoben worden, so von A. R. MOON und O. RAUSENBERGER, vgl. des letzteren Lehrbuch der analytischen Mechanik. Leipzig 1888. — Wegen der Einführung des Arbeitsbegriffs im Unterricht s. u. a. W. OSTWALD, Ztschr. f. math. u. naturw. Unter. **33**. 10. 1902 und in gegenteiligem Sinne F. POSKE, ibid. **34**. 24. 1903; auch Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **15**. 236. 1902.

die, wie unsere Muskelkraft, reale Existenz in unserem Bewußtsein haben, sondern auch da, wo sie von physikalischen, aus der Erfahrung abstrahierten Kräften geleistet wird. Das wesentliche Charakteristikum aber, das für die konkrete Natur, wie des Stoffes, so auch der Arbeit spricht, die Konstanz im Wandel der Prozesse, wird erst etwas später, bei Betrachtung der Energie anzuführen sein.

Graphische Darstellungen in der Physik. Arbeitsdiagramm. Eine jede Größe, die bei einem Problem als eine Funktion einer anderen auftritt, kann man in sehr anschaulicher Weise durch eine Kurve darstellen, deren Abszissen die selbständige Variable, deren Ordinaten die Werte der Funktion angeben; so die

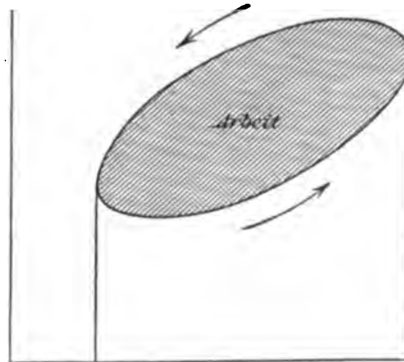


Figur 11 *a*.



Figur 11 *b*.

Geschwindigkeit beim freien Falle als Funktion der Zeit oder die Magnetisierung als Funktion der magnetisierenden Kraft. Eine Funktion zweier Variabeln kann man im allgemeinen nicht in der Ebene darstellen; man muß vielmehr die Erhebung über einer Ebene benutzen, in der die eine Variable die Abszisse, die andere die Ordinate ist; man erhält dann eine Darstellungsfläche. Einen Mittelweg, nämlich Darstellung in der Ebene, aber durch eine Fläche, kann man nun in dem Falle einschlagen, wo die Funktion das Produkt zweier Variabeln oder allgemeiner das Integral der einen über die andere ist; das ist nun, wie wir wissen, gerade bei der Arbeit der Fall.



Figur 11 *c*.

Man nimmt also die Strecken als Abszissen, die Kräfte als Ordinaten, und erhält dann freilich eine Kurve, die nicht die Arbeit, sondern einfach die Kraft darstellt; bildet man aber nunmehr die Fläche, die von der Kurve, der Anfangs- und Endordinate und dem zwischen ihnen liegenden Stücke der Abszissenachse begrenzt wird, so sieht man nach der Gleichung (77) ein, daß dies die dem Prozeß entsprechende Arbeit ist. Der hier gewählte Prozeß ist ein sogenannter offener; ihm gegenüber steht der geschlossene oder Kreisprozeß, bei dem das System am Schlusse wieder an demselben Orte — allgemeiner in demselben Zustande — ist wie am Anfang, und dessen geometrisches Bild — eine in sich zurückkehrende Kurve — man sich in einer manchmal eindeutig gegebenen, manchmal mehr willkürlichen Weise aus einem Hinwege und einem Rückwege zusammensetzen kann; bei dem Rückwege muß man dann die Fläche negativ rechnen und kommt so zu dem Ergebnis, daß die Arbeit bei einem Kreisprozeß einfach durch die von der geschlossenen Kurve eingefaßte Fläche dargestellt wird. In Figur 11 *a* und *b* sind diese beiden Fälle

veranschaulicht; endlich entspricht Figur 11c dem Spezialfalle, daß die Kraft konstant, die Arbeit somit das Produkt aus Kraft und Strecke und ihr geometrisches Bild demgemäß ein einfaches Rechteck ist.

Arbeitseinheit. Erg. Die Einheit der Arbeit im C.G.S.-System ist ohne weiteres gegeben: es ist die Arbeit einer Dyne auf der Strecke von 1 cm bezw. auf einer entsprechenden bildlichen Strecke. Man nennt diese Arbeitseinheit das Erg, und man bildet daraus in analoger Weise wie bei früheren Gelegenheiten abgeleitete Einheiten:

1 Mikroerg . . . . =	0,000001	Erg
1 Millierg . . . . =	0,001	„
1 Kiloerg . . . . =	1000	„
1 Megaerg . . . . =	1000000 [10^6]	„
1 Joule = 10 Megaerg =	10000000 [10^7]	„ .

Ein Joule (nach dem englischen Techniker und Physiker genannt) ist also die Arbeit, die eine Dyne auf der Strecke von 100 km oder eine Megadyne auf der von 10 cm leistet. In der Natur und in der Technik kommen außerordentliche Gegensätze von Arbeitsleistungen vor, wovon noch die Rede sein wird.

In der Praxis wird noch vielfach, auf manchen Gebieten sogar überwiegend, das Gewichtsmaß, also das C.G*.S.-System benutzt, und es werden überdies als Einheiten nicht cm und g, sondern m und kg* zugrunde gelegt. Die Einheit, zu der man so gelangt, heißt Meterkilogramm oder Kilogrammeter; sie wird geleistet, wenn 1 kg, der Schwerkraft entgegen, um 1 m gehoben wird. In England und Amerika wird statt dessen noch vielfach das Fußpfund gebraucht. Es bestehen hierfür an Orten, wo die Beschleunigung durch die Schwere 981 ist, die folgenden Beziehungen:

1 mkg* . . =	100000 cmg*	= 98,1 Megaerg = 9,81 Joule
1 Fußpfund =	0,13826 mkg*	= 13,56 „
1 Erg . . =	$102 \cdot 10^{-10}$ mkg*	= $737 \cdot 10^{-10}$ Fußpfund
1 Joule . . =	0,102 mkg*	= 0,737 Fußpfund

Ein Erg ist hiernach, im Gewichtsmaß ausgedrückt, die Arbeit, die man etwa leistet, wenn man ein Milligrammgewichtsstück ein Zentimeter hoch hebt; genauer ist ein Erg um 2 % größer.

Von einer abweichenden, indirekten Art, die Arbeit zu messen, wird sofort die Rede sein.

Effekt oder Leistungsstärke. Der Betrag an geleisteter Arbeit nimmt, gleichviel ob man den Zeit- oder, wie wir es tun, den Streckenbegriff der Arbeit zugrunde legt, mit der Zeitdauer, während deren die Kraft wirksam ist, naturgemäß zu. Für die Leistungsfähigkeit einer Kraft, einer Maschine u. s. w. muß man also ein von diesem Element befreites Maß aufstellen. Man wird es erhalten, wenn man den Grenzwert ermittelt, dem sich das Verhältnis der geleisteten Arbeit zu der Zeit, in der sie geleistet wird, nähert, wenn dieser Zeitraum kleiner und kleiner genommen wird; dieser Grenzwert ist dann die Arbeitsfähigkeit der Kraft in dem betreffenden Augenblick. In dem speziellen, aber in der Praxis häufig mehr oder weniger angenähert erfüllten Falle, daß die Kraft zeitlich konstant ist, wird man einfacher die Arbeitsleistung in der Zeiteinheit nehmen dürfen. Diese Größe nennt man Effekt oder Leistungsstärke; der ebenfalls ziemlich verbreitete Name Leistung ist weniger zu empfehlen, da er sprachlich die Sache nicht trifft und deshalb zu Mißverständnissen verleitet. Für den Effekt gelten die Formel und die Dimensionsformel:

$$\mathfrak{E} = \frac{A}{T} \quad , \qquad [\mathfrak{E}] = L^2 T^{-3} M \quad . \tag{81}$$

Einheit des Effekts im C.G.S.-System ist 1 Erg pro Sekunde, auch kurz Sekundenerg genannt; weitere, abgeleitete Effektmaße sind die folgenden:

1 Sekundenmegaerg	. . . .	= 10^6 Sekundenerg	
1 Watt . . . . =	10 Sekundenmegaerg	= 10^7	„
1 Hektowatt . . . =	100 Watt	= 10^9	„
1 Kilowatt . . . =	1000 Watt	= 10^{10}	„

Als praktische Einheit des Effekts wird noch vielfach die sogenannte (mit der wirklichen Leistung eines Pferdes nicht übereinstimmende) Pferdekraft oder Pferdestärke (englisch horsepower) benutzt, wobei übrigens die englische (HP) mit der auf dem Kontinente gebräuchlichen sogenannten metrischen (PS) nicht genau übereinstimmt; man hat dafür folgende Beziehungen:

1 PS = 75 mkg pro sec	= 7360 Sekundenmegaerg	= 736 Watt	
1 HP = 550 Fußpfund / sec	= 7460 „	= 746 „	
1 Kilowatt		= 1,36 PS	

Das Watt (nach dem englischen Ingenieur JAMES WATT) ist also die Leistungsfähigkeit einer Kraft oder einer Maschine, die in der Sekunde 10 Megaerg leistet. Für das Verhältnis des wissenschaftlichen und praktischen Maßes kann man sich merken, daß eine Pferdekraft etwa $^3/_4$ Kilowatt, 1 Kilowatt etwa $^4/_3$ Pferdekräfte ausmacht; beim Übergange von Kilowatt zu Pferdekräften muß man also $^1/_4$ abziehen, beim umgekehrten Übergang $^1/_3$ hinzufügen.

Aus dem Begriff des Effekts kann man nun wieder rückwärts den der wirklichen, über die Zeit integrierten oder — bei konstanter Kraft — einfach mit der Zeit multiplizierten Arbeit ableiten; und diese Methode ist in der Praxis sogar fast durchweg eingebürgert, weil die Herstellung von Maschinen oder die Ausmessung von Naturkräften mit bestimmtem Effekt das erste, die Anwendung zur dauernden Arbeit erst das nachfolgende ist. Man multipliziert also die Watt mit der Zeit und drückt dies dadurch aus, daß man die Zeitdauer an den Effektnamen anhängt (es ist also zu beachten, daß Sekundenerg, ein Effekt, und Wattsekunden, eine Arbeit, ganz verschiedene Begriffe sind). Man hat nunmehr für die Arbeit die Formel

$$A = \mathfrak{E} \cdot T \quad , \tag{82}$$

sowie die folgenden Beziehungen:

1 Wattsekunde . . =	1 Joule =	10 Megaerg	
1 Wattstunde . . =	3600 „ =	36 000	„
1 Hektowattstunde . =	360 000 „ =	3 600 000	„
1 Kilowattstunde . =	3 600 000 „ =	36 000 000	„

Man kann sich hiernach ein greifbares Bild von der Größe derjenigen Arbeit machen, die wir als Erg bezeichnen; da nämlich von unseren Elektrizitätswerken die Kilowattstunde mit Preisen berechnet wird, für die wir 36 Pfennig als einen ziemlich richtigen und für die anzustellende Rechnung bequemen Mittelwert einsetzen können, finden wir, daß das Erg einen billiontel Pfennig kostet. Es ist das also eine minimale Arbeit, und es ist erklärlich, daß man in der Großtechnik nach dem billionen- oder gar hundertbillionenfachen dieser Einheit rechnet; andererseits kommen in der Natur auch Effekte vor, für die das Sekundenerg eine noch viel zu große Einheit ist; es sei z. B. angeführt (näheres in der „Akustik", Bd. 2), daß das menschliche Ohr noch $^1/_{100}$ Mikroerg als Schall empfindet.

Schließlich ist zu bemerken, daß es in manchen Fällen von Interesse ist, die geleistete Arbeit oder den Effekt in Beziehung zu setzen auf die Massen- oder Volumen- oder Flächeneinheit des Systems, auf das die Einwirkung erfolgt; man kann alsdann von spezifischer Arbeit oder spezifischem Effekt sprechen, muß das aber dann noch näher erläutern, je nachdem es sich um Massen-, Volumen- oder Flächeneinheit handelt; in dem soeben erwähnten Falle der Erregung des Ohres bezw. des Trommelfelles wird es offenbar auf die Fläche ankommen.

Die Energie und ihre Erhaltung. Der Arbeitsbegriff führt unmittelbar zu einem neuen Begriffe, der Energie, dessen Bedeutung über die der anderen abgeleiteten Grundbegriffe weit hinausragt, und der deshalb auch als Grundbegriff vorgeschlagen worden ist (s. w. u.). Um das einzusehen, muß etwas weiter ausgeholt werden.

Wir betrachten irgend einen Körper, z. B. ein Stück Eisen oder die Erde, oder auch ein ganzes System von Körpern, z. B. übereinandergeschichtetes Quecksilber, Öl, Wasser oder das Sonnensystem, und nennen dies ein materielles System. Ein solches System befindet sich in einem bestimmten Augenblicke in einem bestimmten Zustande, der durch eine Reihe von Größen charakterisiert ist; einige von diesen Größen werden selbständig, die übrigen von ihnen durch jene mitgegeben sein; man nennt sie Zustandsgrößen, insbesondere jene Zustandsvariable, diese Zustandsfunktionen. Wenn das System seinen Zustand ändert, wenn es, wie wir sagen wollen, einen Prozeß durchmacht, so ändern sich auch die Zustandsgrößen, und sie nehmen erst wieder die früheren Werte an, wenn das System, was nach einem Kreisprozesse geschieht, wieder in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt. Das System wird im ursprünglichen Zustande noch weitere Eigenschaften, die sich ebenfalls durch Größen angeben lassen, haben, es werden aber diese Größen nach Beschreibung des Kreisprozesses nicht wieder ihre ursprünglichen Werte angenommen haben: solche Größen sind keine Zustandsfunktionen, sie hängen, außer von dem augenblicklichen Zustande, auch von dem Wege ab, auf dem das System in diesen Zustand gelangt ist, kurzum, sie hängen auch von der Vorgeschichte des Systems ab.

Der Zustand eines Systems ist durch eine Gleichung zwischen den Zustandsgrößen gekennzeichnet, die man die Zustandsgleichung nennt; sie ist im allgemeinen sehr kompliziert, da sie die Koordinaten, die Bewegungskomponenten, die Dichte, den Druck, die Temperatur und eventuell noch vieles andere enthält; nur bei einem ruhenden System ohne Sondererscheinungen (elektrische u. s. w.) wird sie relativ einfach, indem sie nur Dichte, Druck und Temperatur enthält.

Am einfachsten werden sich die Verhältnisse bei einem System gestalten, das bei seinen Prozessen mit der Außenwelt, d. h. mit allen anderen Systemen, in gar keine Beziehung tritt; man nennt ein derartiges System ein abgschlossenes oder vollständiges System — letzteres deshalb, weil man ein unvollständiges System dadurch, daß man die Nachbarsysteme, mit denen es in Beziehung tritt, hinzunimmt, zu einem vollständigen System ergänzen kann. In einem abgeschlossenen System, das Veränderungen durchmacht, gibt es nun, wie wir wissen, eine Größe, die dabei stets ungeändert bleibt, die sich also auch bei offenen Prozessen nicht ändert: es ist die Masse des Systems; diese Größe bleibt bei allen Umsetzungen, bei denen wir hier wesentlich an chemische denken werden, konstant, sie erfüllt das Erhaltungsprinzip. Es fragt sich nun: ist die Masse die einzige Größe von dieser Eigenschaft, oder gibt es vielleicht noch eine zweite derartige Größe, die dann für physikalische Umsetzungen dieselbe Rolle spielen würde wie die Masse für chemische? Wenn es eine solche Größe gibt, wird man sie sich ganz analog wie die Masse als einen Inhalt der materiellen Systeme vorzustellen haben, den man messen kann, der sich qualitativ umsetzen kann, der für ein mit der Umgebung in Austausch stehendes System zu- und abnehmen kann, alsdann aber in den umgebenden Systemen entsprechend ab- und zunehmen muß, und der sich in einem vollständigen System überhaupt niemals ändert.

Es hat sich nun im Laufe der Entwickelung der Naturlehre gezeigt, daß es eine solche Größe gibt, und daß es diejenige Größe ist, deren Ab- und Zunahme bei Einzelprozessen die geleistete oder verbrauchte Arbeit ist. Man nennt sie nach dem Vorgange von YOUNG, der zuerst den Ausdruck anwandte, und von RANKINE, der ihm zuerst den heutigen Sinn beilegte, die Energie. Die Energie

verhält sich zur Arbeit wie das Wasser in einer Flasche zu dem Wasser, das man aus ihr in ein Glas gießt oder gegossen hat. Wie aller Stoff aus dem Stoffvorrat der Welt, so stammt alle Arbeit aus dem Energievorrat der Welt; und wie bei allen Prozessen der Gesamtvorrat der Welt an Masse, so bleibt auch der an Energie dabei unverändert. Zu der Erkenntnis dieses Satzes, den man als das Prinzip von der Erhaltung der Energie bezeichnet (früher sprach man mit weniger präziser und deshalb aufgegebener Nomenklatur von der Erhaltung der Kraft), ist man ganz allmählich gekommen. Zuerst, und zwar schon um die Mitte des 18. Jahrhunderts, erkannte man ihn im engen Rahmen mechanischer Arbeit, dann wurde er auch auf Wärmeprozesse ausgedehnt, und bald darauf, um die Mitte des 19. Jahrhunderts, wurde er zum Postulat für die Gesamtheit der naturwissenschaftlich begreiflichen Erscheinungen erhoben; derart, daß man ihn gegenwärtig in der Physik in derselben Weise als Grundlage und Leitfaden benutzt, wie seit Lavoisier den Satz von der Erhaltung des Stoffes in der Chemie — mit dem einzigen Unterschiede, daß man in der Physik nicht über ein Universalmeßinstrument für Energien verfügt, das man der Wage des Chemikers zur Seite stellen könnte. Unter den Denkern und Forschern, die sich um die Erkenntnis des Energieprinzips verdient gemacht haben, stehen Robert Mayer, H. von Helmholtz und Joule in erster Reihe.

Die Energie ist natürlich von demselben Dimensionscharakter wie die Arbeit und wie diese ein reiner Skalar; ihr Feld, das Energiefeld, hat daher die Eigenschaften eines Skalarfeldes (p. 72). — Für manche Betrachtungen ist es von Wichtigkeit, die Energie einzuführen, die auf die Masseneinheit entfällt, und die man spezifische Energie nennt; sie wird dimensional durch das Quadrat einer Geschwindigkeit repräsentiert. Auch die Energie pro Volumeneinheit spielt nicht selten eine Rolle, sie hat die Dimension $L^{-1} T^{-2} M$.

Der Energiesatz läßt sich in sehr zahlreichen Formen aussprechen, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Nur einige Betrachtungen müssen kurz angedeutet werden. Energie ist Arbeitsfähigkeit oder Arbeitsvorrat; nach dem Erhaltungsprinzip läßt sich also auf keine Weise Arbeit aus nichts gewinnen; dieser Irrtum hat bekanntlich in früheren Zeiten eine verhängnisvolle Rolle gespielt und zu der Idee des Perpetuum mobile geführt. Im Gegensatze hierzu hat alle Technik lediglich die Aufgabe, die vorhandene Natur in zweckmäßiger Weise zur Arbeitsleistung zu verwenden. — Das einzige, wirklich vollständige System ist das Weltganze; seine Energie bleibt also bei allen Vorgängen in ihm durchaus konstant. Bei jedem partiellen System ist sorgfältig zu prüfen, ob und inwieweit es energetisch abgeschlossen ist, und es wird sich dabei immer zeigen, daß es sich nur um angenäherte Vollständigkeit handeln kann. — Ferner ist zu fragen, in welchem Falle die Energie null wird: offenbar im Zustande völlig fehlenden Arbeitsvorrats; da indessen dieser Zustand keine Rolle spielt, rechnet man gewöhnlich die Energie von einem geeigneten Normalzustande aus; man kann alsdann nur noch sagen, daß dem Übergange eines Systems von einem Zustande zu einem anderen eine bestimmte Energieänderung entspricht, die von dem Wege unabhängig ist. — Schließlich ist zu betonen, daß die Energie ebenso wie die Masse, eine streng additive Eigenschaft der Systeme ist, d. h. Energien verschiedener Systemteile oder verschiedener Systeme addieren sich einfach. Im strengsten Sinne des Wortes additiven Charakters können offenbar nur solche Größen sein, für die das Erhaltungsprinzip gilt; alle übrigen sind zunächst als konstitutive Eigenschaften anzusehen, und es kann sich nur im einzelnen, bei fortschreitender Analyse der betreffenden Verhältnisse, herausstellen, daß sie sich dem Charakter additiver Eigenschaften bis zu einem gewissen Grade nähern.[1]

---

[1] Die erste Schrift, in der sich der Ausdruck „Energie" findet, scheint die Encyclopédie von d'Alembert zu sein. Paris 1785. 2. 82. In allgemeinerem Sinne wendet es zuerst

Aktuelle und potentielle Energie. Denkt man zunächst an mechanische Verhältnisse, so kann ein System Arbeitsvorrat in sich enthalten entweder infolge seiner statischen Konfiguration, d. h. seiner örtlichen Lage im Raume oder der relativen Lage seiner Teile gegeneinander; oder es kann ihn seiner Bewegung verdanken, die ihrerseits auch wieder eine Bewegung des Systems als solchen im Raume oder eine relative Bewegung seiner Teile gegeneinander sein kann. Man unterscheidet demgemäß zwischen statischer und kinetischer Energie, oder auch zwischen Energie der Lage oder Konfiguration und Energie der Bewegung; man kann dies die beiden Modalitäten der Energie nennen. Geht man zu Energien beliebiger Natur über, so kann man jene Bezeichnungen beibehalten, indem man an die verborgenen Bewegungen denkt, auf die man möglicherweise alle physikalischen Erscheinungen zurückführen kann, oder indem man die Ausdrücke statisch oder kinetisch mehr bildlich faßt; man kann aber auch eine allgemeinere Nomenklatur einführen, indem man zum Ausdruck bringt, daß ein System Arbeit entweder nur leisten kann, sobald die betreffende Auslösung erfolgt, oder aber bereits in der Arbeitsleistung begriffen ist; in jenem Falle spricht man von potentieller, in diesem von aktueller Energie; und diese Unterscheidung wird sich im wesentlichen mit der zwischen statischer und kinetischer decken. Die aktuelle oder kinetische Energie ist identisch mit dem, was man früher als lebendige Kraft, potentielle Energie mit dem, was man früher als tote oder Spannkraft bezeichnete. — Eine Klasse von Vorgängen in der Natur kann man nunmehr als Umwandlungen von potentieller in aktuelle oder umgekehrt von aktueller in potentielle Energie bezeichnen.

Es erhebt sich nun die Frage, in welcher Beziehung die beiden Modalitäten der Energie zu den früher eingeführten Größen stehen. Um diese Frage allgemein zu beantworten, ist ein größerer mathematischer Apparat erforderlich; es genüge hier die Betrachtung der einfachsten Möglichkeiten, an denen ohnehin das Wesentliche jenes Zusammenhangs schon festgestellt werden kann. Die kinetische Energie ist die Größe, deren Änderung die kinetische, also Streckenarbeit liefert; es ist also für einen einzelnen Massenpunkt

$$dA = K\,dl = m\frac{dG}{dt}G\,dt = d\left[\tfrac{1}{2}mG^2\right] \tag{83}$$

und folglich durch Integration die aktuelle Energie E_a:

$$E_a = \tfrac{1}{2}mG^2 \quad ; \tag{84}$$

für ein ganzes System muß man eine Summe oder ein Integral solcher Ausdrücke bilden. Die kinetische Energie ist also für einen Massenpunkt das halbe Produkt aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit, für ein System die entsprechende Summe. — Anders wird die Sache freilich in dem Falle, daß statt der dauernden

---

TH. YOUNG an: A course of lectures on nat. philos. London 1808. **1.** 79. — Die bewußte moderne Definition der Energie rührt aber erst von W. J. M. RANKINE her: Phil. Mag. (4) **5.** 106. 1853 und an anderen Stellen; sie ist dann von W. THOMSON ausgebaut worden: Phil. Mag. (4) **9.** 523. 1855. — Auch die Unterscheidung zwischen aktueller und potentieller Energie rührt von RANKINE und W. THOMSON her, wenn auch die damit verbundenen Begriffe mit anderer Benennung schon vorher, z. B. von MAYER und HELMHOLTZ fixiert und ausgearbeitet worden waren (Arbeitsgröße, lebendige Kraft, Spannkraft u. s. w.). — Das Energieprinzip wurde, nach unklaren Ansätzen von Vorläufern, begründet durch ROBERT MAYER: Ann. d. Chem. u. Pharm. **42.** 233. 1842 (abgedruckt in Mechanik der Wärme), durch H. v. HELMHOLTZ, Die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847 (Wiss. Abh. **1.** 12 und OSTWALDs Klassiker, Nr. 1), sowie durch die zahlreichen experimentellen Arbeiten von J. P. JOULE. — Von Büchern und Monographien über die Energie und ihre Erhaltung seien angeführt: B. STEWART, Erhaltung der Energie. Leipzig 1883. — M. PLANCK, Erhaltung der Energie. Leipzig 1887. — JANUSCHKE, Erhaltung der Energie. Troppau 1884. — M. ZWERGER, Die lebendige Kraft und ihr Maß. München 1885. — G. HELM, Die Lehre von der Energie. Leipzig 1887. — E. MACH, Die Geschichte des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag 1872. — H. KLEIN, Progr. Vitztum. Gymn. Dresden 1889. — E. MACH, Die Prinzipien der Wärmelehre. Leipzig 1896. p. 238.

Kraft ein momentaner Impuls I wirkt; in diesem Falle wird die Größe, die man als aktuelle Impulsenergie bezeichnen kann:

$$(85)\qquad E_a' = mG \quad ;$$

man hat hierfür einen besonderen Namen eingeführt, indem man dies die Bewegungsgröße (s. oben p. 43) nennt. In älterer Zeit hat eine langandauernde Diskussion darüber stattgefunden, ob für die Leistungsfähigkeit einer Bewegung die kinetische Energie (lebendige Kraft) oder die Bewegungsgröße maßgebend sei; man sieht nach dem Gesagten ein, daß das davon abhängig ist, ob es sich um eine Kraft- oder eine Impulswirkung handelt; und es werden sich in der Wirklichkeit sogar nicht selten Fälle ergeben, wo der Charakter der Wirkung zwischen den beiden obigen Extremen liegt, und wo sich demgemäß als maßgebend für die Arbeitsfähigkeit eine zwischen 1 und 2 gelegene Potenz der Geschwindigkeit ergibt; ein Beispiel bietet das Maß der Schallstärke bei Schallen, die etwa durch, auf Platten auffallende Kugeln erzeugt werden.

Die potentielle Energie andererseits läßt sich gemäß den Formeln

$$(86)\qquad -dA = -Kdl = -[Xdx + Ydy + Zdz] \quad ,$$

$$(87)\qquad E_p = V$$

als identisch mit einer früher in rein formaler Weise eingeführten Größe, dem Potential (V_m, p. 74), erweisen; noch mehr: die durch die Erfahrung erhärtete Tatsache, daß es stets eine als Energie zu bezeichnende Größe gibt, daß also in der aus der obigen durch Integration entstehenden Gleichung

$$(88)\qquad E_2 - E_1 = \int dA = \int [Xdx + Ydy + Zdz]$$

die rechte Seite ein vollständiges Integral ist, führt zu dem Schlusse, daß die Kraftkomponenten in der Natur, wenn man sie nur vollständig ermittelt, stets ein Potential haben; dieses Potential ist dann nichts anderes als die potentielle Energie. Man hat früher zwischen konservativen Kräften, die ein Potential haben, und dissipativen, die es nicht haben, und für die die Reibungskräfte der typische Vertreter sind, unterschieden und tut dies noch jetzt in gewissem Sinne mit Recht; man muß sich aber stets gegenwärtig halten, daß, wenn man alle verborgenen und bildlichen Bewegungen, die man sich denken kann, mit in den Kreis der Berechnung einschließt, stets ein Potential existiert, die Kräfte also konservativ sind — in dem gedachten Falle der Reibung tritt bekanntlich die entstehende Wärme als Ersatz ein; ob als ein vollgültiger, ist eine andere, später zu erwähnende Frage.

Arten von Energie. Die Modalität ist nicht die einzige Mannigfaltigkeit, deren die Energie fähig ist. Denn wenn wir die Naturerscheinungen, zunächst rein empirisch durch die Sinnesorgane, auf die sie wirken oder, wo solche fehlen, durch die Gesamtheit ihres Erscheinungscharakters in mechanische, akustische, thermische, elektrische, magnetische, optische u. s. w. klassifizieren, so müssen wir nun auch ebenso viele Arten oder Formen von Energie aufstellen, also mechanische, akustische, Wärme-, elektrische und magnetische, optische Energie u. s. w. Die Berechtigung, alle diese Vorgänge durch Energiewerte, die dabei umgesetzt werden, zu charakterisieren, ist allerdings erst nachzuweisen, da doch der Energiebegriff das Erhaltungsprinzip erfüllen muß und, bei der qualitativen Verschiedenheit jener Erscheinungsformen, der Begriff dessen, was man unter Erhaltung bezw. unter Konstanz verstehen soll, erst festgelegt werden muß. Das stößt nun in jedem einzelnen dieser Gebiete auf keine prinzipiellen Schwierigkeiten; es läßt sich stets in einfacher Weise zeigen, daß bei einem rein elektrischen Prozeß die elektrische Energie erhalten bleibt; und ebenso für die Wärme und die anderen Arten. Am interessantesten aber sind in dieser Hinsicht nicht die reinen, sondern

die gemischten Prozesse, d. h. diejenigen, bei denen eine Verwandlung von Energie aus einer Art in eine andere stattfindet; und hier erhebt sich die Frage nach dem gemeinsamen Maße aller Energien.

Äquivalenz der Energiearten. Diese Frage wird durch das Prinzip der Äquivalenz der verschiedenen Energiearten beantwortet, ein Prinzip, das übrigens nur als eine besondere Ausgestaltung des Erhaltungsprinzips zu betrachten ist. Es ist zuerst für die Äquivalenz von mechanischer Arbeit und Wärme erwiesen worden. Enthält ein System sowohl mechanische Energie als auch Wärme, so braucht keine von beiden bei den Prozessen, die das System durchmacht, konstant zu bleiben, es werden sich vielmehr, wenn man einen derartigen Versuch macht, beide ändern und zwar in entgegengesetztem Sinne, derart, daß es möglich ist, ein Maßverhältnis zwischen beiden festzusetzen von der Eigenschaft, daß die Summe beider konstant bleibt. Eine höhere Bedeutung kann dieses Maßverhältnis aber nur beanspruchen, wenn sich zeigen sollte, daß bei allen Prozessen, bei denen sich Arbeit in Wärme oder Wärme in Arbeit verwandelt, dasselbe Verhältnis stattfindet. Das ist nun nach den zahlreichen, in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durchgeführten Versuchen, über die im Band 3 nähere Angaben gemacht werden, tatsächlich der Fall: es gibt ein allgemein gültiges Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit; und damit ist nachgewiesen, daß die Wärme eine Energieart ist. Das Äquivalentverhältnis selbst hängt seinem Zahlenwerte nach natürlich von den benutzten Maßsystemen ab; wählt man für die mechanische Arbeit das C.G.S.-System, für die Wärme die Grammkalorie, so erhält man fast genau 42 Millionen; für Meterkilogrammgewicht und Kilogrammkalorie wird die Zahl 428. — Später ist nun das Äquivalenzprinzip auch auf die anderen Energiearten ausgedehnt worden; nur war es hier nicht erforderlich, Äquivalentzahlen zu ermitteln und einzuführen, weil es in diesen Gebieten noch keine eingewurzelte Maßeinheit, wie die Kalorie für die Wärme, gab, und weil man sonach von vornherein das C.G.S.-System bezw. überhaupt das mechanische Maß auch auf die neuen Energiearten übertragen konnte; elektrische, magnetische Energie wird also direkt in Erg ausgedrückt, ja der größte Teil der bezüglichen Nomenklatur ist sogar von der Elektrizitätslehre ausgegangen.

Insoweit sind die Modalitäten und die Arten von Energie selbständige voneinander unabhängige Mannigfaltigkeiten. Geht man nun zu den besonderen Vorstellungen über die Natur der Wärme, der elektrischen Erscheinungen u. s. w. über, so entsteht die Frage, ob man es hier mit potentieller oder aktueller Energie zu tun habe, und es wird zuweilen die Entscheidung ohne weiteres im letzteren Sinne getroffen. Hierfür liegt zunächst gar kein Grund vor; denn wenn z. B. die Wärme in den Zuständen und Bewegungen verborgener Elemente ihren Grund hat, so ist nicht einzusehen, warum hier nicht ebenso wie bei den mechanischen Erscheinungen Spannungsenergie und Bewegungsenergie zusammenwirken und abwechseln sollen; bei den Gasen wird nach der kinetischen Theorie vermutlich die potentielle Energie gegen die aktuelle sehr in den Hintergrund treten; ob es sich aber bei den anderen Aggregatzuständen nicht umgekehrt oder mindestens anders verhält, läßt sich nicht ohne weiteres entscheiden. Es sind freilich auch Stimmen laut geworden, die von potentieller Energie in letzter Instanz überhaupt nichts wissen wollen, sondern auch diese in eine besondere Art aktueller auflösen wollen.[1] Alle diese Fragen sind aber jedenfalls noch nicht spruchreif.

Aufgabe der exakten Naturlehre; Chemie und Physik. Es läßt sich nun schon in großen Zügen sagen, worin der Kern naturwissenschaftlicher Forschung liege. Denn es zeigt sich, daß, wenigstens im anorganischen Reiche, alles

---

[1] Vgl. u. a. E. Merritt, Phys. Review 7. 106. 1898. — Ferner J. B. Stallo, Begriffe und Theorien der modernen Physik. 6. Kap. („Der Satz von der kinetischen Natur aller potentiellen Energie"). Leipzig 1901.

Geschehen dem Stoffgesetze und dem Energiegesetze gehorcht, und daß es wahrscheinlich gelingen wird, diese beiden Gesetze zu einem einheitlichen Erhaltungsgesetze zu verschmelzen. Es kann sich demnach bei allen Geschehnissen in der Natur (und in der Technik) nur um Modalitäts- und Qualitätsveränderungen von Stoff und Energie handeln; diejenigen Prozesse, bei denen die Stoffverwandlung im Vordergrunde steht, bilden den Untersuchungsgegenstand der Chemie, diejenigen, bei denen die Energieverwandlung das Wesentliche ist, bilden den Gegenstand der Physik. Ein schroffer Gegensatz besteht schon aus dem Grunde nicht, weil die Energie stets an den Stoff gebunden ist; tatsächlich bildet die physikalische Chemie eine Brücke zwischen beiden Disziplinen, und sie gewinnt immer mehr an Bedeutung.

Energetik. Nach dem Voranstehenden kann es keinem Zweifel unterliegen, daß die Physik, ganz allgemein gesprochen, als Lehre von der Energie bezeichnet werden darf; und es läßt sich nichts dagegen einwenden, wenn man dafür den Namen „Energetik“ einführt. Dieser Energetik im weiteren Sinne ist nun neuerdings, unabhängig von Betrachtungen, die schon vor längerer Zeit von RANKINE angestellt wurden, eine Energetik im engeren Sinne gegenübergestellt worden; von ihrem Begründer, OSTWALD, wird sie auch, der „unbewußten“ gegenüber, als „bewußte Energetik“ bezeichnet. Es ist nicht leicht, in Kürze anzugeben, worin diese neuere Energetik besteht, da sie prinzipielles, heuristisches und didaktisches enthält, und da auch in bezug auf das Prinzipielle keine, Mißverständnisse ausschließende, Eindeutigkeit besteht, die verschiedenen Äußerungen sich vielmehr teilweise erheblich widersprechen. Ein großer Teil der Betrachtungen ist überdies wesentlich thermodynamischen Charakters, und es ist deshalb auf Band 3 zu verweisen; hier kann nur einiges kurz angedeutet werden.

Zunächst die Forderung der Energetik an die begriffliche Grundlegung der Physik. In Anbetracht der universellen und fundamentalen Bedeutung des Energiebegriffs für die Darstellung der Vorgänge in der Natur läßt sich der Wunsch völlig begreifen, die Energie zu einem der Fundamentalbegriffe zu erheben; es fragt sich nur, in welcher Weise. Da nun Strecke und Zeit, solange man nicht zum formalen Monismus (p. 47) übergeht, stehen bleiben müssen, gibt es nur zwei Möglichkeiten: entweder man läßt auch die Masse stehen und fügt die Energie als vierten Grundbegriff hinzu; dann kann man von einem Fortschritte kaum sprechen, muß vielmehr sagen, daß das Fundamentalsystem, für das sich die Dreigliedrigkeit als ausreichend erwiesen hat, nunmehr überbestimmt ist, und das muß notwendig zu Widersprüchen und Verwirrung führen. Oder, man wirft die Masse heraus und ersetzt sie durch die Energie, um dann nachträglich die Masse aus der Energie abzuleiten — ein Verfahren, das insofern nicht allzuneu ist, als wir ja schon in dem Gewichtssystem ein System kennen, bei dem an Stelle der Masse etwas anderes vorangestellt wird; nur, daß dieses andere, was zweifellos ein Fortschritt ist, nunmehr nicht eine Kraft, und noch dazu eine ganz spezielle, sondern die Energie, und zwar die ganz allgemeine Energie sein soll. Hiergegen läßt sich nun prinzipiell nichts einwenden; nur muß man dann auch wirklich konsequent sein und z. B. die kinetische Energie als das primäre, irreduzible betrachten und die Masse durch Umkehrung der Gleichung (84) (p. 82) als die abgeleitete Größe einführen, die im einfachsten Falle den Wert $m = 2E_a/G^2$ besitzt. Die einzige Frage ist nur die, ob der Stand unserer Kenntnis und Erkenntnis der Natur ein derartiger ist, daß wir zu einer solchen Degradierung der Masse das Recht haben, und daß wir Aussicht haben, auf diesem Wege weiter zu kommen. Die Energetiker behaupten das und bezeichnen namentlich die damit verbundene Befreiung von all dem Bilderkram, mit dem uns der bisherige Materialismus belastet hat, als einen epochemachenden Fortschritt; während die Gegner zu zeigen bemüht sind, daß die Energetik nicht nur zu nichts Neuem, sondern sogar zu einer Verwirrung der Begriffe und Vor-

stellungen führt, und zwar nicht zum kleinsten Teile deshalb, weil wir die Anschauung, die Bildersprache, auch in der Wissenschaft nicht entbehren können. — Alles in allem genommen, kann man wohl sagen, daß eine vorsichtige Energetik ihr Teil zum wissenschaftlichen Fortschritt wird beitragen können, daß aber eine völlige Beseitigung des Begriffs der Masse und der Vorstellungen von einer in der Welt vorhandenen Materie, wenn überhaupt durchführbar, jedenfalls zurzeit verfrüht ist.[1]

Lokalisierung und Ausbreitung der Energie. Auch wenn man nicht auf dem engeren energetischen Standpunkte steht, sondern Energie und Masse als gleichwertige Begriffe nebeneinander stehen lassen will, wird man doch das Bedürfnis empfinden, den Energiebegriff in gleich fester und anschaulicher Weise auszubilden, wie dies längst mit dem Begriff der Masse geschehen ist. Dazu gehört nun vor allem die Vorstellung, daß auch die Energie etwas ist, was einen bestimmten Sitz im Raume hat — man nennt das Lokalisierung der Energie — und was sich von diesem Sitze aus in stetiger Weise durch den Raum bewegt — man nennt das Bewegung, Ausbreitung oder Wanderung der Energie. Auf einigen Gebieten haben sich diese Vorstellungen ganz von selbst und allmählich entwickelt, so bei der Leitung und Strahlung der Wärme. Nach dem Siege der MAXWELLschen Theorie machte sich ein entsprechendes Bedürfnis auch in der Elektrizitätslehre geltend, und man verdankt insbesondere POYNTING seine Befriedigung. In ganz allgemeiner Weise hat wohl zuerst W. WIEN das Problem behandelt und gezeigt, daß, solange man es mit stetigen Massen zu tun hat, auch immer von einer stetigen Energieausbreitung gesprochen werden kann. Dabei handelt es sich hier immer um die ganze Energie, potentielle und aktuelle zusammengenommen — eine Teilung, die das Energieproblem im Vergleich mit dem Massenproblem sehr viel umständlicher gestaltet und schließlich eben zu der Notwendigkeit führt, dem Erhaltungsprinzip noch ein zweites an die Seite zu stellen.

Auf die Sache selbst und ihre weitere Entwickelung kann hier nicht eingegangen werden. Es sei nur darauf aufmerksam gemacht, daß, während die Energie an sich ein Skalar ist, sie bei ihrer Wanderung als Vektor auftritt; damit wird also auch das Energiefeld zu einem Vektorfelde (p. 72) mit allen seinen besonderen Eigenschaften.[2] Schließlich darf nicht verschwiegen werden, daß sich auch gewichtige Stimmen gegen die Lokalisierung der Energie erhoben haben (vgl. z. B. H. HERTZ, Mechanik. Nr. 343).

Zweites Hauptprinzip. Glieder und Faktoren der Energie. Entropie. Es ist nicht schwer einzusehen, daß es für das Verständnis der Naturerscheinungen notwendig ist, nach einem Prinzip zu suchen, das, wenn man das Erhaltungsprinzip als das erste Hauptprinzip der Naturlehre bezeichnet, den Namen des zweiten Hauptprinzips verdient. Denn so wichtig und umfassend das Erhaltungsprinzip auch sein mag, es hat doch keine eigentlich positive, sondern nur eine

[1] Es können hier nur einige der wichtigsten Arbeiten angeführt werden: W. J. M. RANKINE, Phil. Mag. (4) **5.** 106. 1853 u. a. m. — W. OSTWALD, Sitzber. Sächs. Ges. d. Wiss. 1891 u. 1892; Ztschr. f. phys. Chem. **9.** 563; **10.** 363. 1892; Lehrb. der allgem. Chem. 2. Aufl. **2.**; Verh. d. Naturf.-Vers. Lübeck u. s. w.; WIED. Ann. **58.** 154. 1896. — G. HELM, Ztschr. f. Math. u. Phys. **35.** 307. 1890; Mathematische Chemie. Leipzig 1894; Die Energetik nach ihrer geschichtlichen Entwickelung. Leipzig 1898; WIED. Ann. **55.** (Beilage); **57.** 646. 1896. — L. BOLTZMANN, ibid. **57.** 39; **58.** 595. 1896. — M. PLANCK, WIED. Ann. **57.** 72. 1896. — P. GRUNER, Mitt. Naturf.-Ges. Bern. 1897. p. 25. — [2] Schon 1874 entwickelte N. UMOW die Wanderung der Energie in flüssigen und elastischen Medien: Ztschr. f. Math. u. Phys. **19.** 419. — Sodann: J. H. POYNTING, Phil. Trans. **2.** 343. 1885. — Vgl. auch H. HERTZ, Gött. Nachr. 1890. 19. März. — O. LODGE, Phil. Mag. (5) **19.** 482. 1885. — O. HEAVISIDE, Electrician **14.** 178. 306. 1885; Phil. Trans. 1892. p. 423. — W. WIEN, Verh. Naturf.-Ges. 1891. p. 4; WIED. Ann. **45.** 685. 1892. — MÖLLER, Verh. internat. Elektrot.-Kongreß. Frankfurt 1892. p. 33. — GUSTAV MIE, Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung. Wien. Sitzber. (2a) **107.** 1113. 1898 (daselbst auch die frühere englische Literatur, namentlich die Arbeiten von HEAVISIDE und LODGE). — A. BROCA, C. R. **130.** 108. 1900. — G. MIE, Ztschr. f. phys. Chem. **34.** 522. 1900. — G. H. BRYAN, Arch. Néerl. (2) **5.** 279. 1901. — V. VOLTERRA, Atti di Torino **34**; Nuov. Cim. (4) **10.** 1899.

regulative Bedeutung für alles Naturgeschehen; es besagt, daß, wenn in der Natur etwas geschieht, es dem Energiegesetz gehorchen muß; es sagt aber gar nichts darüber, ob unter gegebenen Verhältnissen überhaupt etwas geschieht und, wenn etwas geschieht, gar nichts darüber, wie es geschieht. Es zeigt sich das am einfachsten in der Einsicht, daß nach dem Erhaltungsprinzip überhaupt nichts in der Welt zu geschehen brauchte; denn alsdann würde ja Masse und Energie konstant bleiben; wenn nun doch fortwährend etwas geschieht, so muß das nach einem anderen Prinzip, das uns noch unbekannt ist, geschehen. Dieses zweite Prinzip würde, wenn einmal aufgefunden, an Bedeutung dem Erhaltungsprinzip mindestens nicht nachstehen; es würde es sogar weit überragen, wenn es gelänge, es in ebenso präziser, etwas ebenso exakt-spezielles aussagender Form aufzustellen. Man wird sich indessen dieser Hoffnung kaum hingeben dürfen; ist es doch etwas ganz anderes, nur auszusagen: bei allen Vorgängen muß ein bestimmtes Gleichheits- oder Äquivalenzverhältnis gewahrt bleiben, und etwas ganz anderes, aussagen zu wollen: so und so, nach diesem allgemeinen Formelgesetz, geschieht alle die Mannigfaltigkeit, die uns die Zeit im Raume vorführt. Wir werden uns vielmehr, soweit es sich um ein allgemeines, die Gesamtheit der Naturerscheinungen umfassendes Prinzip handeln soll, mit etwas weit bescheidenerem begnügen müssen: mit einem Prinzip, das etwas aussagt über die Tendenz, von der alles Geschehen beherrscht wird; nur daß wir eben jetzt, statt einer nur regulativen Gleichheitstendenz, eine produktive Veränderungstendenz fordern.

Dabei handelt es sich, was nicht immer genügend betont wird, um drei zunächst getrennte Teilprobleme, die dann das gewünschte Prinzip gemeinsam umfassen muß; erstens die Frage: wann geschieht nichts und wann geschieht etwas?, zweitens die Frage: welches von zwei einander entgegengesetzten Geschehnissen vollzieht sich, mit andern Worten: in welcher Richtung spielen sich die Dinge ab?, drittens endlich die Frage: welcher von den unendlich vielen, ihrer Ähnlichkeit nach einander unendlich benachbarten Prozessen ist der, der wirklich eintritt, und wodurch zeichnet sich derselbe vor den benachbarten aus? Nur ein Prinzip, das auf diese drei Fragen eine zusammenhängende Antwort erteilt, wird als universelles Tendenzprinzip gelten dürfen.

Es ist begreiflich, daß man, um das neue Prinzip zu finden, an den Energiebegriff anknüpft und den Versuch macht, ihn in irgend einer Weise zu analysieren, um vielleicht schließlich aus ihm einen neuen Begriff herauszuschälen und zu formen, der für das Veränderungsprinzip dieselbe Bedeutung haben würde, wie der Energiebegriff für das Erhaltungsprinzip. Es ist nun interessant zu sehen, wie verschieden die Wege der Forschung oft auch bei ganz analogen Problemen sind: während man zu dem Erhaltungsprinzip von der Mechanik aus gelangte, von der sichtbaren Bewegung der Körper, ist der Ausgangspunkt für das zweite Prinzip die Wärmelehre, die Lehre von den verborgenen Bewegungen der kleinen Körperteile, geworden; und es jetzt, im Rückblick, erklärlich, daß es sich so verhalten mußte. Es ist sogar noch gegenwärtig die Wärme, allerdings die Gesamtheit der Wärmeerscheinungen in Kombination mit allen übrigen Naturerscheinungen, das einzige Gebiet, wo es gelungen ist, dem Prinzip exakte Durchbildung zu geben (vgl. „Thermodynamik“ in Band 3); für die Physik im ganzen läßt sich das Prinzip nur in den großen Zügen festlegen; und auch hiervon kann an dieser Stelle nur eine kurze Andeutung erfolgen. Dabei ist, zur Vermeidung von Mißverständnissen, zu betonen, daß die folgenden Feststellungen zunächst immer nur für gewisse spezielle Verhältnisse gültig sind, und daß es einer eingehenden Untersuchung bedarf, um zu ermitteln, inwieweit ihre Verallgemeinerung zulässig ist.

Die Zerlegung der Energie kann auf zwei Weisen geschehen: entweder in Summanden oder in Faktoren; für beides kann die Thermodynamik zum Ausgangspunkt dienen. Bei einer mit Kessel und Kühler arbeitenden kalorischen Maschine zeigt sich nämlich, daß von der aufgewandten Energie des Kessels immer nur

ein Bruchteil in mechanische Arbeit verwandelt, der Rest aber als „laue Wärme" in den Kühler abgeführt wird; nur der erste Teil ist weiter verwertbar, der letztere ist entwertet oder zerstreut; man kann jenen Teil als freie, diesen als gebundene Energie bezeichnen. Anders ausgedrückt: eine Maschine, und ebenso ein in der Natur sich abspielender Prozeß hat, unbeschadet des Erhaltungsprinzips, niemals den „Wirkungsgrad" eins, sondern einen kleineren, durch einen echten Bruch darstellbaren; die Ergänzung zu eins ist der „Zerstreuungsgrad"; und es ist eine der vornehmsten Aufgaben der Technik, den Wirkungsgrad möglichst nahe an eins heranzubringen. Bei kalorischen Maschinen geht das aus zwei Gründen nur in sehr beschränktem Maße, und jeder dieser Gründe ist für unsere Betrachtung von typischer Bedeutung. Der erste beschränkende Grund rührt davon her, daß alle wirklichen Prozesse „irreversibel", nichtumkehrbar sind, d. h. daß sich gleichzeitig mit dem Hauptprozeß Nebenprozesse von einseitigem Charakter abspielen, wie Reibung, Wärmeleitung, mechanische Abnutzung u. s. w. Je stärker diese Einflüsse sich geltend machen, desto geringer ist der Wirkungsgrad, desto größer die Zerstreuung der Energie. Dieser Einfluß erstreckt sich naturgemäß auf Prozesse aller Art. Bei kalorischen Prozessen tritt diese Wirkung aber zurück gegen eine andere Beschränkung, die sich auch bei „reversiblen" Prozessen geltend macht, besser gesagt — denn streng reversible Prozesse gibt es eben nicht — die sich auch geltend macht, wenn man von jenen Einflüssen absieht, also gewissermaßen eine Grenzbetrachtung über ideale Verhältnisse anstellt, denen sich die wirklichen nur mehr oder weniger nähern können. Auch bei strenger Umkehrbarkeit ist nämlich dem Wirkungsgrad der kalorischen Maschine eine Grenze gesetzt durch das Verhältnis der Temperaturen von Kessel und Kühler; und diese Beziehung wird besonders einfach durch die Einführung des Begriffs der absoluten Temperatur, der eben in diesem Verhalten seine Wurzel hat, praktisch aber mit der sogenannten absoluten Gastemperatur übereinstimmt. Es verhalten sich nämlich die Kühler- und Kesselwärme wie die absoluten Temperaturen von Kühler und Kessel; oder: Kühler- und Kesselwärme, jede durch die zugehörige Temperatur dividiert, sind einander gleich.

Dieses Verhalten führt nun zur Aufstellung eines neuen Begriffs, zunächst für infinitesimale Prozesse, dann für isotherme endliche und schließlich für beliebige Prozesse. Die Energie ist, wie wir wissen, eine Zustandsfunktion; von ihren beiden, bei thermodynamischen Prozessen zu unterscheidenden Gliedern, Arbeit und Wärme, gilt das aber im einzelnen nicht; erst die äquivalente Addition macht sie dazu. Nun zeigt sich aber, daß man auch die Wärme für sich zu einer Zustandsfunktion machen kann, indem man sie in der soeben angedeuteten Weise durch die Temperatur dividiert: die Größe dW/T ist also ein vollständiges Differential, für einen Kreisprozeß ist ihr Integral null, und für einen offenen Prozeß ist ihre Änderung nur von Anfangs- und Endzustand, nicht aber vom Wege abhängig; sie ist also, von einer gleichgültigen Konstanten abgesehen, für einen gegebenen Zustand eindeutig bestimmt. Diese Größe hat den Namen Entropie erhalten.

Die Entropie ist von wesentlich anderem Charakter wie die Energie. Sie existiert, als mathematische Größe, nur für streng umkehrbare Prozesse; für nichtumkehrbare stellt sie nur eine Grenze dar; und bei ihrer Ausgestaltung ist man zunächst auf infinitesimale oder endliche, aber isothermische Prozesse beschränkt, von denen man dann erst in vorsichtiger Weise den Übergang zu beliebigen Prozessen machen darf. Nimmt man aber alles das in Rücksicht, so hat man in der Entropie eine Größe, die wohl geeignet ist, für die Charakterisierung der Naturvorgänge die Energie zu ergänzen. Es gelten nämlich von ihr die — aus ihrer Definition fließenden — Sätze: Die Entropie eines energetisch abgeschlossenen Systems bleibt im Idealfalle umkehrbarer Prozesse konstant, bei allen wirklichen Prozessen nimmt sie zu; bei Mitwirkung äußerer Energie kann sie abnehmen,

aber zugunsten der Entropie der Umgebung, die dann zunimmt; und schließlich, in Anwendung auf das Weltganze: die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu.

Was nun die Entropie in ihrem Verhältnis zur Energie betrifft, so sind dafür zwei Darstellungen möglich, die additive und die multiplikative. In ersterer Hinsicht setzt sich die Energie aus freier und gebundener Energie zusammen; letztere, dividiert durch die absolute Temperatur, ist die Entropie. Man kann nun auch die freie Energie durch die Temperatur dividieren und dem Quotienten einen entsprechenden Namen geben, indem man ihn als „Ektropie“ bezeichnet; von ihr gelten dann die den obigen entgegengesetzten Sätze. Schließlich könnte man die Summe beider, also die durch die Temperatur dividierte Gesamtenergie, als „Tropie“ bezeichnen; von ihren beiden additiven Bestandteilen nimmt die Ektropie immer mehr ab, die Entropie immer mehr zu. — Oder, man betrachtet die Energie als Produkt zweier Faktoren, die man dann in jedem Falle anzugeben versuchen wird; bei der gebundenen Wärmeenergie ist die Entropie der eine, die Temperatur der andere Faktor. Es ist aber zu bedenken, daß die Darstellung einer Größe als Produkt zweier Faktoren immer nur der Spezialfall eines Integrals des einen Faktors über den anderen ist, und daß ein solches Integral im allgemeinen noch nicht zu einer neuen und brauchbaren Darstellung führt.

Bisher war lediglich von Wärmevorgängen, sei es für sich, sei es in Verbindung mit mechanischen Vorgängen, die Rede. Geht man nun zu den Naturprozessen in ihrer Allgemeinheit über, so sieht man sich folgenden Verhältnissen, richtiger gesagt, folgenden Vorstellungen von ihnen gegenüber. Alle Vorgänge werden vom Erhaltungsprinzip beherrscht, wofür man auch sagen kann: alle Systeme und alle Kräfte, die in ihnen tätig sind, sind konservativ. Der wirkliche Charakter aller Vorgänge, wie er zutage tritt, ist aber scheinbar ganz entgegengesetzt, es findet eine einseitige Tendenz allen Geschehens statt, und diese Tendenz ist gekennzeichnet durch das Zerstreuungsprinzip, wofür man auch sagen kann: alle Systeme und alle in ihnen tätigen Kräfte sind dissipativ. Dieser Widerspruch löst sich schließlich dahin auf, daß, was zunächst die „freiwilligen“ Vorgänge betrifft, stets greifbare Energie in verborgene, geordnete in ungeordnete, konzentrierte in zerstreute, nutzbare in entwertete übergeht, wobei die Gesamtenergie zwar ungeändert bleibt, die Wiedergewinnung des früheren Zustands aber ausgeschlossen ist; die tatsächliche Irreversibilität aller Prozesse drängt den Erhaltungscharakter gegenüber dem Zerstreuungscharakter in den Hintergrund. Bei den „erzwungenen“ Prozessen, zu denen namentlich die Prozesse des Lebens und der Technik gehören, spielt sich zwar im allgemeinen gerade das entgegengesetzte, nämlich eine Konzentration und eine erhöhte Bewertung der Energie ab, aber nur im engen Rahmen des betreffenden Systems und auf gesteigerte Kosten der fremden Systeme, die dabei in Mitwirkung treten, so daß schließlich das Gesamtergebnis das gleiche ist.

Um diese Verhältnisse zu anschaulicher Vorstellung zu bringen, kann man nun versuchen, den ursprünglich nur für die Wärmevorgänge aufgestellten Entropiebegriff in analoger Weise zu verallgemeinern, wie dies vor Zeiten, von der Mechanik aus, mit dem Energiebegriff geschehen ist. Man muß dann natürlich die besondere Beziehung zur Temperatur, gerade wie dort die zur Strecke, aufgeben, und an deren Stelle ein allgemeineres „Niveau“ setzen. Die verallgemeinerte Entropie wird dann die durch ihr Niveau dividierte Energie. Man hat sich auch vielfach damit beschäftigt, diese allgemeine Energie in bezug auf ihre beiden Faktoren zu untersuchen und hat den einen von ihnen als Quantitäts-, Kapazitäts- oder Extensitäts-, den anderen als Intensitätsfaktor bezeichnet; es muß aber erst noch in jedem Falle geprüft werden, ob eine solche Zerlegung möglich und ob sie, wenn möglich, nur in einer einzigen Weise möglich ist.

Wie dem auch sei, und gleichviel, ob man den additiven Gegensatz zwischen Entropie und Ektropie oder den multiplikativen zwischen Quantitäts- und Intensitäts-

faktor vorzieht, die ganze Begriffsfassung setzt uns in den Stand, von der Tendenz allen Naturgeschehens ein anschauliches Bild zu gewinnen. Diese Tendenz geht dahin, daß im großen und ganzen die Ektropie immer kleiner, die Entropie immer größer, oder die Intensitätsfaktoren immer kleiner, die Quantitätsfaktoren immer größer werden; daß sich das „Niveau" der Energien immer mehr erniedrigt oder ausgleicht, und zwar sowohl im Rahmen einer und derselben Energieart, als auch derart, daß fortwährend höherwertige Energie in minderwertige, namentlich in laue Wärme, übergeht; daß jedoch dieser Prozeß mit einer, wegen der abnehmenden Gegensätze, abnehmenden Geschwindigkeit vor sich geht; und daß folglich der absolute Ausgleich in unendlicher Ferne liegt.[1]

Schließlich noch ein Wort über die Dimension der Entropie. Hier erhebt sich die Schwierigkeit, daß für die in der speziellen Definition der Entropie vorkommende Temperatur eine zwingende Dimensionsfestlegung nicht gegeben ist; hält man sich aber an den kinetischen, dem Quadrat einer Geschwindigkeit entsprechenden Temperaturbegriff, so findet man:

(89) $$[S] = m \quad ,$$

die Entropie wird eine reine Masse (die spezifische Entropie, d. h. die Entropie der Masseneinheit, also eine reine Zahl). Dies stimmt vollkommen damit überein, daß die Entropie ebenso wie die Masse ein Quantitäts- oder Kapazitätsfaktor ist; die Masse stellt die Kapazität eines Körpers für bewegende Kraft dar, ganz entsprechend kann man nun allgemein die Entropie als die Kapazität für Energie bezeichnen. Nach dem Entropiesatze wird diese Kapazität immer größer und nähert sich einem Maximum, bei dem alle, unverändert in der Welt vorhandene Energie, keine Veränderungen mehr hervorbringen kann. Diesem wahrscheinlichsten Endzustande gegenüber sind alle früheren Zustände der Welt nur vorübergehende und unbeständige, ihre Wahrscheinlichkeit ist geringer; und man kann geradezu die Entropie durch die Wahrscheinlichkeit des betreffenden Zustands definieren, wie dies BOLTZMANN[2] u. A. getan haben.

Zum Schlusse dieses Artikels stellen wir die wichtigsten abgeleiteten Begriffe mit den Grundbegriffen übersichtlich zusammen. In der ersten Spalte ist der Name, in der zweiten der symbolische Buchstabe des Begriffs, in der dritten der Name der Einheit für diese Größe, in der letzten die Potenz angegeben, in der die drei Fundamentalgrößen des C.G.S.-Systems in dem betreffenden Begriff enthalten sind. Was die Bezeichnungen durch Buchstaben anlangt, so sind neuerdings Bemühungen[3] im Gange, eine übereinstimmende Bezeichnungsweise für die

[1] In bezug auf die Literatur des zweiten Hauptsatzes muß auf den dritten Band verwiesen werden. Den Ausgang bilden die Arbeiten von CARNOT (sur la puissance motrice du feu. Paris 1824), CLAPEYRON, W. THOMSON (namentlich: Phil. Mag. **33**. 313. 1848) u. A., die moderne Grundlegung erfolgte besonders durch R. CLAUSIUS (Mechanische Wärmetheorie, Sammlung zahlreicher Einzelabhandlungen). Von CLAUSIUS stammt auch der Ausdruck Entropie: POGG. Ann. **125**. 353. 1865. — Die Verallgemeinerung des Entropiebegriffs für das Gesamtgebiet der physikalischen Erscheinungen hat sich erst neuerdings angebahnt. Die Ausdrücke Tropie und Ektropie sind, wenn auch in speziellem Zusammenhange, von G. HIRTH eingeführt worden: Entropie der Keimsysteme. München 1900. — Zum zweiten Hauptsatze vgl. man u. a. die Bücher von PLANCK und MACH; populäre Darstellungen von F. WALD, Die Energie und ihre Entwertung. Leipzig 1889, sowie von F. AUERBACH, Die Weltherrin und ihr Schatten. Jena 1902. — [2] Vgl. z. B. L. BOLTZMANN, Vorlesungen über kinetische Gastheorie. p. 38. — M. PLANCK, BOLTZMANN-Festschrift 1904. p. 113. — [3] Diese Bemühungen gehen teils von Vereinen und Kommissionen, teils von einzelnen Gelehrten aus. Man vgl. u. a. den neuesten Bericht von K. STRECKER, Elektrot. Ztschr. **25**. 264. 1904, wo die Schwierigkeiten auseinander gesetzt werden und festgestellt wird, daß bisher nur über einige wenige von den 200—300 Begriffen, um die es sich handelt, Einigkeit erzielt worden ist; übrigens reicht im ganzen auch das Buchstabenmaterial der lateinischen, griechischen und deutschen Schrift nicht aus, und es ist daher schon das russische Alphabet zu Hilfe genommen worden.

wichtigsten Begriffe festzulegen; die Angelegenheit ist aber noch im Flusse, und es lassen sich gegen die bisher gemachten Vorschläge zum Teil sehr erhebliche Einwände machen. Überhaupt ist die Anzahl der in Betracht kommenden Begriffe so groß, und die Bedürfnisse und die Rücksichten, die auf verschiedenen Gebieten zu befriedigen und zu nehmen sind, so mannigfach, daß man sich nach einem derartigen Schema immer nur bis zu einem gewissen Grade wird richten können. In die Tabelle sind übrigens auch einige Begriffe aufgenommen, von denen in dem vorliegenden Artikel aus Raummangel nicht die Rede war, und wegen deren daher an späteren Stellen des Handbuches nachzuschlagen ist.

Tabelle wichtiger allgemeiner Begriffe und ihrer Dimensionen.

	Name	Zeichen	Einheit	Dimensionen		
				L	*T*	*M*
1	Strecke	*l*	Zentimeter	1	0	0
2	Fläche	*f*	Quadratzentimeter	2	0	0
3	Volumen	*v* oder *τ*	Kubikzentimeter	3	0	0
4	Winkel	—	Grad oder Radius	0	0	0
5	Raumwinkel	—	Quadratgrad	0	0	0
6	Zeit	*t*	Sekunde	0	1	0
7	Geschwindigkeit	*G*	cm/sec [cel]	1	−1	0
8	Geschwindigkeitspotential	*φ*	—	2	−1	0
9	Winkelgeschwindigkeit	*ω*	—	0	−1	0
10	Beschleunigung	*B*	cm/sec² [gal]	1	−2	0
11	Beschleunigungspotential	—	—	2	−2	0
12	Winkelbeschleunigung	*β*	—	0	−2	0
13	Masse	*m*	Gramm	0	0	1
14	Dichte	*ρ*	g/cbcm	−3	0	1
15	Flächendichte	—	g/qcm	−2	0	1
16	Liniendichte	—	g/cm	−1	0	1
17	Impuls	*I*	—	1	−1	1
18	Kraft	*K*	Dyne	1	−2	1
19	Gewicht	—	—	1	−2	1
20	Bewegungsgröße	—	—	1	−1	1
21	Moment	*D* oder *M*	—	2	−2	1
22	Trägheitsmoment	—	—	2	0	1
23	Druck	*p*	g/qcm, Atm, Hg	−1	−2	1
24	Spezifisches Gewicht	*s*	—	−2	−2	1
25	Volum der Masseneinheit	—	—	3	0	−1
26	Volum der Gewichtseinheit	—	—	2	2	−1
27	Potential	*V*	—	2	−2	1
28	Arbeit	*A*	Erg	2	−2	1
29	Effekt	𝔈	Sek.-Erg, Watt	2	−3	1
30	Energie	*E*	Erg, Wattstunden	2	−2	1
31	Temperatur	*T*	Celsiusgrade	2	−2	0
32	Entropie	*S*	—	0	0	1
33	Schwingungszahl	*n*	—	0	−1	0
34	Elastizitätskoeffizient	*ε*	—	1	2	−1
35	Elastizitätsmodul	*E*	—	−1	−2	1
36	Elastizitätszahl	*μ*	—	0	0	0
37	Reibungskoeffizient	*η*	—	−1	−1	1
38	Äußerer Reibungskoeffizient	—	—	−2	−1	1
39	Gleitungskoeffizient	*γ*	—	1	0	0
40	Oberflächenspannung	*α*	—	0	−2	1
41	Spezifische Kohäsion	*σ*	—	3	−2	0
42	„ Energie	—	Erg pro Gramm	2	−2	0
43	„ Entropie	—	—	0	0	0

Messung von Raum- und Zeitgrössen.

Von F. AUERBACH.

Übersicht. Nachdem im ersten Artikel das System der Grundbegriffe sowie die aus ihm abgeleiteten allgemeinen Begriffe festgelegt worden sind, erhebt sich nunmehr die für die experimentelle Physik überaus wichtige Aufgabe, die mathematischen Größen, zu denen jene Begriffe verdichtet wurden, in möglichst exakter Weise zu messen. Die Erledigung dieser Aufgabe soll auf drei Artikel verteilt werden, deren erster der Messung von Raum-, Zeit- und aus beiden zusammengesetzten Größen gewidmet ist. Vorauszuschicken ist dabei eine Betrachtung über exakte Messungen überhaupt, die auch für den folgenden Artikel und überhaupt für den messenden Teil der ganzen physikalischen Wissenschaft von Bedeutung ist; aus Raumrücksichten mußte sie freilich ganz kurz gehalten werden. Es folgt dann der Reihe nach die Messung von Strecken jeder Art, Flächen, Räumen, Richtungen, Linien- und Raumwinkeln, die Festlegung von Orten und Zeiten, die Messung von Zeitstrecken, endlich die Messung von Geschwindigkeiten und damit zusammenhängenden Größen; in letzterer Hinsicht ist jedoch zu bemerken, daß alle spezielleren Methoden besser bei Gelegenheit derjenigen Probleme, für die sie von Wichtigkeit sind, erledigt werden. Überhaupt kann über das ganze Gebiet hier nur eine gedrängte Übersicht gegeben und es muß im übrigen auf die der Meßkunde gewidmeten Spezialwerke verwiesen werden.[1]

Allgemeines über physikalische Messungen.

Beobachtungsfehler. Die Messung irgend einer Größe ist begreiflicherweise immer mit gewissen Fehlern behaftet, und man wird sich damit begnügen müssen, diese Fehler auf ein Mindestmaß herabzudrücken. Nun können diese Fehler sehr verschiedener Art sein: sie können von der Umgebung und ihren Einflüssen, von dem Messungsapparat selbst und endlich vom Beobachter herrühren. Die Einflüsse der Umgebung muß man größtenteils dadurch beseitigen, daß man den Apparat gegen sie so gut wie tunlich abschließt; was dann noch übrig bleibt, ist in Rechnung zu ziehen oder, wenn das nicht möglich ist, als bestehen bleibender Einfluß oder Fehler zu notieren. Der Apparat selbst ist desto besser, je

[1] B. WEINSTEIN, Handbuch der physikalischen Maßbestimmungen. Berlin. 1. 1886; 2. 1888. — F. KOHLRAUSCH, Lehrbuch der praktischen Physik. 10. Aufl. Leipzig 1905. — Vgl. besonders die im Artikel „Grundbegriffe" bei den Raummaßen angegebenen Bücher und Zeitschriften, von letzteren auch noch: Ztschr. f. Instrumentenk. Berlin. Aus der Literatur der praktischen Meßkunde kann keine Auswahl getroffen werden.

strenger er von allen Fehlern befreit ist; wenn es im höchsten Masse erreicht ist, nennt man ihn einen Präzisionsapparat. Der Beobachter selbst bringt durch die beschränkte Genauigkeit seiner Sinneswahrnehmungen sowie durch Ermüdung, Aufregung u. s. w. Fehler hervor, während er durch Übung und anderes die Fehler herabdrücken kann; von den Sinnesorganen kommt übrigens fast nur das Auge für exakte Messungen in Betracht — für gewisse Gebiete auch noch das Ohr.

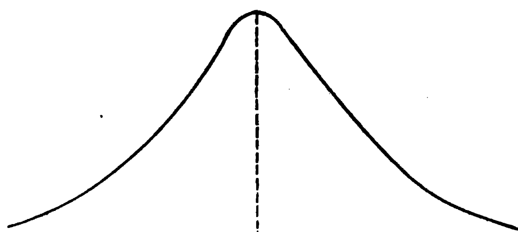
Mittelwert. In Anbetracht der genannten Umstände muß man eine zu bestimmende Größe, wenn irgend tunlich, nicht einmal, sondern mehrmals messen, — die Zahl der Wiederholungen wird sich nach den Verhältnissen richten —, und zwar unter möglichster Variation derjenigen Umstände, die für die Messung selbst nicht in Betracht kommen, von denen man aber für wahrscheinlich oder auch nur denkbar hält, daß sie einen Einfluß ausüben. Man wird alsdann für die zu bestimmende Größe eine Anzahl verschiedener Werte erhalten, es ist also jeder von ihnen mit einem Fehler behaftet; und insoweit diese Fehler nicht eine sichtbare Tendenz oder einen aufklärbaren Zusammenhang mit bestimmten Einflüssen haben, bezeichnet man sie als zufällige Fehler. Diese eliminiert man, indem man einfach aus allen Zahlen den Mittelwert bildet; dabei kann man, wenn ausreichende Gründe hierfür vorliegen, einige der Einzelwerte mit erhöhtem Gewicht, andere mit vermindertem Gewicht in die zum Zwecke der Mittelwerte auszuführende Summation einfügen, d. h. vorher mit einem Faktor versehen, der ein vielfaches bezw. ein Bruchteil von eins ist; ein Verfahren, wozu als extremer Fall auch die gänzliche Weglassung einzelner Werte gehört — alles das aber, wie gesagt, nicht ohne zwingende Gründe.

Der so gefundene Mittelwert stellt nun zwar das Hauptergebnis der Messung dar; er erhält aber erst seine volle Bedeutung, wenn man hinzufügt, welche Genauigkeit ihm zukommt; dabei wird es sich meist nicht um die absolute, sondern um die relative Genauigkeit handeln, d. h. um den Bruchteil der Größe selbst, bis auf den ihr Wert als sicher zu betrachten ist. Diese Angabe erfolgt nun schon dadurch, daß man, bei Zahlen mit Bruchstellen, von letzteren nur die sicheren angibt, auch wenn man eventuell noch mehr gefunden hat; bei ganzen Zahlen dadurch, daß man die letzten unsicheren Stellen durch Nullen ersetzt oder eine höhere Potenz von 10 als Einheit wählt, also z. B. an Stelle von 3700 lieber $37 \cdot 10^2$ schreibt. Für exakte Zwecke ist es aber doch erforderlich, die Genauigkeit noch in bestimmterer Weise anzugeben, und das geschieht durch Hinzufügung des mittleren Fehlers. Daß dieser nicht von den Einzelfehlern abhängen kann, ist einleuchtend, da diese ja eben symmetrisch um den Mittelwert liegen; in der Theorie wird nun gezeigt, daß es die Quadrate der Einzelfehler sind, auf die es ankommt. Und zwar erhält man die folgenden Beziehungen. Ist n die Zahl der Werte, S die Summe der Quadrate der Einzelfehler, so ist der mittlere Fehler f eines Einzelwertes und der mittlere Fehler F des Mittelwertes (beide Vorzeichen gleichberechtigt):

$$(1) \qquad S = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}} \; , \qquad F = \pm \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} \; .$$

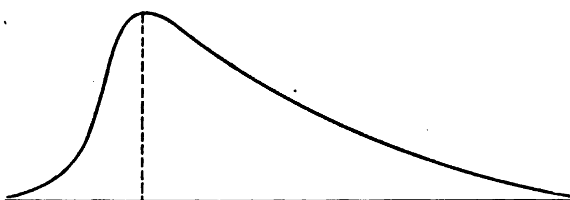
Von dem mittleren Fehler ist der wahrscheinliche Fehler zu unterscheiden; er besagt, daß es ebenso wahrscheinlich ist, daß der wirkliche Fehler des Ergebnisses größer wie daß er kleiner als er ist. Das Verhältnis des wahrscheinlichen zum mittleren Fehler wird sich offenbar aus einer Untersuchung darüber ergeben, wie denn überhaupt das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fehler von verschiedener Größe lautet, d. h. wie sich die gefundenen Werte der Größe um den unbekannten wahren Wert gruppieren. Dieses, von GAUSS aufgestellte Gesetz hat, zunächst allgemein gesprochen, die exponentielle Form; im einzelnen

aber nimmt es verschiedene Gestalt an, je nach dem Charakter der betreffenden Größe, insbesondere, je nachdem der Bereich ihrer Wertmöglichkeiten unbegrenzt oder begrenzt ist — letzteres im wichtigsten Falle dadurch, daß sie wesentlich positiven Charakters ist. Im ersteren Falle wird die Funktion symmetrisch, im letzteren unsymmetrisch sein; dasselbe gilt von den Kurven, durch die man die Wahrscheinlichkeit der Werte als Funktion der Abweichung vom wahren Werte darstellen kann, und die in den Figuren 12 und 13 schematisch für die beiden Fälle dargestellt sind. Im übrigen kann die Kurve mehr oder weniger steile Hänge haben: je steiler, desto besser ist die Methode der Messung, desto zuverlässiger das Resultat. Zugleich ergibt sich aus dieser Betrachtung das Verhältnis des wahrscheinlichen zum mittleren Fehler als 0,674 oder in roher Annäherung zu $^2/_3$.



Figur 12.

In den meisten Fällen wird die gesuchte Größe nicht direkt beobachtet, sondern aus der oder den beobachteten durch eine Zwischenrechnung abgeleitet. Der Fehler der Beobachtung überträgt sich dann im allgemeinen nicht proportional, sondern in einer Weise, die von dem Funktionsverhältnis jener Größen zueinander abhängt; in erster, meist ausreichender Annäherung hat man einfach mit dem Differentialquotienten der gesuchten nach der beobachteten Größe zu multiplizieren. Ist z. B. jene das Quadrat dieser, so verdoppelt sich der Fehler; ist sie die Quadratwurzel, so halbiert er sich. Offenbar ist eine Methode um so zweckmäßiger, je kleiner der Fehler der gesuchten Größe im Vergleich mit dem der beobachteten ist; bei der Beobachtung mehrerer Größen wird es auch darauf ankommen, wie sich diese zu der gesuchten kombinieren.



Figur 13.

Methode der kleinsten Quadrate. Bisher war immer nur von einer einzigen gesuchten Größe die Rede. Im allgemeinen aber handelt es sich um deren mehrere oder gar um einen ganzen Satz gleichartiger Größen. Alsdann versteht sich von selbst, daß man mindestens so viel Beobachtungen anstellen muß, als Größen gesucht sind; daß man aber, um die zufälligen Fehler eliminieren zu können, sogar noch wesentlich mehr Beobachtungen anstellen wird. Mit einer einfachen Mittelwertbildung kommt man hier nicht aus; man muß vielmehr ein geeignetes Kombinationsverfahren ausfindig machen. Ein solches ist das unter dem Namen der Methode der kleinsten Quadrate bekannte; es beruht auf dem Prinzip, die Größen derart zu bestimmen, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum werde. Im übrigen muß auf die zahlreichen, allen Bedürfnissen angepaßten Darstellungen der Methode verwiesen werden.[1]

Funktionen. Interpolation. Häufig handelt es sich darum, eine Größe zu bestimmen, die von einer anderen, willkürlich veränderlichen, abhängt; da man

[1] Die Methode der kleinsten Quadrate wird in den Werken von GAUSS, AIRY, MERRIMAN u. a., sowie in den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausführlich behandelt.

sich auf eine endliche Abzahl von Werten beschränken muß, kommt diese Aufgabe auf die vorige zurück: man erhält einen ganzen Satz von Zahlen; und es fragt sich, ob und nach welchem Gesetz diese Zahlen verschieden sind, ob sie z. B. von der ersten zur letzten zunehmen oder abnehmen oder ob ein periodisches Gesetz vorliegt u. s. w. Die Untersuchung dieser Verhältnisse wird durch die zufälligen Fehler offenbar erschwert; es gibt aber gewisse Anhaltspunkte, zum Teil auch ausgebildete Regeln, die zum Ziele führen können. Um ferner die Werte der gesuchten Funktion auch für die nicht beobachteten Zwischenfälle zu ermitteln, muß man interpolieren, was entweder rechnerisch oder, nicht selten mit größerer Genauigkeit, graphisch geschehen kann, indem man die diskreten, beobachteten Werte zu einer stetigen Kurve ergänzt. Dagegen ist die Fortsetzung von Zahlenreihen bezw. von Kurven über die Grenzen der Beobachtung hinaus, das Extrapolieren, nur von sehr bedingtem Werte und auch das nur dann, wenn besondere Anhaltspunkte für das Verfahren vorliegen.[1]

Relative und absolute Messungen. Die größte Schwierigkeit machen in allen Gebieten der Physik die absoluten Messungen, d. h. die Ermittelung von Werten mit direktem Bezug auf die Fundamentaleinheiten. Man wird solche absolute Messungen nur da ausführen, wo ein neues Gebiet betreten wird, im übrigen aber durch relative Messungen an die schon vorhandenen absoluten den Anschluß suchen. Relative Messungen können entweder solche sein, bei denen ein Faktor gleichgültig ist, so daß es nicht darauf ankommt, ob alle gefundenen Zahlen in einem bestimmten Verhältnis zu groß oder klein sind; oder es können Messungen sein, bei denen der Nullpunkt der Skala gleichgültig ist, bei denen man sich etwa auf eine gleichartige Messung als Nullpunkt bezieht. In allen derartigen Vergleichsmessungen ist es notwendig, die Symmetrie der Versuche zu wahren, also z. B. nicht einfach erst die Größe n und dann die Größe n_0, auf die sie bezogen werden soll, zu beobachten, sondern nachher noch einmal n, um in dem Mittelwerte der beiden n einen mit n_0 besser vergleichbaren Wert zu gewinnen.

Skope, Meter, Graphen. Man kann hinsichtlich ihrer Leistungen drei Stufen von Apparaten unterscheiden: die, welche nur eine bestimmte Angabe machen, z. B. daß eine Größe null oder daß zwei Größen gleich sind u. s. w.; sie werden durch das Suffix skop gekennzeichnet und haben eine größere Bedeutung als man von vornherein glauben sollte, weil es nämlich auf vielen Gebieten möglich ist, die eigentliche Messung durch eine Null- oder Gleichheitsmethode zu ersetzen, und weil diese Methoden mit Rücksicht auf die Organisation unserer Sinne mit den geringsten Fehlern behaftet sind. Auf der zweiten Stufe stehen die eigentlichen, durch das Suffix meter gekennzeichneten Meßapparate; sie haben eine Skala, und zwar, wenn sie zu absoluten Messungen dienen sollen, eine absolut geeichte, andernfalls eine willkürliche. Auf der dritten Stufe endlich stehen diejenigen Apparate, die selbsttätig Messungen aufzeichnen, und die für die fortlaufende Feststellung veränderlicher Funktionen naturgemäß das höchste leisten; man bezeichnet sie durch das Suffix graphen.

Messung von Längen aller Art.

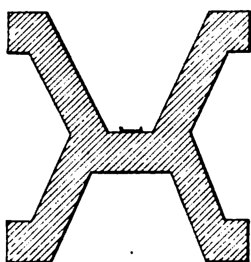
Längen kann man entweder durch direkte Abmessung oder durch Übertragung mittels eines Zwischenapparats oder endlich, ohne direkten Kontakt, durch optische Ablesung messen. Die verschiedenen Methoden unterscheiden sich im übrigen nur durch den Grad der Genauigkeit sowie dadurch, daß sie

[1] Näheres über Ausgleich von Fehlern u. s. w. bei WEINSTEIN, KOHLRAUSCH (Lehrbuch der praktischen Physik) u. a. a. O.

mehr für große oder kleine Strecken eingerichtet sind, daß die Strecken horizontale oder vertikale Richtung haben müssen oder beliebige haben dürfen u. s. w. Für sehr große und für sehr kleine Strecken gibt es schließlich besonders ausgebildete Methoden und Apparate.[1]

Jeder zur Längenmessung dienende Apparat muß mit einer Skala versehen sein; für absolute Messungen muß dieselbe vom Charakter einer Normale oder mindestens mit einer solchen verglichen sein. Zur Herstellung der Skala dient die Teilmaschine. Ihr wesentlicher Bestandteil ist eine Schraube feinster Art, die gewöhnlich Mikrometerschraube genannt wird; da bei ihr der Umfang ein Vielfaches der Höhe eines Ganges ist, und da man mittels einer Scheibe, die am Schraubenkopfe angebracht ist, noch hundertstel und selbst tausendstel eines Umganges ablesen kann, so ist es möglich, die Schraube um so kleine und so exakt angebbare Strecken vorrücken zu lassen, wie das sonst bei weitem nicht möglich wäre. Mit der Schraube ist nun ein Stichel verbunden, der außer der fortschreitenden Bewegung noch zwei andere erhält: eine, durch die er die Skalenstriche zeichnet, und eine, durch die er während des Vorrückens abgehoben wird. Im einzelnen weichen die verschiedenen Konstruktionen voneinander nicht unbeträchtlich ab. Die vollkommensten bisher gebauten Teilmaschinen sind wohl die, mit deren Hilfe die bekannten ROWLANDschen Gitter (s. „Optik") hergestellt werden. Es versteht sich von selbst, daß während der Tätigkeit der Maschine alle Fehlerquellen aufs sorgfältigste ausgeschlossen werden müssen; die höchste Leistung setzt den völlig automatischen Betrieb, ohne Störung durch menschliche Eingriffe oder auch nur Anwesenheit voraus. — Fertige Maßstäbe müssen, wenn sie feineren Zwecken dienen sollen, kalibriert, d. h. mit Normalstäben Teilstrich für Teilstrich verglichen, und die Korrektionstabelle, die man so erhält, dem Stabe beigefügt werden.

Maßstab. Die üblichste Methode der Längenmessung ist die mit Hilfe eines geteilten Maßstabes. Das beste Material für Maßstäbe ist zweifellos Bergkristall, weil es mit der Zeit und infolge thermischer und anderer Einflüsse am wenigsten verändert wird (nur elektrische Einflüsse könnten unter Umständen sich geltend machen); freilich sind genügend große Stücke kostspielig und nicht leicht zu bearbeiten. Sodann reiht sich Platin als brauchbares Material an, auch gewisse Platinlegierungen haben sich bewährt; namentlich eine mit 90 % Platin und 10 % Iridium (Dichte 21,58), wie sie im internationalen Meterdienst verwendet wird. Für gewöhnliche wissenschaftliche Zwecke ist Stahl meist ausreichend, auch Holz, wenn eine Stahl- oder Messinglinie in dieses eingelassen ist. Auch Glas ist geeignet, auch bietet es den Vorteil der Durchsicht.[2] Zur Vermeidung thermischer Einflüsse kann man auch zwei Metalle miteinander kombinieren. Als Querschnitt ist dem Rechteck wegen der geringeren Durchbiegung und der damit verknüpften geringeren Ausdehnung eine hohle Form, einem **H** oder **X** ähnlich, vorzuziehen; am besten bewährt hat sich die in Figur 14 angedeutete Form, bei welcher die Skala auf dem Grunde der oberen Rinne angebracht ist.[3] Die Teilung selbst erfolgt gewöhnlich in Millimeter oder halbe Millimeter; weiter zu gehen, verträgt das unbewaffnete Auge und meist auch das

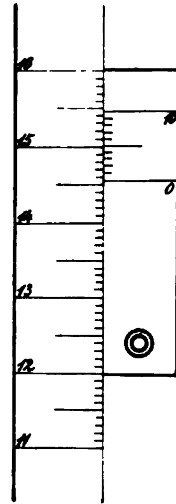


Figur 14.

---

[1] Die Literatur findet man in den Lehrbüchern der Meßkunde sowie in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde"; hier können nur aus neuester Zeit einige Nachweise gegeben werden. — [2] Eine Methode auf Glasskalen Marken und Teilstriche hell auf dunklem Grunde sichtbar zu machen, hat F. F. MARTENS angegeben: WIED. Ann. **62**. 206. 1897. — [3] Die Durchbiegung von Maßstäben infolge thermischer und elastischer Kräfte ist vielfach untersucht worden; vgl. WEINSTEIN, a. a. O. und C. CHREE, Phil. Mag. (6) **2**. 532. 594. 1901.

Material nicht. Bei der Ablesung ist besondere Sorgfalt auf die Vermeidung der Parallaxe zu verwenden. Zur Messung kleinerer Bruchteile dient ein sinnreicher, an dem Maßstabe angebrachter kleiner Hilfsmaßstab, der nach dem angeblichen Erfinder NUNEZ — der wahre hieß VERNIER (1631) — benannte Nonius. Er läßt sich an dem Hauptmaßstab verschieben und enthält, wenn er etwa noch den n. Teil des kleinsten Intervalls des Hauptmaßstabes angeben soll, auf die Länge von $n - 1$ (oder auch $n + 1$) Teilen des Hauptmaßstabes selbst deren n. Will man eine Länge bestimmen, so liest man zunächst denjenigen Teilstrich des Hauptmaßstabes ab, über den jene Länge gerade noch hinausgeht, schiebt dann den Nonius so, daß sein Nullpunkt mit dem Endpunkte derselben zusammenfällt, und untersucht, der wievielte Noniusstrich mit einem Striche des Maßstabes genau zusammenfällt; ist es der m-te, so kommen zu den z ganzen Teilen noch m/n hinzu, die Länge ist also $z + m/n$. Gewöhnlich ist n gleich 10 oder 20 gewählt; in der Figur 15 z. B., wo die Hauptteilung Millimeter, der Nonius zehntel Millimeter, lautet die Ablesung 145,6 mm. Eventuell kann man, wenn keiner der Noniusstriche genau mit einem Maßstabstrich zusammenfällt, noch halbe oder viertel der Noniuseinheit schätzen.



Figur 15.

Wenn die zu messende Strecke sich zur Anlage eines Maßstabes nicht eignet, wohl aber zugängliche Enden hat, bedient man sich zur Übertragung des Zirkels oder eines ähnlichen Spitzenapparats. Der Reduktionszirkel erlaubt dann auch die Übertragung in einem von eins abweichenden Verhältnis; er ist eine Art von Doppelzirkel, d. h. die Schenkel sind rückwärts über den Drehpunkt hinaus verlängert, und die Verlängerungen machen einen — durch Einstellung zu variierenden — Bruchteil der primären Schenkel aus; denselben Bruchteil macht dann der Abstand der Gegenspitzen von dem der primären Spitzen aus.

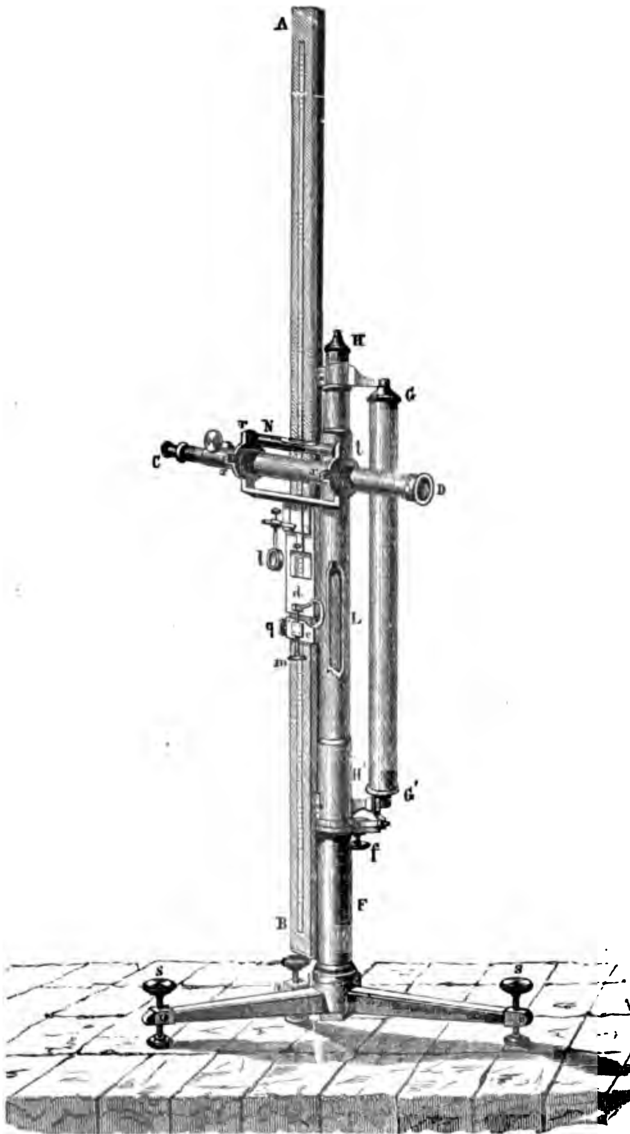
Über zwei oder drei Meter hinauszugehen, wird bei festen Maßstäben unbequem; man setzt dann den Stab entweder aus Stücken, die in Scharnieren verbunden werden, zusammen; oder man benutzt das Bandmaß, die Meßkette und ähnliche Apparate; die Genauigkeit wird aber hier naturgemäß geringer, und die Kontrolle von störenden Einflüssen bedenklicher.

Mikrometer. Zur Erhöhung der Feinheit von Messungen dienen die Mikrometer. Die eine Art von ihnen, die Schraubenmikrometer, beruhen auf dem soeben aus Anlaß der Teilmaschine angedeuteten Prinzip; eine andere Klasse bilden die Okularmikrometer, die am Okular von Mikroskopen und Fernrohren angebracht werden, und die dazu dienen, Längen zu messen, die sich ganz im Gesichtsfeld, senkrecht zum Faden, befinden; was man bei ihnen direkt mißt, ist das optische Bild der Strecke; man muß also auch noch das Bild einer bekannten Strecke, z. B. eines Zentimeters, messen, um die Reduktion vorzunehmen; und zwar muß bei beiden Messungen die Einstellung des Apparats dieselbe sein. Zum Zwecke der Ausdehnung des okularmikrometrischen Verfahrens auf Strecken, die über das Gesichtsfeld hinausgehen, dienen besondere Verfahren, die namentlich in der Mikroskopie fein ausgebildet sind, für die Physik aber meist weniger in Betracht kommen. — Endlich sind auch elektrische Mikrometer von großer Empfindlichkeit angegeben worden.[1]

Komparator. Dieser Apparat dient zur genauen Ausmessung horizontaler Strecken und heißt deshalb auch Horizontalkomparator. Er besteht im wesentlichen aus einer auf einem Fundament ruhenden Bodenplatte und einem auf

[1] Z. B. PH. SHAW, ibid. 50. 537. 1900.

ihr verschiebbaren Schlitten; in anderen Fällen wird eine dreikantige Stange benutzt, die deshalb auch Prisma heißt. Die Beobachtung erfolgt mit Hilfe von zwei festen, mit Okularmikrometer versehenen Mikroskopen. Natürlich kann auch die Stange fest und dafür die Mikroskope verschiebbar sein. Die Vorzüge der einzelnen Konstruktionen bestehen in der Genauigkeit und Bequemlichkeit der Justierung, der Beleuchtung für auf- und durchfallendes Licht u. s. w. Sehr verbreitete und empfehlenswerte Typen sind u. a. die von ZEISS[1] in Jena, REPSOLD in Hamburg[2] und BRUNER in St. Petersburg. — Übrigens gibt es auch einfache, zum direkten Anlegen bestimmte Apparate, die man Kontaktkomparatoren nennt. — Andererseits kann man zur Bestimmung des Abstandes von Punkten sowie von parallelen, senkrecht zur Längsrichtung stehenden Flächen auch die bekannte optische Bank in einer Weise, die keiner näheren Erläuterung bedarf, verwenden.



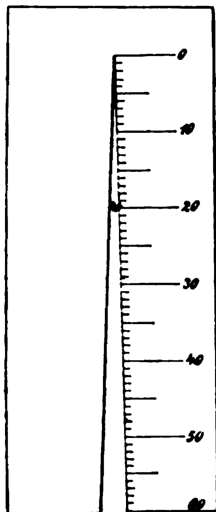
Figur 16.

Kathetometer. Dieser, in der Physik wohl am häufigsten benutzte Längenmeßapparat ist meist für vertikale Lage der Strecken berechnet und kann daher auch als Vertikalkomparator bezeichnet werden; er ist aber meist nicht mit Mikroskopen, sondern mit Fernrohren ausgestattet; je nachdem deren nur eines oder zwei vorhanden sind, erhält man zwei verschiedene Typen. In der Figur 16 sieht man den Dreifuß mit den Stellschrauben zur Vertikalstellung, die Stange mit Millimeterteilung sowie den Schlitten, mittels dessen sich Nonius und Fernrohr auf und ab bewegen lassen; das Fadenkreuz des letzteren wird nacheinander auf die beiden Endpunkte der zu messenden Strecke eingestellt; dabei

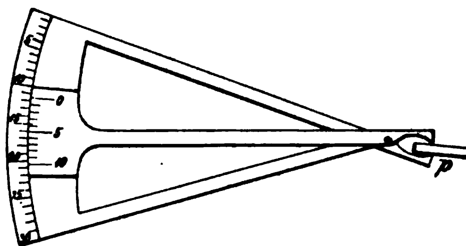
[1] Vgl. C. PULFRICH, Ztschr. f. Instrumentenk. **12.** 307. 1892. — [2] Vgl. PENSKY, ibid. **15.** 313. 353. 1895.

ist eine Reihe von Vorsichtsmaßregeln zu beachten (Zentrierung, Justierung, horizontales Visieren, Parallelverschiebung u. s. w.). Der hier dargestellte Typus ist der des Longitudinalkathetometers, dem der etwas kompliziertere des Transversalkathetometers gegenübersteht.

Messung kleiner Längen, Dicken, Verlängerungen. Mechanische Methoden. Eine besondere Stellung nehmen die zur Messung von kleinen Strecken, namentlich von Dicken geringer Ausdehnung bestimmten Apparate ein; je nachdem man die zu messende Größe geometrisch-mechanisch multipliziert oder indirekt mißt, erhält man verschiedene Typen. Zum ersten Typus gehört der einfache, aber für viele Zwecke brauchbare Dickenmesser der Figur 17. Er besteht aus einem Platin- oder Messingstreifen, in den ein schmaler, mit einer Längsteilung versehener Keil eingeschnitten ist; in diesen Keil wird die Saite, der Draht u. s. w.,



Figur 17.



Figur 18.

dessen Dicke gemessen werden soll, senkrecht zur Streifenebene eingeschoben, soweit es ohne Anwendung von Druck geht; die Dicke ergibt sich dann aus dem Verhältnis von Schenkel und Grundlinie des Keildreiecks; in der Figur ist es 1 : 20, die Ablesung 20, also die Dicke 1 mm. Andere Dickenmesser haben Dosenform und beruhen auf der Elastizität einer Feder, die dadurch, daß man den zu messenden Körper zwischen zwei sich sonst berührende Schneiden klemmt, aus der natürlichen Lage gebracht wird und hierbei einen Zeiger um einen gewissen Winkel dreht; die Spitze des letzteren spielt auf einer Kreisteilung, an der man die Dicke (meist in 0,01 mm) ohne weiteres abliest. Zu den Dickenmessern gehört auch der Fühlhebel, der dem oben erwähnten Reduktionszirkel im Prinzip ähnlich ist; in der Figur 18 ist z. B. die Ablesung 11,5, also — bei zehnfacher Vergrößerung — die Dicke 1,15 mm. — Ein mit optischer Ablesung versehener und in jeder Hinsicht sorgfältig durchkonstruierter Dickenmesser ist das Kontaktmikrometer aus der Werkstätte von CARL ZEISS in Jena, Figur 19.[1] Infolge der Einrichtung (frei zwischen Spitzen aufgehängte Skale, Schnur mit Rolle und Gegengewicht u. s. w.) ruht der Kontaktstift stets mit gleichem Drucke auf dem Objekt bezw. auf der Grundplatte auf. Die Skala ist in fünftel Millimeter geteilt, Unterabteilungen werden mit dem Mikroskop festgestellt, dessen Mikrometertrommel für jeden Skalenteil zwei Umdrehungen macht, so daß jeder von den 100 Trommelteilen 0,001 mm oder 1 μ angibt; die Meßgrenze liegt bei 50 mm. — Bei dem Dickenmesser von HALLE[2] wird das Objekt zwischen zwei Kugeln aus Stahl gefaßt und an einem Schlitten der Abstand der Kugeln gemessen. — In neuerer Zeit hat das Bedürfnis, sehr kleine Längen genau zu messen und zu kontrollieren, zu zahlreichen Modifikationen der mechanischen

[1] Vgl. C. PULFRICH, Ztschr. f. Instrumentenk. **12.** 307. 1892. — [2] G. HALLE, ibid. **16.** 295. 1896. — Vgl. auch S. MARESCA, Nuov. Cim. (5) **9.** 281. 1905.

Konstruktionen, namentlich nach dem Fühlhebelprinzip, geführt; dabei wird meist die Verschiebung auf eine Drehung zurückgeführt und diese nach der Spiegelmethode (s. w. u.) gemessen; es sei[1] beispielsweise auf eine derartige Anordnung hingewiesen, die RIGHI beschrieben hat. — Eine andere Abart sind die Apparate, die als Extensometer bezeichnet werden und besonders zur Messung kleiner Ausdehnungen, Deformationen u. s. w. geeignet sind; sie beruhen meist auf mikroskopischer Messung zwischen feinen Marken, so das von EWING[2] angegebene Instrument. — Eine Klasse für sich bilden die



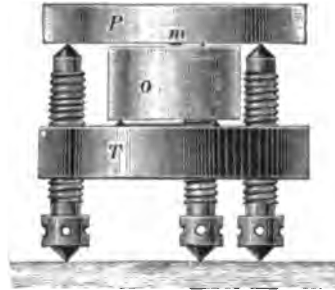
Figur 19.

Sphärometer. Dieser Apparat mißt die Erhebung eines Punktes über eine Ebene, also, wenn man auf diese Ebene als Grundplatte einen Körper legt, ebenfalls dessen Dicke; er ist aber insofern vielseitiger, als er ganze Körper gestalten durchzumessen erlaubt, insbesondere findet er, wie schon der Name besagt, zur Messung der Krümmung von Linsen Anwendung. In der älteren Form besteht das Sphärometer aus drei festen Füßen, die mit ihren Spitzen ein gleichseitiges Dreieck bilden und damit die genannte Grundebene festlegen; in der Mitte des Dreiecks befindet sich eine vierte Spitze, die bei der Messung nach oben geschoben wird; die Bewegung erfolgt mit Hilfe einer Mikrometerschraube, an deren Trommel oder Scheibe man noch hundertstel ablesen kann. Die Einstellung erfolgt derart, daß bei der geringsten Abwärtsbewegung der mittelsten Spitze der Apparat ins Wackeln kommt; das eine Mal, wenn die Mittelspitze auf der Grundebene, das andere Mal, wenn sie auf dem Körper ruht, dessen Dicke zu bestimmen ist; bei Linsen, deren Krümmung gemessen werden soll, fällt die erste Messung natürlich fort, dafür kommt hier die Seite des gleichseitigen Dreiecks in Betracht; um diese exakter messen zu können, hat man neuerdings die Spitzen durch wohldefinierte Kugelflächen ersetzt. — Bei den neueren Sphärometern ist die Genauigkeit nicht unwesentlich dadurch erhöht, daß die Schraube mit einem Fühlhebel versehen ist und daß an die Stelle des Dreifußes eine volle ringförmige Schneide tritt; derartige Sphärometer sind von A. M. MAYER in Newyork, BAMBERG in Berlin und CARL ZEISS in Jena konstruiert. Der Apparat der letztgenannten Werkstätte hat einen Ring mit Doppelschneide; die innere dient zur Auflage von konvexen Flächen, die äußere für konkave; für eigentliche Dickenmessung bei ebenen Flächen ist die Auflage gleichgültig; es wird nicht der Apparat auf den Körper, sondern der Körper auf den Apparat gelegt; auch sind verschieden große Ringe beigegeben; im übrigen ist der Apparat dem oben beschriebenen Dickenmesser nachgebildet.[3] — Eigentlich mehr zu den

[1] A. RIGHI, Rend. Acc. Bologna 1897. — [2] J. A. EWING, Proc. Roy. Soc. **58.** 123. 1895. — [3] Vgl. S. CZAPSKI, Ztschr. f. Instrumentenk. **7.** 297. 1887. — C. PULFRICH, ibid. **12.** 312. 1892.

Dickenmessern gehören die als Flüssigkeitssphärometer bezeichneten Apparate; so das von GUGLIELMO[1], bei dem sich ein Kolben in einem mit Quecksilber gefüllten Zylinder frei bewegt; die Kolbenstange läuft nach oben in Spitzen aus, die man einmal mit einer Normalebene, dann mit dem Prüfkörper zur Berührung bringt; das dazwischen aus dem unteren Teile durch kapillare Ansätze ausfließende Quecksilber wird gewogen oder in Maßfläschchen ausgemessen.

Optische Methoden. Dilatometer. Besondere Methoden und Apparate machen sich nötig, wenn es sich um sehr kleine Längen, namentlich um sehr kleine Änderungen an sich größerer Längen handelt; hierzu ist, neben einer Reihe älterer, besonders die dilatometrische Methode geeignet, die auf der Beobachtung der Interferenzstreifen beruht, und die von FIZEAU eingeführt, dann aber erst durch BENOIT und ganz besonders durch ABBE vervollkommnet worden ist.[2] Was man hier direkt mißt, ist die Dicke der Luftschicht zwischen der Endfläche des zu untersuchenden Körpers und einer Glasplatte; daraus ergibt sich dann offenbar leicht die Längen- oder Dickenänderung jenes Körpers. Da eine planparallele Luftschicht keine Streifen liefern würde, muß man sie schwach keilförmig (oder plankonkav) gestalten, was mit Hilfe der Deckplatte leicht zu erreichen ist; in Figur 20 ist das FIZEAUsche Tischchen in der ABBEschen Form wiedergegeben. Die Beobachtung geschieht bei BENOIT mit monochromatischen Flammen, bei ABBE mit spektral zerlegtem Lichte, z. B. von GEISSLERschen Röhren; hierdurch erhält man erstens größere Helligkeit, und zweitens die Möglichkeit, gleichzeitig mit zwei oder mehr Spektrallinien zu arbeiten, wodurch man nicht nur eine Kontrolle erhält, sondern auch der Mühe überhoben wird, die bei der Änderung der Schicht vorbeiziehenden, nach hunderten und tausenden zählenden Streifen zu zählen, indem die Endeinstellung, verglichen mit der Anfangseinstellung, für die beiden Farben einen sicheren Rückschluß auf die Zahl der ganzen Streifen erlaubt, so daß nur noch die Bruchteile abzulesen sind. Auf die Einzelheiten und Neuerungen, z. B. die Anwendung von Quarz als Unterlage der Deckplatte, kann hier nicht eingegangen werden. Eine eingehendere Beschreibung mit Abbildungen findet man im Artikel „Ausdehnung der festen Körper durch die Wärme“ in Band 3. — Andere Varianten rühren von TUTTON, sowie von MORLEY und ROGERS[3] her.



Figur 20.

Zur absoluten Dickenmessung ist das ABBEsche Verfahren namentlich von FABRY und PEROT[4] ausgebildet worden. Mittels einer Serie von fünf schwach prismatischen Platten — Luftschicht zwischen geneigten Planparallelplatten — wird ein Bereich von Dicken wie 1 : 6 beherrscht; auf einer der Grenzplatten ist eine Millimeterteilung angebracht; beobachtet wird mit zwei nahe benachbarten monochromatischen Lichtern, z. B. Natrium und Lithium, so daß immer bei jedem achten Streifen Koinzidenz stattfindet. Es lassen sich so leicht Etalonplatten herstellen, für die durch eine Kurve die zu jedem Millimeterstrich gehörige Dicke festgelegt ist.

Die Interferenzmethoden für Messung kleiner Dicken und Längen sind in neuester Zeit nach verschiedenen Richtungen sehr ausgebildet worden, wobei

[1] G. GUGLIELMO, Rend. Acc. Linc. (5) 4. 336. 1895. — [2] H. FIZEAU, Ann. Chim. Phys. (4) 2. 143. 1864; 8. 335. 1866; POGG. Ann. 123. 128. — BENOIT, Tr. et mém. Bur. int. 1. 6. — C. PULFRICH, Ztschr. f. Instrumentenk. 13. 365. 1893; 18. 261. 1898. — [3] TUTTON, Ztschr. f. Kryst. 30. 529. 1898. — MORLEY und ROGERS, Phys. Review. 4. 1. 106. 1896. — [4] A. PEROT u. C. FABRY, C. R. 123. 802. 990. 1896; Ann. Chim. Phys. (7) 24. 119. 1901.

insbesondere die Arbeiten von MICHELSON, BENOIT, WIENER und SHARP (im Anschluß an ältere Arbeiten von WERNICKE), QUINCKE u. A. in Betracht kommen.[1] Eine besondere Modifikation stellt die von MOUTON zuerst angegebene, von MACÉ DE LÉPINAY ausführlich durchgearbeitete Methode dar, die auf der Anwendung der TALBOTschen Linien, also eigentlich mehr auf Beugung als auf Interferenz beruht. Zunächst läßt sich allerdings nur die Dicke bestimmter Körper, z. B. von Quarzplatten messen, und zwar bis zu einigen hundertsteln Mikron; dadurch aber kann man dann beliebige Dicken oder Längen auf Wellenlängen und damit auf absolutes Maß reduzieren; auch für Dickenverschiedenheiten an verschiedenen Stellen und für Dickenänderungen ist das Verfahren als brauchbar erwiesen worden.[2]

Akustische, elektrische, magnetische Methoden. Mit Rücksicht auf die Feinheit unseres Gehörorgans sowie der elektrischen und magnetischen Messungen kann es nicht Wunder nehmen, daß man hierauf Methoden zur Messung kleiner Strecken zu gründen versucht hat. Befestigt man z. B. nach dem Vorschlag von CARDANI[3] an das Ende des Prüfstabes einen gespannten Metalldraht, so erhält man bei jeder Längenänderung des Stabes einen anderen Ton in dem Drahte; schon mit dem Ohre direkt kann man auf diese Weise 0,005 mm feststellen, mit verfeinerten akustischen Methoden aber noch viel weiter kommen. — Von den elektrischen Methoden sind diejenigen, welche die Widerstandsänderung in der WHEATSTONEschen Brücke — die eine Elektrode ist mit dem Prüfkörper verbunden — sowie die auf der Potentialänderung beruhenden zu erwähnen; man findet hierzu geeignete neuere Anordnungen u. a. bei ERCOLINI[4], woselbst auch eine magnetische Methode dargelegt ist.

Messung großer Strecken; Entfernungsmesser. Wenden wir uns jetzt zum entgegengesetzten Extrem, dem Messen großer Strecken, so kommen hier namentlich die Entfernungen von Orten auf der Erdoberfläche in Betracht; zu ihrer Bestimmung dienen die Entfernungsmesser oder Distanzmesser oder Telemeter. Für diese Apparate, die in der Feldmeßkunst für topographische, militärische und andere Zwecke von großer Wichtigkeit sind, hat man im Laufe der Zeit sehr verschiedenartige Ideen herangezogen; die wichtigsten sind folgende: 1. Die direkte Ausmessung mit Hilfe von Meßstangen, die aus thermischen Gründen aus zwei verschiedenen Metallen zusammengesetzt sind, und von denen immer eine an die andere mit besonderen Vorsichtsmaßregeln angesetzt wird. Dieses Verfahren kann natürlich nur selten angewandt werden und dient vorzugsweise nur zur Ausmessung geeigneter Basislinien für die Triangulation, weshalb die betreffenden Apparate auch Basisinstrumente heißen; neuerdings sind auf diese Weise Strecken bis zu 10 km gemessen worden. 2. Die Messung der scheinbaren Größe einer senkrechten Strecke am Endpunkte der zu messenden Entfernung, gesehen von ihrem Anfang aus; hierzu dienen zwei Fäden im Beobachtungsfernrohr und eine geteilte Latte am Endpunkte, wobei der Fädenabstand meist so gewählt wird, daß man die gesuchte Entfernung unmittelbar ablesen kann; Apparate dieser Art, verbunden mit anderen, für die Feldmessung nötigen Teilen, sind die Kippregel und das Tachymeter. 3. Die Messung der Parallaxe, d. h. der Winkelverschiebung des Endpunktes der Strecke, wenn man ihn von zwei verschiedenen Punkten aus anvisiert; die Entfernung dieser beiden Punkte, die Basis, muß natürlich genau bekannt sein; je nachdem diese Basis an einem und demselben Instrument angebracht ist oder zwei örtlich getrennte Instrumente

[1] W. WERNICKE, POGG. Ann. Erg.-Bd. **6**. 68. 1878. — O. WIENER, WIED. Ann. **3**. 629. 1887. — C. H. SHARP, DRUDES Ann. **3**. 210. 1900. — G. QUINCKE, POGG. Ann. **129**. 178. 1866. — Vgl. auch MICHELSON, BENOIT u. A. (a. a. O.). — [2] MOUTON, C. R. **68**. 967. 1879. — J. MACÉ DE LÉPINAY, Journ. de Phys. **7**. 53. 1888; Ann. Chim. Phys. (7) **5**. 210. 1895. — [3] CARDANI, Naturw. Rundsch. **5**. 324. 1890. — [4] G. ERCOLINI, Nuov. Cim. (4) **10**. 241. 1899.

benutzt werden, erhält man zwei Varianten der Methode; bei der ersten ist wegen der Kleinheit der Parallaxe die Genauigkeit nur gering, bei der zweiten treten vielfach andere Schwierigkeiten auf, auch ist sie naturgemäß schwerfällig und darum nur in bestimmten Fällen anwendbar. 4. Die Messung der Dauer der Schallfortpflanzung über die zu messende Strecke; natürlich darf man hierbei nicht, wie dies früher meist geschah, die Schallgeschwindigkeit einfach zu 333 m ansetzen, sondern man muß Temperatur, Feuchtigkeit und Bewegungszustand der Luft berücksichtigen, wozu man gegenwärtig leidlich zuverlässige Formeln besitzt; außerdem muß man die Schallquelle so wählen, daß keine abnormen Verhältnisse eintreten, wie dies z. B. beim Schalle von Geschossen großer Geschwindigkeit der Fall ist. Irgend eine größere Bedeutung für wissenschaftliche oder exakt-technische Zwecke wird diese Methode begreiflicherweise nie gewinnen. 5. Die Koinzidenzmethode, bei der man die von zwei distanten Objektiven aufgenommenen Bilder in einem Auge vereinigt und die Verschiebung mißt. — 6. Die stereoskopische Methode, darauf beruhend, daß wir beim Sehen mit beiden Augen infolge der verschiedenen Lage der beiden Netzhautbilder eines Gegenstandes diesem eine bestimmte Entfernung von uns zuschreiben. Hierauf hat, infolge einer von H. de Grousilliers gegebenen Anregung und auf Grund der Arbeiten ihrer Mitarbeiter, namentlich Pulfrichs, die Werkstätte von Carl Zeiss ein stereoskopisches Telemeter gegründet. Es knüpft, zur Erhöhung der Tiefenplastik, an das Scherenfernrohr derselben Firma an, das sich durch prismatische Bildaufrichtung und vergrößerten Objektivabstand auszeichnet; es enthält eine außerordentlich sorgfältig auf photographischem Wege hergestellte perspektivische Tiefenskala im Innern, die sich über die beobachtete Landschaft lagert und die Koinzidenz eines Punktes, dessen Entfernung bestimmt werden soll, mit einem Teilstriche der Skala nach kurzer Übung sehr genau festzustellen erlaubt. Die Empfindlichkeit nimmt, wie bei fast allen Methoden, mit wachsender Entfernung ab, ist aber ebenso groß wie dort, während die Bequemlichkeit und Schnelligkeit der stereoskopischen Methode naturgemäß von keiner anderen erreicht wird. Im Anschluß hieran ist in derselben Werkstätte noch der Pulfrichsche Stereokomparator entstanden, auf den aber an dieser Stelle nicht eingegangen werden kann.[1]

Höhenmessung. Schließlich bleibt noch die besondere Aufgabe, größere vertikale Strecken, also namentlich Erhebungen von Punkten der Erdoberfläche über die Umgebung und dann indirekt über den Meeresspiegel zu messen. Hierzu dienen drei verschiedene Verfahren: 1. Die geometrische Höhenmessung, auch Vertikalnivellement genannt, bei der man mittels Fernrohr und geteilter Latten die Erhebung eines Punktes über einen seitlich tiefer gelegenen direkt anvisiert. 2. Die trigonometrische Höhenmessung, weniger genau, aber einfacher und deshalb für gewöhnliche Zwecke überwiegend in Gebrauch; hier berechnet man die Höhe eines Punktes über einem seitlich tiefer gelegenen aus der bekannten oder gemessenen Basis und dem mit dem Theodoliten gemessenen Neigungswinkel. Hieran schließt sich dann als einfachste, aber wegen der nicht mit voller Sicherheit einzusetzenden Korrektionen ebenfalls weniger genaue Methode: 3. Die barometrische Höhenmessung, deren Gedanke schon von Pascal ausgesprochen worden ist. Durch Umkehrung der für den Luftdruck in verschiedenen Höhen geltenden Formel (vgl. Artikel „Aërostatik") erhält man ohne weiteres die Höhenformel; eine ihrer Formen ist die Rühlmannsche (die Pernthersche ist ihr im wesentlichen sehr ähnlich); dabei bedeutet h die Höhendifferenz, B und b sind die beiden Barometerstände, E und e die entsprechenden Dampfdrucke, z ist die Seehöhe des tieferen Ortes, T und t sind die beiden Temperaturen in Celsius-

[1] Vgl. C. Pulfrich, Phys. Ztschr. 1. 98. 1899; Ztschr. f. Instrumentenk. p. 21—23. 1901—03 und a. a. O.

graden, φ ist die geographische Breite und ε eine Korrektion, die für ganz isolierte Höhenpunkte (Luftballon, Turmspitze) 0,000000314, für breite Plateaus dagegen 0,000196 beträgt und für Zwischenfälle Zwischenwerte hat:

$$
(2)\quad \begin{cases} h = 18401\left[1 + 0{,}00367\left(\frac{t+T}{2}\right)\right]\left[1 + 0{,}378\left(\frac{e/b + E/B}{2}\right)\right] \\ (1 + 0{,}0026\cos 2\varphi)\left[1 + \varepsilon\left(z + \frac{h}{2}\right)\right]\log\frac{B}{b} \quad . \end{cases}
$$

Indem man hierin lauter Mittelwerte benutzt, macht man Fehler, und diese werden am kleinsten, wenn man zu bestimmten Jahres- und Tageszeiten beobachtet, nämlich einerseits im Frühjahr und Herbst und andererseits zu folgenden Stunden: Januar 12^h mittags, Februar 10^h vormittags und 4^h nachmittags, März 8^h vormittags und 6^h nachmittags, April und Mai 7^h vormittags und 7^h nachmittags, Juni und Juli 6^h vormittags und 9^h nachmittags, August 7^h vormittags und 8^h nachmittags, September 8^h vormittags und 6^h nachmittags, Oktober 10^h vormittags und 4^h nachmittags, November 11^h vormittags und 2^h nachmittags, Dezember 1^h nachmittags. Vereinfachungen der Formel auf Grund angenäherter Betrachtungen sind die BRUHNSsche Formel

$$
(3)\quad h = 18432(1 + 0{,}00390\,t)(1 + 0{,}0026\cos 2\varphi)\log\frac{B}{b} \quad ,
$$

wo t schon die Mitteltemperatur bezeichnet, ferner die KÖPPENsche Formel

$$
(4)\quad h = \left[18432 + 71{,}9\left(t + \frac{45^0 - \varphi}{52}\right)\right]\log\frac{B}{b} \quad ,
$$

welche hinreichend genau ist zwischen 10^0 und 80^0 Breite und 0^0 und 20^0 C, und für welche Tabellen herausgegeben worden sind; endlich die einfachste und das Rechnen mit Logarithmen ersparende Formel von BABINET:

$$
(5)\quad h = 16002(1 + 0{,}0039\,t)\frac{B-b}{B+b}(1 + 0{,}0026\cos 2\varphi) \quad ,
$$

welche für kleinere Höhenunterschiede (unter 800 m) bis auf 1 m theoretisch genau ist. Auch sei bemerkt, daß VOGLER und FELD[1] eine graphische Methode und entsprechende Tafeln zur Höhenbestimmung herausgegeben haben, und daß PERNTER für seine Tafeln die Konstanten in Tabellen zusammengestellt hat.

Hinsichtlich des Barometers vergleiche man den Artikel „Aërostatik". Übrigens kann man das gewöhnliche Barometer mit Vorteil ersetzen durch das Hypsothermometer oder Thermobarometer, das aus einem nur von 80 bis 102^0 reichenden und in hunderstel Grad geteilten Thermometer und einem Siedegefäß besteht; mit Hilfe der Beziehung zwischen Siedetemperatur und Luftdruck kann man die Höhe berechnen. — Im übrigen sei auf die neueste zusammenfassende Schrift von LIZNAR über die barometrischeHöhenmessung verwiesen.[2]

Krumme Linien. Auf den verschiedensten Gebieten ergibt sich die Notwendigkeit, gekrümmte Strecken auszuwerten. Für solche, deren Gestalt geometrisch festgelegt ist, läßt sich die Länge häufig berechnen, d. h. auf gerade Strecken zurückführen. So ist für folgende Kurven die Strecke s durch die beistehenden Formeln gegeben:

[1] VOGLER u. FELD, Graphische Barometertafeln. Braunschweig 1880. — [2] J. LIZNAR, Die barometrische Höhenmessung. Leipzig und Wien 1904.

1. Kreisbogen:

(6) $$s = \alpha r$$

(oder, wenn α in Winkelmaß ausgedrückt ist:

(7) $$s = \frac{\alpha r \pi}{180}\Big) \quad .$$

2. Ganze Ellipse:

(8) $$s = \pi(a + b)\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \frac{1}{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \dots\right] \quad ;$$

die eckige Klammer hat folgende Werte:

$\left(\frac{a-b}{a+b}\right) =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$=$	1,0000	1,0025	1,0100	1,0226	1,0404	1,0635
$\left(\frac{a-b}{a+b}\right) =$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$=$	1,0922	1,1267	1,1677	1,2155	1,2732 .	

3. Parabelbogen vom Scheitel bis zum Punkte x, y:

(9) $$s = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}}\left(1 + \frac{2x}{p}\right) + \log\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}}\right)\right] \quad .$$

4. Zykloidenbogen von der Spitze aus:

(10) $$s = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 4r - 2\sqrt{2r(2r - y)} \quad .$$

5. Kettenlinie vom tiefsten bis zum Punkte x (Neigung τ):

(11) $$s = \frac{\beta}{2}\left(e^{x/\beta} - e^{-x/\beta}\right) = \beta \operatorname{tg} \tau \quad .$$

Was die empirische Messung angeht, so kann man in manchen Fällen die Kurve einem Bandmaße, das man an sie anlegt, zugänglich machen. In allen anderen Fällen muß man sich eines besonderen Kurvenmessers bedienen, wie solche in den verschiedensten Formen und den verschiedensten Bedürfnissen angepaßt konstruiert worden sind; es sei besonders auf die eigentlich für kartographische Zwecke gebauten, aber auch für physikalische geeigneten Meßrädchen hingewiesen. Bei den feineren Apparaten dieser Art hält man sich entweder an die Tangenten oder an die Normalen der vorliegenden Kurve, auch noch andere Ideen sind verwirklicht worden; es muß aber an diesem Hinweis genügen.

Messung von Flächen.

Planimeter. Die zur mechanischen Ausmessung ebener Flächen, wie sie auf dem Papier oder ähnlichen Unterlagen in mäßigen Ausdehnungen vorliegen, dienenden Apparate heißen Planimeter oder Integratoren oder Integraphen. Die ältesten derartigen Instrumente sind die von Ernst in Paris (1836), von Wetli in Zürich (1849), das von Hansen in Gotha verbessert wurde und als Linearplanimeter lange Zeit überwiegend in Gebrauch war, bis es durch das Polarplanimeter von Amsler-Laffon in Basel (1856) in den Hintergrund gedrängt wurde. Letzteres besteht aus zwei durch eine Gleitstelle verbundene Stangen; das Ende der einen wird fest aufgesetzt, mit dem Ende der anderen wird die

Kontur der Fläche umfahren; hierbei führt eine Rolle auf der Ebene Drehungen und Gleitungen aus, und an einem Zählwerk kann man den Flächeninhalt bis auf einen vom Maßstab oder der Maßeinheit abhängigen Faktor direkt ablesen. Das Instrument wird von CORADI in Zürich in verschiedenen Formen und Größen, mit entsprechender Genauigkeit, hergestellt. Das Prinzip ist später von ABDANK-ABAKANOWICZ auch zur Lösung der Aufgabe — von der die obige ein spezieller Fall ist — zu einer gegebenen Kurve die Integralkurve mechanisch zu finden, benutzt worden. Endlich ist von PRYTZ ein erstaunlich einfaches und doch, wie es scheint, recht genaues Planimeter angegeben worden; es besteht einfach aus einem an einem Ende zu einer Spitze, am anderen zu einer Schneide umgebogenen Stahlstäbchen; die Spitze wird von dem ungefähren Schwerpunkte der Fläche aus nach irgend einem Punkte ihrer Kontur, dann um diese ganz herum und schließlich nach dem Ausgangspunkte zurückgeführt; der Abstand des Endortes der Schneide vom Anfangsorte, multipliziert mit dem Abstand zwischen Spitze und Schneide gibt die Fläche — offenbar reduziert auf ein Rechteck aus jenen beiden Längen als Seiten.[1]

Flächenausmessung. In Ermangelung eines Planimeters muß man die Ausmessung von Flächen vornehmen, indem man sie in Quadrate teilt; man verzeichnet deren Netz entweder direkt auf der Fläche oder legt eine mit ihm versehene Glasplatte darüber; die ganzen, von der Fläche eingeschlossenen Quadrate muß man reihenweise abzählen, die von der Kontur durchschnittenen nach innen gelegenen Bruchteilen abschätzen; im ganzen wird natürlich das Verfahren desto genauer, je feiner das Netz ist und je mehr man sich auf die Abschätzung eingeübt hat.

Wägung. Eine indirekte Methode besteht darin, daß man — wo dies zulässig ist — die zu messende Fläche ausschneidet, wägt und mit einem, aus demselben Papier oder Material ausgeschnittenen Quadrate, das man ebenfalls wägt und dessen Seite man mißt, vergleicht; oder man kopiert die Fläche in einem Bleche oder einer Scheibe von bekannter, überall gleicher Dicke und dividiert durch Dichte und Dicke.

Flächenberechnung. Bei einer großen Zahl mehr oder weniger regelmäßiger Flächen kann man den Flächeninhalt aus einer oder einigen bei ihr vorkommenden Lineardimensionen berechnen. Einige der wichtigsten derartigen Fälle sind in den folgenden Formeln wiedergegeben.

1. Dreieck (a, b, c Seiten, h Höhe, $2s$ Seitensumme, ϱ und r Radien des ein- und umschriebenen Kreises, α, β, γ Winkel, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ Koordinaten der Eckpunkte):

a) schiefwinklig:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} F &= \frac{a \cdot h}{2} = \varrho \cdot s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4r} \\ &= ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ &= \varrho^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)] \end{aligned}\right. ,$$

[1] Vgl. AMSLER-LAFFON, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts. Schaffh. 1856. — Neuere Konstruktionen: Ztschr. f. Instrumentenk. **4.** 11. 1884. — TRUNK, Die Planimeter, deren Theorie, Praxis und Geschichte. Halle 1865. — ABDANK-ABAKANOWICZ, Les Intégraphes. Paris 1886. — Ferner zu PRYTZ: O CHWOLSON, Lehrb. d. Physik **1.** 315. — F. W. HILL, Phil. Mag. (5) **38.** 265. 1894. — M. MAFIOTTI, Ztschr. f. Instrumentenk. **16.** 341. 1896. — Ferner über HAMANNs Planimeter: E. HAMMER, ibid. **16.** 361. 1896.

b) rechtwinklig (a Hypotenuse):

(13) $$J = \frac{bc}{2} = \frac{ab}{2}\cos\beta = \frac{ab}{2}\sin\gamma = \frac{b^2}{2}\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{4}a^2\sin 2\gamma \quad ,$$

c) gleichschenklig:

(14) $$J = \frac{b^2}{2}\sin\alpha = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\beta \quad ,$$

d) gleichseitig:

(15) $$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3} = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3} = 3\varrho^2\sqrt{3} \quad .$$

2. Viereck:

(16) a) Trapez : $F = h \cdot \frac{b+d}{2}$,

(17) b) Parallelogramm : $F = h \cdot b = ab\sin\varphi$,

(18) c) Rechteck : $F = a \cdot b$,

(19) d) Quadrat : $F = a^2$.

3. Reguläre Polygone (n Zahl der Ecken):

(20) $$F = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = n\varrho^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \quad .$$

Speziell für

	$n = 3$	4	5	6	8
$F = a^2 \cdot$	0,4330	1,0000	1,7205	2,5981	4,8284
$F = r^2 \cdot$	1,2990	2,0000	2,3776	2,5981	2,8284

4. Kreis:

(21) Vollkreis: $F = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}$,

(22) Sektor : $F = \frac{r^2\alpha}{2} = \frac{br}{2}$ (α = Winkel, b = Bogen) ,

(23) Segment: $F = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$.

5. Kegelschnitte:

a) Parabelsegment (Sehne ⊥ Achse, Endpunkt xy):

(24) $$F = \tfrac{4}{3}xy \quad ,$$

b) Ellipsenzone (∥ kleinen Achse, Breite x):

(25) $$F = \frac{b}{a}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right) \quad ,$$

(26) Ganze Ellipse: $F = ab\pi$,

c) Hyperbelsegment (Sehne ⊥ x-Achse):

(27) $$F = xy - ab\log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \quad .$$

6. Krumme Flächen:

(28) a) Kugel: $F = 4\pi r^2 = \pi d^2$,

(29) b) Kugelzone: $F = 2\pi rh$,

c). Ellipsoid [a, b, c Achsen, $\sigma = \arc\sin\left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - c^2}\right)$, F und E die elliptischen Integrale]:

(30) $$F = 2c\left[bE(\sigma)\operatorname{tg}\sigma + bF(\sigma)\operatorname{ctg}\sigma + c\right] \quad .$$

7. Reguläre Polyeder:

(31) $$\left.\begin{aligned} &\text{a) Tetraeder} &: \quad & F = a^2\sqrt{3} &&= 1{,}732 \\ &\text{b) Würfel} &: \quad & F = 6a^2 &&= 6{,}000 \\ &\text{c) Oktaeder} &: \quad & F = 2a^2\sqrt{3} &&= 3{,}464 \\ &\text{d) Dodekaeder} &: \quad & F = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} &&= 20{,}646 \\ &\text{e) Ikosaeder} &: \quad & F = 5a^2\sqrt{3} &&= 8{,}660 \end{aligned}\right\} a^2 \quad .$$

Volumenmessung.

Wir kommen nun zur Messung dreidimensionaler Raumgebilde, der Volumina von Körpern. Es ist hierfür eine Reihe von Methoden ausgearbeitet worden, von denen je nach den Umständen die eine oder andere besondere Vorzüge hat; sie können hier nur ganz kurz aufgeführt werden.

1. Die Messung mit dem Pyknometer. Das Pyknometer, von dem im Artikel „Dichte" noch die Rede sein wird, ist ein Gefäß von genau definiertem Rauminhalt, also bestehend aus einem Glaskolben mit angeschmolzener oder eingeschliffener, mit Skala versehener Röhre. Das Volumen einer Flüssigkeit kann man ohne weiteres bestimmen; für feste Körper, seien es massive oder pulverförmige, ermittelt man das von ihnen verdrängte Flüssigkeitsvolumen, sei es direkt, sei es durch Wägung; als Flüssigkeit dient Wasser, nur in Fällen, wo sich dieses verbietet, weil es den Körper angreift oder von ihm absorbiert wird, eine andere Flüssigkeit. Hierbei sind verschiedene Korrektionen anzubringen bezw. Vorsichtsmaßregeln zu ergreifen; erstens wegen der Temperatur, zweitens wegen verunreinigender oder anhaftender Massen, drittens wegen der Deformationen des Pyknometers, viertens wegen der Kapillarwirkungen. Hierdurch wird die an sich sehr einfache Schlußformel außerordentlich verwickelt, es sei daher auf Weinstein verwiesen.[1]

2. Die hydrostatische Wägung. Diese Methode läßt sich in mehreren verschiedenen Varianten ausführen, von denen folgende die vorzüglichste ist. Man bestimmt das Gewicht des Körpers in Wasser, indem man ihn an die Wagschale anhängt und in Wasser tauchen läßt; dann nimmt man ihn weg und gleicht durch Gewichte, die man auf dieselbe Schale legt, wieder aus. Oder man wägt den Körper in Wasser und in Luft. Oder endlich, man wägt ein Gefäß mit Wasser einmal für sich, dann nochmals, wenn der von einem festen Stativ herabhängende Körper hineintaucht. In allen Fällen sind zahlreiche Korrektionen anzubringen; namentlich bringt der herausragende Anhängedraht mit dem anhaftenden Wasser eine Unsicherheit hinein, die man auf verschiedenen Wegen, am besten nach LUMMER dadurch beseitigt, daß man den Draht durch ein mit einem Benzinöltropfen gefülltes Röhrchen gehen läßt, das seinerseits unten in das Wasser taucht.[2]

3. Das Volumenometer. Diese Methode beruht auf der Ausdehnung einer abgeschlossenen Luftmenge, die verschieden ausfällt, je nachdem die Luft den

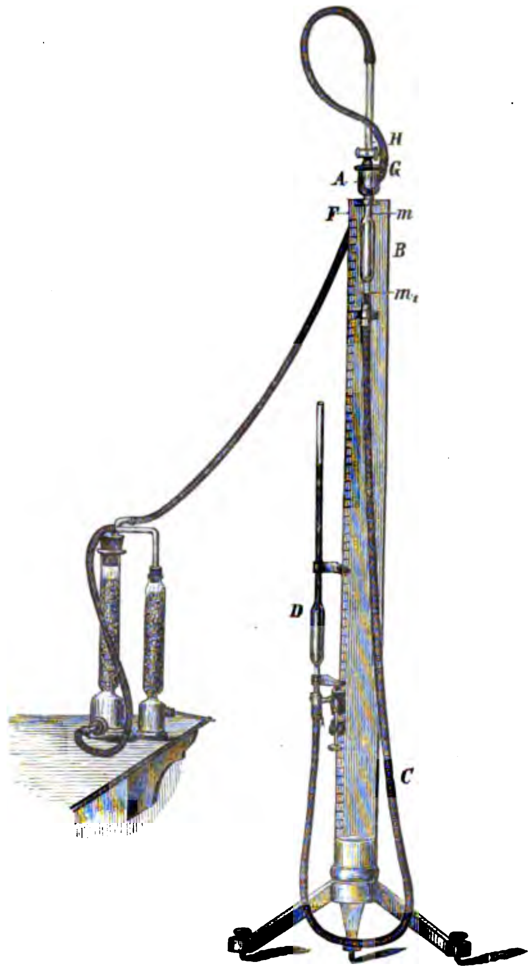
[1] B. WEINSTEIN, Maßbest. **2**. 514. — [2] B. WEINSTEIN, Maßbest. **2**. 502. — O. LUMMER, Verh. phys. Ges. Berlin 1887.

ganzen Raum erfüllt oder aber ein fester Körper sich daran beteiligt. Je nachdem man die eigentliche Bestimmung durch Wägung oder Druckmessung ausführt, kann man zwei Arten derartiger Apparate unterscheiden, wozu dann noch die verwandten sogenannten Stereometer kommen. Im einzelnen gibt es zahlreiche Formen, so die von SAY, LESLIE, KOPP, REGNAULT, RÜDORFF, PAALZOW, OBERBECK u. A.

Das REGNAULTsche Volumenometer ist in Figur 21 in der von MAX KOHL in Chemnitz gebauten Form abgebildet. Die beiden Röhren hängen durch den



Figur 21.



Figur 22.

unteren Hahn derart zusammen, daß man beliebig Quecksilber in beide einfüllen, aus einer oder der anderen oder aus beiden ablassen kann; die rechte enthält eine Kugel, die mit den Röhrenstücken bis zur oberen und unteren Marke das Volumen v bildet; über der oberen Marke steht sie durch das Seitenrohr mit dem Hauptgefäß in Verbindung, und dies ist das Volumen V. Es wird nun bis zur unteren oder oberen Marke gefüllt und an der linken Röhre der Druck H bezw. $H - h$ abgelesen; nach dem BOYLEschen Gesetz ist dann

$$VH = (V + v) \cdot (H - h) \quad . \tag{32}$$

Die gleiche Messung wird nun nach Einbringung des zu voluminisierenden Körpers in die große Kugel wiederholt und die Gleichung

$$(V - x) H' = (V + v - x) \cdot (H' - h') \tag{33}$$

erhalten. Man kann, statt bei vermindertem, auch bei erhöhtem Drucke beobachten und erhält dann zwei ähnliche Gleichungen, die man mit den obigen verbinden kann; für x ergibt sich dann ein Mittelwert.

Eine etwas andere Form hat das Volumenometer von PAALZOW; es ist in Figur 22 abgebildet und besteht im wesentlichen aus dem Gefäß A mit dem luftdicht aufsetzbaren Deckel G, dem Zusatzraume B zwischen den Marken m und m', dessen Volumen a bekannt ist, dem Schlauch C und dem mit seiner Hilfe verschiebbaren Schenkel D, welcher somit den Druck zu variieren gestattet; im übrigen erläutert die Figur den Apparat. Die Formel wird am einfachsten, wenn man den durch Verschiebung von D in A (dessen Deckel vorher geschlossen ist) entstehenden Unterdruck mit p oder p' bezeichnet, je nachdem es sich um den Versuch ohne Körper oder um den Versuch mit hineingeworfenem Körper handelt; ist dann b der Barometerstand, so ist das Volumen des Körpers

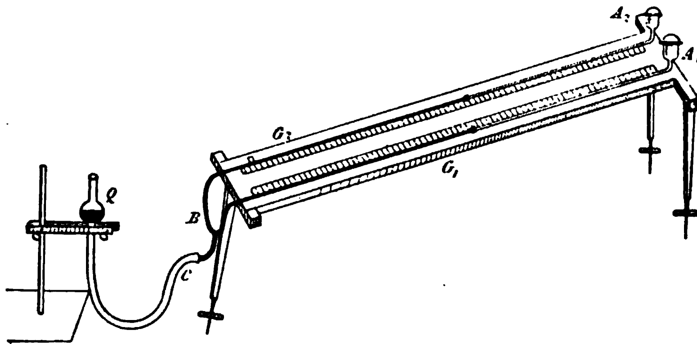
$$v_0 = a \left(\frac{p}{b - p} - \frac{p'}{b - p'} \right) \tag{34}$$

und folglich das spezifische Gewicht s (um das gleich hier zu erwähnen)

$$s = \frac{g}{v_0} [1 + (\alpha - \beta) t] \quad , \tag{35}$$

wo g das absolute Gewicht des Körpers, t die Temperatur und α und β die Ausdehnungskoeffizienten von Körper und Glas sind.

Das Volumenometer von OBERBECK ist in Figur 23 dargestellt. A_1 und A_2 sind die beiden Gefäße, G_1 und G_2 die Röhren mit Skalen, in die sie aus-



Figur 23.

laufen und die sich durch B und C zu dem Quecksilbergefäß Q vereinigen; Q wird bei offenen Gefäßen so hoch gestellt, daß das Quecksilber in beiden Röhren bis nahe an die Gefäße reicht; dann werden die Gefäße mit den Deckeln verschlossen, Q gesenkt, das Quecksilber weicht zurück, und man hat zwei gleiche Räume; bringt man jetzt in A_1 den zu messenden Körper, so erhält man zwei verschiedene Skalenablesungen s_1 und s_2 und hieraus:

$$V = a \frac{s_1 - s_2}{s_1} \quad ; \tag{36}$$

a wird durch einen Probekörper von bekanntem Volumen ein für allemal ermittelt. Natürlich ist der Apparat, wenn er nicht mit äußerster Präzision ge-

arbeitet ist und gehandhabt wird, nur zu annähernden Messungen und Demonstrationen verwendbar.[1]

Von anderen neueren Volumenometern sind zu erwähnen die von TACKE (für größere Proben, namentlich Bodenproben, Prinzip des REGNAULTschen Apparats), KALECSINSZKY (PAALZOWsche Form), STOUD und MYERS, GEE und HARDEN (zwei verschiedene Formen), ÅNGSTRÖM (Vergleichung mit dem bekannten, annähernd gleichen Volumen eines anderen Körpers), und namentlich das von ZEHNDER; dieses letztere, mühselig zu eichende, aber bequem und genau funktionierende Instrument ist im wesentlichen ein Barometer, in dessen Vakuum ein Fläschchen mit dem Körper nebst der außerdem darin enthaltenen Luft gebracht wird; es ist für sehr kleine Mengen fester, pulverförmiger oder flüssiger Stoffe anwendbar. In neuester Zeit hat dann ZEHNDER auch noch ein Verfahren beschrieben, das für große Temperaturintervalle gute Dienste leistet.[2]

4. Das Zehndersche Pyknometer. Es vermeidet die Nachteile des gewöhnlichen Pyknometers dadurch, daß der Körper zuerst in Luft beobachtet und dann durch Wasser, unter Wahrung der Luftmenge, ersetzt wird; man bringt den Körper, nachdem man ihn gewogen hat, in das Pyknometer taucht dieses in Wasser, öffnet es in umgekehrter Stellung, so daß der Körper herausfällt, die Luft aber zurückbleibt, und Wasser eindringt. Das Verfahren hat den großen Vorzug, daß es, wie die volumetrischen, auch auf Stoffe anwendbar ist, die in Wasser löslich sind.[3]

5. Eine besondere Aufgabe bietet das Ausmessen des inneren Volumens von Hohlkörpern dar. Man verwendet hier fast allgemein die Methode des Anfüllens mit Flüssigkeit und Wägens vor und nach der Anfüllung; man muß dann noch das spezifische Gewicht oder Volumen der Flüssigkeit bei der betreffenden Temperatur kennen; mit jenem muß man dividieren, mit diesem multiplizieren. Als Flüssigkeit dient entweder Wasser oder Quecksilber; natürlich sind auch hier die Fehlerquellen elastischen und kapillaren Ursprungs zu berücksichtigen. — Bei Röhren handelt es sich um die Aufgabe der Kalibrierung, d. h. der Ermittelung, ob und inwieweit das Lumen überall dasselbe ist, bezw. welcher Volumenwert den einzelnen Längenteilen entsprechen; man bedient sich dazu eines Quecksilberfadens, den man in der Röhre nach und nach verschiebt — ein Verfahren, das besonders in der Thermometrie von Bedeutung ist und dort (Band **3**) behandelt wird.

6. Kehren wir nunmehr wieder zu dem äußeren Volumen von Vollkörpern zurück, so bleibt uns noch die direkte Methode der Ausmessung übrig. Bei unregelmäßig gestalteten Körpern ist dieses Verfahren recht kompliziert und, wenn es einigermaßen genau werden soll, zeitraubend; man muß, indem man die größte Dimension des Körpers als Längsachse wählt, die Dicke der einzelnen Querschichten, in die man ihn sich zerlegt denkt, messen und hieraus zunächst den Querschnitt an der Meßstelle, sodann, indem man die einzelnen Schichten als Zylinder oder Pyramiden oder Kegelschichten betrachtet, die einzelnen Volumina, durch deren Summation schließlich das ganze Volumen ermitteln. Man wird daher dieses Verfahren nur da anwenden, wo alle anderen aus bestimmten Gründen unausführbar sind.

---

[1] SAY, GILB. Ann. **2.** 1897. — LESLIE, Ann. of Phil. **64.** — H. O. REGNAULT, Ann. Chim. Phys. (3) **14.** 1845; POGG. Ann. **66.** — H. KOPP, Ann. Chem. Pharm. **35.** — F. RÜDORFF, WIED. Ann. **6.** 288. 1879. — A. PAALZOW, ibid. **13.** 332. 1881. — A. OBERBECK, ibid. **67.** 209. 1899. — [2] BR. TACKE, Ztschr. f. angew. Chem. p. 39. 1893; Ztschr. f. Instrumentenk. **13.** 429. 1893. — A. v. KALECSINSZKY, Ztschr. f. analyt. Chem. **32.** 319. 1893. — J. E. MYERS, Phil. Mag. **36.** 195. 1893. — W. W. H. GEE und A. HARDEN, Stud. Lab. Owens Coll. **1.** 195. 1893. — K. ÅNGSTRÖM, Öfv. kgl. Wet. Akad. Vörhandl. Stockh. **52.** 643. 1895. — L. ZEHNDER, DRUDES Ann. **10.** 40. 1903; **15.** 328. 1904. — [3] L. ZEHNDER, WIED. Ann. **29.** 249. 1886.

7. Bei regelmäßig gestalteten Körpern kann man das Volumen aus den Lineardimensionen nach mehr oder weniger einfachen Formeln berechnen, und es seien hier einige der wichtigsten dieser Formeln zusammengestellt.

(37)	Rechtwinkliges Parallelepipedon .	$a b c$.
(38)	Schiefwinkliges Parallelepipedon .	$a b c \sin\alpha \sin\beta$.
(39)	Pyramide (B Basis)	$\frac{B h}{3}$.
(39a)	Pyramide, Stumpf (D Dach) . .	$\frac{h}{3}(B + \sqrt{BD} + D)$.
(40)	Zylinder	$\pi r^2 h$.
(41)	Kegel (gerade)	$\frac{\pi}{3} r^2 h$.
(42)	Kegelstumpf	$\frac{\pi}{3} h (r^2 + r r_1 + r_1^2)$.
(43)	Kugel	$\frac{4\pi}{3} r^3$.
(44)	Kugelzone (ϱ, ϱ_1 Kreisradien) . .	$\frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + 3\varrho_1^2 + h^2)$.
(45)	Kugelsegment	$\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$.
(46)	Ellipsoid	$\frac{4\pi}{3} a b c$.
(47)	Tetraeder	$\frac{1}{12}\sqrt{2}\, a^3 = 0{,}1179\, a^3$.
(48)	Würfel	$a^3 = 1{,}0000\, a^3$.
(49)	Oktaeder	$\frac{1}{3}\sqrt{2}\, a^3 = 0{,}4716\, a^3$.
(50)	Dodekaeder	$\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3 = 7{,}663\, a^3$.
(51)	Ikosaeder	$\frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})\, a^3 = 2{,}1817\, a^3$.

Festlegung von Richtungen.

Von gleicher Bedeutung für die Physik wie die Längen-, Flächen- und Volumenmessungen einerseits sind die Richtungs- und Winkelbestimmungen andererseits. Was zunächst die Feststellung und Festlegung von Richtungen betrifft, so kommen hier im wesentlichen die Vertikal- und die Horizontalrichtung in Betracht. Sonst wäre noch die Richtung nach Norden oder Süden zu erwähnen, über deren Ermittelung man in den astronomischen Büchern sowie — insofern der Kompaß benutzt wird — im Artikel „Magnetische Messungen“ dieses Warkes (Bd. 5. 97) das Nötige findet.

Bestimmung der Vertikale. Hierzu dient das bekannte Senk- oder Bleilot, bestehend aus einem biegsamen Faden und einem an ihm hängenden schweren Körper; man bringt die betreffende gerade Linie an einer Stelle mit dem Lot in Berührung und richtet sie so lange, bis sie durchweg mit ihr koinzidiert; für

genaue Zwecke muß man dies bei verschiedenen Lagen der Körper gegeneinander wiederholen.

Von optischen Methoden hat, wie es scheint, nur eine einzige größere Bedeutung erlangt, nämlich die Methode der Koinzidenz des von einem Quecksilberspiegel reflektierten Strahles mit dem auffallenden; der Spiegel muß zur Vermeidung kapillarer Krümmung je nach der verlangten Genauigkeit eine beträchtliche Größe haben, die optische Anordnung im einzelnen wird sich nach den besonderen Verhältnissen richten. Wie bei diesem Verfahren, so wird auch bei anderen die eigentliche Bestimmung der Vertikalen vermieden und auf die der Horizontalebene zurückgeführt; so immer da, wo man Libellen benutzt und die Rechtwinkligkeit der zu prüfenden Richtung gegen die Ebene, auf die man die Libelle setzt, annimmt.

Zur Verfolgung kleiner Veränderungen der Lotlinie wird, außer dem eben genannten Quecksilberspiegel (das Quecksilber kann natürlich, wo dies angezeigt erscheint, auch durch eine andere Flüssigkeit[1] ersetzt werden), ein schon 1832 von HENGLER ersonnener Apparat benutzt, der Horizontalpendel heißt und seitdem namentlich von REBEUR-PASCHWITZ sehr vervollkommnet worden ist. Es ist sozusagen eine Tür — in Wahrheit ein dreieckiges Liniensystem —, die bei vertikaler Achse im indifferenten Gleichgewicht ist, bei abweichender Richtung der Achse jedoch eine bestimmte Einstellung zeigt; die Änderungen dieser Einstellung lassen sich nun mittels Spiegelmethode bis zu äußerster Feinheit ablesen und so die Richtungsschwankungen der Achse verfolgen, sei es von Zeit zu Zeit, sei es fortlaufend mit Benutzung eines Registrierverfahrens. Das Nähere findet man im Artikel „Pendel“ sowie in der seismischen Literatur.[2]

Eine Spezialität innerhalb des in Rede stehenden Problems bildet die Seelotung; es handelt sich hier eigentlich um eine Streckenmessung, aber unter der Bedingung der Vertikalität dieser Strecke, und deshalb gehört die Aufgabe hierher. Bei den gewöhnlichen, an der Leine ins Meer herabgelassenen Loten oder Bathometern läßt sich, trotz vielfach angebrachter Schutz- und Kontrollvorrichtungen, die Vertikalität nie exakt verbürgen, die Angaben werden daher immer nur die obere Grenze angeben; für große Tiefen werden sie überdies unbrauchbar. Dasselbe gilt von den Sonden oder Auslösungsloten, die in mannigfacher Form konstruiert worden sind. Dagegen ist die THOMSONsche Patentlotmaschine, obwohl sie ebenfalls am Seile hinabgelassen wird, doch von dessen Länge und Schiefstellung völlig unabhängig, da sie die Tiefe aus dem Drucke erschließen läßt. Zu diesem Zwecke besteht der Apparat im wesentlichen aus einer unten offenen, an der Innenwand mit chromsaurem Silber belegten Röhre; je tiefer sie hinabgelangt, desto höher steigt das Seewasser in ihr auf und bleicht die Wandfärbung; die Aichung muß natürlich wegen der Unsicherheit der Daten empirisch erfolgen. — Endlich ist des theoretischen Interesses halber — denn die praktische Bedeutung des Apparats scheint den in ihn gesetzten Hoffnungen nicht zu entsprechen — das Bathometer von WILLIAM SIEMENS zu nennen, das auf der Verminderung der Schwere über dem Meere, desto stärker, je tiefer es ist, beruht. Die untere Öffnung einer mit Quecksilber gefüllten Röhre ist durch ein elastisches Stahlblech geschlossen; je nach dem Schweredruck gibt dieses mehr oder weniger nach, und bringt dadurch in der Kapillarröhre, in die das Gefäß oben ausläuft, das Quecksilber zum Steigen oder Fallen. Begreiflicherweise gibt das Instrument weniger die Tiefe an der Untersuchungsstelle, als vielmehr das Mittel aus einem

[1] Da bei der Unruhe in großen Städten u. s. w. der Quecksilberspiegel unbrauchbar wird, ist vorgeschlagen, einen festen Spiegel auf dem Quecksilber schwimmen zu lassen; vgl. J. PERCHOT und W. EBERT, C. R. **125**. 1009. 1897. — [2] HENGLER, DINGL. polytechn. Journ. 1832. — v. REBEUR-PASCHWITZ, Der Horizontalpendel. Halle 1882; Beiträge zur Geophysik. **2**. 1895. — HECKER, Ztschr. f. Instrumentenk. **16**. 2. 1896; **19**. 261. 1899; Beiträge zur Geophysik. **4**. 64. 1899.

gewissen Umkreis; durch empirische Graduierung kann man aber unter gewissen Annahmen auch wahre Ablesungen erhalten.[1]

Bestimmung der Horizontale. Hierzu dient als beinahe einziges Instrument die Libelle oder das Niveau. Es ist ein gänzlich geschlossenes, an der Oberseite leicht konvexes mit Äther oder einer anderen leicht beweglichen Flüssigkeit nahezu angefülltes Gefäß, so daß nur Raum für eine kleine Luftblase bleibt; das Gefäß ist aus Glas, hat aber an den Seiten und unten eine Fassung und unten außerdem eine Bodenplatte, die so gerichtet ist, daß, wenn sie horizontal steht, die Luftblase genau in der Mitte des Gefäßes erscheint. Je nach der Form des Gefäßes unterscheidet man Röhrenlibellen und Dosenlibellen; jene haben nur einen Freiheitsgrad und dienen zur Horizontalisierung von Linien, diese haben zwei Freiheitsgrade und dienen zur Horizontalisierung von Ebenen; natürlich kann man zu letzterem Zwecke auch Röhrenlibellen verwenden, indem man sie nacheinander in zwei zueinander senkrechten Richtungen aufstellt. Die Röhrenlibelle ist gewöhnlich mit einer Teilung versehen, die, nach vorangegangener Aichung, auch zur Beurteilung der Abweichung von der Horizontalität dienen kann. Bei der Benutzung muß man verschiedene Vorsichtsmaßregeln ergreifen, unter anderm auch, wenn angängig, die Libelle umkehren. Eine Libelle ist desto empfindlicher, je größer der Krümmungsradius ihrer Oberfläche ist; eine Röhrenlibelle z. B., die für eine Neigung von 5'' einen Ausschlag von 1 mm geben soll, muß einen Radius von rund 41 m haben, für andere Fälle in entsprechendem linearen Verhältnis. Näheres über Theorie und Benutzung der Libelle findet man bei WEINSTEIN und GOEDSEELS; man vergleiche ferner, hinsichtlich der Veränderungen und der Dauerhaftigkeit der Libellen, Arbeiten von RUD. WEBER und MYLIUS.[2] — Für größere Strecken kann die Horizontalität leicht, aber wenig genau durch Anvisieren mit der Wasser- oder Kanalwage geprüft werden, die aus einem meterlangen Horizontalrohr mit zwei vertikalen Ansatzrohren an den Enden besteht und mit Wasser gefüllt ist.

Messung von Winkeln.

Kreisteilung. Zu fast allen Methoden der Winkelmessung bedarf man der Kreisteilung, d. h. des in bestimmte Teile, z. B. in Grade oder halbe Grade oder fünftel oder zehntel Grade oder Minuten u. s. w. geteilten Kreises. Zu dessen Herstellung dient die Kreisteilungsmaschine, die für die Winkelmessung dieselbe Rolle spielt wie die Längenteilmaschine (p. 96) für die Längenmessung. Die Kreisteilmaschine setzt den Besitz einer möglichst genauen Kreisteilung bereits voraus, mindestens aber die Kenntnis des ganz genauen mechanischen Wertes der Teilungseinheit. Auf dem Normalkreise wird der zu teilende mit gemeinsamer Achse befestigt, beide zusammen werden mit Hilfe einer in das Zahnwerk am Rande der Normalscheibe eingreifende Schraube ohne Ende fortbewegt, und mit Hilfe eines Mikroskops wird jeder Teilstrich der Normalscheibe mittels des Stichels auf der anderen kopiert; oder — wenn nur die Einheit bekannt ist, es wird die Schraube genau um diese Einheit vorgedreht, wozu eine an ihr angebrachte Trommel mit Teilung dient. Im einzelnen hat man der Maschine verschiedene Formen gegeben; die vorzüglichsten sind diejenigen, welche völlig automatisch arbeiten.[3]

---

[1] S. GÜNTHER, Die bathometrischen Methoden, Ztschr. f. Instrumentenk. **13.** 1883; Handb. d. naut. Instr. (herausg. v. d. preuß. Adm.) Berlin 1882. — W. THOMSON, Rep. Brit. Ass. 1872. — WILL. SIEMENS, vgl. DINGL. polytechn. Journ. **43.** 221. — [2] B. WEINSTEIN, Handb. d. Maßbest. **2.** 90. 120. — RUD. WEBER, Chem. Ber. **21.** 3448. 1888. — F. MYLIUS, Ztschr. f. Instrumentenk. **8.** 267. 1888. — P. I. E. GOEDSEELS, Abhandlung über die Libelle. Brüssel 1900. — [3] Die erste Kreisteilmaschine rührt vom Uhrmacher HINDLAY in York her (1740), die erste wirklich in Gebrauch gekommene von RAMSDEN (1774).

Winkelmesser. Sextant. Theodolit. Mit Hilfe der Kreisteilmaschine sind nun die verschiedenartigen Apparate, deren man sich zur Winkelmessung bedient, hergestellt. Über die einfachsten unter ihnen, den Transporteur u. s. w., bedarf es keiner Bemerkungen; es sei denn, daß man auch hier mit der Hauptteilung einen Nonius, den Kreisnonius verbindet, der eine geeignete Anzahl von Teilen, im Verhältnis zu der der Hauptteilung hat, z. B. 29 auf 30, wenn die Hauptteilung halbe Grade zeigt, der Nonius somit Minuten. Die feineren Apparate beruhen sämtlich auf optischer Beobachtung. Unter ihnen ist der einfachste der Sextant oder Spiegelsextant. Er besteht aus zwei um etwa 60° divergierende Radien nebst dem verbindenden, geteilten Kreisbogen, sowie einen von einem zum andern drehbaren Arm mit einem auf der Drehachse senkrecht zur Ebene des Instruments befestigten Spiegelchen; ein zweiter Spiegel sitzt, ebenso orientiert, auf dem Endradius etwa in der Mitte; er ist so gerichtet, daß er mit dem ersten parallel steht, wenn der bewegliche Arm auf null steht. Am Anfangsradius sitzt ein Fernrohr, mit dem man teils durch den durchsichtigen Teil des zweiten Spiegels hindurch nach dem einen der Punkte, deren Sehwinkel ermittelt werden soll, teils nach dem von beiden Spiegeln gelieferten Spiegelbilde des anderen visiert; dreht man nun den Arm so, daß beide Bilder zusammenfallen, so hat man in der Ablesung die Hälfte des gesuchten Winkels. Übrigens gibt es auch Instrumente mit größerem oder kleinerem Kreisbogen (Oktanten u. s. w.).



Figur 24.

Allgemeiner verwendbar ist der Theodolit; man wird ihn immer anwenden, wo der einfache Sextant nicht ausreicht; während man aber den Sextanten frei in der Hand halten kann, erfordert der Theodolit feste und sorgfältige Aufstellung. Seine wesentlichen Bestandteile sind eine horizontale und eine vertikale Kreisteilung behufs Messung von Winkeln in horizontalen und vertikalen Ebenen; jeder Kreis ist mit einem drehbaren Fernrohr versehen, eventuell dient für beide Kreise ein und dasselbe Fernrohr; dazu kommen Libellen, Stellschrauben, Nonien u. s. w. Man richtet das Fernrohr erst auf den einen, dann auf den anderen Punkt und berechnet aus den Ablesungen den Winkel. In Figur 24 ist ein einfacherer Theodolit abgebildet. Kompliziertere haben einen Rahmen zur Sicherung völliger Festigkeit, ferner Mikroskope zum Ablesen der Nonien; auch gibt es solche, mit denen man auch Winkel in geneigten Ebenen ermitteln kann.

Goniometer. Dieser Apparat dient in der Hauptsache zur Messung von Winkeln zwischen Ebenen und findet namentlich in der Kristallographie Anwendung. Das Anlege- oder Kontaktgoniometer besteht einfach aus einem geteilten Halbkreise und zwei durch ein Scharnier verbundenen Stangen, an die man die beiden Ebenen anlegt; die Genauigkeit ist begreiflicherweise mäßig, besonders bei kleinen und nicht bis zur Schnittkante ausgebildeten Flächen. Zu feineren Messungen dient daher das Reflexionsgoniometer. Dabei kann man entweder den Körper drehen, bis der feststehende Lichtstrahl von der zweiten Fläche so wie vorher von der ersten reflektiert wird; oder, bei festem Körper, das Beobachtungsfernrohr so weit drehen, bis man von der zweiten Fläche denselben reflektierten Strahl erhält wie von der ersten; endlich kann man auch das Verfahren

des in sich zurückkehrenden Strahles benutzen. Von den für diese verschiedenen Methoden gebauten, in den Typen sehr zahlreichen Goniometern haben einige eine horizontale, die neueren aber meist eine vertikale Drehungsachse; zu jenen gehören die von WOLLASTON (1809) und MITSCHERLICH, zu diesen die von MALUS, V. v. LANG und WEBSKY. Für kristallographische Spezialzwecke hat man an den Apparaten alsdann noch mancherlei Nebenapparate angebracht und sie demgemäß als Kristallpolymeter bezeichnet; es muß jedoch für sie auf die kristallographische Literatur verwiesen werden.[1]

Raumwinkel. Auf manchen Gebieten spielt — vgl. oben p. 12 — der eigentliche Raumwinkel, d. h. der Ausschnitt aus der Kugelfläche, eine wichtige Rolle; so in der Photometrie und in der Lehre vom Magnetismus. Zu seiner Messung sind verschiedene Apparate angegeben worden; es sei insbesondere auf den Raumwinkelmesser von LEONH. WEBER[2] hingewiesen.

Spiegelablesung. Diese Methode, die zuerst von POGGENDORF 1826 vorgeschlagen, bald darauf von GAUSS ausgebildet worden ist und seitdem in der Physik eine außerordentliche Bedeutung erlangt hat, betrifft die Messung kleiner Winkel, um die sich Richtungen gegen eine Normallage oder gegeneinander drehen. Die Methode ist im Artikel „Strommessung" in der Elektrizitätslehre — Bd. 4. 269 — angeführt; es kann daher zur Vermeidung von Wiederholungen hier nur das Notwendigste angegeben werden.

Die Methode besteht darin, daß man an der Drehungsachse oder an dem Körper, dann aber möglichst nahe der Drehungsachse und mit dieser parallel, einen kleinen Spiegel befestigt, der, wenn der Körper sich in der Gleichgewichtslage befindet, in ein ihm in einiger Entfernung gegenübergestelltes Fernrohr das Spiegelbild einer mit dem Fernrohr verbundenen geradlinigen auf der Drehungsachse senkrechten Skala wirft, und zwar so, daß man den Mittelpunkt der Skala, also, wenn diese 1 m lang und in 100 cm geteilt ist, den Teilstrich 50, gerade im Fadenkreuz des Fernrohrs erblickt; ist die Skala symmetrisch an dem Fernrohr angebracht, so wird hierzu offenbar erforderlich sein, daß die von dem Teilstrich 50 der Skala nach dem Spiegel gezogene Linie mit der Normale denselben Winkel nach oben bilde, wie die auf den Spiegel gerichtete Fernrohrachse nach unten (oder umgekehrt) und daß die Ebene dieser beiden Linien vertikal sei. Je nach den Umständen und Zwecken wendet man auf Holz oder Glas geklebte Papierskalen oder Glasskalen an. Dreht sich nun der Körper, also auch der Spiegel, um den Winkel φ, so wird nicht mehr der Mittelpunkt, oder wie man sagt, der Nullpunkt, sondern derjenige Punkt der Skala im Fadenkreuz abgebildet werden, dessen vom Spiegel reflektierter Strahl mit der Winkelnormale den horizontalen Winkel φ, also mit dem einfallenden Strahle den Winkel 2φ bildet. Ist daher s der Skalenausschlag, d. h. die Differenz zwischen Nullpunkt und dem jetzt im Fadenkreuz erscheinenden Teilstrich, und r der Abstand der Skala vom Spiegel, so hat man

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{s}{r}\,, \qquad \text{also} \qquad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{r}\,.$$

Statt dieser exakten Formel kann man häufig angenäherte benutzen; so kann man, wenn die Ablenkung 6 Grad nicht übersteigt,

$$\varphi = \frac{28^0,\,648}{r}\, s \left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{s^2}{r^2}\right)$$

setzen; bei noch kleineren Ablenkungen kann man das zweite Klammerglied auch noch vernachlässigen und in einfacher Proportionalität zwischen φ und s

[1] Vgl. namentlich: GROTH, Physikal. Kristallographie; ferner: Ztschr. f. Kristallographie, wo auch die neuesten Instrumente von FEDOROW, GOLDSCHMIDT, KLEIN u. s. w. zu finden sind; über das LEISSsche Kristallpolymeter nach KLEIN vgl. auch Ztschr. f. Instrumentenk. 22. 201. 1902. — [2] LEONH. WEBER, ibid. 4. 343. 1884.

$$\varphi = \frac{28^0, 648}{r} s = \frac{1718', 9}{r} s = \frac{108132''}{r} s$$

setzen; man macht dann nur einen Fehler, welcher bei einer Ablenkung von

1°	2°	3°	4°	5°
0,04 %	0,16 %	0,36 %	0,64 %	1,0 %

beträgt. Näheres, wie gesagt, in Band 4. Daselbst findet man auch die verschiedenen Modifikationen des Verfahrens sowie das Winkelspiegelverfahren von LEONH. WEBER angegeben. Zur Ergänzung sei hier noch auf die Arbeiten von JULIUS und WADSWORTH hingewiesen, in denen Vervollkommnungen der Methode mitgeteilt sind.[1] Der Letztgenannte hat dann, im Anschluß an MICHELSON, auch neue Verfahren ausgearbeitet, bei denen die Interferenzmethode mit der vorliegenden zur sehr genauen Messung kleiner Winkel kombiniert wird („Winkelinterferometer").[2]

Zeitmessung.

Die Zeitmessung betrifft — vgl. oben p. 26 — zwei verschiedene Dinge, nämlich die Messung von Zeitdauern und die Messung von absoluten, d. h. auf einen allgemein anerkannten Nullpunkt bezogenen Zeitpunkten, der sogenannten wahren Zeit; für die Physik ist die erste Aufgabe die bei weitem bedeutsamere; die zweite spielt aber in der kosmischen Physik eine um so grundlegendere Rölle.

Uhren. Zur Messung von Zeitdauern dient, wo es nicht auf äußerste Genauigkeit ankommt, die gewöhnliche Uhr. Es ist dies, ganz allgemein gesprochen, ein Instrument, das in irgend einer gleichförmigen bezw. periodischen und kontrollierbaren Bewegung erhalten wird. Von den ältesten und einfachsten Formen, wie der Wasseruhr, der Sanduhr u. s. w. kann hier abgesehen werden. Auch über die Sonnenuhren werden wenige Worte genügen; sie geben wahre Sonnenzeit, die mittels der Zeitgleichung (p. 25) in mittlere umgerechnet werden muß. Sie bestehen aus dem Gnomon, d. h. dem Stab, dessen Schatten die Zeit angibt, und der mit Kreisteilung versehenen Ebene, auf der der Schatten aufgefangen wird. Der Gnonom ist stets der Erdachse parallel, die Ebene ist verschieden orientiert; bei der einfachsten, der Äquatorialuhr, wo die Ebene dem Äquator parallel ist, ist die Teilung eine gleichförmige Kreisteilung um die Stabwurzel als Mittelpunkt; bei allen anderen, der Horizontal-, Vertikal-, speziell der Mittags- u. s. w. Uhr, muß die Teilung nach Berechnung ausgeführt werden.

Hiervon abgesehen, handelt es sich nur um zwei Klassen von Uhren: die durch Gewichte und die durch Federn in Gang erhaltenen; zur Regulierung dient das Pendel oder ein anderer Apparat von regelmäßig periodischer Bewegung. Für physikalische Arbeiten ist jedenfallls die massive Pendeluhr am geeignetsten; am meisten werden Sekunden- oder Halbsekundenpendel benutzt, und zwar mit gut hörbarem Schlage, so daß man, während man mit dem Auge die Raumgröße beobachtet, zugleich mit dem Ohre die Zeit verfolgen kann; zu Beginn der Messung setzt man zweckmäßig mit einer vollen Sekunde ein, für den Schluß kann man mit einiger Übung sehr gut noch viertel oder gar zehntel Sekunden aus dem rhytmischen Verhältnis des Schlusses zum letztvorhergehenden und nächstfolgenden Schlage ableiten, wobei freilich persönliche, psychische Einflüsse unter Umständen einen, wenn auch sehr geringen Fehler bedingen können. Der einfachste Apparat dieser Art ist der Metronom, für feinere Arbeiten müssen Präzisions- und Kompensationsuhren verwendet werden (vgl. den Artikel „Pendel" in diesem Bande).

Den festen Pendeluhren stehen die Federuhren gegenüber; es sind die

---

[1] F. L. WADSWORTH, Phil. Mag. (5) 44. 83. 1887. — W. H. JULIUS, Ztschr. f. Instrumentenk. 18. 205. 1888. — [2] F. L. WADSWORTH, Phys. Review. 4. 480. 1897.

Taschenuhren und die größeren Handuhren, die bei besonders exakter Konstruktion als Chronometer bezeichnet werden; man benutzt sie immer dann, wenn eine feste Aufstellung nicht möglich oder unbequem ist. Unter den Taschenuhren gibt es solche, die für wissenschaftliche Beobachtungen dadurch besonders hergerichtet sind, daß bei ihnen ein besonderer Zeiger in der Minute einmal herumläuft und daß das Zifferblatt in 300 Theile von je 0,2 Sekunden geteilt ist; der Zeiger läßt sich an beliebiger Stelle anhalten, sowie auch auf den Nullpunkt zurückführen. — Bei den eigentlichen Präzisionschronometern ist besonders auf zweierlei geachtet: auf die Aufhängung in vielfachen Lagern, so daß die eigentliche Uhr im Gehäuse ganz frei schwebt, und auf die Ausschaltung der Temperatureinflüsse; auf diese Weise hat man es zu Instrumenten gebracht, die täglich höchstens einige hundertel Sekunde Fehler haben.

Chronographen. Die Zeitmessung ist eine der ersten wissenschaftlichen Aufgaben gewesen, bei der sich die Ersetzung der Einzelbeobachtungen durch die dauernde Registrierung eingeführt hat, sei es nun, daß diese Aufzeichnung jedesmal vom Beobachter selbst, oder daß sie dauernd oder periodisch von einem automatischen Instrument besorgt wird. Die Aufzeichnung selbst erfolgt entweder graphisch, z. B. mit Farbstift, oder, namentlich in neuester Zeit und in Fällen, wo die Belastung des Apparats mit dem Zeichenmechanismus vermieden werden soll, auf photographischem Wege. Im allgemeinen erhält man dann auf dem Streifen neben- oder ineinander zwei Aufzeichnungen, nämlich einerseits die Sekunden- oder andere Zeitmarken, andererseits die Zeichen, die den Eintritt oder den Verlauf der Erscheinung, um die es sich handelt, darstellen. Die Einzelheiten der Konstruktionen der Chronographen, von denen einige auch Chronoskope heißen, ist außerordentlich verschieden. Es sei hier nur angeführt, daß bei den meisten von ihnen die elektrische oder elektromagnetische Wirkung zur Auslösung benutzt wird, z. B. indem die Uhr mit einem MORSEschen Telegraphen in geeigneter Weise verbunden wird. Derartige Chronographen sind namentlich von HIPP in Neuchatel in sehr vollkommener Weise konstruiert worden.

Von besonderer Wichtigkeit für Physik und Technik ist die exakte Messung sehr kleiner Zeiten, z. B. der Berührung zweier Körper beim Stoße. Für solche Fälle sind seit dem ersten, von POUILLET ausgegangenen Vorschlage, sehr empfindliche Methoden durchgearbeitet und vielfach mit Erfolg benutzt worden, die darauf beruhen, daß der Ausschlag einer Galvanometernadel, wenn durch die Rollen ein Strom geschickt wird, unter gewissen Voraussetzungen, die sich erfüllen lassen, proportional ist mit der Zeitdauer, während deren der Strom besteht; zu diesen Voraussetzungen gehört namentlich die, daß die Dauer klein sei gegenüber der Periode der Nadel. Um von der Proportionalität zu absoluten Zeitdauern zu gelangen, muß man die Nadelausschläge mit Hilfe von Strömen, deren Dauer man genau kennt, aichen; hierzu eignet sich besonders gut ein Pendel, dessen Spitze man um den tiefsten Punkt herum auf einem abgestuften Wege durch Quecksilber streichen läßt, so daß man aus der Länge dieses Weges und den Pendelkonstanten die Zeitdauer des Stromschlusses erhält. Schwierigkeiten bilden die absolute Konstanz der Stromstärke, die natürlich erfordert wird, sowie die Unsicherheit der Zeitpunkte, zu denen der Schluß und die Öffnung des Stromes als erfolgend zu betrachten ist. — Für technische Zwecke sind diese elektrischen Methoden nach verschiedenen Richtungen ausgebildet und verwandt worden.

Wahre Zeit. Es erübrigt noch einige Worte über die Bestimmung der wahren Zeit zu sagen. Den Ausgangspunkt hierfür bilden naturgemäß die Sternwarten, auf denen von Zeit zu Zeit eine absolute Bestimmung gemacht wird — durch Beobachtung des Meridiandurchganges eines Fixsternes oder auf andere Weise — und wo hiernach die Normaluhr fortwährend korrigiert wird, meist freilich nicht durch Stellung, sondern durch Beifügung der Gangkorrektion. Von den Normaluhren werden gegenwärtig zahlreiche Ortsuhren auf elektrischem Wege

reguliert, so daß sie bis auf die ganze Sekunde als richtig anzusehen sind. In Hafenorten, größeren Städten u. s. w. wird ferner vielfach zur Mittagszeit ein ballförmiger Körper, der Zeitball, auf einen Mast oder hochgelegenen Punkt befördert und alsdann zu genau festgelegter Zeit, z. B. genau um 12 Uhr mittags, durch telegraphische Auslösung herabgelassen. Eine andere Methode bilden die abgelassenen Kanonenschüsse.

Mit der Zeitbestimmung teilweise in engem Zusammenhange steht eine andere wichtige Aufgaben, die Ortsbestimmung. Diese zerfällt nämlich, entsprechend der Charakterisierung des Ortes durch seine drei Koordinaten, in drei Teile: die Bestimmung der Höhe über dem Meeresspiegel (s. oben), die Bestimmung der geographischen Breite, die auf astronomischem Wege, z. B. durch Beobachtung des Polarsternes erfolgt, und die Bestimmung der geographischen Länge in bezug auf den Nullmeridian, die offenbar im wesentlichen auf eine Zeitbestimmung hinausläuft; als Ereignisse, deren Eintritt festgestellt wird, dienen die verschiedensten, exakt fixierbaren Vorgänge am Himmel, z. B. Finsternisse, Sternbedeckungen, Durchgänge durch einen Vertikalkreis u. s. w. Sehr bequem sind auch gewisse zeichnerische Methoden, sowie in neuerer Zeit diejenigen Methoden, bei denen die Photographie, speziell die Photogrammetrie, benutzt wird und ganz neuerdings auch das stereoskopische Verfahren gute Dienste leistet.

Ortsbestimmungen im kleinen spielen auch in der eigentlichen Physik nicht selten eine Rolle; dahin gehört namentlich die Aufgabe, bestimmte Körper in den Einzelheiten ihrer Gestalt auszumessen. Dabei findet das als Punktierung von anderwärts her bekannte Verfahren erfolgreiche Anwendung; d. h. es werden die Koordinaten der einzelnen Oberflächenpunkte des Körpers durch ein System von drei aufeinander senkrechten, verschiebbaren Meßstangen mit Spitzen bestimmt.

Messung der Geschwindigkeit. Da die Geschwindigkeit kein ursprünglicher, sondern ein aus Strecke und Zeit abgeleiteter Begriff ist, ist sie auch durch diese im Prinzip zu messen; man hat also die Zeit zu bestimmen, in der eine gegebene oder ausgewählte Strecke zurückgelegt wird, oder umgekehrt die Strecke, die in einer gegebenen oder ausgewählten Zeit zurückgelegt wird; Apparate, die dies in geeigneter Weise leisten, heißen Geschwindigkeitsmesser oder Tachometer und, wenn sie die Geschwindigkeit in ihren Veränderungen kontinuierlich aufzeichnen, Tachographen. Begreiflicherweise sind Geschwindigkeitsmesser besonders für sehr große Geschwindigkeiten konstruiert worden, bei denen die direkte Messung von Strecke und Zeit sich durchaus verbietet; hierher gehört die Geschwindigkeit von Geschossen, von Schallwellen und sogar die des Lichtes, der elektrischen Strömung und Strahlung.[1] Wie man sieht, handelt es sich hier um lauter Spezialaufgaben, und es muß daher auf die betreffenden Kapitel dieses Werkes, für die Geschoßgeschwindigkeit aber auf die technische Literatur verwiesen werden; erwähnt sei, daß das erste brauchbare Instrument, abgesehen von vorausgegangenen Versuchen der preußischen Artillerieprüfungskommission (1838), von Wheatstone (1840) angegeben und von Hipp vervollkommnet worden ist, sowie daß in der Folge namentlich Werner Siemens sowie französische Offiziere das Problem gefördert haben. Eine besondere Rolle spielen die Bemühungen, die Geschwindigkeit von Explosionen zu ermitteln u. s. w. Unter den langsameren Bewegungen sind es namentlich die des Wassers in den Flüssen und der Luft in der Atmosphäre, deren exakte Messung für die Geophysik und Technik von großer Bedeutung ist; für jenen Zweck dienen die verschiedenen Strommesser und Rheometer, z. B. der Woltmannsche Flügel oder die Pitotsche Röhre; für diesen die Anemometer sowie, zur stetigen Registrierung, die Anemographen, deren nähere Be-

[1] Nur als Beispiel für das Äußerste, was die Zeitmessung überhaupt zu leisten vermag, sei ein kürzlich auf der Naturforscherversammlung in Meran demonstrierter Apparat von E. Marx erwähnt, der — mittels Synchroismus elektrischer Schwingungen — noch den dritten Teil einer milliardentel Sekunde mit beträchtlicher Genauigkeit zu messen erlaubt; vgl. Verh. phys. Ges. 1905.

trachtung in die Meteorologie gehört. Schließlich wären noch die Apparate zu erwähnen, die zur Messung der Geschwindigkeit von Fahrzeugen aller Art, namentlich von Schiffen (Log), Eisenbahnzügen, Fahrrädern u. s. w. dienen.[1]

Soweit die fortschreitende Bewegung. Eine besondere Gestalt nimmt die Aufgabe der Geschwindigkeitsmessung bei den Schwingungen und Drehungen an; insofern es sich nämlich hierbei um die durchschnittliche Geschwindigkeit während einer Periode handelt, kommt die Aufgabe auf die Messung der Schwingungs- bezw. Rotationsdauer oder, was üblicher ist, der Schwingungszahl bezw. Tourenzahl hinaus. Die Tourenzähler, die übrigens zum Teil auch für hin und her gehende Bewegung, also als sogen. Hubzähler zu brauchen sind, ergeben direkt meist nur die absolute Zahl der Umdrehungen, erfordern also noch eine davon unabhängige Zeitmessung; bei einigen neueren Instrumenten ist aber beides vereinigt. Auch hier gibt es wieder zahlreiche Formen registrierender Apparate, die Tachographen oder Tourenschreiber heißen, und aus deren Aufzeichnungen man auch die Schwankungen oder Veränderungen im Gange des betreffenden Phänomens ersehen kann.

Beobachtung von Schwingungen. Es ist hier der geeignete Ort, um über die Art und Weise, wie man die in der Physik am häufigsten vorkommende Art von Bewegungen, die Schwingungsbewegung, experimentell mißt, das Erforderliche zu sagen. Es handelt sich dabei um drei verschiedene Messungen, nämlich um die der Schwingungsweite, der Schwingungsphase und der Schwingungsdauer. Bei allgemeinster Behandlung des Problems kommt allerdings noch eine vierte Messung in Betracht, die Messung des Verlaufs einer einzelnen Schwingung, der sogen. Schwingungsform, welche, wenn es sich z. B. um Schallschwingungen handelt, den Klang des erzeugten Tones bedingt. Es sollen jedoch hier derartige Schwingungen, welche man bekanntlich stets in einfachere zerlegen kann, ausgeschlossen und nur solche ins Auge gefaßt werden, bei welchen das Drehungsmoment, welches den Körper in die Gleichgewichtslage zurücktreibt, dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional ist; dahin gehören namentlich die Schwingungen eines Pendels und die Schwingungen einer Magnetnadel u. s. w. Einige der folgenden Betrachtungen gelten aber auch für anders geartete Schwingungen, z. B. Torsionsschwingungen.

Die Weite oder Amplitude der Schwingung beobachtet man häufig mit Hilfe einer möglichst nahe an den schwingenden Körper herangebrachten Skala. Handelt es sich um drehende Schwingungen, so muß dies eine Kreisteilung sein, deren Mittelpunkt in die Drehungsachse fällt und deren Ebene auf dieser senkrecht steht. Bei der Ablesung der beiderseitigen Ausschlagswinkel, deren Summe oder Differenz, je nachdem sie auf verschiedenen oder auf derselben Seite des Nullpunktes der Teilung liegen, die gesuchte Amplitude ergibt, hat man sorgfältig auf die Vermeidung von Parallelachsenfehlern zu achten. Eine große Genauigkeit läßt sich auf diese Weise natürlich nicht erreichen. Unter Phase der Schwingung versteht man die Ablenkung zu irgend einer Zeit, etwa zur Zeit $t = 0$. Über ihre Ablesung ist es nicht nötig, irgend etwas zu bemerken; aber es ist klar, daß auch hier nach dem angegebenen Verfahren nur ein rohes Resultat erzielt werden kann, zumal hier eine Winkelmessung und die Fixierung eines Zeitpunktes zusammentreffen. In erhöhtem Maße gilt dies von der Messung der Schwingungsdauer, d. h. die Zeit zwischen zwei Umkehrungen des schwingenden Körpers.

Für Schwingungen von geringer Amplitude ist daher die Methode der Spiegelablesung (p. 116), welche eine weit größere Genauigkeit gestattet, vorzuziehen.

Wie man nach ihr der Schwingungsamplitude bestimmt, ist ohne weiteres klar. Dagegen sind einige Bemerkungen über die Bestimmung des Nullpunktes

[1] Ein Instrument, „Pendel-Accelerometer“, zur direkten Messung und Registrierung der Beschleunigung macht soeben F. W. LANCHESTER, Phil. Mag. (6) **10**. 260. 1905, bekannt.

zu machen, und zwar deshalb, weil es nicht möglich ist, zu warten, bis Ruhe eingetreten ist, also der Nullpunkt sich einfach ablesen läßt. Man muß alsdann den Nullpunkt aus aufeinander folgenden Umkehrpunkten ableiten, dabei aber berücksichtigen, daß fast immer die Amplitude der Schwingungen in Abnahme begriffen ist. Ist diese Abnahme nur klein, so genügt es, zu diesem Zwecke drei aufeinander folgende Umkehrpunkte zu beobachten, aus dem ersten und letzten, welche derselben Seite angehören und nur wenig voneinander abweichen, das arithmetische Mittel und alsdann aus diesem Mittel und der zweiten Beobachtung wiederum das Mittel zu nehmen. Bei größerer Dämpfung der Schwingungen muß man entweder das Dämpfunsverhältnis, d. h. das Verhältnis eines Schwingungsbogens zum folgenden k, kennen und findet dann aus zwei Umkehrpunkten u_1 und u_2 den Nullpunkt n,

$$n = u_2 + \frac{u_1 - u_2}{1 + k} \quad ,$$

oder man muß eine größere Anzahl Umkehrpunkte in geeigneter Weise verbinden (s. Artikel „Wage").[1] Sind die Schwingungen zu heftig, als daß sie im Spiegel exakt beobachtet werden könnten, so kann man sie, je nach der Kraft, welche die Drehungen hervorbringt, auf mechanischem, magnetischem oder elektrischem Wege beruhigen.

Zur Bestimmung der Phase und der Schwingungsdauer bedient man sich einer Sekundenuhr oder eines Sekundenpendels, sowie eines einfachen Verfahrens, um den Zeitpunkt einer bestimmten Stellung des Spiegels noch bis auf Zehntelsekunden fixieren zu können; man beobachtet nämlich den Skalenpunkt p_1, welcher unmittelbar vor dem Punkte p, dessen Zeitpunkt t zu fixieren ist, und den Skalenpunkt p_2, welcher unmittelbar nach ihm bei einem vollen Sekundenschlage durch das Fadenkreuz geht; ist dann t_0 der Zeitpunkt des ersten dieser beiden Sekundenschläge, so ist

$$t = t_0 + \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \quad .$$

Dieses Verfahren, auf den Nullpunkt n oder einen ihm nahegelegenen Punkt angewandt, dient auch zur Ermittelung der Schwingungsdauer. Definiert wird dieselbe freilich durch die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrmomenten; es wäre aber unzweckmäßig, gerade diese beiden Zeitpunkte zu fixieren, weil bei der in ihnen gerade besonders langsamen Bewegung diese Messung sehr ungenau ausfallen würde. Man fixiert daher besser zwei aufeinander folgende Durchgänge des Nullpunktes; von der bei der häufigen Veränderlichkeit des Nullpunktes lästigen Notwendigkeit, daß es gerade genau der Nullpunkt sei, macht man sich frei, indem man ein für allemal einen ihm nahegelegenen Punkt, z. B. den Teilstrich 50 wählt; man muß dann aber, wegen der Ungleichheit beider Seiten, einen Durchgang auslassen, d. h. zwei aufeinander folgende, in demselben Sinne erfolgende Durchgänge fixieren; die Zeit zwischen beiden ist dann die doppelte Dauer einer Schwingung.

Für viele Zwecke genügt es jedoch nicht, die Schwingungsdauer bis auf Zehntelsekunden zu bestimmen; um dann noch Hundertstelsekunden zu bekommen, kann man verschiedene Methoden, die jedoch im Grunde auf dasselbe hinauslaufen, anwenden. Hat man z. B. in der obigen Weise zwei Durchgangszeiten und aus ihnen die ungefähre Schwingungsdauer gefunden, so läßt man einige Minuten vergehen und bestimmt wieder einen Durchgangsmoment in demselben Sinne; die Zeit zwischen dem ersten und dem letzten Durchgange, durch die ungefähre Schwingungsdauer dividiert, müßte, da sicherlich gerade eine ganze Zahl von doppelten Schwingungen vergangen ist, eine ganze gerade Zahl ergeben, wird aber, weil eben nur mit der ungefähren Schwingungsdauer dividiert wurde, einen von einer solchen geraden Zahl etwas abweichenden Quotienten ergeben; nimmt man

also die diesem Quotienten nächstgelegene ganze gerade Zahl und dividiert mit ihr in die zwischen dem ersten und letzten Durchgange liegende Zeit, so erhält man die genaue Schwingungsdauer. Zur Erhöhung der Genauigkeit wiederholt man entweder dasselbe Verfahren nach einigen Minuten nochmals und kombiniert den Durchgang der zweiten mit dem der dritten Serie oder man macht, wenn man sich wegen Zeitmangels mit zwei Serien begnügen muß, in jeder derselben mehrere, z. B. drei Durchgangsbeobachtungen, kombiniert den ersten Durchgang mit dem sechsten, den zweiten mit dem fünften, den dritten mit dem vierten und nimmt aus den so erhaltenen Schwingungsdauern das Mittel. Noch genauer ist es vielleicht, in jeder der beiden Serien eine gerade Zahl, z. B. sechs Durchgänge zu beobachten, durch Kombination des ersten und sechsten, zweiten und fünften, dritten und vierten Durchgangs der ersten Serie den Zeitpunkt der mittelsten Umkehr dieser Serie abzuleiten, für die zweite Serie ebenso zu verfahren, die beiden so erhaltenen Umkehrzeiten voneinander abzuziehen und die Differenz mit der Zahl der vergangenen Schwingungen, die man wieder wie oben findet, zu dividieren; man muß dann aber, wenn wirklich eine größere Genauigkeit erzielt werden soll, eine dritte Serie hinzufügen und mit der zweiten, wie vorhin diese mit der ersten, kombinieren. Erfolgen die Schwingungen zu schnell, als daß man jeden Durchgang fixieren könnte, so nimmt man jeden $n$ten und dividiert durch n.

Beträgt eine Schwingungsdauer nahezu eine Sekunde oder ein ganzes Vielfaches derselben, so kann man die Methode der Koinzidenzen anwenden (s. Artikel „Pendel").

Bekanntlich ist die Schwingungsdauer von der Amplitude zwar in erster Annäherung, aber nicht völlig unabhängig.[1] Nun handelt es sich, wenigstens bei der experimentellen Prüfung theoretischer Formeln, fast immer um die Schwingungsdauer bei äußerst kleiner Amplitude; man muß also die gefundene Dauer auf unendlich kleine Schwingungen reduzieren. Dies geschieht, wenn φ den ganzen Amplitudenwinkel bezeichnet, durch die Formel (s. Artikel „Pendel").

$$t_0 = t\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi}{4} - \frac{5}{64}\sin^4\frac{\varphi}{4}\right) \quad .$$

Bei kleinen Winkeln kann man jedoch das letzte Kammerglied vernachlässigen und einfach

$$t_0 = t\left(1 - \frac{1}{256}\,\frac{s^2}{r^2}\right)$$

setzen. Wenn φ kleiner als 4^0 ist, kann man, falls es nicht auf eine größere Genauigkeit als 0,01 $^0/_0$ ankommt, die Reduktion ganz unterlassen. Für Winkel bis zu 50^0 enthält die folgende Tabelle die in den obigen Formeln von 1 abgezogene Größe k.

φ	k	φ	k	φ	k	φ	k	φ	k
1	0,00000	11	0,00058	21	0,00210	31	0,00457	41	0,00800
2	02	12	69	22	230	32	487	42	839
3	04	13	80	23	251	33	518	43	879
4	08	14	93	24	274	34	550	44	920
5	12	15	0,00107	25	297	35	583	45	963
6	17	16	122	26	322	36	616	46	0,01007
7	23	17	138	27	347	37	651	47	1052
8	30	18	154	28	373	38	686	48	1097
9	39	19	172	29	400	39	723	49	1143
10	48	20	190	30	428	40	761	50	1189

[1] Vgl. spätere Artikel (Pendel, Elastizität); für Torsionsschwingungen ist die Unabhängigheit vollkommen.

Messung von Massen und Kräften.

Von F. AUERBACH.

Der vorhergehende Artikel war der Messung von Raum- und Zeitgrößen gewidmet. Entsprechend dem im Artikel „Grundbegriffe“ entwickelten System steht dieser Aufgabe die andere gegenüber, Massen und Kräfte zu messen. In bezug auf eine dieser Kräfte, das Gewicht der Körper, fällt die Massen- mit der Kraftbestimmung nach dem Gesagten im wesentlichen zusammen. Die Masse ist zwar streng genommen der Widerstand der Körper gegen Bewegung; die Umsetzung dieser Definition in praktische Messung ist aber fast nie ausführbar und auch in den Fällen, wo sie es ist, viel zu unbequem und weitschichtig, als daß man sie benutzen könnte; man bestimmt also die Masse der Körper durch ihr Gewicht, das sich von ihr nur den Faktor Schwerebeschleunigung, praktisch aber wegen der entsprechend gewählten Einheit gar nicht unterscheidet.

Von den übrigen in der Natur und Praxis vorkommenden Kräften werden die meisten durch besondere, dem betreffenden Erscheinungsgebiete angehörige Methoden bestimmt, so die thermischen, elektrischen, magnetischen u. s. w. Kräfte. Es bleiben also für den vorliegenden Artikel nur die mechanischen Kräfte allgemeinen Charakters übrig, namentlich aber die Druckkräfte, von denen ein Teil wiederum auf der Schwere beruht, so namentlich der Luftdruck. Die Apparate, die somit zu betrachten sind, sind die Wagen und die Dynamometer; dagegen werden die Angaben über Barometer und Manometer besser dem Artikel „Aëromechanik“ vorbehalten. Dazu kämen dann noch die Ergometer, d. h. die Apparate zur Messung von Arbeiten und Energien.

Wägung.

Instrumente zur Messung des Gewichts der Körper heißen Wagen, die Messung selbst heißt Wägung. Jede Wägung besteht in der Vergleichung des zu ermittelnden Gewichts mit einem bekannten, und zwar entweder darin, daß man einen Körper von bekanntem Gewicht aufsucht, der dasselbe Gewicht hat wie der Prüfkörper, also in der Feststellung der Gleichheit, oder in der Feststellung irgend eines anderen, genau bekannten Verhältnisses zwischen beiden. Um den Normalkörper bequem variieren zu können, setzt man ihn aus einem ganzen Satze von Körpern, den Gewichten zusammen. Bei manchen Wagen ist die Wirkung der verschiedenen Gewichte von bekannter Größe im voraus ermittelt und auf einer Skala festgelegt, bei ihnen braucht man also keinen Gewichtssatz; es sind das aber Instrumente, die meist mehr dem raschen und

bequemen, als dem sonderlich genauen Gebrauche dienen. Die eigentlichen Wagen beruhen fast sämtlich auf dem Prinzipe des Hebels, die Gewichtsvergleichung wird hier wirklich durchgeführt. Dabei sind wieder zwei Klassen zu unterscheiden, nämlich die gleicharmigen und die ungleicharmigen; für exakte wissenschaftliche Zwecke kommen fast nur die ersteren in Betracht, es sei denn, daß die besonderen Umstände andere Direktiven ergeben. Diese ungleicharmigen sowie die übrigen Wagen, als Federzeigerwagen u. s. w. sollen dann am Schlusse des Artikels kurz erwähnt werden.

Gewichte. Die Gewichtstücke, die man zu der Wägung benutzt, müssen geaicht, d. h. mit einem Normalgewichtssatz verglichen, danach korrigiert oder mit einer Fehlertafel versehen sein. Der Satz, zu dem man sie zusammenstellt, soll die verschiedenen Vielfachen und die verschiedenen Bruchteile eines Gramm darstellen, derart, daß man mittels eines solchen Gewichtssatzes jedes beliebige zwischen zwei gewissen Grenzen liegende Gewicht zusammenstellen kann. Gewöhnlich bilden die Gewichte eines Satzes einen Teil der folgenden Reihe:

100 kg, 50 kg, 20 kg (2mal); 10 kg [oder auch 20 kg (1mal), dafür aber 10 kg (3mal)]; 5 kg, 2 kg (2mal); 1 kg [oder entsprechend wie oben], 500 g, 200 g (2mal); 100 g, 50 g, 20 g (2mal); 10 g, 5 g, 2 g (2mal); 1 g, 500 mg, 200 mg (2mal); 100 mg, 50 mg, 20 mg (2mal); 10 mg, 5 mg, 2 mg (2mal); 1 mg.

Ein anderer, aus weniger Stücken sich zusammensetzender, aber auch weniger praktischer Satz ist der folgende: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 mg, 1,024, 2,048, 4,096, 8,192, 16,384, 32,768, 65,536, 131,072 g u. s. w., oder der ähnliche aber brauchbarere: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 125, 250, 500 mg, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 125, 250, 500 g, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 kg.

Mit einem solchen Gewichtssatze kann man eine Wägung ganz schematisch ausführen: man greift dasjenige Gewicht heraus, von dem man etwa glaubt, daß es dem Gewicht des zu wägenden Körpers am ehesten entsprechen werde; erweist es sich als zu klein, so fügt man noch das nächste hinzu; erweist es sich als zu groß, so ersetzt man es durch das nächste; und so fährt man fort, bis das Gewicht mit der gewünschten Genauigkeit ermittelt ist.

Von großer Wichtigkeit für genaue Wägungen ist die Frage, ob und wieweit die Gewichte sich mit der Zeit verändern, sei es durch Materialverlust oder infolge von Verunreinigung, Oxydation u. s. w. Hierfür ist zunächst das Material, aus dem sie hergestellt sind, von hervorragender Bedeutung. Die Wahl desselben wird sich wesentlich nach dem gestatteten Kostenaufwande richten. Große Gewichte werden gewöhnlich aus Eisen oder Stahl, mittlere aus Messing hergestellt, dessen Vergoldung zweckmäßig ist, kleine aus Platin, ganz kleine aus dem leichten Aluminium, weil sie alsdann beträchtlich größere Dimensionen haben und darum weniger heikel sind. Von GAWALOWSKI[1] wird eine Legierung von 80 Aluminium, 8 Gold, 2,5 Silber und 4 Platin empfohlen; die Gewichte sind groß, politur- und widerstandsfähig. Für höchste feine Wägungen sind es zwei Stoffe, welche sich auf Grund vielfacher Prüfungen als besonders geeignet erwiesen haben: Bergkristall und eine Legierung aus Platin und Iridium.

Von Wichtigkeit ist ferner die Form der Gewichte. Bis zu einem gewissen Grade ist diese ja durch die Notwendigkeit bequemer Handhabung mit der Pinzette vorgeschrieben; soweit es aber hiermit vereinbar ist, sollte man den Stücken möglichst kleine Oberfläche, also einfache Gestalt geben und besonders Höhlungen und scharfe Kanten vermeiden, weil jene am leichtesten verschmutzen und diese am leichtesten Material verlieren. Eine Fehlerquelle bildet ferner die an den Stücken sich bildende Adsorptionshaut; besser als durch Abwischen u. s. w. trägt man dem Rechnung, wenn man die Gewichte genügend lange vorher im Wägungsraume frei aufstellt, so daß sich die Temperatur ausgleicht und die Haut in einer

[1] A. GAWALOWSKI, Chem. Zentralbl. 2. 97. 1891.

immer gleichen Weise ausbilden kann. Endlich trägt auch zweckmäßige Aufbewahrung viel zur Konservierung der Gewichte bei; die Normalaichungskommission hat hierüber Angaben gemacht, aus denen erwähnt sei, daß sich als Futterstoff für die Kästen ungefärbte Seide oder Samt empfiehlt, und daß man den Löchern für die einzelnen Gewichte eine derartige Form geben soll, daß die Berührung an möglichst wenig Punkten stattfinde.

Die Aichung und, sobald erwünscht, Neuaichung der Sätze findet z. B. in Berlin bei der Normalaichungskommission, in besonderen Fällen auch bei der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt statt. Ist man im Besitze eines Normalkilogramms, so kann man die Aichung auch selbst vornehmen, und es sind dafür Methoden ausgearbeitet, die ihre Durchführung mit einem Minimum von Zeitaufwand ermöglichen. Für relative Wägungen genügt auch die Aichung in sich (ohne Normalkörper), indem man etwa die Summe aller Stücke als richtig annimmt.[1]

Die gleicharmige Hebelwage. Die gewöhnliche, in den verschiedensten Formen und für die verschiedensten Zwecke übliche Wage ist diejenige, bei welcher der Hebel zwei gleichlange Arme besitzt. An den Enden derselben sind die beiden Wagschalen aufgehängt, auf deren eine der zu wägende Körper, auf deren andere die Gewichtsstücke gebracht werden; letztere werden so lange verändert, bis die beiden Hebelarme, d. h. der Wagebalken, welcher, als beide Schalen leer waren, die horizontale Lage hatte, diese wiederum einnimmt. Zur Konstatierung dieser Lage ist bei den für geringere Genauigkeit bestimmten Wagen im Drehpunkt des Wagebalkens senkrecht nach oben ein Zeiger, die Zunge, angebracht, der an den Schwingungen des Balkens teilnimmt und bei horizontaler Lage desselben, also bei vertikaler eigener Stellung gerade in einen Rahmen, die sogen. Schere einspielt, welche mit der Hängevorrichtung oder dem Stativ der Wage fest verbunden ist. Bei feinen Wagen ist in der Mitte des Balkens ein langer und spitzer, vertikal nach unten gehender Zeiger angebracht, dessen Spitze vor einer an dem Stativ befestigten kleinen Skala spielt und, wenn die Wage horizontal steht, den Nullpunkt der Teilung bedeckt. Die Skala ist gewöhnlich spiegelnd eingerichtet, damit man bei der Ablesung genau senkrecht auf sie blicken und auf diese Weise Parallaxenfehler vermeiden könne. Am vollkommensten ist natürlich die Ablesung mit Mikroskop oder Fernrohr. Bei einzelnen Wagen sind Zeiger und Skala seitlich angebracht, letztere fest, ersterer am Ende des Armes (horizontal). An Stelle des Zeigers tritt für Zwecke feinster Ablesung ein Spiegel, in dem das Bild einer gegenüberstehenden Skala beobachtet wird.[2] Der Wagebalken selbst ist, um Festigkeit mit Leichtigkeit zu vereinigen, aus einem Metallrahmen gefertigt, dessen Stücke durch Querstücke verbunden sind. Die Drehungsachse des Wagebalkens wird durch ein, in der Mitte desselben angebrachtes Stahlprisma gebildet, oder vielmehr durch dessen nach unten gekehrte Schneide, mit welcher der Balken auf einer Achat- oder Stahlplatte, die das Ende des massiven Stativs bildet, aufsitzt. Die Wagschalen hängen meistens mittels Haken an den Enden des Wagebalkens; bei feineren Wagen trägt dagegen der Wagebalken auch an den Enden Prismen, und zwar diesmal mit den Kanten nach oben gerichtet; auf diesen Kanten ruhen wiederum ebene Achat- oder Stahlplättchen, und an diesen hängen die Wagschalen. Die drei Schneiden müssen möglichst in einer Ebene liegen. Nur in seltenen Fällen bedient man

---

[1] H. Stadthagen, Wiss. Abh. der Normalaichungskommission **4.** 81. 1903. — Mitteilungen der Normalaichungskommission. Nr. 21; Dingl. polytechn. Journ. p. 118. 289. 1894. — B. Weinstein, Handb. d. Maßbest. **2.** 333. 362. — F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik und a. a. O. — Über die Veränderung von Gewichtsstücken mit der Zeit vgl. B. Weinstein, a. a. O. p. 363, H. Stadthagen, a. a. O., sowie für Platingewichte Löwenherz, Metron. Beitr. Nr. 2. — [2] Über neuere Ablesevorrichtungen siehe u. A. W. Spoerhase, Ztschr. f. Instrumentenk. **16.** 167. 1896.

sich statt der Schneiden stählerner Federn zur Aufhängung des Balkens sowohl als der Schalen. Zur Vervollständigung der Beschreibung ist noch zu erwähnen: eine durch einen drehbaren Knopf gehandhabte mechanische Vorrichtung, um die drei Schneiden von den betreffenden Plättchen zu entfernen und den Wagebalken anderweitig festzulegen — bei feinen Wägungen muß dies stets geschehen, ausgenommen während der eigentlichen Ablesung —; eine Stellschraube über der Mitte des Wagebalkens, um den Schwerpunkt desselben auf- und abwärts verrücken zu können; Vorrichtungen zur Veränderung der Lage der drei Schneiden; endlich ein Glaskasten, in den die Wage gesetzt wird (bei den sogen. Vakuumwagen luftdicht abgeschlossen im luftleeren Raume), und in dessen Inneres mechanische Vorrichtungen hineinreichen mit der Bestimmung, möglichst viele der erforderlichen Manipulationen von außen, ohne Öffnung des Kastens, bewerkstelligen zu können.

Theorie der Wage. Die drei wesentlichen Eigenschaften einer guten Wage sind: 1. Die Richtigkeit, d. h. die Eigenschaft, immer dieselben Resultate und zwar diejenigen Resultate zu ergeben, welche mittels einer anderen, als richtig erkannten Wage oder auf irgend einem anderen Wege ermittelt worden sind. 2. Die Empfindlichkeit, d. h. die Eigenschaft, durch eine gewisse, minimale Änderung der Belastung einer Schale noch merklich aus der bisherigen Lage abgelenkt zu werden; ein je kleinerer Bruchteil der ganzen Belastung dieses Übergewicht ist, desto größer ist die Empfindlichkeit. 3. Die Stabilität, d. h. die Eigenschaft, Schwingungen um die Gleichgewichtslage zu machen, und zwar Schwingungen von bestimmter Schwingungsdauer; je kleiner diese Dauer ist, desto größer ist die Stabilität. Auf diese drei Punkte ist also in der Theorie der Wage das Augenmerk hauptsächlich zu richten.

Gemäß der Theorie des Hebels findet Gleichgewicht statt, wenn der Schwerpunkt in der durch den Drehpunkt gelegten Vertikalen liegt; es ist also die Bedingung dafür, daß der Wagebalken bei beiderseitig gleicher Belastung in horizontaler Lage im Gleichgewicht sei, die, daß sein Schwerpunkt in der durch die Drehungsachse, oder, wie wir hier kürzer sagen können, durch den Drehpunkt, senkrecht zur Balkenrichtung gelegten Linie liege. Die Art dieses Gleichgewichts kann aber (s. Artikel „Statik“) je nach der Lage des Schwerpunktes auf dieser Linie eine dreifach verschiedene sein. Liegt erstens der Schwerpunkt im Drehpunkt selbst, so ist das Gleichgewicht indifferent, d. h. der Wagebalken ist bei gleicher Belastung zwar in horizontaler Lage, aber auch in jeder anderen im Gleichgewicht. Das kleinste Übergewicht auf der einen Seite hat in diesem Falle zur Folge, daß der Schwerpunkt horizontal neben den Drehpunkt fällt, solange der Balken wagerecht steht. Damit also der Schwerpunkt wiederum vertikal unter den Drehpunkt falle, wird sich der Balken vertikal einstellen d. h. um 90^0 drehen müssen. Man kommt also zu folgendem Ergebnisse: für gleiche Belastungen ist dieser Apparat unendlich unempfindlich, für Gewichtsdifferenzen auf beiden Seiten unendlich empfindlich. Aus beiden Gründen ist er zu Wägungen unbrauchbar. Liegt zweitens der Schwerpunkt senkrecht über dem Drehpunkt, so ist das Gleichgewicht labil; der Wagebalken wird daher zwar in horizontaler Lage, und in keiner anderen im Gleichgewicht sein; das kleinste Übergewicht auf der einen Seite aber, oder selbst die minimalste zufällig eintretende Drehung wird zur Folge haben, daß der Balken umschlägt, d. h. sich um 180^0 dreht. Auch dieser Apparat ist offenbar zu Wägungen unbrauchbar. Es bleibt also nur die dritte Möglichkeit übrig, wobei der Schwerpunkt vertikal unter dem Drehpunkt liegt; dann ist das Gleichgewicht ein stabiles. Die Wage ist also ein gleicharmiger Hebel, dessen Schwerpunkt senkrecht unter dem Drehpunkt liegt.

Für die Richtigkeit der Wage kommen außerdem noch drei wesentliche Punkte in Betracht. Der erste derselben betrifft die Gleichheit der Gewichte

der beiden Wagehälften, und der beiden Schalen nebst Gehänge ebenfalls für sich. Diese Gewichtsgleichheit beider Seiten läßt sich nun aber einerseits leicht feststellen oder, wenn sie eine Abweichung zeigt, erreichen; andererseits handelt es sich hierbei um einen konstanten Einfluß, der bei geeignetem Verfahren für das Ergebnis ohne Folge bleibt.

Weit wichtiger ist die Forderung der exakten Längengleichheit der beiden Hebelarme. Daß diese Forderung erfüllt ist, erkennt man z. B. daran, daß zwei Gewichte, welche, auf die beiden Schalen gelegt, sich das Gleichgewicht halten, auch nach ihrer Vertauschung dies noch tun, so daß in beiden Fällen der Zeiger der Wage auf denselben Skalenteil einspielt. Ist dies nicht der Fall, so sind die Arme ungleich lang, und man kann ihr Längenverhältnis folgendermaßen ermitteln. P und Q seien die beiden Gewichte, welche, wenn P links und Q rechts liegt, sich gerade ausgleichen; nach der Vertauschung hingegen sei es erforderlich, rechts zu P noch p hinzuzufügen, um wieder Gleichgewicht zu erhalten; endlich seien l und r die Längen der beiden Arme. Es ist dann nach der Grundgleichung des Hebels

$$Pl = Qr \quad , \qquad Ql = (P+p)r \quad ,$$

also

$$\frac{l}{r} = \sqrt{1 + \frac{p}{P}} = 1 + \frac{p}{2P} \quad ,$$

letzteres in Anbetracht des Umstandes, daß p jedenfalls klein gegen P sein wird. Durch Division der beiden ersten Gleichungen findet man ferner

$$Q = \sqrt{P(P+p)} = P + \tfrac{1}{2}p \quad .$$

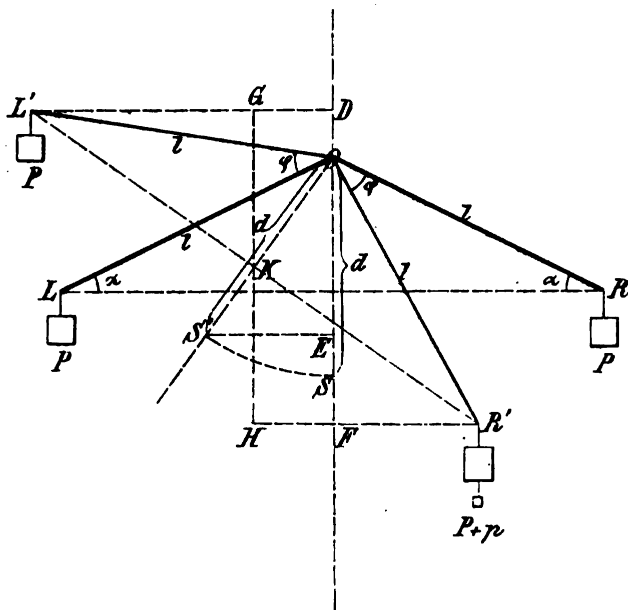
Während also von den beiden obigen Wägungen die erste den Wert P, die zweite den Wert $P+p$ für Q ergab, ist dessen wahrer Wert das geometrische Mittel, oder, in Anbetracht des jedenfalls geringen Unterschiedes beider, näherungsweise das arithmetische Mittel aus beiden. Hiernach hat man die Wahl zwischen drei Möglichkeiten: entweder man beseitigt die Ungleichheit der Arme durch Verkürzung des zu langen, oder man wägt den Körper auf beiden Wagschalen und nimmt das Mittel aus den erhaltenen Zahlen, oder endlich man verschafft sich auf die angedeutete Weise die Kenntnis des Längenverhältnisses der beiden Arme und multipliziert jedes durch Aufsetzen des Körpers auf die linke Schale erhaltene Resultat mit r/l.

Endlich muß an eine genau richtige Wage die Anforderung gestellt werden, daß die drei Schneiden einander parallel sind und bleiben. Die Fehler, welche aus einer Schiefstellung der Endschneiden gegen die mittlere oder gar aus einer Neigung aller drei gegen die Horizontale entstehen, sind mannigfaltiger Art, auch tritt dann der weitere Übelstand ein, daß es nicht mehr gleichgültig ist, auf welche Stelle der Wagschale man den Körper, bezw. die Gewichte setzt. Durch geeignete Detailkonstruktion der Endschneidensysteme, symmetrische Anordnung der Wägungen und Bestimmung gewisser Konstanten kann man hiergegen Abhilfe schaffen.[1]

Empfindlichkeit. Bei einer guten Wage für physikalische Zwecke soll die Empfindlichkeit, im gewöhnlichen Sinne, so groß sein, daß sie noch den 2 bis 10 millionten Teil des Höchstgewichts, mit welchem jede Schale belastet werden darf, angibt, also für letzteres gleich 1 kg noch 0,5 bis 0,1 mg. (Des zulässigen Höchstgewichts muß man, wie bei dieser Gelegenheit bemerkt werden möge, bei

[1] Man sehe hierüber u. A. M. THIESEN, Ztschr. f. Instrumentenk. 1882. p. 359 und 1883. p. 81. Ferner SARTORIUS, ibid. 1882. p. 385.

der Benutzung einer Wage stets eingedenk bleiben.) Im exakten Sinne versteht man unter Empfindlichkeit den Ausschlag der Wage bei einem einseitigen Übergewicht von 1 mg. Von welchen Faktoren die Empfindlichkeit einer Wage abhängt, ergibt sich durch folgende Betrachtung. Der Allgemeinheit halber nehmen wir an, daß die beiden Arme ungleich sind, und daß der mittlere Drehpunkt mit den beiden seitlichen nicht in einer Horizontalen, sondern z. B. darüber liege. Der Wagebalken wird alsdann unbelastet durch die Linie LOR (Figur 25) dargestellt sein, ebenso auch, wenn die Belastung P beiderseits die gleiche ist. Wird dagegen rechts das Übergewicht p hinzugefügt, so dreht sich der Wagebalken um den Winkel φ in die Lage $L'OR'$.



Figur 25.

Nach dem Hebelgesetz ist alsdann, wenn M das in dem Schwerpunkte (vor der Drehung S, jetzt S') des Balkens konzentriert zu denkende Gewicht desselben ist:

$$P \cdot L'D + M \cdot S'E = (P + p) R'F$$

oder

$$P(L'G + GD) + M \cdot S'E = (P + p)(R'H - HF) \quad ,$$

oder endlich, wenn die verschiedenen Katheten durch die betreffenden Hypotenusen und den Winkel φ ausgedrückt werden:

$$P(L'K \cos\varphi + KO \sin\varphi) + M \cdot S'O \sin\varphi = (P + p)(KR' \cos\varphi - KO \sin\varphi) \quad .$$

Hieraus ergibt sich

(1) $$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(P+p)KR' - P \cdot L'K}{(2P+p)KO + M \cdot S'O} \quad .$$

Sind nun die beiden Arme gleichlang, so kann man, wenn l diese Länge und α der Neigungswinkel der Arme OL und OR gegen die Horizontale, also auch der Arme OL' und OR' gegen die Linie $L'R'$ ist, die Linien $L'K$ und KR' sowie die Linie KO durch l und α ausdrücken. Bezeichnet man dann noch die Tiefe des Schwerpunktes unter dem Drehpunkt, also die Linie $SO = S'O$, mit d, so erhält man

(2) $$\operatorname{tang}\varphi = \frac{p\,l\cos\alpha}{(2P+p)\,l\sin\alpha + Md} \quad .$$

Wie man hiernach sieht, ist bei einer gleicharmigen Wage der Ausschlag, also die Empfindlichkeit, desto größer: 1. je länger die Arme sind, 2. je leichter der Balken ist, 3. je kleiner α ist, d. h. je näher der mittlere Drehpunkt an der Verbindungslinie der beiden seitlichen liegt und 4. je näher der Schwerpunkt

dem mittleren Drehpunkt liegt; außerdem ist sie 5. von der Belastung abhängig (s. jedoch w. u.). Man macht demgemäß den Wagebalken feiner Wagen durch Anwendung der schon erwähnten durchbrochenen Konstruktion möglichst lang und leicht; ferner sieht man, die drei Schneiden geradezu in eine Ebene zu bringen, so daß LOR und $L'OR'$ gerade Linien werden und $\alpha = 0$ wird; dann hat man ganz einfach

$$(3) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{p\,l}{M\,d} \; .$$

Man erreicht hierbei noch einen weiteren Vorteil. In der allgemeineren Formel, deren Nenner das Glied $2P + p$ enthält, nimmt die Empfindlichkeit mit wachsender Gesamtbelastung ab, d. h. für dasselbe Übergewicht wird der Ausschlag kleiner. Das gilt, wenn der mittlere Drehpunkt über der Verbindungslinie der seitlichen liegt; liegt er unter ihr, so nimmt, wie man in entsprechender Weise findet, die Empfindlichkeit mit wachsender Belastung zu; liegt dagegen derselbe in der Verbindungslinie jener, so ist, wie die zuletzt angegebene Formel zeigt, die Empfindlichkeit der Wage unabhängig von der Belastung, d. h. die Wage hat eine konstante, ihr ein für allemal eigentümliche, durch eine Zahl ausdrückbare Empfindlichkeit. Vollkommen läßt sich dies freilich deshalb nicht erreichen, weil bei stärkeren Belastungen der Wagebalken durchgebogen, also die Linie der seitlichen Schneiden unter die mittlere herabgedrückt wird; wird die Bedingung aber für mittlere Belastung genau erfüllt, was bei feinen Wagen zu geschehen pflegt, so wird die Abweichung auch bei kleineren und größeren Belastungen nicht erheblich werden. Die Durchbiegung der Balken hat übrigens noch den weiteren Nachteil, daß die Endschneiden sich gegen die Mittelschneide senken; man ist deshalb vielfach zu kurzen widerstandsfähigen Balken übergegangen; oder man bringt die drei Schneiden bei einer bestimmten Belastung in eine Linie und wägt möglichst (durch Zusatzgewichte) bei dieser Belastung, oder endlich man macht die Endschneiden durch besondere Vorrichtungen verstellbar.[1]

Einer ähnlichen Diskussion ist die Gleichung (1), die für ungleicharmige Wagen gilt, fähig; wie man sieht, besteht hier ein weiteres Mittel zur Erhöhung der Empfindlichkeit darin, daß man die Länge des einen Armes gegenüber dem anderen verringert, und, um das Gleichgewicht zu wahren, zugleich die entsprechende Belastung in geeignetem Grade vergrößert. Wagen von einer derartigen Konstruktion sind in manchen Fällen tatsächlich von Nutzen.

Endlich baut man den Wagebalken so, daß sein Schwerpunkt zwar senkrecht unter den Drehpunkt, aber möglichst nahe an ihn fällt. Man nähert sich hierbei dem oben kurz erwähnten Falle eines Hebels, dessen Schwerpunkt im Drehpunkt liegt; man erreicht also zwar für einseitiges Übergewicht eine außerordentliche Empfindlichkeit, ist aber zugleich der Gefahr ausgesetzt — zumal da stets etwas Reibung stattfindet, — daß bei gleichen Gewichten der Balken eine schiefe Lage einnehme (s. oben); durch Anwendung der gleich zu beschreibenden Schwingungsmethode kann man dieser Gefahr entgehen.

Für eine häufig zu benutzende feine Wage verschafft man sich zweckmäßigerweise die Kenntnis ihrer Empfindlichkeit, einmal um ihre Güte beurteilen zu können, und sodann zur Vereinfachung der Wägungen. Ist man nämlich bei einer solchen schon so weit gediehen, daß man nur noch einen kleinen Ausschlag erhält, so braucht man diesen nur mit der Empfindlichkeit, d. h. mit dem Ausschlag durch 1 mg zu vergleichen; das Wievielfache jener Ausschlag von dieser Empfindlichkeit ist, so viele mg fehlen noch (oder sind zu viel). Nun ist

---

[1] Eine eingehende Untersuchung über thermische Durchbiegung und ihren Einfluß auf die Empfindlichkeit hat — auf Veranlassung von F. RICHARZ — TH. MIDDEL geliefert; Inaug.-Diss. Greifswald 1900; DRUDES Ann. 2. 115. 1900.

die Empfindlichkeit, wie wir sahen, im allgemeinen für jede Belastung eine andere; man muß sie also für eine Reihe von Belastungen (z. B. für 0, 10, 20, 50 u. s. w. g) bestimmen und sich hiernach durch Eintragung der erhaltenen Werte in Koordinatenpapier die Kurve der Empfindlichkeit anfertigen. Bei jeder einzelnen dieser Bestimmungen verfährt man am besten so, daß man, nachdem beide Wagschalen die betreffende Belastung erhalten haben, auf die eine ein Übergewicht legt, welches den Zeiger um einige Skalenteile aus der Nullage ablenkt, auf die andere Schale alsdann das doppelte Übergewicht legt, so daß der Zeiger sich jetzt ebenso weit nach der anderen Seite einstellt, und schließlich die Skalenteile zwischen den beiden Einstellungen durch die mg-Zahl des doppelten Übergewichts dividiert.[1]

Stabilität. Wir haben noch anzugeben, wovon die dritte der oben geforderten Bedingungen der Brauchbarkeit der Wage, die Stabilität, abhängt, zu welchem Zwecke wir die Schwingungsdauer der Wage ins Auge fassen müssen. Es möge hier aber der Kürze halber gleich das Resultat der bezüglichen Rechnung hingeschrieben werden, und zwar unter den vereinfachenden Annahmen, daß die Arme gleiche Länge haben, die beiderseitigen Belastungen gleich und die Schwingungen sehr klein sind. Werden dann die obigen Bezeichnungen beibehalten, ist ferner g die Beschleunigung durch die Schwere und k derjenige Abstand vom mittleren Drehpunkte, in welchem man sich, in Rücksicht auf die Schwingungen, die Masse jedes Armes konzentriert denken kann (Gyrationsradius), so ist die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{M k^2 + 2 P l \cos\alpha}{(2 P l \sin\alpha + M d) g}} \quad .$$

Für eine gegebene Belastung ist die Stabilität also um so größer: 1. je kleiner die Länge des Balkens ist, 2. je kleiner seine Masse ist, 3. je kleiner sein Gyrationsradius ist, 4. je weiter der Unterstützungspunkt von dem Balken und von dem Schwerpunkt desselben entfernt ist. Diese Erfordernisse sind, mit Ausnahme der zweiten, den für die Empfindlichkeit ermittelten direkt entgegengesetzt, und daher bleibt nichts anderes übrig, als einen angemessenen Kompromiß zu schließen. Je geringer aber die Masse des Balkens ist, um so besser ist die Wage sowohl hinsichtlich der Empfindlichkeit als auch der Stabilität.[2]

Führt man zur Abkürzung die Länge des Sekundenpendels L und den Bruchteil $\sqrt{\beta}$ ein, den der Gyrationsradius eines Armes von seiner ganzen Länge bildet, so erhält man[3] zwischen T und der Empfindlichkeit E die Beziehung

$$T^2 = E \frac{l}{L} (2 P + \beta p) \quad .$$

Ihre Diskussion führt zu folgenden drei, durch zwei Grenzfälle geschiedenen Fällen, durch welche die oben in Betracht des Verhaltens der Empfindlichkeit gemachte Unterscheidung mit einer entsprechenden für die Stabilität verknüpft wird. 1) α (s. oben) $> d/2 l \beta$ und positiv: mit wachsender Belastung nehmen E und T ab; ist d negativ, so wird die Wage erst von einer bestimmten Belastung an brauchbar. 1a) Grenzfall: $\alpha = d/2 l \beta$ und positiv: mit wachsender Belastung nimmt E ab, T bleibt konstant. 2) $\alpha < d/2 l \beta$, aber positiv: E nimmt ab, T wächst. 2a) Grenzfall: $\alpha = 0$: E konstant, T wächst. 3) α negativ: E und T nehmen zu; die Wage ist nur bis zu einer bestimmten Belastung brauchbar.

[1] Weiteres über die Empfindlichkeit siehe THIESEN a. a. O., sowie in der größeren Abhandlung „Etudes s. l. Balance" (Trav. du Bur. int. d. poids et mes. 5. 2). — [2] W. THOMSON und P. G. TAIT, Handbuch der theor. Physik. Deutsche Ausgabe 2. 100. — [3] M. THIESEN, Ztschr. f. Instrumentenk. 1882. p. 361.

Schwingungsbeobachtungen. Bei rohen Wägungen wartet man bei jeder Ablesung ab oder bringt es selbst gewaltsam dazu, daß die Zunge oder der Zeiger still steht. Für genaue Wägungen hat diese Methode aber verschiedene Nachteile: sie ist (in der ersten Form) zeitraubend, und sie führt wegen der nicht ganz vermeidlichen Reibung nicht selten zu Fehlern. Man bedient sich daher mit Vorteil, unter Benutzung der Skala, der Schwingungsmethode, und zwar sowohl zur Bestimmung des Nullpunktes, d. h. der Zeigerstellung bei unbelasteter Wage, als auch zur Gewichtsbestimmung. Für manche Zwecke genügt es, einen Umkehrpunkt links und einen rechts zu beobachten und das Mittel zu nehmen. Für größere Genauigkeit muß man, weil die Schwingungen allmählich kleiner werden, drei Umkehrpunkte (links, rechts, links) oder fünf beobachten und aus dem Mittel aller linken und dem Mittel aller rechten wiederum das Mittel nehmen. Noch genauer sind nach neueren Untersuchungen[1] die für 3 bezw. 4 Umkehrpunkte (l_1 u. s. w.) gültigen Formeln für die Ruhelage L:

$$L = \tfrac{1}{4}(l_1 + 2\,l_2 + l_3) \quad , \qquad L = \tfrac{1}{8}(l_1 + 3\,l_2 + 3\,l_3 + l_4) \quad ,$$

und zwar ist die zweite noch genauer als die erste. Hat man so den wahren Nullpunkt von dem auf der Skala markierten beträchtlich abweichend gefunden, so korrigiert man die Gesamtstellung der Wage mit Hilfe von Stellschrauben an ihrem Stativ; bei kleinen Abweichungen ändert man nichts, sondern man betrachtet den gefundenen Nullpunkt (also z. B. den Teilstrich + 1 der Skala) als den wahren. Allgemein sei dies der Skalenteil s_0. Nun setzt man den zu wägenden Körper auf und äquilibriert ihn durch die Gewichte annähernd, so daß der Zeiger bei seinen Schwingungen die Grenzen der Skala innehält; die hieraus nach obigem berechnete Einstellung desselben sei s, und es möge sich dabei ergeben haben, daß das aufgelegte Gewicht p noch nicht ganz ausreicht. Nun legt man einige Milligramm zu, so daß die Einstellung in einer auf den ersten Blick merkbaren Weise auf die andere Seite des Nullpunktes fällt; die Belastung sei jetzt P, die Einstellung S. Man kann dann aus diesen beiden ungefähren Wägungen das wahre Gewicht G des Körpers ohne weitere Wägungen nach der Formel

$$G = p + (P - p)\,\frac{s_0 - s}{S - s}$$

finden. Die übliche Einzeichnung der Skalenteile: 0 in der Mitte, und von hier nach beiden Seiten wachsend, ist hierbei recht unbequem, weil man die Zahlen der einen Seite positiv, die der anderen negativ in Rechnung bringen muß. Vorteilhafter ist es, die Skalenteile von einem Ende bis zum anderen fortlaufend, z. B. von 0 bis 40, zu numerieren, so daß der Strich 20 der Nullpunkt der der Wage ist; und zwar tut man, da man links den Körper, rechts die Gewichte aufzulegen pflegt, gut, von rechts nach links zu numerieren; die beiden oben vorkommenden Differenzen $s_0 - s$ und $S - s$ sind dann positiv.

Gewichte. Zu den eingangs gemachten, allgemeinen Bemerkungen hierüber ist, soweit es sich um größere Gewichte handelt, nichts hinzuzufügen. Kleinere Gewichte als 1 mg sind aber nicht anwendbar, und selbst die Handhabung von Gewichtsstücken von einigen Milligramm ist für die meisten Zwecke zu heikel. Man geht daher gewöhnlich nicht unter 1 cg hinab. Um nun kleinere Gewichtsdifferenzen zu bestimmen bezw. auszugleichen, hat man drei Methoden zur Verfügung. Erstens die eben besprochene Schwingungsmethode, die aber bei den meisten Wagen auf Gewichtsdifferenzen von einem ganzen Zentigramm ($P - p = 1$ cg $= 10$ mg) noch nicht anwendbar ist, weil der Zeiger alsdann beiderseits noch über das Skalenende hinaus ausschlagen würde; man müßte sich also mindestens noch halbe Zentigramm verschaffen. Zweitens — und das ist die üblichste Methode —

[1] M. THIESEN, Etudes s. l. balance. p. 22 ff.

kann man von dem Umstande Gebrauch machen, daß die Wirkung eines Gewichts sich in demselben Verhältnis verringert, in welchem der Hebelarm, an dem es wirkt, sich verkürzt. Demgemäß stellt man sich eines jener kleinsten Gewichte, z. B. ein Zentigramm, aus Platin- oder Aluminiumdraht in Form eines sogen. Reiters[1] her, um es bequem auf denjenigen Arm des Wagebalkens setzen zu können, an welchem die für die Gewichte bestimmte Schale hängt. Dieser Hebelarm ist durch Marken in 10 oder 100 Teile geteilt; die ersteren entsprechen daher, wenn der Reiter 1 cg ist, Milligrammen, letztere Zehnteln derselben. Zur Verschiebung des Reiters, bis er den richtigen Stand hat, dient der Reiterschieber, den man von außerhalb des Glaskastens handhaben kann, so daß man den Kasten nicht zu öffnen braucht. Eines zweiten derartigen Reiters kann man sich auch bedienen, um die nicht genau einstehende Wage vor der eigentlichen Wägung zu äquilibrieren. Bei dem geringen Gewicht des Reiters wird es hier nicht nötig sein, auf die Theorie[2] seines Einflusses näher einzugehen; es sei nur bemerkt, daß die mehrfach gemachte Annahme, die Linie, auf welcher der Reiter verschoben wird (das sogen. Reiterlineal), müsse mit der Linie der drei Drehpunkte zusammenfallen, nicht richtig ist; sie braucht ihr nur parallel zu sein, und selbst bei einer Neigung bis zu 10° ist der fehlerhafte Einfluß, der sich übrigens nur auf die Empfindlichkeit erstreckt, in fast allen Fällen zu vernachlässigen. Nur ist es zu empfehlen, den Reiter niemals ganz abzunehmen, sondern als integrierenden Bestandteil der Wage zu betrachten; es hat das noch den weiteren Vorteil, daß dann der zur Äquilibrierung dienende Reiter fast immer auf dem anderen Arm wird belassen werden können, so daß er die Verschiebung des ersteren nicht stört.

Die dritte Methode besteht in der Anwendung von Anhängegewichten. Diese haben Hufeisenform und können mit Hilfe eines Mechanismus ohne Öffnung des Gehäuses an die beiden Schalengehänge angehängt werden. Damit dieser Mechanismus nicht zu kompliziert und seine Handhabung nicht zu zeitraubend werde, ist es erforderlich, mit möglichst wenig derartigen Gewichten auszukommen. Es sind hierfür verschiedene Vorschläge gemacht worden, z. B. die beiderseitige Anwendung der Reihe 1, 3, 9 u. s. w., durch deren Differenzen und Summen man bekanntlich alle Zahlen darstellen kann. Es ist aber zu beachten, daß man hier, um z. B. noch Differenzen von 1 mg bestimmen zu können, auch dem kleinsten Anhängegewicht das Gewicht 1 mg geben, ein zweites von 3 mg haben muß, also ohne zwei sehr kleine Stücke nicht auskommt. Von diesem Fehler frei ist die folgende, in neuerer Zeit vorgeschlagene Kombination:

$$\text{Links}\ \tfrac{17}{16},\ \tfrac{5}{4},\ 1,\ 4\ ,\qquad \text{Rechts}\ \tfrac{9}{8},\ \tfrac{3}{2},\ 2,\ 8\ .$$

Sind dies Zentigramm, so kann man alle beliebigen Sechszehntel Milligramm bestimmen, also jedesmal noch $\frac{1}{16}$ des kleinsten erforderlichen Anhängegewichts.[3]

Einfluß der Temperatur. Der Einfluß der Temperatur, der sich bei jeder irgendwie genauen Wägung geltend macht, gibt zu zwei verschiedenen Fragen Anlaß, nämlich einerseits, wie man die unregelmäßigen Einflüsse, d. h. die Schwankungen der Temperatur möglichst verhüten, und andererseits, ob man ihren regelmäßigen Einfluß in Rechnung ziehen müsse. Den größten unregelmäßigen Einfluß übt der Beobachter selbst aus, und zwar hauptsächlich mit seiner beim Auflegen der Gewichte in den Kasten eingeführten Hand. In Anbetracht der 15 bis 20° betragenden Temperaturdifferenz zwischen Hand und Zimmerluft ist es verständlich, daß sich warme Strömungen ausbilden, welche ihrerseits die verschiedenen

---

[1] Die Idee der Reitergewichte oder ihre praktische Ausführung rührt von BERZELIUS her. — [2] P. SCHWIRKUS, Ztschr. f. Instrumentenk. 1887. p. 46. — [3] P. SCHWIRKUS, Ztschr. f. Instrumentenk. 1887. p. 83. — Die Idee der Differenzenwägung rührt von ARZBERGER her (DINGL. polytechn. Journ. p. 219).

Teile der Wage beeinflussen. Die Folge ist teils eine rein mechanische, d. h. eine Verstellung, teils eine verschieden starke Ausdehnung der beiden Arme durch ungleiche Erwärmung (ein Unterschied von nur $0{,}1^0$ würde auf ein 1 kg schon 2 mg Fehler hervorbringen), teils endlich die Ansammlung wärmerer Luft über den Wagschalen und unter der Decke des Kastens. Es empfiehlt sich daher, den Kasten nicht zu niedrig zu machen und die Türen desselben so einzurichten, daß sie bis zur Decke geöffnet werden können. Außerdem aber muß man in den letzten Stadien der Wägung langsam zu Werke gehen, damit sich die Einflüsse verteilen, und schließlich bei der Reiterhandbung den Kasten überhaupt geschlossen lassen.[1] Für feinste Wägungen ist es aber ein geradezu entscheidender Vorteil, wenn der Beobachter der Wage überhaupt nicht nahe zu kommen braucht. Derartige Normalwagen sind dementsprechend eingerichtet; die Schwingungen des Zeigers werden mit dem Fernrohr beobachtet, und die Arretierung der Wage, das Auflegen, Vertauschen und Abnehmen der Gewichte u. s. w. erfolgt ebenfalls aus der Ferne.[2]

Abgesehen von diesen unregelmäßigen Temperatureinflüssen fragt es sich, ob auf das Ergebnis der Wägung der Umstand von Einfluß sei, daß die Temperatur innerhalb des Wagenkastens zwar in jedem einzelnen Falle konstant, von Fall zu Fall aber eine andere ist, je nach der Zimmertemperatur, der Temperatur der zu wägenden Körper u. s. w. Was die Wage selbst anbetrifft, so ist nun aber klar, daß jener Einfluß, da er für beide Hälften der gleiche ist, aus dem Resultat herausfällt. Es bleibt also nur die Erwärmung der Luft zu berücksichtigen, was jedoch in die nächstfolgende Betrachtung gehört.

Reduktion der Wägungen auf den luftleeren Raum. Die Wägung in der Luft ergibt nicht das wahre Gewicht des gewogenen Körpers, einen besonderen Fall ausgenommen. Nach dem archimedischen Prinzip nämlich verliert jeder Körper, wenn er in eine Flüssigkeit oder ein Glas, also z. B. in Luft, getaucht wird, so viel von seinem Gewicht, als die von ihm verdrängte Flüssigkeits- oder Gasmenge, also hier Luftmenge, wiegt. Ist nun bei einer Wägung das Gleichgewicht zwischen dem zu wägenden Körper und den Gewichten hergestellt, so kann allerdings der Fall vorkommen, daß beide in Wahrheit gleich viel wiegen nämlich, wenn beide dasselbe Volumen besitzen, also aus demselben Stoffe oder aus zwei gleich dichten Stoffen bestehen; dann verdrängen sie nämlich gleich viel Luft, der Gewichtsverlust ist also bei beiden derselbe, die Fehler heben sich auf, und die Wägung bleibt richtig. Anders, wenn Körper und Gewichte verschiedenes Volumen, also verschiedene Dichte haben. Das wahre Gewicht des Körpers ist dann gegenüber dem durch Wägung gefundenen einerseits in Anbetracht des Gewichtsverlusts des Körpers größer, andererseits kleiner, weil die Gewichte, mit denen er gewogen wurde, infolge ihres Gewichtsverlusts nicht voll zur Geltung kamen. Sind δ, d und D die Dichten von Luft, Gewichten und Körper, v und V die Volumina von Gewichten und Körper, G' das gefundene, G das wahre Gewicht des Körpers, so sind die von den Gewichten, bezw. dem Körper, verdrängten Luftvolumina ebenfalls v und V, also deren Gewichte, d. h. die Gewichtsverluste von Gewichten und Körper gleich δv und δV. Die Wägung lehrt also, daß

$$G - \delta V = G' - \delta v$$

ist. Nun ist aber

$$V = \frac{G}{D} \quad , \qquad v = \frac{G'}{d} \quad .$$

[1] P. SCHWIRKUS, a. a. O. p. 42. — [2] Eine solche Einrichtung besitzen die Wagen in den zur Feststellung und Vergleichung von Normalgewichten bestimmten Instituten, z. B. in dem Bur. internat. d. poids et mes. in Sèvres und im Berliner Normalaichinstitut.

Setzt man dies ein, so findet man

$$G = G' \frac{1 - \frac{\delta}{d}}{1 - \frac{\delta}{D}} = G' \left(1 - \frac{\delta}{d} + \frac{\delta}{D}\right) ,$$

letzteres in Anbetracht des Umstands, daß man bei der Vereinfachung des ersteren Ausdrucks, wenn es sich um feste oder flüssige Körper handelt, δ als sehr klein gegen d und D betrachten darf. Es ist nun zu beachten — und das ist der Punkt, auf den oben hingewiesen wurde — daß die Dichte der Luft mit der Temperatur sich nicht unbeträchtlich ändert. Doch kommt dies nur für besonders feine Wägungen oder für solche bei sehr hohen oder sehr niedrigen Temperaturen in Betracht. Dasselbe gilt von dem Einfluß des herrschenden Luftdrucks. Für derartig feine Wägungen kann man den Wert von δ aus den Tabellen entnehmen (s. Artikel „Dichte").[1] In den meisten Fällen genügt es, $\delta = 0{,}0012$ und demgemäß die anzubringende Korrektion

$$g = G' \cdot 0{,}0012 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right)$$

zu setzen. Wägt man mit Messinggewichten bezw. mit Platingewichten, so zeigen die Zahlen $g(M)$ bezw. $g(P)$ der folgenden Tabelle, das Wievielfache des in Grammen gefundenen Körpergewichts man in Milligramm hinzuzufügen hat, wenn der Körper die Dichte D hat.[2]

D	$g(M)$	$g(P)$	D	$g(M)$	$g(P)$
0,5	+ 2,26	+ 2,34	2,8	+ 0,29	+ 0,37
0,6	1,86	1,94	3,0	0,26	0,34
0,7	1,57	1,66	3,5	0,20	0,29
0,8	1,36	1,44	4,0	0,16	0,24
0,9	1,19	1,28	4,5	0,12	0,21
1,0	1,06	1,14	5,0	0,10	0,18
1,1	0,95	1,03	5,5	0,08	0,16
1,2	0,86	0,94	6,0	0,06	0,14
1,3	0,78	0,87	7,0	0,03	0,12
1,4	0,71	0,80	8,0	0,01	0,09
1,5	0,66	0,74	9,0	− 0,01	+ 0,08
1,6	0,61	0,69	10,0	− 0,02	0,06
1,7	0,56	0,65	11,0	− 0,03	0,05
1,8	0,52	0,61	12,0	− 0,04	0,04
1,9	0,49	0,58	14,0	− 0,06	0,03
2,0	0,46	0,54	16,0	− 0,07	0,02
2,2	0,40	0,49	18,0	− 0,08	0,01
2,4	0,36	0,44	20,0	− 0,08	+ 0,00
2,6	0,32	0,40	22,0	− 0,09	− 0,00

Andere Einflüsse. Der Zustand der Luft hat noch einen anderen schädlichen Einfluß, indem sich nämlich die Feuchtigkeit aus ihr an der Oberfläche der Wagenteile ansetzt, wodurch sich die Massenverteilung merklich ändern kann; unangenehm sind in dieser Beziehung besonders Elfenbein, Achat, einzelne Glassorten und ganz besonders Schellacküberzug; am günstigsten verhält sich Platin.

[1] Man muß dann außer Druck und Temperatur aber auch noch die chemische Beschaffenheit der Luft, insbesondere ihren Gehalt an Wasserdampf und Kohlensäure berücksichtigen, der infolge des Einflusses des Beobachters oft nicht unbeträchtlich ist. Vgl. SCHWIRKUS, a. a. O., p. 414. — B. WEINSTEIN, Maßbestimmungen. — [2] Handelt es sich nur um das Gewichtsverhältnis zweier Körper, so kann man eine einfache, von P. SCHOTTLÄNDER, Ztschr. f. phys. Chem. **16**. 458. 1895, angegebene Formel benutzen.

Man vergleiche hierüber eine Arbeit von WARBURG nnd IHMORI.[1] — Ferner sind elektrische Ladungen zu vermeiden, da sie fremde Kräfte ins Spiel bringen.

Tariermethode. Es ist schon oben bei Besprechung der Länge der Hebelarme eine Methode erwähnt worden, welche Doppelwägung heißt, und darin besteht, daß man den Körper nach einander auf beiden Schalen wägt und das Mittel nimmt. Dadurch wird man von einer hauptsächlichen Fehlerquelle der Wage unabhängig. Durch eine andere Methode kann man sich sogar von den meisten Fehlerquellen unabhängig machen, nämlich durch die Tarier- oder Substitutionswägung, welche nur eine möglichste Empfindlichkeit der Wage voraussetzt. Man setzt den zu wägenden Körper auf die eine Wagschale und äquilibriert ihn durch Schrotkörner bezw. Sand auf der anderen Wagschale. Dann nimmt man den Körper fort und legt so viele Gewichte auf, bis Schrot und Sand wieder äquilibriert sind. Die einzige Korrektion, welche in diesem Falle anzubringen ist, ist die wegen des Gewichtsverlusts in der Luft.[2] Bei der Methode von MENDELEJEW verfährt man sozusagen umgekehrt, wobei die Anwendung von Schrot u. s. w. erspart wird. Man legt nämlich auf die eine Schale dasjenige Gewicht, für das die Wage am besten reguliert ist, z. B. ein Kilo, auf die andere ebenfalls ein Kilo Gesamtgewicht, aber in der oben angegebenen Weise aus einem Satze einzelner Stücke zusammengestellt; jetzt legt man auf die zweite Schale den zu wägenden Körper und nimmt so viele Gewichte fort, bis wieder Gleichgewicht eintritt.[3]

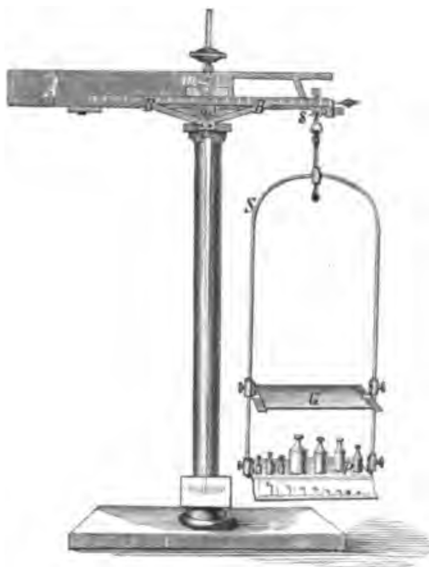
Verschiedene Modelle. Nach dem Vorangegangenen wird es nicht Wunder nehmen, daß es eine außerordentlich große Zahl individuell eigentümlicher Wagenkonstruktionen gibt, die sich durch den Bau der Säule, des Balkens, der Schneiden, der Schalen u. s. w. unterscheiden, und von denen jede ihre Vorzüge, sei es allgemeiner Natur, sei es für bestimmte Zwecke besitzt. So unterscheidet man schwere und leichte, kurz- und langarmige, chemische und analytische, physikalische und Präzisionswagen u. s. w.; sie werden von zahlreichen Firmen, so von BUNGE[4], SARTORIUS, NEMETZ[5], WESTPHAL, RUEPRECHT, STÜCKRATH, OERTLING, STAUDINGER u. A. in vorzüglicher Ausführung hergestellt. Ferner sei noch besonders angeführt die aperiodische Präzisionswage von P. CURIE[6] mit Luftdämpfung und sehr empfindlicher Skalenablesung, sowie die Vergleichswage von ÅNGSTRÖM[7], bei der der sehr leichte Balken und die Schalen an Kokonfäden mittels hindurchgesteckter Glasröhrchen aufgehängt sind, und die mit kombinierter Dämpfung ausgestattet ist. — Zur annähernden Wägung von Körpern, für die Schalen nicht geeignet sind, dienen die Tafelwagen, deren freie Schalen über dem Balken liegen. — Eine besondere Klasse bilden die zu Normalbestimmungen dienenden Vakuumwagen, bei denen man sich dadurch, daß man im nahezu evakuierten Raume wägt, von Luftkorrektion, Luftströmungen, Temperaturschwankungen, Feuchtigkeit u. s. w. ganz unabhängig macht; die ersten Wägungen im luftverdünnten Raume scheinen 1860 von REGNAULT, MORIN und BRIX ausgeführt worden zu sein. Schließlich sei auf die automatischen Wagen hingewiesen, bei denen äußere Eingriffe nach Möglichkeit ausgeschlossen sind, und die ihren Spezialzwecken aufs äußerste angepaßt sind.

---

[1] E. WARBURG und IHMORI, WIED. Ann. **27**. 481. 1886; **31**. 1006. 1887. — [2] Die Tariermethode rührt von BORDA her (1788). — [3] Die zahlreichen und wichtigen Untersuchungen MENDELEJEWS über die Theorie und den Gebrauch der Wage sind leider fast sämtlich russisch erschienen; vgl. O. CHWOLSON, Lehrbuch der Physik. **1**. 346; Beibl. 1897. p. 619; 1899. p. 729. — [4] BUNGE, vgl. u. a. Ztschr. f. Instrumentenk. **14**. 131. 1894. — [5] Vgl. B. PENSKY, ibid. **12**. 221. 1892; **14**. 325. 1894. — [6] P. CURIE, C. R. **108**. 663. 1889. — [7] K. ÅNGSTRÖM, Öfv. Vet. Akad. Förh. Stockholm **52**. 643. 1895.

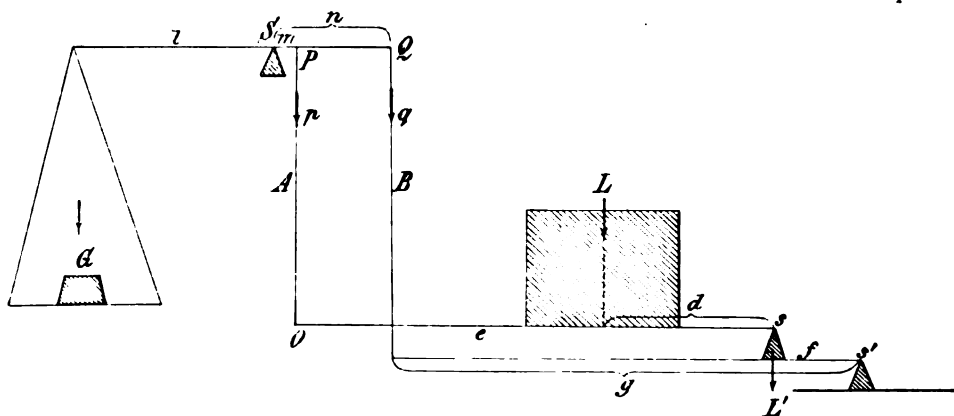
Andere Wagen.

Ungleicharmige Hebelwagen. Zunächst sei eine eigens als solche gebaute Substitutionswage (s. o.) angeführt. Sie hat — vgl. Figur 26 — nur eine Schale, aber mit zwei Platten übereinander; die untere ist als Gewichtskasten eingerichtet und enthält so viel Gewichtsstücke, als der höchsten Belastung entsprechen; auf der anderen Seite ist der Wagebalken so schwer, daß er allein schon der ersten Seite das Gleichgewicht hält. Eine Wägung besteht dann einfach im Auflegen der Körpers auf die obere und entsprechender Abnahme von Gewichten von der unteren Platte; auch Reiter kann man in Anwendung bringen. Die Wage arbeitet bei relativ großer Genauigkeit sehr schnell.[1] — Eine, mit dem Aräometerprinzip kombinierte Substitutionswage hat Th. Lohnstein beschrieben.[2]



Figur 26.

Eine für gröbere Zwecke häufig benutzte Wage ist die Schnellwage, die auch, infolge mißverstandener Etymologie, als römische Wage bezeichnet wird. An dem kürzeren Arme hängt die zu wägende Last, am längeren ist ein Laufgewicht verschiebbar, welches so gewählt ist, daß es, am äußersten Ende des Armes befindlich, die höchste Last, für welche die Wage bestimmt ist, äquilibriert. Für alle leichteren Körper kann man dann offenbar durch Verschiebung des Laufgewichts das Gleichgewicht herstellen. Mit Hilfe einer Reihe von Versuchen sind die den verschiedenen Stellen des Laufgewichts entsprechenden Körper-



Figur 27.

gewichte ein für allemal ermittelt und auf dem Arme verzeichnet, so daß man sie ohne weiteres ablesen kann.

[1] S. Loewenherz, Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Berliner Gewerbeausstellung. Berlin 1880. p. 196. — [2] Th. Lohnstein, Chemikerztg. 1896. 11. Juli.

Von ähnlicher Art ist die dänische oder schwedische Wage, bei der das Gewicht am Ende steht, dafür aber der Drehpunkt verschiebbar ist. Ihrer geringen Genauigkeit halber wird jedoch diese Wage nur ausnahmsweise angewendet.

Die Brückenwage (Figur 27) ist als eine zusammengesetzte Hebelwage zu betrachten. Die Last L wird auf eine Platte gebracht, welche an dem einen Ende O an einer Stange A befestigt ist, mit dem anderen auf einer Schneide s ruht. Die Stange A ist in dem Punkte P an den einen Arm eines auf der Schneide S ruhenden Hebels angehängt, dessen anderer Arm an seinem Ende die für die Gewichte bestimmte Schale trägt. Die Schneide s ist nun aber selbst nicht fest, sondern ruht ihrerseits auf dem Hebel h, welcher mittels der Stange B im Punkte Q des Haupthebels angehängt ist und am anderen Ende auf der festen Schneide s' ruht. Es seien nun l, m, n die Hebelarme, an welchen die Gewichte, die Brücke, d. h. die für die Last bestimmte Platte, und der zweite Hebel wirken. Ferner seien G die zur Messung benutzten Gewichte, p und q die in den Punkten P und Q angreifenden Gewichte. Auf der Brücke seien d und e die Abstände der Last (d. h. ihrer Schwerlinie) und der Stange A von der Schneide s. Endlich seien f und g die Abstände der auf den festen Hebel wirkenden Last L' und der Stange B von der Schneide s'. Es ist dann für den Haupthebel

$$G l = p m + q n \quad .$$

Für die Brücke, und zwar einerseits in bezug auf s als Drehpunkt

$$p e = L d \quad ,$$

andererseits in bezug auf O als Drehpunkt

$$L' e = L(e - d) \quad .$$

Endlich für den festen Hebel

$$q g = L' f = L f \frac{e - d}{e} \quad .$$

Setzt man die Werte von p und q in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$G = \frac{L}{l e}\left[m d + (e - d)\frac{n f}{g}\right] \quad .$$

Die Wage wird nun so gebaut, daß sich $n : m$ wie $g : f$ verhält. Einmal erreicht man hierdurch den Vorteil, daß die Brücke stets horizontal bleibt, und ferner vereinfacht sich in diesem Falle obige Gleichung zu der folgenden:

$$G = L\frac{m}{l} \quad , \qquad \text{also} \qquad L = G\frac{l}{m} \quad .$$

Es verhält sich also so, als ob die Last unmittelbar an der Stange A hinge; man hat aber den Vorteil, daß man sie an eine beliebige Stelle einer großen Platte bringen kann, wozu noch andere Vorteile kommen. Bei der am häufigsten benutzten Brückenwage, der Dezimalwage, ist $l/m = 10$, bei der Centesimalwage ist $l/m = 100$. Die äußere Einrichtung dieser Wagen darf bei ihrer großen Verbreitung als bekannt vorausgesetzt werden.[1]

Hier ist auch der Ort, um die ROBERVALsche Wage (erfunden 1670) zu erwähnen, die an Stelle des Wagebalkens eine Art von Parallelogramm besitzt, dessen Längsseiten an der Säule drehbar befestigt sind, während die Gewichte an Querriegeln der senkrechten kurzen Seiten aufgehängt werden; sie hat wegen ihres anscheinend äußerst paradoxen Verhaltens lange Zeit theoretisches Interesse erregt, ist aber praktisch ohne Bedeutung. — Neuerdings hat ein Amerikaner

[1] Die Konstruktion der Brückenwage in dieser Form rührt von dem Straßburger Mechaniker QUINTENZ (1821) her.

SPRINGER eine doppelbalkige Wage gebaut, bei der sämtliche Achsen in Uhrfedern hängen, und die als praktisch sehr zukunftsreich bezeichnet wird.[1]

Auch Tafelwagen werden nach dem Prinzip des zusammengesetzten Hebels gebaut.

Noch zur Klasse der Hebelwagen, aber andererseits schon zur Klasse der Skalenwagen, bei welchen das Körpergewicht einfach an einer Skale abgelesen wird (s. oben p. 136), gehören die unter anderen als Briefwagen gebräuchlichen Zeigerwagen; der Hebel ist aber hier nicht nur ungleicharmig, sondern die beiden Arme bilden auch einen Winkel miteinander. Eine Zeigerwage für Demonstrationszwecke hat u. a. H. HARTL angegeben.[2]

Federwagen. Den Hebelwagen stehen die Federwagen gegenüber. Das Gewicht, d. h. die Schwere des zu wägenden Körpers wird hier nicht mit der entsprechenden Eigenschaft eines anderen Körpers (der Gewichte) verglichen, sondern mit der Wirkung einer ganz anderen Eigenschaft, der Elastizität metallener Federn. Auch hier wird von vornherein durch Anhängung bekannter Gewichte eine Skale hergestellt, welche man dann einfach abliest. Die Feder ist meist eine Schraubenfeder oder eine Winkelfeder; die äußere Einrichtung der Wage kann sehr mannigfaltig sein. Da die Elastizität stark veränderlich ist, sind die Federwagen in dieser Form nur für Zwecke anwendbar, wo es weniger auf Genauigkeit als auf Schnelligkeit ankommt.[3] Man kann aber auch genauere Wägungen mit ihnen ausführen, wenn man sich nicht auf die Skale verläßt, sondern, wie bei der Substitutionsmethode, zuerst den Körper, und nach Abnahme desselben so viel Gewichte auflegt bezw. anhängt, daß der Zeiger wieder dieselbe Stellung einnimmt.[4]

Bei allen Skalenwagen ist übrigens zu beachten, daß man sie ohne weiteres nur an dem Orte anwenden darf, wo sie hergestellt worden sind. Da nämlich die Schwerkraft, also auch das Gewicht der Körper, auf der Erde von Ort zu Ort variiert, so ist die Skale für andere Orte nicht ganz richtig, und man muß sich eine entsprechende Korrektionstabelle anlegen.[5]

Indirekte Methoden. Schließlich gibt es eine Reihe von indirekten Methoden, bei denen der Zusammenhang des Gewichts mit einer anderen Erscheinung zur Bestimmung des ersteren benutzt wird. Einige von diesen Verfahren seien hier kurz erwähnt.

Wie man mit Hilfe des archimedischen Prinzips das Volumen der Körper durch die Wage ermittelt (s. oben p. 108), so kann man auch umgekehrt das Gewicht aus einem bekannten Volumen ableiten. Man stellt auf die eine Schale einer gleicharmigen Hebelwage ein Gefäß mit Wasser, äquilibriert es durch auf die andere Schale gelegtes Schrot, fügt zu letzterem alsdann den zu wägenden Körper hinzu und senkt schließlich einen in Kubikzentimeter geteilten Glasstab, der an einem feststehenden Stativ angebracht ist, so weit in das Wasser hinab, bis das Gleichgewicht von neuem hergestellt ist; soviel Kubikzentimeter nebst Bruchteilen eintauchen, soviel Gramm nebst Bruchteilen beträgt das Gewicht. Durch verschiedene Vorrichtungen kann man das Verfahren wesentlich empfindlicher gestalten, namentlich durch geeignete Wahl des Senkkörpers, und es sei hier nochmals auf die schon oben (p. 136) erwähnte hydrostatische Substitutionswage von LOHNSTEIN

[1] Vgl. W. DITTMAR, Ztschr. f. Instrumentenk. **10.** 433. 1890. — [2] H. HARTL, Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unter. **10.** 127. 1897. — [3] Auch das sogen. Aneroidbarometer ist nichts als eine Federwage zur Messung des Gewichts der Luft, gerade wie das Quecksilberbarometer eine gewöhnliche Wage zu diesem Zwecke ist. Nur pflegt man, statt des Gewichts der Luft, die Quecksilberhöhe anzugeben und auf den Skalen zu verzeichnen, und zwar auch bei dem Aneroidbarometer, s. w. u. — [4] Siehe auch die REIMANNsche Federwage, S. LOEWENHERZ, Ber. v. d. Berl. Ausst. p. 198. Dieselbe ist freilich eine kombinierte Federhebelwage. Eine unter gewissen Umständen sehr brauchbare Federwage ist die von JOLLY. — Vgl. auch C. E. LINEBERGER, Phys. Review **11.** 110. 1900 (neue Form der Spiralfederwage). — [5] Über Gravimeter, Wagen zur Bestimmung des Gewichts der Erde u. s. w. s. Artikel „Gravitation".

hingewiesen, bei der auch die aus der Kapillarität entstehenden Schwierigkeiten mit Hilfe eines einfachen Kunstgriffes beseitigt sind. Für kleine Gewichte hat auch GUGLIELMO[1] eine derartige hydrostatische „Mikrowage" angegeben.

K. FUCHS[2] hat darauf hingewiesen, daß man in gewissen Fällen auch das Pendel als Wage benutzen kann. Der Pendelstab ist etwa 20 cm lang, sein Schwerpunkt liegt etwas über dem Drehpunkt, so daß durch obere Anschläge ein Kippen verhindert werden muß. Bei Anhängen des Körpers nebst, wenn notwendig, eniger Zusatzgewichte — z. B. mit Hilfe eines kleinen Körbchens — führt das stabil gewordene Pendel Schwingungen aus, aus deren Periode — etwa 5 bis 10 sec — man das Gewicht berechnen kann. Der Apparat erfordert keine kleinsten Gewichte und ist so kompendiös, daß er z. B. unter der Luftpumpe zu gebrauchen ist.

Endlich hat SALVIONI[3] eine Mikrowage für Massen zwischen 100 und 0,001 mg angegeben, die auf der Biegung eines elastischen Körpers beruht und bald darauf von GIESEN[4] modifiziert und zu verschiedenen Untersuchungen benutzt worden ist. In Figur 28 ist *d* ein Paar von Ösen, mit denen ein feiner Glasfaden festgeklemmt ist; am Ende ist er umgebogen und trägt bei *c* ein kleines Häkchen zum Anhängen der zu wägenden Körper; andererseits ist bei *b* ein zweiter Glasfaden auf den ersten gekittet, der bei *a* senkrecht zur Zeichnungsebene umbiegt, und bei *s* einen Spinnfaden trägt; die Senkung dieses letzteren wird mit dem Mikroskop, das in den die Wage schützenden Glaskasten eingelassen ist, beobachtet, und hieraus nach den Gesetzen der Biegung das Gewicht des angehängten Körpers berechnet. Die Empfindlichkeit muß natürlich vor dem Gebrauch festgestellt werden, auch ist auf die elastische Nachwirkung Rücksicht zu nehmen.



Figur 28.

Messung von Kräften.

Apparate zum Messen von Kräften aller Art heißen Kraftmesser oder Dynamometer. Die Wage ist, insofern sie das Gewicht der Körper, also ihren Druck auf die Unterlage oder, was dasselbe ist, die Wirkung der Schwerkraft auf sie angibt, selbst schon ein Dynamometer, und zwar das wichtigste von allen. Zur Messung der Schwerkraft wird sie noch in besonderer Weise verwandt, worüber man das Nähere in dem Artikel „Allgemeine Gravitation" findet. — In vielen Fällen ist es jedoch wünschenswert, Kräfte mit einem Apparat zu bestimmen, der nicht, wie die Wage, eine horizontale, sondern eine vertikale Achse hat, und dessen Bewegungen um diese stattfinden. Solche Apparate heißen Horizontalwagen oder, was freilich nicht bezeichnend für sie ist, aber sich eingebürgert hat, Drehwagen. Um mit ihnen Kräfte zu messen, muß man sie mit irgend einer anderen Kraft zum Vergleich bringen, und hierfür bieten sich zwei Möglichkeiten als besonders aussichtsreich dar: die Vergleichung mit der Torsionskraft und die mit der Schwerkraft. Instrumente der ersteren Art nennt man Torsionswagen; sie bestehen aus einem an einem Faden aufgehängten drehbaren System, das sich unter dem entgegengesetzten Einfluß der zu messenden Kraft und der Torsionskraft in bestimmter Weise einstellt und aus

---

[1] G. GUGLIELMO, Rend. Acc. Lincei (5) **10.** (2) 259. 1901. — [2] K. FUCHS, Repert. d. Physik **26.** 634. 1890. — [3] E. SALVIONI, Atti Acc. Messina **17.** 1901. — Die Leistungsfähigkeit der Wage wurde durch Messung des Gewichtsverlusts von Moschus geprüft. — [4] J. GIESEN, DRUDEs Ann. **10.** 830. 1903.

dieser Einstellung die Berechnung der Kraft erlaubt. Man kann aber statt der Torsion auch die Schwerkraft benutzen, indem man statt eines Fadens deren zwei zur Aufhängung nimmt, also die sogen. bifilare Aufhängung (s. Artikel „Pendel") benutzt; ohne Krafteinwirkung bilden hier die Fäden eine vertikale Ebene, durch die äußere Kraft wird diese Ebene in eine gewundene Fläche verwandelt; und da hierbei zugleich das ganze gehoben werden muß, tritt die Schwerkraft in Aktion; das übrige ist dann ganz ähnlich wie im ersten Falle. Die in Rede stehenden Apparate finden ihre hauptsächliche Anwendung zur Messung der sogenannten Fernkräfte, also zur Gravitation (vgl. diesen Artikel), der elektrischen und magnetischen Anziehung und Abstoßung (vgl. Bd. **4**. 60 sowie Bd. **5**. 15); es möge daher hier an dem Hinweise genügen. Ein zusammengesetztes Instrument dieser Art ist die von JAUMANN[1] angegebene, aber, wie es scheint, nicht zur Ausführung gelangte „entgegengekuppelte Federwage" zur absoluten Kraftmessung. — Ferner sei auf einen Apparat von NEGBAUER[2] zur Messung von Drehungsmomenten sowie auf das Trifilargravimeter von A. SCHMIDT[3] hingewiesen.

Die eigentlichen Dynamometer, die zur Messung von Druck- und Zugkräften dienen, benutzen als Vergleichskraft meist die Biegungselastizität von Federn; je nach der Form dieser Federn und der Art, wie die zu messende Kraft an ihr angreift, erhält man sehr vorschiedene Formen. Bei dem Dynamometer von PONCELET und MORIN z. B. besteht der Hauptteil aus zwei zusammengespannten elastischen Streifen, und die Durchbiegung wird durch einen Stift auf Papier verzeichnet; bei anderen Modellen wird ein Kreisbogen zusammengedrückt u. s. w. Bei dem Dynamometer von TROUVÉ[4] wird ein Kräftepaar durch die Torsionselastizität gemessen. Natürlich müssen die Dynamometer vor dem Gebrauch durch bekannte Kräfte geaicht werden, und diese Eichung ist öfters zu wiederholen, da die elastischen Kräfte bekanntlich nicht unbeträchtlichen zeitlichen Änderungen unterliegen. Besondere Gestalt nehmen diejenigen Dynamometer an, die nicht für geradlinig wirkende Kräfte, sondern für rotierende Mechanismen dienen sollen, also zur Prüfung der Kräfte von Maschinen.

Mit der Kraftmessung hängt die Messung der Arbeit innig zusammen; es ist das einleuchtend, da die Arbeit das Produkt der Kraft in die Strecke (vgl. p. 75) ist. Diese Strecke kann man unter Umständen sehr einfach direkt messen bezw., bei rotierenden Apparaten, aus der Tourenzahl ableiten, der betreffende Tourenzähler ist mit dem Dynamometer meist zu einem Ganzen verbunden. Es gibt aber für manche Zwecke auch besondere Instrumente, welche die Arbeit mechanisch aufzeichnen und Indikatoren heißen. Die Arbeit wird, wie man weiß, durch eine Fläche (p. 77) dargestellt, und die von dem Stifte eines Indikators aufgezeichnete Fläche nennt man das Arbeits- oder Indikatordiagramm; das Nähere gehört in die Thermodynamik, namentlich die technische, speziell zur Theorie der kalorischen Maschinen. — Es gibt aber zur Messung der Arbeit noch einen anderen Weg, der darin besteht, daß man die Arbeit durch Reibung und Wärme verzehren läßt und die Größe der hierzu erforderlichen Reibung oder die Menge der entstehenden Wärme mißt. Ein sehr verbreiteter Apparat dieser Art — man nennt sie Bremsdynamometer — ist der PRONYsche Zaum, bei dem die Reibung durch Gewichte äquilibriert wird; es gibt aber auch zahlreiche feinere Instrumente und endlich auch solche mit automatischer Erhaltung und Regulierung, worüber man die technische Literatur nachsehe.

Die Apparate endlich, die zum Messen des Druckes von Gasen dienen, die Barometer und Manometer, werden zweckmäßig bei der Lehre von den Gasen besprochen (vgl. „Aëromechanik").

[1] G. JAUMANN, Wien. Sitzber. **97**. (2) 64. 1888. — [2] W. NEGBAUR, WIED. Ann. **41**. 631. 1890. — [3] A. SCHMIDT, Beitr. z. Geophys. Erg.-Bd. **1**. 254. 1902. — [4] G. TROUVÉ, C. R. **110**. 1326. 1890.

Dichte.

(Dichtigkeit, spezifisches Gewicht, Dampfdichte.)

Von F. AUERBACH.

Zwei nahe verwandte Begriffe sind die Dichte, auch Dichtigkeit genannt, und das spezifische Gewicht. Unter Dichte versteht man die Masse der Volumeneinheit, unter spezifischem Gewicht das Gewicht der Volumeneinheit eines Körpers. Nun ist allerdings Masse nicht identisch mit Gewicht (s. „Grundbegriffe", p. 39 und 44); aber an einem bestimmten Orte der Erdoberfläche ist das Verhältnis von Masse und Gewicht für alle Körper dasselbe; dasjenige von Dichte und spezifischem Gewicht wird es also auch sein. Der Wert dieses Verhältnisses ist dabei gleich der Beschleunigung, welche die Schwerkraft an dem betreffenden Orte erteilt. Man pflegt nun meist von diesem Proportionalitätsfaktor abzusehen und die Begriffe Dichte und spezifisches Gewicht zu indentifizieren. Wählt man ferner cbmm und mg, oder ccm und g, oder l (Liter) und kg als entsprechende Raum- und Gewichtseinheiten, so besitzt die Raumeinheit Wasser von 4^0 C die Gewichtseinheit, d. h. die Dichte oder das spezifische Gewicht von Wasser von 4^0 ist gleich 1. Man kann also auch sagen: Dichte oder spezifisches Gewicht ist das Verhältnis der Masse oder des Gewichts eines Körpers zur Masse oder dem Gewicht eines gleichen Volumens destillierten Wassers von 4^0. Bei Gasen vergleicht man, statt mit Wasser, meist mit Luft von 0^0 und 760 mm Druck, bei Dämpfen mit Luft von gleicher Temperatur und Druck („Dampfdichte", s. unten). — Statt des spezifischen Gewichts wird nicht selten die reziproke Größe, das spezifische Volumen, betrachtet.

Messungsmethoden.

A. Feste Körper.

1. Volumen- und Gewichtsbestimmung. Die nächstliegende und direkteste Methode besteht in der Messung des Volumens des Körpers, seiner Wägung und der Division der erhaltenen Zahlen durch einander. Über die im vorigen Artikel behandelte Wägung ist nichts, über die Volumenmessung (p. 108) sind nur wenige Bemerkungen hinzuzufügen.

a) Die Volumenmessung kann in manchen Fällen, namentlich wenn der Körper gleichmäßige Gestalt hat (Kugel, Würfel u. s. w.) direkt geschehen, sei es durch mechanisches, sei es durch optisches Ausmessen.

b) In den meisten Fällen ist die direkte Ausmessung entweder überhaupt nicht möglich oder zu ungenau: man wirft dann den Körper in eine Flüssigkeit, die ihn nicht angreift, und in der er untersinkt; in dem geeichten und graduierten Gefäße, in dem sich die Flüssigkeit befindet, kann man dann die Volumen-

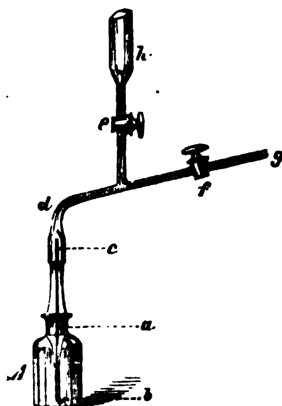
zunahme, also das Volumen des hineingeworfenen Körpers ablesen. Besondere Meßzylinder dieser Art rühren von Brügelmann, Phipson[1] u. a. her. Genauer wird die Messung, wenn man nach dem Vorschlage von Gisevius[2] ein enges, mit dem Gefäße kommunizierendes Seitenrohr benutzt, in dem dann, bei geeigneter Anordnung, die Volumenzunahme sich durch ein verhältnismäßig sehr beträchtliches Ansteigen der Flüssigkeit geltend macht. Schließlich kann man auch, wenn die Flüssigkeit Wasser oder ihr spezifisches Gewicht bekannt ist, die überschüssige Flüssigkeit austreten lassen und wägen, womit offenbar in diesem Falle die Aufgabe gelöst ist. Sinkt der Körper in der Flüssigkeit nicht unter, so befestigt man ihn an einem Drahte und taucht ihn nur so weit ein, daß er gerade vollständig, der Draht aber noch gar nicht in der Flüssigkeit sich befindet. Poröse Körper muß man durch einen geeigneten, natürlich möglichst dünnen Überzug vor dem Eindringen der Flüssigkeit schützen. Endlich ist sorgfältig darauf zu achten, daß keine Luftblasen an dem eingetauchten Körper sitzen; eventuell sind dieselben mittels eines Pinsels oder anderweitig zu entfernen.

Die zuletzt gemachten Bemerkungen gelten übrigens auch für einen Teil der nachfolgenden Methoden.

c) Wenn die Natur des Körpers die Berührung mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit nicht erlaubt, verwendet man das Volumenometer, das oben p. 108 schon betrachtet wurde, und von dem eine große Anzahl von Modellen eigens für die Zwecke der Dichtebestimmung gebaut worden ist.

2. Mit dem Tarierfläschchen oder Pyknometer. Diese Methode ist eine Ausführung und Vervollkommnung des oben erwähnten Verfahrens, das überschüssige Wasser austreten zu lassen. Tarierfläschchen oder Pyknometer sind kleine Glasgefäße, welche, bis auf den Boden und den kurzen Hals, kugelförmig oder fläschchenförmig sind. Die innere Wandung des Halses ist abgeschliffen, und in sie paßt ein hohler Glasstöpsel, welcher unten zuweilen ein in das Gefäß hinabreichendes kleines Thermometer trägt, oben aber in eine kapillare Röhre ausläuft. Man wägt das Pyknometer, wenn es völlig mit Wasser gefüllt ist (p), andererseits den zu untersuchenden Körper für sich (P); bringt man nun den Körper hinein, so muß notwendig Wasser ausfließen, so daß, wann man jetzt das Gefäß mit Wasser und festem Körper wägt, man nicht $p + P$, sondern den kleineren Wert π erhält; die Differenz $p + P - \pi$ ist also das Gewicht des ausgetretenen Wassers, und folglich die Dichte s des Körpers

$$s = \frac{P}{p + P - \pi} \quad .$$



Figur 29.

Eine Form des Pyknometers, welche die mancherlei Fehlerquellen, die dem Verfahren anhaften, möglichst verringert, ist die von E. Wiedemann[3] (Figur 29). a ist ein eingeschliffener Glasstöpsel, c ein Schliff. Zunächst wägt man das Pyknometer mit dem schwach gefetteten Stöpsel a für sich, verbindet es dann mit dem anderen Teile, schließt e, dessen Hohlraum vorher mit einem Tropfen Wasser gefüllt worden ist, öffnet f und evakuiert mit der Quecksilberluftpumpe möglichst bis zum Vakuum. Dann läßt man aus h das vorher gut ausgekochte Wasser eintreten, löst das Pyknometer bei c los, wischt das Fett ab und wägt; schließlich trocknet man es aus, bringt das Pulver hinein und wiederholt das eben beschriebene Verfahren.

[1] S. Wied. Ann., Beibl. **6.** 417. — [2] P. Gisevius, Diss. Bonn 1882. — [3] E. Wiedemann, Wied. Ann. **17.** 983. 1882; Modifikationen von R. Schulze, ibid. **28.** 144. 1886.

Das WIEDEMANNsche Pyknometer ist besonders für Pulver sehr geeignet. Andere Formen rühren von FLECK (für feinste Pulver) und PIOTROWSKI (Niederschläge) her.

Es ist gleich hier auf die verschiedenen Temperaturkorrektionen hinzuweisen, welche, wie bei allen Dichtebestimmungen, so auch bei der Anwendung des Pyknometers anzubringen sind. Zunächst werde angenommen, daß während der ganzen Versuchsdauer die Temperatur konstant sei. Ist sie gleich 4^0, so erhält man ohne jede Korrektur die Dichte des Körpers bei 4^0. Ist sie eine andere, so hat man zu berücksichtigen, daß alsdann das Wasser nicht die Dichte 1, sondern eine andere δ hat; in demselben Verhältnis ist also auch die wahre Dichte des Körpers bei jener Temperatur kleiner als die direkt gefundene; man muß also, um erstere zu erhalten, letztere mit δ multiplizieren. Die Größe δ kann man aus den Tabellen (s. unten) entnehmen. Die gefundene Dichte gilt dann ebenfalls für die Versuchstemperatur.

Ändert sich hingegen während des Versuchs die Temperatur, und ist sie bei der Wägung mit Wasser allein t, bei der Wägung mit Wasser und Körper t', so ist wegen der alsdann bei beiden Wägungen verschiedenen Dichten des Wassers δ und δ', sowie wegen der kubischen Ausdehnung des Glases (linearer Ausdehnungskoeffizient β) noch eine besondere Korrektion an dem Gewichte des ausgetretenen Wassers anzubringen, um aus ihm das Gewicht w des bei der Temperatur t' dem Körper gleichen Volumens Wasser zu erhalten; es ist nämlich zu setzen, wenn g das Gewicht des leeren Gefäßes ist,

$$w = p + P - \pi + (p - g)\,[\delta' - \delta + 3\beta\,(t' - t)] \quad .$$

Diesen Wert hat man dann in die Schlußformel für die wahre Dichte des Körpers

$$s = \frac{P}{w}\delta'$$

einzusetzen.

Will man außerdem noch die Korrektion wegen des Gewichtsverlusts in der Luft anbringen, so benutzt man statt der letzten Formel, unter λ die Dichte der Luft verstanden, die folgende:

$$s = \frac{P}{w}(\delta' - \lambda) + \lambda \quad .$$

In den meisten Fällen genügt es, für 3β den Wert 0,000025, für λ den Wert 0,0012 zu setzen: anderenfalls vergleiche man die unten folgenden Tabellen und den Artikel „Ausdehnung". Der Einfluß von λ wird verhältnismäßig groß, wenn der untersuchte Körper sehr schwer oder sehr leicht ist.

Eine Anzahl von hierher gehörigen Spezialapparaten, wie die mannigfaltigen Densimeter, Xylometer u. s. w. hat ausschließlich technisches Interesse.

3. Hydrostatische Methode, gewöhnliche Anordnung. Nach dem archimedischen Prinzip verliert ein Körper, in Flüssigkeit getaucht, so viel an Gewicht, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt. Ist also G sein Gewicht in Luft, g in Wasser und σ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so ergibt sich das spezifische Gewicht des festen Körpers aus der Proportion $G : G - g = s : \sigma$; es ist also

$$s = \frac{G}{G - g}\sigma$$

und insbesondere, wenn die benutzte Flüssigkeit Wasser von 4^0 ist:

$$s = \frac{G}{G - g} \quad .$$

Gewöhnlich hängt man den Körper mit einem dünnen Drahte oder Faden an die Schale der zur Wägung dienenden Wage auf; von dem Zähler G ist alsdann das Gewicht des Fadens in Luft, von dem Nenner $G - g$ sein Gewichtsverlust im Wasser abzuziehen.

Bei Körpern, die nicht mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit in Berührung gebracht werden dürfen, wendet man den Kunstgriff an, sie in Paraffin, Vaseline oder eine ähnliche Substanz einzubetten; man muß dann das spezifische Gewicht dieser Substanz kennen oder bestimmen, oder aber ein Verfahren anwenden, bei dem es aus der Formel herausfällt. Eine Methode der letzteren Art ist z. B. die von Smeeth[1], bei der das Luftgewicht des Körpers G, das Wassergewicht eines leichten Uhrglases mit einem Quantum klaren Vaselins G' und das Wassergewicht desselben mit eingeschlolzenem Körper G'' bestimmt wird; es ist dann

$$s = \frac{G'}{G - (G'' - G')} .$$

Eine sehr bequeme Modifikation des hydrostatischen Verfahrens stellen die Dichtewagen für feste Körper dar. Der Körper wird durch ein Laufgewicht äquilibriert, und nach dem Eintauchen des Körpers in Wasser (oder eine andere Flüssigkeit) durch Verschiebung des Läufers das gestörte Gleichgewicht wiederhergestellt; eine beigegebene Tabelle gestattet, aus den beiden Läuferstellungen das spezifische Gewicht direkt (bei anderen Flüssigkeiten mittels einer kleinen Umrechnung) zu finden.

4. Mit der Nicholsonschen Senkwage (Figur 30). Dieselbe besteht aus einem hohlen, beiderseits konisch zugespitzten Messingzylinder, der oben an einem Stäbchen einen Teller, unten ein konisches Gewicht mit ebenfalls ebener Platte trägt. Das Gewicht des Apparats ist so gewählt, daß eine an dem Stäbchen angebrachte Marke beim Eintauchen des Apparats in Wasser aus diesem hervorragt. Man kann es nun einerseits durch Auflegen von Gewichten G, andererseits durch Auflegen des zu untersuchenden Körpers K nebst geeigneten Zusatzgewichten g auf die obere Platte erreichen, daß beide Male die Senkwage bis zur Marke eintaucht (vorausgesetzt, daß nicht schon der Körper allein zu schwer ist). Dann ist offenbar $K + g = G$, also $G - g$ das absolute Gewicht des Körpers. Legt man nun drittens den Körper auf die untere Platte, so verliert er an Gewicht, und man wird, um wieder auf die Marke einzustellen, zu g noch ein weiteres, dem Gewichtsverlust des Körpers in Wasser gleiches Gewicht g' auf die obere Platte hinzufügen, so daß auf derselben jetzt das Gesamtgewicht G' sich befindet. Es ist dann



Figur 30.

$$s = \frac{G - g}{g'}$$

oder auch

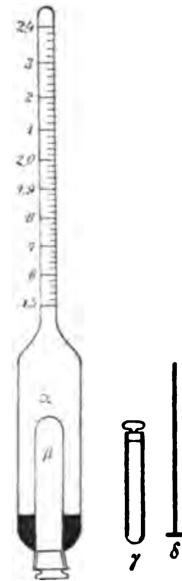
$$s = \frac{G - g}{G' - g} .$$

In neuerer Zeit sind mehrfach Modifikationen dieses Apparats konstruiert worden.

5. Mit dem Aräometer. Dieser für Flüssigkeiten so wichtige Apparat (s. w. u). ist verschiedentlich auch der Dichtebestimmung fester Körper angepaßt worden; es seien wenigstens einige neuere Apparate dieser Art erwähnt. Fulton[2]

[1] W. F. Smeeth, Proc. Dubl. Soc. **6**. 61. 1888. — [2] H. B. Fulton, Ztschr. f. analyt. Chemie **33**. 579. 1894.

verwendet eine unten mit einem Stiel und einer Quecksilberkugel versehene, oben offene Glasröhre mit Teilung; man läßt sie in Wasser schwimmen, gießt in die Röhre Wasser bis zum Nullpunkte der Teilung und liest den Stand des äußeren Wassers ab; dann bringt man den Körper in das Röhrchen und liest wieder innen und außen ab; die äußere Differenz, dividiert durch die innere, liefert das spezifische Gewicht des Körpers. — Das Instrument von P. FUCHS[1] ist in Figur 31 abgebildet. Man schüttet das Pulver in das Gläschen γ, das als Differentialaräometer bezeichnet wird, preßt es mit dem Plättchen δ leicht fest, verschließt das Gläschen und steckt es in die Kammer β des Aräometers α; taucht man dieses nun in Wasser von 15°, so erlaubt die empirisch graduierte Skala, am Wasserspiegel direkt das spezifische Gewicht abzulesen. — Die Methode von GUGLIELMO[2], die besonders für sehr geringe Mengen fester Substanz geeignet ist, weil sie die in diesem Falle sehr erheblichen Fehlerquellen anderer Methoden ausschließt, beruht auf dem völlig untertauchenden Aräometer des Verfassers (s. w. u.). Wird nämlich an diesem in der Entfernung l von der Drehungsachse eine Belastung vom scheinbaren Gewicht p angebracht, so ist die Neigungsänderung des Instruments α sehr angenähert durch die Formel $p\,l = k \operatorname{tg} \alpha$ gegeben, wo die Konstante k durch Auflegen bekannter Gewichte bestimmt wird; die Neigung wird mittels Mikroskops oder Spiegelablesung gemessen; durch Beobachtung in zwei verschiedenen Flüssigkeiten wird die Bestimmung des absoluten Gewichts umgangen; die stets gleiche Entfernung von der Achse wird durch eine besondere Vorrichtung garantiert.



Figur 31.

6. Nach dem umgekehrten archimedischen Prinzip. Wenn man einen Körper in Wasser taucht, so nimmt nicht nur das Gewicht des Körpers um das Gewicht der verdrängten Wassermenge ab, sondern auch das Gewicht des Wassers um ebensoviel zu. Man wägt hiernach ein Gefäß mit Wasser und bestimmt dann die Gewichtszunahme, welche eintritt, wenn man den betreffenden Körper, den man an einem Faden mit der Hand hält oder an einem festen Stativ aufhängt, in das Wasser taucht; der Quotient aus dem absoluten Gewichte des Körpers und jener Gewichtszunahme ist alsdann wiederum sein spezifisches Gewicht.

7. Mit Jollys hydrostatischer Federwage.[3] An einem spiralförmigen Drahte hängen übereinander zwei Wagschalen, von denen die untere ständig in Wasser taucht. Je nachdem man den zu untersuchenden Körper auf die obere oder untere Schale legt, erfährt die Spirale die Verschiebungen d und d'; es ist dann $s = d/(d - d')$. Die Verschiebungen mißt man an einer Skale oder, wenn es sich um größere Genauigkeit handelt, mit dem Kathetometer. Man kann diese Messungen auch vermeiden, wenn man am unteren Ende der Spirale eine Marke anbringt und nun (ganz ähnlich wie bei der Senkwage) die Gewichte bestimmt, welche, auf die obere Schale gelegt, die Marke in eine bestimmte Stellung bringen, je nachdem die Schalen leer sind oder der Körper auf der oberen oder drittens der Körper auf der unteren Schale liegt.

8. Auflösungsmethode. Für sehr leicht lösliche Substanzen hat ZEHNDER[4] eine Methode angegeben, welche im wesentlichen darauf beruht, daß ein mit Luft und dem Körper gefülltes Pyknometer umgekehrt unter Wasser gestülpt wird, so daß beim Öffnen der Körper herausfällt, statt dessen dringt Wasser in das

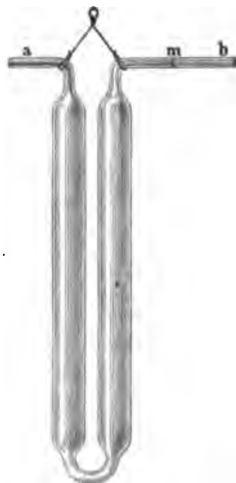
[1] P. FUCHS, Ztschr. f. d. Glasinstr.-Ind. **7.** 113. 1898. — [2] G. GUGLIELMO, Rend. Acc. Linc. (5) **9.** (2) 261. 1900. — [3] PH. v. JOLLY, Münch. Ber. 1864. p. 162. — [4] L. ZEHNDER, WIED. Ann. **29.** 249. 1886.

Fläschchen, außerdem ist aber dafür gesorgt, daß die an dem Körper haften gebliebene Luft ebenfalls wieder zurückgeführt wird.

9. Durch Vergleichung mit gleich dichten Flüssigkeiten. Man stelle eine Flüssigkeit her, in welcher der Körper gerade schwebt, ohne andererseits von ihr durchdrungen oder chemisch angegriffen zu werden. Die spezifischen Gewichte sind alsdann gleich. Hierzu eignen sich u. a. folgende Flüssigkeiten, deren Dichten meist zwischen 2 und 4 liegen: Merkuronitrat, Lösungen von Quecksilberjodid in Jodkalium oder Jodbaryum, Chlorzink oder Chlorblei (s = ca. 5), Lösungen von Wolframboraten u. s. w. Ferner nach RETGERS[1] u. a.: eine Mischung von Methylenjodid und Benzol oder Xylol, eine Mischung von Jodsilber und Jodkalium; Bromal ($s = 3{,}34$), Jodal ($s = 3{,}7$ bis $3{,}8$), kieselsaures Jodoform ($s = 3{,}4$), Lösung von Selen in Bromselen ($s = 3{,}7$), endlich Vierbromacetylen, das billig ist, sich an der Luft nicht ändert und mit Äther in allen Verhältnissen mischt.[2] — Einen besonderen Apparat hat WARRINGTON[3] konstruiert; er schwebt bei t Grad in Wasser, wenn sich in seinem unteren Teile p Gramm Quecksilber oder in seinem Innern P Gramm des Körpers und p' Gramm Quecksilber befinden; sind s, s' und s'' die Dichten des zu bestimmenden Körpers, des Wassers und des Quecksilbers bei t Grad, so hat man die Formel



Figur 32.



Figur 33.

$$s = \frac{s'}{1 - \left[\frac{p - p'}{P}\left(1 - \frac{s'}{s''}\right)\right]} \,.$$

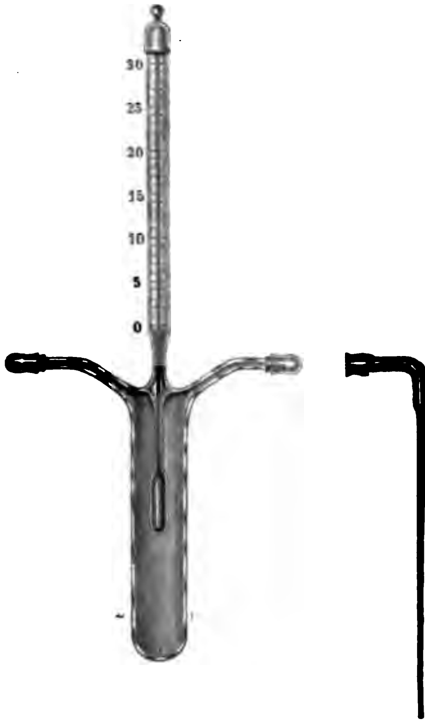
Nach J. JOLY[4] kann man diese Methode auch auf poröse Körper, oder solche von sehr großer Dichte anwenden, indem man sie in Paraffin bettet, die

[1] J. W. RETGERS, Ztschr. f. phys. Chem. **3**. 289. 1889: **4**. 189. 1889; **11**. 328. 1893. — [2] W. MUTHMANN, Ztschr. f. Krist. **30**. 73. 1898. — [3] A. W. WARRINGTON, Phil. Mag. (5) **48**. 498. 1899. — [4] J. JOLY, Proc. Dubl. Soc. **5**. 41. 1886. — Weitere Ausführung der Methode nebst Erweiterung Phil. Mag. (5) **26**. 29. 1888.

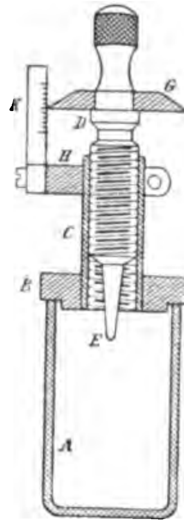
Dichte des ganzen Präparats bestimmt, und schließlich den Einfluß des Paraffins eliminiert. Als Flüssigkeit wird hierbei eine gemischte Lösung von Quecksilberjodid und Jodkalium empfohlen, der man jede beliebige Dichte bis hinauf zu 2,8 geben kann. Man kann auf diese Weise das spezifische Gewicht ganz kleiner Körper bis hinab zu 1 cg bestimmen.

B. Flüssigkeiten.

1. Durch Wägung und Volumenbestimmung. In kalibrierten Röhren oder Gefäßen läßt sich letztere leicht direkt ausführen. Nur muß man die kapillaren Fehlerquellen dadurch vermeiden, daß man die gewogene Flüssigkeitsmenge nicht in die leere, sondern in die schon vorher mit etwas gleicher Flüssigkeit gefüllte Röhre gießt und stets den horizontalen Teil der Oberfläche abliest; die Ablesung selbst erfolgt mit Skale oder Kathetometer.



Figur 34.



Figur 35.

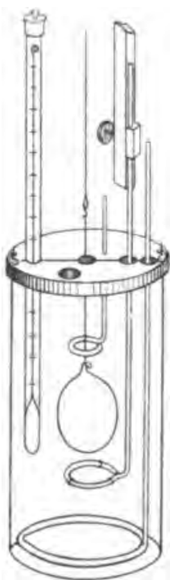
2. Mit dem Pyknometer (s. oben), dem für diesen Zweck verschiedene Formen gegeben worden sind. Eine derselben zeigt Figur 32. Der Verschluß ist hier gleich mit einem Thermometer verbunden; *A* ist die Thermometerkugel, *h* die Schliffstelle, *c* ein Seitenröhrchen, in dem die Marke *m* zur Festlegung eines stets gleichen Flüssigkeitsvolumens dient. Eine andere Form ist die von SPRENGEL[1] (Figur 33). Von einem *U*-Rohre sind die engen Teile oben nach beiden Seiten horizontal umgebogen, wobei der linke *a* kürzer und enger als der rechte *b* ist. Letzterer trägt nahe der Biegung eine Marke *m*. *b* wird eingetaucht, bei *a* unter Einschaltung eines Kugelrohres gesaugt und so lange entweder abgetupft oder mittels eines Stäbchens zugegeben, bis in *b* die Flüssigkeit gerade bis *m* steht. Das LANDOLTsche Pyknometer[2] (Figur 34) trägt beiderseits Röhrchen mit Käppchen; die Füllung erfolgt, indem man das eine derselben durch einen aufpassenden Heber ersetzt. Noch andere Formen sind von KAHLBAUM[3] anegeben.

[1] H. SPRENGEL, POGG. Ann. **150.** 459. 1873. — [2] H. LANDOLT, Das optische Drehungsvermögen organ. Substanzen, Ber. 1879. — [3] G. KAHLBAUM, WIED. Ann. **19.** 378. 1883.

Eine Abänderung des SPRENGELschen Pyknometers hat MINOZZI[1] angegeben; an das Gefäß schließen sich oben und unten enge Röhren, die obere mit der Volumenmarke hat einen weiteren Fortsatz mit Stöpsel oder Rohrstück zur Verbindung mit der Saugvorrichtung; das untere ist *U*-förmig nach aufwärts gebogen und endigt in ein horizontales Stück, über das eine Verschlußkapsel und ein Saugrohr zum Füllen geschliffen sind. Der Apparat ist besonders geeignet zum Messen von stark ausdehnbaren Flüssigkeiten. — Das von GRIBBEN[2] konstruierte Pyknometer zeichnet sich durch Verschluß mit Mikrometerschraube sowie durch die Messung mit Skala und Trommel aus; durch die Figur 35 wird es zur Genüge erläutert.

Spezielle Pyknometer zur Bestimmung des spezifischen Gewichts von Flüssigkeiten bei höheren Temperaturen hat R. SCHIFF[3] konstruiert. Wegen pyknometrischer Methoden für zähe Flüssigkeiten vgl. J. W. BRÜHL, Chem. Ber. **24**. 182. 1891. — C. SCHEIBE, ibid. p. 358.

Hieran mögen dann gleich einige weitere, vorzugsweise für den Chemiker wichtige Methoden, deren Erwähnung hier genügt, angeschlossen werden: Die Methoden von RAMSAY[4] und von SCHALL[5] für siedende Flüssigkeiten, sowie die Methode von BLÜMCKE[6] für Flüssigkeiten, welche Gase unter hohem Drucke absorbiert enthalten.



Figur 36.

3. Nach dem archimedischen Prinzip (s. oben). Man wägt irgend einen Körper, z. B. eine an einem Drahte aufgehängte, teilweise mit Quecksilber gefüllte Glaskugel der Reihe nach in Luft (1), in Wasser (2), und in der zu untersuchenden Flüssigkeit (3); es ist dann $s = (1 - 3)/(1 - 2)$. Bei den von BRUNNER konstruierten Glasstücken ist der Gewichtsverlust in Wasser gerade gleich 1 g, also sehr einfach $s = (1 - 3)$.

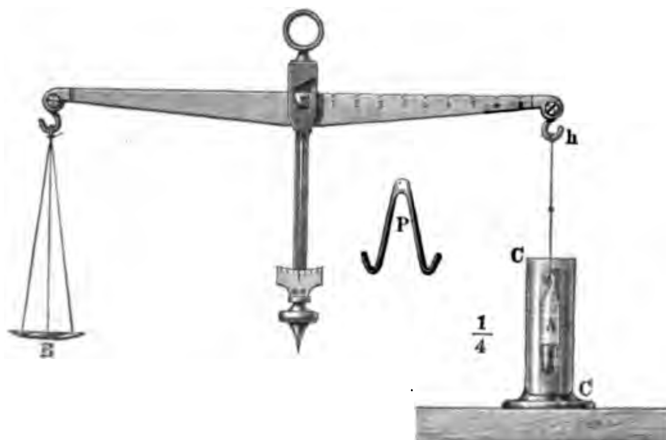
Wenn das Verdrängungsverfahren früher vielfach als nicht sehr genau bezeichnet wurde, so kann diese Meinung nicht mehr aufrecht erhalten werden, seitdem KOHLRAUSCH und HALLWACHS[7] gezeigt haben, wie genau man damit die Dichte verdünnter und sogar äußerst verdünnter Lösungen, unter Vermeidung aller Fehlerquellen bis zum erforderlichen Grade, ermitteln kann; jedenfalls ist der Fehler (eine Einheit der sechsten oder sogar nur einige der siebenten Dezimalstelle) kleiner als die unvermeidliche kleine Unsicherheit in der Angabe der Temperatur, für die die Bestimmung gelten soll. In Figur 36 ist der Apparat skizziert, das weitere ist in den Arbeiten selbst nachzusehen. — Neuerdings hat G. MIE[8] vorgeschlagen, den Senkkörper in solchen Fällen aus (in dünnwandiges Glas eingeschlossenen) reinem Wasser zu wählen.

4. Mit der Mohrschen Wage.[9] In derselben gelangt das vorige Prinzip in bequemer Weise zur Anwendung (Figur 37). An dem einen Arme des Wagebalkens hängt der Glaskörper *A*, der meist gleichzeitig als Thermometer dient, und der durch ein Gegengewicht am anderen Arme gerade äquilibriert wird. Gießt man dagegen Wasser in das Gefäß, so muß man den Reiter *P* auf das Ende des in zehn Teile geteilten Armes setzen, um das gestörte Gleichgewicht wieder herzustellen; das Gewicht des Reiters ist nämlich gerade gleich dem Gewichtsverlust des Glaskörpers in Wasser. Gießt man endlich statt Wasser die zu untersuchende Flüssigkeit in das Gefäß, so muß man, wenn sie

---

[1] A. MINOZZI, Rend. Acc. Linc. (5) **8**. (1) 450. 1899. — [2] W. GRIBBEN, Deutsche Mech. Ztg. 1901. p. 209. — [3] R. SCHIFF, Chem. Ber. **14**. 2761. 1881. — [4] W. RAMSAY, Journ. Chem. Soc. 1870. — [5] C. SCHALL, Chem. Ber. **17**. 2199. 1884. — [6] A. BLÜMCKE, WIED. Ann. **23**. 404. 1884. — [7] F. KOHLRAUSCH, ibid. **53**. 14. 1894; **56**. 185. 1895. — [8] G. MIE, BOLTZMANN-Festschrift 1904. p. 326. — [9] F. MOHR, Pharmaceutische Technik. 1853.

leichter als Wasser ist, den Reiter auf einen der Achse näheren Teilstrich bringen, wenn sie schwerer als Wasser ist, zu dem am Ende des Armes zu belassenden Reiter noch einen oder mehrere gleichschwere hinzufügen, und zwar alle bis auf den letzten ebenfalls auf das Ende, den letzten aber auf den geeigneten Teilstrich setzen. Erhält man auf diese Weise durch eine einzige Wägung das



Figur 37.

spezifische Gewicht der Flüssigkeit in Ganzen und Zehnteln, so dienen zwei weitere Reiter, von denen der eine 0,1 P, der andere 0,01 P wiegt, zur Ermittelung der zweiten und dritten Dezimalstelle. Bei konzentrierter Schwefelsäure müßte man z. B. einen P-Reiter an das Ende, einen anderen auf Teilstrich 8, den kleinen Reiter auf 4 und den ganz kleinen auf 8 bringen; es ergibt sich also $s = 1,848$.

Derartige Wagen werden in verschiedenartiger Ausführung, namentlich von Westphal[1], Rohrbeck und Reimann hergestellt. Übrigens sei bemerkt, daß in derselben Weise, wie hier die Hebelwage, so auch die Neigungswage und Wagen anderer Art zur Bestimmung des spezifischen Gewichts verwendet werden können.[2] Verbesserungen an der Mohrschen Wage haben auch Sartorius[3] und Guglielmo[4] vorgeschlagen.

5. Mit der Jollyschen Federwage (ganz analog wie oben bei festen Körpern).

6. Mit dem Aräometer. Es gibt zwei Arten von Aräometern; bei den einen, den Gewichtsaräometern, stellt man bei verschiedener Belastung stets dasselbe eingetauchte Volumen her; bei den anderen, den Skalenaräometern, bleibt das Gewicht immer dasselbe, und man liest an der Skala die Tiefe des Eintauchens ab.. Die Aräometer haben infolge ihrer Bequemlichkeit in der Praxis eine große Verbreitung gefunden; aber auch in der Wissenschaft leisten sie, dank den neuerlichen Vervollkommnungen, wesentliche Dienste. Von den älteren Apparaten sei zunächst je ein Vertreter beider Arten genannt. Das typische Gewichtsaräometer ist die Nicholsonsche Senkwage (s. oben). Ist deren Gewicht A, und P das Übergewicht, das erforderlich ist, um in Wasser die Marke einzustellen, so ist $A + P$ das Gewicht des dem eintauchenden Teile gleichen Volumens Wasser; ist nun das in der zu untersuchenden Flüssigkeit zur Einstellung der Marke erforderliche Übergewicht p, so ist $s = (A + p)/(A + P)$.

1 Westphal, Arch. Pharm. **10.** 322. 1867. — 2 S. hierüber den Bericht über die Lond. Ausst. Braunschw. 1878. p. 264 ff. — 3 F. Sartorius, N. Jahrb. f. Min. **2.** 237. 1894. — 4 G. Guglielmo, Rend. Acc. Linc. (5) **3.** (2) 299. 1894.

(Eine hydrostatische Wage, welche gewissermaßen eine Umkehrung der NICHOLSONschen Senkwage ist, hat J. JOLY[1] konstruiert, hauptsächlich in der Absicht, die aus der Adhäsion sich ergebenden Fehler zu verringern.)

Andererseits stellt Figur 38 ein typisches Skalenaräometer dar. Wie man sieht, besteht dasselbe aus einer Glasröhre, welche unten zur Beschwerung etwas Quecksilber enthält und oben in eine engere Röhre sich fortsetzt, damit schon ein kleiner Unterschied der eingetauchten Volumina sich durch einen verhältnismäßig großen Längenunterschied des herausragenden Stückes zu erkennen gebe, d. h. damit auf der auf dieser Verlängerung angebrachten Skale die Teilstriche recht weit auseinander kommen; die Empfindlichkeit wird dann eine um so größere sein. Bei einem derartigen Apparate ist offenbar das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, in die man ihn eintaucht, dem eingetauchten Volumen umgekehrt proportional. Die Skale muß also Volumenteile angeben. Man stellt sie jedoch gewöhnlich nicht durch wirkliche Ausmessung der Volumina her, sondern kalibriert sie empirisch. Dabei beschränkt man sich, damit der Apparat nicht zu lang werde, auf die Herstellung einer Skale, welche entweder für Flüssigkeiten, die schwerer als Wasser sind, oder für Flüssigkeiten, die leichter als Wasser sind, brauchbar ist. Im ersteren Falle mißt man die vor dem Zuschmelzen der Röhre einzufüllende Quecksilbermenge so ab, daß beim Eintauchen in Wasser die Skale gänzlich eintaucht und folglich die Wassermarke, die man jetzt anbringt, ganz oben hinfällt. Nach dem Zuschmelzen taucht man dann den Apparat in eine schwere Flüssigkeit, z. B. von $s = 2$. Die entsprechende Marke liefert dann den anderen festen Punkt der Skale, und es erübrigt nur noch, den Raum zwischen beiden, bezw. auch noch über letztere hinaus, in gleiche Teile zu teilen. Am bequemsten sind die Skalen, auf welchen unmittelbar die spezifischen Gewichte angegeben sind; bei anderen ist die Wassermarke mit 100, die andere mit 50 bezeichnet, so daß, wenn man die Zahl n abliest, $s = 100/n$ ist. Ganz analog bei den für leichtere Flüssigkeiten bestimmten Aräometern; nur liegt hier die Wassermarke am unteren Ende der Skale, und die andere Marke wird durch eine leichte Flüssigkeit ermittelt.



Figur 38.

Zuweilen nennt man Aräometer, welche gleich die spezifischen Gewichte angeben, Densimeter, die anderen Volumeter.

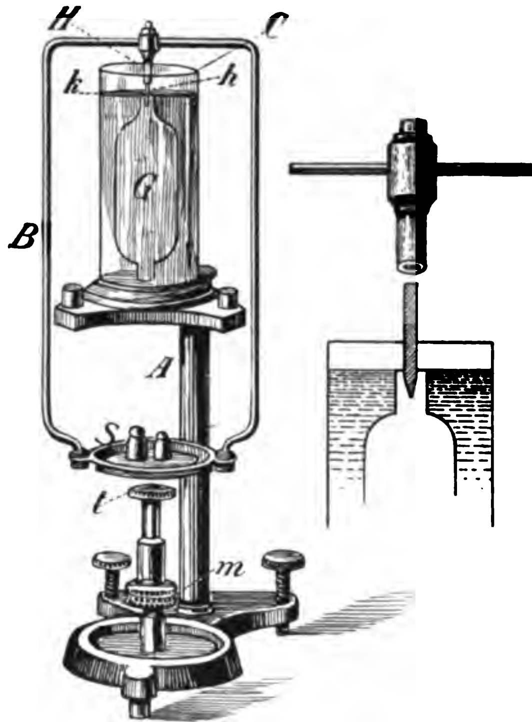
Die Aräometer leiden unter einer Reihe von Fehlern, die von verschiedenen Autoren, u. a. von FOCK[2] und MAKAROW[3] behandelt werden; namentlich kommt die Luft, die Temperatur, der Substanzverlust, ganz besonders aber die Oberflächenspannung und Kapillarerhöhung in Betracht. Hierüber existiert eine ausgedehnte Literatur, und es wird teils die rechnerische, teils die konstruktive Elimination der Fehlerquellen vorgeschlagen; dies hat dann zu einer ganzen Reihe neuer Typen geführt, von denen hier nur einige kurz erwähnt werden können.

Voranzuschicken ist eine Bemerkung über die Theorie des Kapillareinflusses. Was zunächst die Oberflächenspannung als solche betrifft, so gilt mit Rücksicht auf sie die Formel[4] für die Dichte s:

$$s = \frac{G + 2\pi r' H'}{G + 2\pi r H} \, \frac{V}{V'} \, ,$$

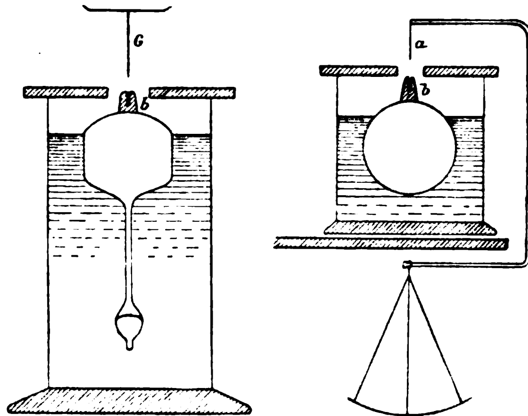
[1] J. JOLY, Proc. Dubl. Soc. **5**. 347. 1887. — [2] A. FOCK, Ztschr. f. phys. Chem. **2**. 296. 1888. — [3] S. MAKAROW, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **23**. (2) 324. 1891. — [4] G. VAN DER MENSBRUGGHE, Bull. Ac. belg. (3) **10**. 31. 1888.

worin G das Gewicht des Aräometers, $2r$ der Stieldurchmesser an der Oberfläche der Flüssigkeit, V das verdrängte Volumen, H die Oberflächenspannung ist, und wo die gewöhnlichen Zeichen für Wasse, die gestrichelten für die zu messende Flüssigkeit gelten; der Fehler ist also desto kleiner, je schwerer das Aräometer ist. Eine eingehende Untersuchung über das Problem hat später LOHNSTEIN durchgeführt, und er war es dann auch, welcher durch sein neues Instrument den Fehler, wie es scheint, radikal beseitigte.[1]



Figur 39.

Der Grundgedanke ist folgender: Der hohle Glaskörper endigt oben mit einem als Marke dienenden scharfen Rande; je nachdem dieser etwas über oder unter dem Flüssigkeitsniveau steht, bildet sich eine konkave oder konvexe Krümmung; dazwischen liegt die Stellung des genau horizontalen Spiegels, die der Verfasser als „Archimedische Aräometeranordnung“ bezeichnet; sie läßt sich optisch leicht konstatieren. Es wird, um diese Idee zu verwirklichen, in den Hals des Gefäßes ein massiver Glasstiel eingesetzt, auf den mittels einer Hülse und eines Bügels die Schale für die Gewichte aufgehängt wird; das Nähere ist aus der Figur 39 zu ersehen. — In anderer Weise, deren Idee ebenfalls von LOHNSTEIN herrührt, ist der Kapillarfehler bei den Aräometern von GUGLIELMO[2] beseitigt; es wird nämlich über die Spindel eine dünne Metall- oder Glimmerscheibe mit geeigneter Öffnung bis zu der Stelle geschoben, bis zu der das Aräometer ohne Kapillarität einsinken würde; durch Einstellen des Plättchens auf ebene Flüssigkeitsanhaftung erhält man den richtigen Wert. — GUGLIELMO hat auch noch verschiedene andere Aräometer angegeben, die bestimmten Spezialanforderungen genügen, und von denen zwei Formen in Figur 40 dargestellt sind. — Sonst seien noch die Aräometer von LASKA und SANDRUCCI[3] genannt.



Figur 40.

---

[1] TH. LOHNSTEIN, WIED. Ann. **44.** 52. 1891; Ztschr. f. Instrumentenk. **14.** 164. 1894; Chem.-Ztg. 1891. 11. Juni. — [2] G. GUGLIELMO, Rend. Acc. Linc. (5) **4.** (1) 77. 1895; (5) **8.** (2) 341. 1899; (5) **9.** (1) 9. 1900. — [3] W. LASKA, Ztschr. f. Instrumentenk. **9.** 176. 1889. — A. SANDRUCCI, Nuov. Cim. (4) **6.** 25. 1897.

Bei den üblichen Skalenaräometern ist die Skala naturgemäß nicht gleichförmig, sondern es häufen sich die Teilstriche in der Nähe der größten Dichte stark an; JANISCH[1] hat deshalb untersucht, welche Form man dem Gefäße geben müßte, damit die Skala gleichförmig werde; es findet sich als Leitkurve eine gleichseitige Hyperbel mit der Achse und der Horizontalen als Asymptoten.

Schließlich sei darauf aufmerksam gemacht, daß sich die Normaleichungskommission, insbesondere die Herren WEINSTEIN und PLATO eingehend mit der Theorie, der Bestimmung, der Prüfung u. s. w. der Aräometer beschäftigt haben.[2] Auch sei als gegenwärtiger Stand der Technik angeführt, daß man mit allen besseren Instrumenten die dritte Dezimale noch sicher erhält, mit den feineren modernen aber die vierte und eventuell noch deren Hälfte; weitergehende Genauigkeit kommt nur ausnahmsweise vor.

Eine besondere Klasse von Aräometern hat die Bestimmung, durch Messung des spezifischen Gewichts von Flüssigkeitsgemischen, Lösungen oder Lösungsgemischen den Anteil der einzelnen Bestandteile, d. h. die Zusammensetzung der Flüssigkeit zu ermitteln. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß diese Ermittelung nicht etwa immer auf rechnerischem Wege erfolgen kann. Sind nämlich s, s', S die spezifischen Gewichte der Bestandteile und der Mischung, und sind in 100 Volumenteilen der letzteren v bezw. v' Volumenteile der Bestandteile enthalten, so drückt die Gleichung

$$100\,S = v s + v' s'$$

die Tatsache aus, daß das Gesamtgewicht gleich der Summe der einzelnen Gewichte ist. Kann man nun weiter annehmen, daß auch das Volumen nach der Vereinigung gleich der Summe der einzelnen Volumina ist, so kann man $100 - v$ statt v' schreiben, also

$$100\,S = v s + (100 - v) s'$$

setzen, wodurch

$$v = 100\,\frac{S - s'}{s - s'}$$

wird. In vielen Fällen findet aber bei der Vereinigung zweier Stoffe eine Volumenänderung statt. Dann muß man zunächst mittels anderer Methoden die spezifischen Gewichte der verschiedenen Mischungen jener Stoffe ermitteln und hiernach die betreffende Aräometerskala berechnen.

So verhält es sich z. B. bei Mischungen von Wasser und Alkohol (s. unten); die betreffenden Apparate, welche Alkoholmeter heißen, sind daher sämtlich empirisch, von den verschiedenen Konstrukteuren aber ganz verschieden graduiert. Die älteren Apparate, z. B. von BAUMÉ, CARTIER und BECK, haben ganz willkürliche Skalen; bei den neueren (aber auch einigen alten, wie denen von GAY-LUSSAC und TRALLES) liest man unmittelbar den Prozentgehalt an Alkohol ab, und zwar bei dem von TRALLES die Raumprozente, bei dem von RICHTER die Gewichtsprozente.

Andere Instrumente dieser Art sind die Ölmesser, Galaktometer, Laugenmesser, Sacharometer, Salzwagen u. s. w. Zur Reduktion einiger willkürlicher Aräometerskalen auf spezifische Gewichte diene folgende Tabelle:

---

[1] E. JANISCH, Arch. d. Math. u. Phys. (2) 9. 332. 1890. — [2] B. WEINSTEIN, Metron. Beiträge Nr. 7. 1890; Ztschr. f. phys. Chem. 7. 71. 1891. — PLATO, Verhandl. Naturf.-Ges. Nürnberg 1893. p. 23.

Leichter als Wasser				Schwerer als Wasser		
Spez. Gew.	Baumé	Beck	Cartier	Spez. Gew.	Baumé	Beck
0,75	58,4	56,7	—	1,0	0,0	0,0
0,80	46,3	42,5	48,0	1,1	13,2	15,4
0,85	35,6	30,0	33,6	1,2	24,2	28,8
0,90	26,1	18,9	25,2	1,3	33,5	39,2
0,95	17,7	8,9	17,7	1,4	41,5	48,6
1,00	10,0	0,0	11,0	1,5	48,4	56,7
				1,6	54,4	63,7
				1,7	59,8	70,0
				1,8	64,5	75,6
				1,9	68,6	
				2.0	72,6	

7. Durch Vergleichung mit festen Körpern von bekanntem spezifischen Gewicht. Als solche können für rasche Bestimmungen die Wilsonschen Glasperlen dienen; man wirft sie, deren jede ein anderes auf ihr bezeichnetes spezifisches Gewicht hat, in die betreffende Flüssigkeit; es werden dann sämtliche bis auf eine entweder untersinken oder oben schwimmen, und nur jene eine wird im Innern der Flüssigkeit schweben; dem spezifischen Gewicht dieser kommt das der Flüssigkeit am nächsten.

Eine exaktere Ausgestaltung hat dieses Verfahren durch die Methode des völlig untertauchenden Aräometers erhalten, die ebensogut auch im vorigen Abschnitt hätte behandelt werden können. Die Aräometer von Reggiani[1] (nach dem System Pisati) umfassen zwei verschiedene Typen, je nachdem man mit konstanter oder variabler Dichte arbeitet. Der erste Typus besteht einfach aus einer vergoldeten Messingkugel von etwa 5 cm Durchmesser und 1,012653 spezifischem Gewicht bei 16,4 Grad; die zu prüfende Lösung wird so lange mit destilliertem Wasser aus einer Pipette verdünnt, bis die Kugel frei in der Mitte schwebt; außer der Temperaturkorrektion ist noch eine wegen der Mischungskontraktion anzubringen. Der zweite, noch genauere Typus besteht aus einem beschwerten Hohlglaskörper, auf den Platingewichte gesteckt werden. — Ganz ähnlich ist das völlig untertauchende Aräometer von Warrington[2] gebaut, so daß es eigentlich nichts Neues darstellt. — Dagegen ist noch das Neigungsaräometer von Guglielmo[3] zu nennen. Berührt nämlich ein unsymmetrisch gebautes Aräometer den Boden der Flüssigkeit oder eine in ihr angebrachte Horizontalebene, so wird es sich um einen Winkel neigen, der außer von der Lage des Schwer-, Unterstützungspunktes und Metazentrums sowie vom Gewicht und Volumen des Instruments auch noch vom Auftrieb, also von der Dichte der Flüssigkeit abhängt; ist α der Neigungsunterschied in zwei Flüssigkeiten von den Dichten s und s' und k eine empirisch zu bestimmende Konstante, so hat man die Formel

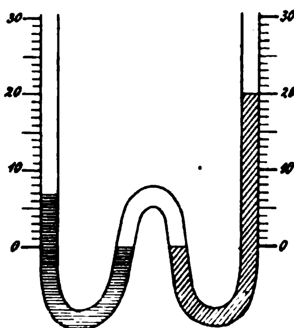
$$s' = s(1 + k \operatorname{tg} \alpha) \quad .$$

Durch geeignete Anordnung der Massen kann man die Methode sehr empfindlich machen; mittels Schrot und schmelzbaren Wachses kann man die gewünschte Lage leicht erreichen; auch kann man die Neigung, statt sie zu messen, durch Gewichte aufheben und diese Gewichte dann in die Rechnung einführen.

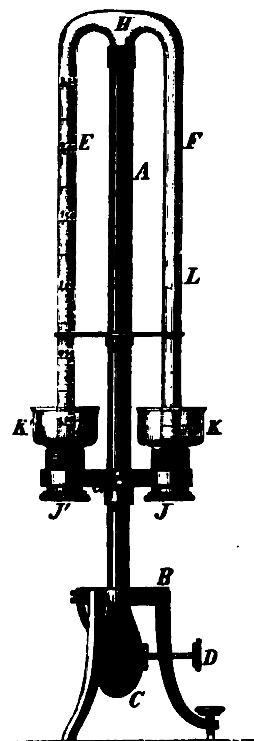
8. Mit kommunizierenden Röhren. In zwei kommunizierenden Röhren verhalten sich die Höhen verschiedener Flüssigkeiten umgekehrt wie ihre spezifischen Gewichte. Dieser Satz liefert also eine Methode zur Bestimmung der

[1] N. Reggiani, Atti Acc. Linc. (4) **6.** (1) 99. 1890. — [2] A. W. Warrington, Phil. Mag. (5) **48.** 498. 1899. — [3] G. Guglielmo, Rend. Acc. Linc. (5) **9.** (1) 71. 1900.

letzteren, bei welcher nur Längenmessungen bezw. Skalenablesungen, aber gar keine Wägung erforderlich ist. Bei Flüssigkeiten, welche sich bei der gegenseitigen Berührung nicht beeinflussen, kann man einfach ein *U*-Rohr mit langen Schenkeln anwenden und zuerst Wasser, dann die Flüssigkeit einfüllen bezw. umgekehrt, je nachdem die Flüssigkeit leichter oder schwerer als Wasser ist; es steht dann schließlich die schwerere Flüssigkeit in dem einen Schenkel, in der Biegung und im anderen Schenkel bis zur Nullmarke, wo sich dann die andere anschließt; in gleicher Höhe mit der erwähnten Marke befindet sich eine solche auch in dem ersten Schenkel, und von diesen Marken nach oben laufen die Skalen. Reicht das Wasser bis m, die Flüssigkeit bis n, so ist $s = m/n$. Darf die Flüssigkeit mit Wasser nicht in Berührung kommen, so trennt man sie entweder durch Quecksilber, das man vorher in die Biegung gießt, so daß es beiderseits bis zu den Nullmarken reicht, und füllt dann in die eine Röhre Wasser, in die andere so viel Flüssigkeit, bis dies wiederum der Fall ist; oder man wendet eine Röhre von der in Figur 41 angedeuteten Form an; zwischen beiden Flüssigkeiten befindet sich dann freilich in der Regel komprimierte Luft; ihr Druck ist aber beiderseits der gleiche und kommt daher nicht in Betracht.



Figur 41.



Figur 42.

Bei anderen Apparaten dieser Art füllt man die beiden Flüssigkeiten nicht ein, sondern läßt sie in einem luftverdünnten Raume aufsteigen; ein solcher wurde zuerst von Alexander angegeben. Sehr bequem ist das pneumatische Densimeter von Michaelis[1] (Figur 42). Mit der Schraube D preßt man aus einem Gummiball C etwas Luft heraus, die durch A aus E und F entweicht. Dann läßt man die Gefäße K und K' mit dem Querbalken G herab, füllt K' mit Wasser, K mit der Flüssigkeit und hebt sie jetzt wieder so weit, bis die Röhren eintauchen. Nun dreht man D wieder zurück, so daß C sich erweitert und die Flüssigkeiten in E und F aufsteigen. Durch kombinierte Benutzung der drei Schrauben D, J und J' bringt man dann die Flüssigkeiten in F, K und K' bezw. bis zu den Marken L' M M'. Der Stand in E ist dann unmittelbar das gesuchte spezifische Gewicht.

Die Idee ist in neuerer Zeit noch weiter verfolgt worden und hat zu verschiedenen Apparaten geführt, die in der Hauptsache wenig Interesse bieten; es seien daher nur kurz die Instrumente von Bohn, Handl, Salomon, Bonfall, Bermbach und Girardet[2] erwähnt. Das Instrument von Salomon besteht aus

[1] Michaelis, Ztschr. f. Instrumentenk. **3**. 268. 1883. — [2] A. Handl, Ztschr. z. Förd. d. phys. Unterr. **2**. 155. 1885; Wien. Ber. **101**. (2) 896. 1892. — W. Salomon, N. Jahrb.

zwei U-Röhren, die durch ein größeres Luftvolumen mit einander in Verbindung stehen; die beiden Höhenunterschiede liefern dann direkt das Verhältnis der spezifischen Gewichte. Bei dem Apparate von BERMBACH, der von LEYBOLD in Köln gebaut wird, befindet sich in einem ungleichschenkligen U-Rohre unten Hg als Indikator; in den langen Schenkel werden die Flüssigkeiten eingegossen, als Normalflüssigkeit dient Wasser. Die Wassersäule h treibt das Hg auf eine bestimmte Höhe, diese reproduziert man mit der Prüfflüssigkeit, indem man ihr die Höhe h' gibt; dann ist einfach $s = h/h'$; die Markierung der richtigen Hg-Höhe erfolgt durch eine elektrische Klingel.

9. Optische Methode. Für bestimmte Körperklassen besteht eine einfache Beziehung zwischen der Dichte und dem Brechungsquotienten für Licht; namentlich gilt dies für die verschiedenen Konzentrationen einer Lösung; die Messung des Brechungsquotienten läßt daher mit Hilfe einer Tabelle auf die Dichte schließen. Derartige Methoden sind namentlich seit der Ausbildung des Refraktometers zu einem für die Praxis bequemen und dabei außerordentlich empfindlichen Instrumente sehr in Aufnahme gekommen. Für die Methoden selbst muß indessen auf die entsprechenden Kapitel der Optik verwiesen werden (vgl. Bd. **6**. 583 u. 636).

10. Die Dichte von Lösungen kann man indirekt dadurch ermitteln, daß man die bei dem Lösungsakte stattfindende Volumenänderung dilatometrisch mißt; dieser Gedanke ist von KNÖFLER und neuerdings von MÖLLER[1] verwirklicht worden, wobei sich die Methode als sehr befriedigend erwies.

C. Gase.

Zu der eingangs dieses Artikels gegebenen Definition ist hier noch folgendes zu bemerken. Zunächst kann man entweder Wasser von 4° oder Luft von 0° und 76 cm Quecksilberdruck als Einheit zugrunde legen; in beiden Fällen hat man es mit einer ein für allemal gegebenen Konstanten zu tun, in bezug auf die die zu bestimmende Größe von dem Druck und der Temperatur des betreffenden Gases in hohem Maße abhängig ist, so daß es sich hier nicht bloß, wie bei dem Einfluß der Temperatur auf das spezifische Gewicht der festen und flüssigen Körper, um eine Korrektion handelt. Man muß sich also entweder darauf beschränken zu sagen: Das Gas hat bei der Temperatur t und dem Druck p das spez. Gewicht s (bezogen aus Luft von 0° und 760 mm) oder man muß eine ganze Versuchsreihe anstellen, um das spez. Gewicht des Gases bei verschiedenen Drucken und Temperaturen zu bestimmen. Für die eigentlichen Gase, d. h. für diejenigen Stoffe, welche bei gewöhnlicher Temperatur und Druck gasförmig sind, ist dies nun aber, wenigstens für die Ermittelung der spez. Gewichte innerhalb dieses Temperatur- und Druckbereichs, deshalb nicht nötig, weil das Verhalten dieser Stoffe sehr näherungsweise durch die Gesetze von BOYLE und GAY-LUSSAC bestimmt wird, so daß, wenn man das spez. Gewicht des Gases in einem einzigen Zustande, z. B. bei 0° und 760 mm kennt, es sich für jeden anderen Zustand nach der Formel

$$s = s_0 \frac{p}{760} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t}$$

berechnen läßt, wo $\alpha = 0{,}00367$ ist. Da diese Formel für alle der erwähnten

f. Min. **2.** 215. 1891. — BERMBACH, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **10.** 245. 1897. — F. GIRARDET, Bull. Soc. Chim. (3) **25.** 936. 1901.

[1] O. KNÖFLER, WIED. Ann. **38.** 136. 1889. — F. MÖLLER, DRUDES Ann. **7.** 256. 1902.

Klasse angehörigen Gase die gleiche ist, so wird das spez. Gewicht eines Gases bei 0 und 760, bezogen auf Luft von 0 und 760, genau ebenso groß sein, wie das spez. Gewicht des Gases bei t und p, bezogen auf Luft bei t und p. Macht man daher nunmehr die Unterscheidung, daß man den Ausdruck spez. Gewicht stets dann gebraucht, wenn Wasser von 4^0 oder Luft von 0^0 und 760 als Einheit zugrunde liegt, den Ausdruck Dichte dagegen, wenn man das Gas immer mit Luft von gleicher Temperatur und Druck vergleicht, so kann man sagen: das spez. Gewicht der Gase ist eine variable, die Gasdichte ist eine konstante Größe. Anders verhält es sich bei den übrigen Gasen, den sogen. Dämpfen, welche, außer bei ganz hohen Temperaturen, dem BOYLE-GAY-LUSSACschen Gesetz auch nicht annähernd gehorchen. Hier wird nicht nur das spez. Gewicht, sondern auch die Dichte, die sogen. Dampfdichte, mit Druck und Temperatur variieren, wenn auch nicht so stark wie jenes. Aus chemischen Gründen pflegt man bei Dämpfen meist nicht das spez. Gewicht, sondern die Dampfdichte zu ermitteln. Man muß dabei im allgemeinen das p und t hinzufügen, für welches sie gelten soll; tut man es nicht, so heißt das: p und t haben solche Werte, daß der Dampf von seinem Kondensationspunkte weit entfernt ist, sich also wie ein Gas verhält. (Tabelle 12.)

Nach diesen einleitenden Bemerkungen betrachten wir zunächst die Methoden für gewöhnliche Gase.

1. Direkte Methoden. Ein Glasballon, dessen Volumen v durch Füllung mit Wasser und Wägung dieses Wassers ermittelt ist, wird bei t^0 und dem Barometerstand b mit dem Gase gefüllt und gewogen; das Gewicht sei G. Dann wird mittels eines am Ballon angebrachten Hahnes durch Verbindung einer Luftpumpe ein Teil des Gases ausgepumpt, so daß der Druck im Ballon nur noch p, und das Gewicht G' is. Es ist dann, wie leicht auszurechnen, das spez. Gewicht bei 0 und 760

$$s_0 = \frac{G - G'}{v} \cdot \frac{760}{b - p}(1 + \alpha t) \quad .$$

Diese Methode[1], ohne weiteres angewandt, würde aber wegen der Ausdehnung des Glases, des Gewichtsverlustes in Luft u. s. w. zu ungenaue Resultate ergeben. Die Ausdehnung des Glases wurde zuerst von ARAGO und BIOT berücksichtigt, und zwar, wenn β der betreffende Koeffizient ist, durch Hinzufügung des Faktors $1 + \beta t$ im Nenner. Ein von allen Fehlerquellen freies Verfahren wandte REGNAULT[2] an. Anstatt den Ballon mittels Gewichten zu äquilibrieren, hängte er an die andere Wagschale einen zweiten Ballon von demselben Glase und möglichst gleichem Volumen. Der kleine Gewichtsunterschied, welchen die Ballons, mit Wasser gefüllt, ergaben, wurde durch ein Zusatzgewicht ausgeglichen, ebenso des weiteren die Gleichgewichtsstörung, welche beim Eintauchen der Ballons in Wasser infolge ihrer Volumenverschiedenheit eintrat, durch Anhängen eines kleinen Glaskörpers an die den kleineren Ballon tragende Schale. Hiermit ist der Einfluß der Luft eliminiert. Mittels eines eigenen Apparats wird nun der größere Ballon mit Gas von 0^0, dem Drucke p und völliger Trockenheit gefüllt; das zur Herstellung des Gleichgewichts jetzt von neuem erforderliche Zusatzgewicht sei g. Bei der Wiederholung des Versuchs habe das Gas wieder 0^0, aber den Druck p' und das Zusatzgewicht sei g'; es ist dann, bezogen auf Wasser,

$$s_0 = \frac{g - g'}{v} \cdot \frac{760}{p - p'}$$

[1] F. ARAGO und J. B. BIOT, Mém. Ac. 1806. — DUMAS und BOUSSINGAULT, Ann. Chim. Phys. (3) 1841. p. 3. — [2] V. REGNAULT, Mém. Acad. 21. — Andere Abänderungen rühren von BUFF, MARCHAND u. A. her.

und, bezogen auf Luft, wenn man mit dieser die entsprechenden Versuche anstellt, und dabei P und P', G und G' findet:

$$\sigma_0 = \frac{g - g'}{G - G'} \frac{P - P'}{p - p'} \quad .$$

Lord RAYLEIGH[1] hat darauf aufmerksam gemacht, daß von REGNAULT noch eine Fehlerquelle unbeachtet geblieben ist, nämlich die Zusammendrückung des Ballons durch den äußeren Überdruck und die damit verknüpfte Änderung des Auftriebs. CRAFTS[2] hat gezeigt, wie man die Volumenänderung bestimmen kann; bei REGNAULTS eigenem Apparate fand er sie zu 0,000247 des Gesamtvolumens. Um diese Korrektion zu umgehen, hat dann COOKE[3] ein modifiziertes Verfahren vorgeschlagen, gibt aber schließlich selbst zu, daß es unsicherer ist als die zu vermeidende Korrektion.

J. JOLY[4] hat die Methode dahin modifiziert, daß er zur Gewichts- und Volumenbestimmung zwei verschiedene Gefäße benutzt, zu jener ein viel kleineres, in dem sich das Gas unter hohem Drucke befindet, zu dieser einen großen mit Ansatzrohr versehenen Glaszylinder, an sein oberes Ende wird die bereits gewogene Kupferkugel mit dem Gase angeschraubt. Die Fehler werden auf diese Weise stark herabgemindert.

Ein Differentialverfahren nach derselben Grundidee haben MOISSAN und GAUTIER[5] bekannt gemacht; es ist schon auf Mengen von nur 100 ccm anwendbar.

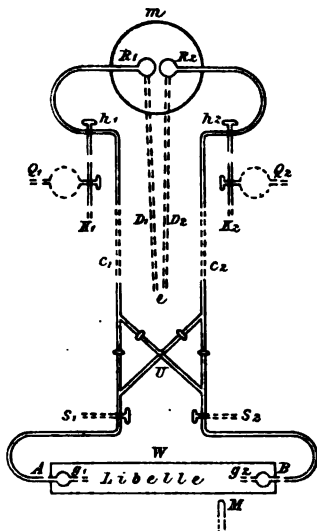
Eine Wage zur direkten und eventuell fortlaufenden Wägung von Gasen hat LUX[6] gebaut und mit der Zeit sehr vervollkommnet. Zur Aufnahme dient eine metallene Hohlkugel, die durch ein Gegengewicht am anderen Wagebalken äquilibriert wird; die Zufuhr und eventuell das Durchströmen des Gases erfolgt durch zwei an der Achse befestigte, in eigentümlicher Weise geführte Röhrchen. Ein Modell auf Spitzen gibt bis zu 2 %, ein solches auf Schneiden und mit verschiebbarem Reitergewicht bis zu 1/4 % Genauigkeit; auch eine Wage mit automatischer Aufzeichnung, sowie eine Differentialwage mit zwei Kugeln hat LUX konstruiert; letztere dient namentlich zur Gasanalyse.

2. Manometrische Methode. Diese Methode, deren Grundgedanke kaum einer näheren Erläuterung bedarf, ist wohl zuerst von RECKNAGEL[7] systematisch ausgearbeitet worden; sie hat dann sehr verschiedene Formen angenommen. Bei RECKNAGEL stehen zwei oben offene Röhren unten durch eine Flüssigkeit miteinander in Verbindung; enthalten sie zwei verschiedene Gase, so wird — bei Anwendung von Wasser — die Niveaudifferenz in Millimeter gleich der Gewichtsdifferenz in Kilogramm der Gassäulen von 1 qm Querschnitt; man kann also den Apparat als Differentialmanometer bezeichnen. — Die feinste Ausbildung hat die Idee in der Drucklibelle gefunden, die A. TOEPLER[8] zunächst für andere Zwecke gebaut und die dann M. TOEPLER[9] in einer für die Messung der Gas- und Dampfdichte geeigneten Weise umgestaltet hat. Ihr Hauptbestandteil ist eine leicht in der Mitte nach unten geknickte Röhre, die mit einem Xylolfaden gefüllt ist, dessen Stand mikroskopisch abgelesen wird. Zu beiden Seiten münden in die Libelle die Röhren, welche die beiden Gase enthalten, und zwar können die letzteren mit Hilfe eines Umschalters vertauscht werden. In der Figur 43a sind R_1 und R_2 die Querschnitte der vertikalen Druckrohre, c_1 und c_2 ihre horizontalen

---

[1] Lord RAYLEIGH, Chem. News **57**. 73. 1888. — [2] J. M. CRAFTS, C. R. **106**. 1662. 1888. — [3] J. P. COOKE, Proc. Amer. Acad. **24**. 202. 1889. — [4] J. JOLY, Phil. Mag. (5) **30**. 379. 1890. — [5] H. MOISSAN u. H. GAUTIER, Ann. Chim. Phys. (7) **5**. 568. 1895. — [6] F. LUX, Die Gaswage. Ludwigshafen 1887; Vortrag. Stuttgart 1888; Die neue Gaswage, Ztschr. f. analyt. Chem. **29**. 13. 1890. — [7] G. RECKNAGEL, WIED. Ann. **2**. 291. 1877. — [8] A. TOEPLER, ibid. **56**. 609. 1895. — [9] M. TOEPLER, ibid. **57**. 311. 1896.

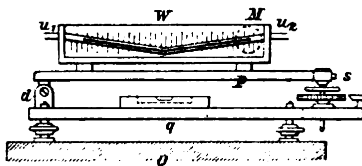
Verbindungen mit der Libelle; m ein Mantelrohr, D_1 und D_2 zwei Regulierrohre, U der Umschalter, M das Mikroskop; die Libellenröhre selbst ist in Figur 43b besonders dargestellt. Die Methode ist auch für kleine Mengen sehr genau und läßt sich überdies in Fällen durchführen, in denen Wägung ausgeschlossen ist.



Figur 43a.

Sonst seien noch die manometrischen Methoden von Fr. C. G. Müller[1] und von Schlössing[2] erwähnt; letztere beruht auf der Anwendung eines U-Rohres, auf der Vergleichung des Prüfgases mit Kohlensäure, sowie auf Absorption der letzteren.

3. Nach dem archimedischen Prinzip. Auf diesem beruhende Apparate sind insbesondere von Lux[3] und Lommel[4] konstruiert



Figur 43b.

worden. Da es mit Schwierigkeiten verknüpft ist, das Gefäß, in welches der in diesem Falle notwendigerweise große Senkkörper eintaucht, gasdicht zu machen und längere Zeit hindurch mit der gleichen Gasmenge gefüllt zu erhalten, so läßt man lieber einen kontinuierlichen Gasstrom durch das Gefäß hindurchgehen; auch dann wird das archimedische Prinzip angewendet werden dürfen.

Lux[5] hat übrigens für denselben Zweck auch andere Apparate konstruiert, darunter solche, welche das spez. Gewicht der Gase unmittelbar auf einer Skala abzulesen gestatten.

4. Durch Ausströmungsversuche. Sowohl die Theorie von Daniel Bernouilli[6], als auch die Versuche von Graham[7], Bunsen[8] u. a. führen zu dem Satze, daß die Ausströmungszeiten gleicher Volumina verschiedener Gase aus engen Öffnungen in dünner Wand den Quadratwurzeln aus ihren spez. Gewichten proportional sind; beobachtet man also die Ausflußzeiten t und t_0 für ein Gas und für Luft, so findet man, bezogen auf Luft,

$$s = \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 .$$

Für hohe Temperaturen ist die Methode von Emich[9] ausgestaltet worden; und zwar wird nur die Ausströmungsöffnung auf die hohe Temperatur gebracht, die Hauptmasse des Gases bleibt kalt; daß der Gasstrom die hohe Temperatur annimmt, wird nachgewiesen.

---

1 Fr. C. G. Müller, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **2.** 274. 1889. — 2 Th. Schloesing, C. R. **126.** 220. 1898; **126.** 476. 1898. — 3 F. Lux, Ztschr. f. Instrumentenk. 1885. p. 411; 1886. p. 255; Ztschr. f. anal. Ch. **25.** 3. 1886. — 4 E. v. Lommel, Ztschr. f. Instrumentenk. 1886. p. 109; Wied. Ann. **27.** 144. 1886. — 5 vgl. Anm. 8. — 6 D. Bernouilli, Hydrodynamica. Argent. 1738. p. 224. — 7 Th. Graham, Phil. Mag. (3) **2.** 175. 1833; Trans. Roy. Soc. 1846. p. 573; 1863. p. 385. — 8 R. Bunsen, Gasometr. Methoden. Braunschweig 1857. p. 128. — 9 F. Emich, Mon.-Hefte f. Ch. **24.** 747. 1903; Wien. Ber. **112.** (2a) 931. 1903.

Eine Modifikation des Verfahrens erhält man, wenn man nach dem Vorgange von MELDE[1] enge Kapillarröhren anwendet, die man mit Platinplättchen mit einer minimalen Öffnung verschließt; CHRIST[2] hat dieses Verfahren weiter ausgearbeitet und gezeigt, daß der MELDEsche Apparat nicht nur bequemes und schnelles Arbeiten erlaubt, sondern auch infolge der exakten Ablesung und der gleichmäßigen Druckverhältnisse genauere Resultate liefert als der BUNSENsche.

5. Akustische Methode. Sie ist zuerst von JAHODA[3] angewendet worden und zwar in der Weise, daß zwei gleiche Pfeifen, deren eine mit Luft, deren andere mit dem zu prüfenden Gase gefüllt ist, durch Längenänderung der einen zum Unisono gebracht werden. — Bald darauf hat WACHSMUTH[4] das Verfahren mit einer einzigen, nach und nach mit den verschiedenen Gasen gefüllten Pfeife (Labialpfeife) und mit Messung der Tonhöhe durchgeführt. Die Endformel für die Gasdichte ist, wenn p die Spannungen, n die Schwingungszahlen, λ die Wellenlängen, t die Temperaturen, $\varkappa$ die Verhältnisse der spez. Wärmen sind und α der GAY-LUSSACsche Koeffizient ist:

$$s = \frac{\varkappa p (1 + \alpha t) \lambda_0^2 n_0^2}{\varkappa_0 p_0 (1 + \alpha t_0) \lambda^2 n^2} .$$

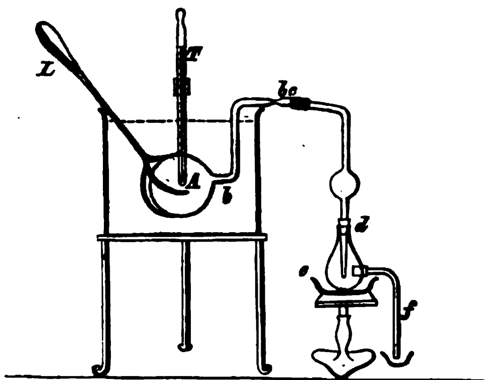
6. Wegen der besonderen Methoden für hohe Temperaturen sehe man weiter unten bei den Dämpfen.

D. Methoden für Dämpfe.

Ein Teil der obigen Methoden ist ohne weiteres oder mit geringer Modifikation auch auf Dämpfe anwendbar. Es sind aber speziell für letztere noch überaus zahlreiche besondere Methoden ausgearbeitet worden und, namentlich für chemische Zwecke, von Bedeutung geworden. Hier kann nur das Wichtigste angeführt werden.

1. Durch Wägung und Volumenmessung des Dampfes. Bei dieser von DUMAS[5] eingeführten Methode kann man sich folgenden Apparats bedienen (Figur 44).

An einem Glasballon A von ca. $^1/_4$ Liter Inhalt ist eine, am Ende c sich etwas verengende Glasröhre $b\,b$ angesetzt. Man bringt einige Gramm der Flüssigkeit, deren Dampf untersucht werden soll, in den Ballon. Das Bad, in welchem sich der Ballon befindet (z. B. ein Ölbad), erhitzt man auf 10 bis 20° über den Siedepunkt, so daß die ganze Substanz in dem Ballon verdampft ist, was man an dem Aufhören des Dampfaustritts aus c erkennt. Es sei bemerkt, daß c frei in die Luft münden kann, besser aber mit einem Kondensationsapparat $e\,d\,f$, Luftpumpe und Manometer verbunden wird. Man schmilzt nun bei c zu, liest t' und p' ab, trocknet den herausgenommenen und abgekühlten Ballon ab, wägt ihn und liest wieder t und p ab. Endlich wägt man nach Abbrechen der Spitze den Ballon, einmal mit Luft, sodann mit Wasser gefüllt. Die Gewichte des Ballons mit Wasser,



Figur 44.

[1] F. MELDE, WIED. Ann. **32.** 667. 1887. — [2] H. CHRIST, Inaug.-Diss. Marburg 1890. — [3] R. JAHODA, Wien. Anz. 1899. p. 216. — [4] R. WACHSMUTH, BOLTZMANN-Festschrift. 1904. p. 923. — [5] J. DUMAS, POGG. Ann. **9.** 1827.

Luft, Dampf seien M, m, m', die Dichte von Luft und Wasser σ und s, endlich 3β der kubische Ausdehnungskoeffizient des Glases; dann ist die gesuchte Dampfdichte

$$d = \frac{(m' - m)\frac{s}{\sigma} + (M - m')}{(M - m)\frac{p}{p'}\,\frac{1 + 0{,}00367\,t'}{1 + 0{,}00367\,t}\,[1 + 3\beta(t - t')]}$$

oder angenähert, aber nur für rohe Zwecke

$$d = \left(\frac{m' - m}{M - m}\,\frac{1}{\sigma} + 1\right)\frac{p'}{p}\,\frac{1 + 0{,}00367\,t}{1 + 0{,}00367\,t'} \quad .$$

Modifizierte Gestalten erhielt der Ballon durch PLAYFAIR und WANKLYN, PETTERSSON und PAWLEWSKI [1]; letzterer verkleinerte ihn überdies auf 20 bis 60 ccm und ersetzte das Zuschmelzen des Röhrchens durch rasches Schließen desselben, wodurch man den Vorteil erlangt, Experiment und Rechnung zu vereinfachen. Ferner wenden DEVILLE und TROOST [2] ein Dampfbad an, um das Verfahren auf höhere Temperaturen anwendbar zu machen; der Ballon ist dabei aus Glas oder, wenn 440° überschritten werden, aus Porzellan.

Sehr einfach, aber oft brauchbar, ist die REGNAULTsche Methode.[3] In zwei lose verschlossenen eisernen Flaschen wird gleichzeitig Quecksilber und die zu untersuchende Substanz erhitzt, so daß die überschüssigen Dämpfe entweichen; dann wird wieder abgekühlt und die Gewichte m und m_0 der Substanz und des Quecksilbers, welche zurückgeblieben sind, gemessen; sind v und v_0 die Volumina der Flaschen, so ist (da die Dampfdichte des Quecksilbers etwa 6,98 ist)

$$d = 6{,}98\,\frac{m}{m_0}\,\frac{v_0}{v} \quad .$$

Endlich ist noch die Methode von BUNSEN [4] zu erwähnen, welche unmittelbar die Gewichte gleicher Volumina Dampf und Luft bei gleichen t und p liefert.

2. Durch Volumenmessung des Dampfes, den ein gegebenes Flüssigkeitsgewicht entwickelt. Diese Methode ist die älteste von allen und von GAY-LUSSAC [5] ersonnen worden. In einem eisernen, zum Teil mit Quecksilber gefüllten Gefäße erhebt sich eine oben geschlossene, weite, mit ihm kommunizierende Glasröhre, welche, da sie etwa nur halb so lang wie eine Barometerröhre ist, völlig mit Quecksilber angefüllt ist. In ein Kügelchen aus ganz dünnem Glase, das an einer Stelle in eine offene Spitze ausläuft, bringt man die zu untersuchende Substanz in festem oder flüssigem Zustande, und schmilzt dann die Spitze zu. Nun läßt man das Kügelchen von unten in die Röhre aufsteigen, umgibt letztere zum Zwecke der Temperaturmessung mit einem weiten Glasrohre mit Wasser und setzt den ganzen Apparat auf einen Heizofen. Das Kügelchen wird dann sehr bald zersprengt, die Substanz verdampft und drückt das Quecksilber bis zu einem Teilstrich der kalibrierten Röhre hinab, an welchem man das auf 0° bezügliche Volumen direkt ablesen kann. Wog die in das Kügelchen gebrachte Substanz m, ist das abgelesene Dampfvolumen v_0 und 3β der kubische Ausdehnungskoeffizient des Glases, so ist bei der im Wasserrohre gemessenen Temperatur t und bei dem Drucke $p = b - h$ (b Barometerstand, h Quecksilberhöhe in der Röhre)

$$d = \frac{m}{v_0(1 + 3\beta t)} \quad .$$

---

[1] PAWLEWSKI, Chem. Ber. **16.** 1293. 1883. — [2] DEVILLE u. TROOST, Ann. Chim. Phys. (3) **58.** 257. 1858. — [3] V. REGNAULT, ibid. (3) **63.** 45. 1861. — [4] R. BUNSEN, LIEB. Ann. **141.** 273. 1867. — [5] GAY-LUSSAC, Ann. Chim. Phys. **80.** 118. 1811.

Die Methode, bezw. der Apparat hat dann später durch LANDOLT[1], GRABOWSKI, ganz besonders durch A. W. v. HOFMANN[2] mannigfaltige Verbesserungen erfahren.

3. Verdrängungsmethode.

a) Verdrängung von Flüssigkeiten. Diese Methode rührt von A. W. v. HOFMANN[3] her und ist von V. MEYER[4] u. A. modifiziert worden.

Am besten bedient man sich hierzu folgenden Apparats (Figur 45). In b wird die Substanz (Gewicht m) gebracht, dann durch die Röhre a Quecksilber, der Ballon, wenn er voll ist, oben zugeschmolzen, Quecksilber nachgegossen, bis es bei c ausfließt, dann der Ballon in das Bad gebracht, so daß Quecksilber ausfließt, p und t abgelesen, herausgenommen und der Quecksilberstand im Ballon bezeichnet. Der Druckunterschied zwischen diesem Stande und c sei, auf 0^0 reduziert, p'; ferner sei t_0 die Anfangstemperatur des Quecksilbers, α sein Ausdehnungskoeffizient, π seine Spannkraft bei t^0, δ seine Dichte, v das beobachtete Volumen des Dampfes; endlich M das Gewicht des ganzen, M' das des ausgeflossenen Quecksilbers. Durch Einführung der nötigen Korrektionen und Konstanten erhält man dann

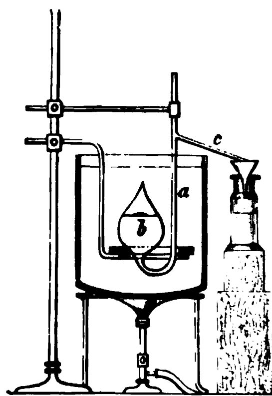
$$v = \frac{M'}{\delta} - \frac{M}{\delta_0}(\alpha - 0{,}0000275)(t - t_0)$$

und hiermit schließlich

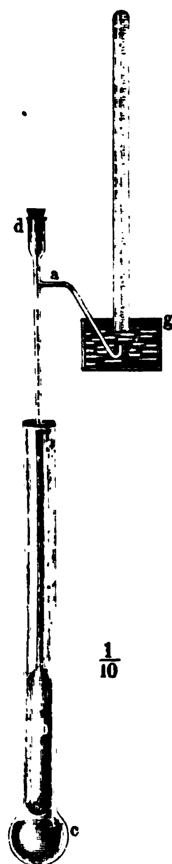
$$d = \frac{m}{0{,}001296\,v} \cdot \frac{760(1 + 0{,}00367\,t)}{p + p' - \pi} \ .$$

Bei der MEYERschen Modifikation tritt WOODsches Metall an die Stelle von Quecksilber.

b) Verdrängung von Gasen. Die erste derartige Anordnung rührt von DULONG[5] her, die einfachste und brauchbarste aber von V. MEYER[6] (Figur 46). An einen Zylinder von 100 ccm Inhalt und 200 mm Höhe wird ein 600 mm langes, 6 mm weites Glasrohr angeschmolzen, das oben in der Erweiterung d endet und durch einen Kautschukpfropfen verschlossen ist. Bei a geht ein enges Seitenrohr ab, das bald nach unten umbiegt und in Wasser unter der Öffnung eines kalibrierten Rohres endigt. Das Rohr db steckt in einem weiteren Rohre, das, je nach der Temperatur, aus Glas, Schmiedeeisen u. s. w. besteht und von dem aus der in c befindlichen Substanz entwickelten Dampf erfüllt ist. Je nach der erforderlichen Temperatur können als Hauptflüssigkeiten dienen: Wasser (Siedepunkt 100^0), Xylol (140^0), Anilin (185^0), Diphenylamin (310^0), Antrachinon (368^0) u. s. w., für ganz hohe Temperaturen wird eventuell ein Bleibad angewandt. Sobald



Figur 45.



Figur 46.

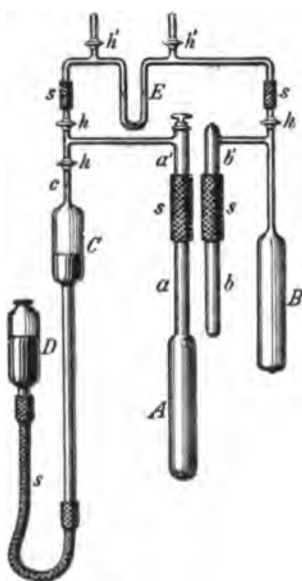
[1] H. LANDOLT, Chem. Ber. 5. 497. 1872. — [2] A. W. v. HOFMANN, ibid. 1. u. ff. — [3] A. W. v. HOFMANN, LIEB. Ann. Suppl. 1. 10. 1861. — [4] V. MEYER, Chem. Ber. 9. 1216; 11. 2068 ff. — [5] P. L. DULONG, C. R. 78. 536. 1874. — [6] V. MEYER, Chem. Ber. 11. 2253. 1879.

die Temperatur konstant geworden ist, wirft man die zu untersuchende Substanz, in ein Glaskügelchen oder Fläschchen eingeschlossen, von oben in das Rohr bd und schließt wieder; damit das Fläschchen beim Aufschlagen keinen Schaden anrichte, bedeckt man den Boden mit etwas Quecksilber oder dichter Glaswolle. Das Fläschchen platzt, und der sich bildende Dampf verdrängt ein ihm gleiches Volumen Gas, welches sich in dem kalibrierten Rohre über dem Wasser ansammelt. Als verdünntes Gas eignet sich Luft oder Stickstoff. Ist m das Gewicht der untersuchten Substanz, v das verdrängte Gasvolumen bei der Temperatur t des absperrenden Wassers, b der Barometerstand, h die Wasserhöhe im Rohre über dem äußeren Niveau, also, wenn s das spezifische Gewicht des Quecksilbers bezogen auf Wasser von t^0 ist, h/s der Quecksilberdruck jener Wasserhöhe, endlich π die Spannung des Wasserdampfes bei t^0, so hat man

$$d = \frac{m}{0{,}001296\, v} \; \frac{760(1 + 0{,}00367\, t)}{b - \frac{h}{s} - \pi} \; .$$

Diese Methode hat vielfache Abänderungen erfahren, so von V. MEYER [1] selbst, CRAFTS [2], MEUNIER [3] (für Bestimmungen bei vermindertem und variablem Druck), KLOBUKOFF [4] u. s. w.

Eine besondere Erwähnung verdient der neueste und, wie es scheint, in höchst befriedigender Weise funktionierende Apparat von NILSSON und PETTERSSON [5], mit welchem man unter exakter Temperaturmessung die Dampfdichte flüchtiger Körper in wenigen Minuten bestimmen kann (Figur 47). Der Verdampfungsraum A und die Rohre a und b sind aus Platin, alles übrige aus Glas. C ist die von c an graduierte Meßröhre, in welcher der Quecksilberstand mittels D verändert werden kann. E ist ein kapillares, mit einigen Tropfen konzentrierter Schwefelsäure gefülltes Differentialmanometer. A und B, ebenso a und b, ebenso die von hier zum Manometer gehenden Kapillarröhren sind genau gleich groß. Die Substanz wird in einem Becherchen nach a' gebracht und durch Quetschung von s dort gehalten; B wird auf 0^0 erhalten. Zur Füllung des Apparats dient trockene Kohlensäure. Während man A erhitzt, stellt man C fortwährend so ein, daß im Apparat kein nennenswerter Überschuß entsteht und nach Erreichung konstanter Temperatur die Schwefelsäure in beiden Röhren gleich hoch steht. Die Berechnung der Temperatur beruht darauf, daß das Gas in A sich unter konstantem Druck ausdehnt und die Wirkung der Temperaturerhöhung in a durch den gleichen Vorgang in b kompensiert wird. Sodann wird der im Apparat herrschende Druck durch kurzes Öffnen der Hähne h' beseitigt und das Becherchen aus a' in A fallen gelassen. Die Substanz vergast in wenigen Sekunden und das verdrängte Gasvolumen wird in C abgelesen, wobei E zur feineren Einstellung dient.



Figur 47.

[1] V. MEYER, Chem. Ber. in verschiedenen Bänden. — [2] J. M. CRAFTS, C. R. **90.** 184. 1880. — [3] J. MEUNIER, ibid. **98.** 1268. 1884. — [4] N. v. KLOBUKOFF, WIED. Ann. **22.** 465. 1884. — [5] L. F. NILSSON u. O. PETTERSSON, Journ. f. prakt. Chem. **33.** 1. 1886.

V. Meyer selbst in Verbindung mit Demuth und Krause[1] hat dann das Verfahren noch besonders zu dem Zwecke ausgestaltet, die Dampfdichte von Körpern unterhalb ihres Siedepunktes zu bestimmen. Als Grundlage dient die Tatsache, daß die Vergasung unterhalb des Siedepunktes durch Verdünnung des Dampfes mit einem indifferenten Gase begünstigt wird; als Verdünnungsmittel und Sperrgas dient am besten Wasserstoff, natürlich nur in Fällen, in denen er sich chemisch indifferent verhält; außerdem ist für möglichst schnelle Ausbreitung und Verdampfung der Substanz in der Birne Sorge getragen; Flüssigkeiten werden in kleinen Eimerchen aus Woodschem Metall oder dünnwandigem Glas eingeführt; feste Körper ohne Gefäß als kleine Stäbchen. Für Fälle, wo Wasserstoff ausgeschlossen ist, haben sich Stickstoff, Kohlensäure und auch Luft gut bewährt.

Endlich ist auf den Einfluß hinzuweisen, den bei dem Gasverdrängungsverfahren die angewandte Substanzmenge und die Form des Gefäßes ausübt; diese beiden Faktoren sind nur dann ohne Einfluß auf das Resultat, wenn der Dampf bei der Versuchstemperatur sich wie ein normales Gas verhält — eine Tatsache, die geradezu ein Kriterium für normale und anomale Dämpfe abgibt. Insbesondere wird, wie Biltz gezeigt hat, die Dampfdichte durch Erweiterung des Gefäßes erniedrigt, weil sie die Mischung des Dampfes mit dem indifferenten Gase erleichtert.[2]

4. Eine große Reihe von anderen Methoden, die hier nur summarisch behandelt werden können, und die zum Teil für die Messung unter vermindertem Druck, teils für hohe Temperaturen, teils für besondere Stoffklassen empfehlenswert sind. So die Methoden, welche auf Messung der Drucke oder der Druckdifferenzen beruhen, wie die von Malfatti und Schoop[3], Schall[4] (Vergleichung des Dampfdruckes der Substanz und des Druckes der aus einer bestimmten bezw. gleichen Menge Soda entwickelten Kohlensäure); von Richards[5] (ein zylindrischer Glaskolben und Ansatzröhren von bekanntem Gesamtvolumen, etwa 190 ccm, mit einem Grünwald-Meyerschen Fallapparat sind mit einem Barometerrohre verbunden und können teilweise evakuiert werden; beobachtet wird die Höhe der Quecksilbersäule vor und nach dem Verdampfen; auf dasselbe Prinzip haben schon Dyson[6], sowie Bott und Macnair[7] Methoden gegründet, ohne jedoch eine wesentliche Fehlerquelle zu berücksichtigen); Eykman[8] (Verdrängungsverfahren für geringen Druck, Verdünnung mit Wasserstoff, Ablesung der Drucksteigerung an einem Manometer oder Wägung der aus ihm ausfließenden Quecksilbermenge). — Ferner die Methoden von Klobukow (auf dem archimedischen Prinzip beruhend, „Dampfdichtearäometer"), Horstmann, Playfayr und Wanklyn, Neumann, Negri u. A. — Sodann die Methoden von Anschütz und Evans[9], derjenigen von La Coste nachgebildet; von Lunge und Neuberg[10] (Prinzip des Lungeschen Gasvolumeters, sehr einfach auch bei stark vermindertem Druck, der ohne Luftpumpe durch den Apparat selbst erzielt wird); Kohn und Bleier[11] (Verbindung einer V. Meyerschen Birne mit einem Differentialmanometer, Konstanz von Volumen und Temperatur, Messung der Druckerhöhung durch Vergasung der Substanz, Reduktion auf eine Konstante des Apparats, nämlich die Druckerhöhung durch das Milligramm-Molekulargewicht

---

[1] R. Demuth u. V. Meyer, Chem. Ber. **23.** 311. 1890. — A. Krause u. V. Meyer, Ztschr. f. phys. Chem. **6.** 5. 1890. — [2] H. Biltz, Chem. Ber. **21.** 2013. 2772. 1888. — V. Meyer, ibid. **21.** 2018. 1888. — [3] H. Malfatti u. P. Schoop, Ztschr. f. phys. Chem. **1.** 159. 1887. — [4] C. Schall, Chem. Ber. **20.** 1435. 1759. 1827. 2187. 1888; **22.** 140. 1889; **23.** 919. 1890; Journ. f prakt. Chem. **45.** 134. 1892. — [5] W. Richards, Chem. News **59.** 87. 1889. — Eine andere Methode desselben Autors Chem. News **59.** 39. 1889. — [6] G. Dyson, Chem. News **55.** 88. 1887. — [7] Bott und Macnair, Chem. Ber. **20.** 916. 1887. — [8] J. F. Eykman, ibid. **22.** 2754. 1889. — [9] R. Anschütz u. N. P. Evans, Lieb. Ann. **253.** 95. 1889. — [10] G. Lunge und O. Neuberg, Chem. Ber. **24.** 729. 1891. — [11] L. Kohn u. O. Bleier, Wien. Anz. 1899. p. 146; Monatsh. f. Chem. **20.** 505. 1899; **20.** 909. 1900.

jeglicher Substanz bei bestimmter Temperatur); S. YOUNG[1] (Ablesung des Meniskus in einer geschlossenen Röhre bei zwei verschiedenen Substanzmengen, aber gleicher Temperatur). — Endlich ist auf die pyrochemischen Methoden für Bestimmungen bei ganzen hohen Temperaturen, wie sie LANGER und V. MEYER[2] bekannt gemacht haben, hinzuweisen.

Resultate.

In den folgenden Tabellen ist ein, selbstverständlich nur kleiner Teil der nach den obigen Methoden erhaltenen Resultate zusammengestellt. Hierzu sind noch einige allgemeine Bemerkungen zu machen.

Die Dichten fester und flüssiger Körper hängen in geringem, die der Gase und Dämpfe in hohem Grade von der Temperatur ab. Bei festen und flüssigen Körpern bringt eine Steigerung der Temperatur um 100° meist nur eine Abnahme der Dichte um 1/1000 bis 20/1000 hervor, bei den Gasen, welche dem GAY-LUSSACschen Gesetz gehorchen, um 367/1000, bei den Dämpfen, soweit sie dies nicht ebenfalls tun, oft noch beträchtlich mehr. Alles weitere siehe in den betreffenden Artikel der „Wärmelehre". Die Tabellen enthalten meist nur die einer bestimmten Temperatur entsprechende Dichte und zwar, wenn nichts vermerkt, für 0° oder für mittlere Zimmertemperatur. Nur für Wasser, dessen Dichte bis 4° zunimmt und dann erst wieder fällt, für Quecksilber sowie für Luft ist die Dichte für eine ganze Reihe von Temperaturen angegeben, weil diese Zahlen in den obigen Formeln vielfach eine wesentliche Rolle spielen und auch sonst von besonderer Bedeutung sind.

Von dem Drucke, unter welchem der Körper steht, hängt seine Dichte ebenfalls ab. Bei festen und flüssigen Körpern ist aber die durch Drucksteigerung erzielte Dichtesteigerung wiederum sehr geringfügig, bei Gasen, welche dem BOYLEschen Gesetz genügen, ist die Abhängigkeit eine sehr starke: die Dichte ist dem Druck umgekehrt proportional; noch stärker ist sie bei den Dämpfen, so weit dieselben jenem Gesetze nicht mehr gehorchen. Das Nähere siehe bei den Artikeln „Elastizität", „Flüssigkeiten", „Gase", „BOYLEsches Gesetz", „Dämpfe". Hier sei nur folgendes bemerkt. Bei Hölzern ist die Dichte im trockenen Zustande meist sehr erheblich kleiner als im frischen. — Bei den festen Metallen läßt sich eine einfache Zahl für die Dichte meist deshalb nicht angeben, weil es ganz darauf ankommt, ob das Metall gegossen, gewalzt bezw. gezogen oder gehämmert ist. Durch Guß hergestelltes Metall ist fast immer am wenigsten dicht, gewalztes oder gezogenes dichter, gehämmertes am dichtesten. Eine gewisse Mittelstellung nimmt elektrolytisches Metall ein.

Hierzu kommt noch ein weiterer, die Metalle betreffender Umstand. Nicht nur, daß Stücke desselben Metalls, die auf verschiedenem Wege gewonnen sind oder von verschiedenen Fundorten stammen, verschiedene Dichte zeigen, sondern auch Bruchstücke, welche man von demselben Ganzen loslöst, zeigen eine oft beträchtliche, auf unvollkommene Homogenität dieses Ganzen hinweisende Verschiedenheit der Dichte. Diese Verschiedenheit ist zum einen Teil eine örtlich regellos verteilte (am größten bei Legierungen, z. B. Messing). Bei Messing ist außerdem eine reguläre Abnahme der Dichte von außen nach innen konstatiert worden, so daß also die beim Guß zuerst erstarrten Teile die dichtesten sind; und dieses Verhalten ist auch für andere Metalle wahrscheinlich.[3] Auch hat

---

[1] S YOUNG. Journ. Chem. Soc. Lond. **59**. 911. 1891. — Vgl. auch R. v. HIRSCH, WIED. Ann. **69**. 456. 1899. — [2] C. LANGER u. V. MEYER, Pyrochemische Untersuchungen. Braunschweig 1885. — Vgl. auch A. SCOTT, Proc. Ed. Soc. **14**. 410. 1887. — H. BILTZ und V. MEYER (Weißglut), Chem. Ber. **22**. 725. 1889. — [3] Vgl. z. B. HENNIG, WIED. Ann. **27**. 321. 1886.

W. SPRING[1] gezeigt, wie seltsam sich manche Stoffe bei starker Kompression hinsichtlich ihrer Dichte verhalten.

Aus alledem folgt, daß man für genauere Zwecke die Dichte von Metallkörpern stets eigens bestimmen muß.

Einen weiteren, und zwar meist überaus beträchtlichen Einfluß auf die Dichte hat der Aggregatzustand des Körpers. Beim Schmelzen tritt bei der Mehrzahl der Körper Verringerung, bei den übrigen (z. B. Wasser) Erhöhung der Dichte ein; s. „Schmelzen". Beim Verdampfen tritt stets eine starke Verminderung der Dichte ein; s. „Dämpfe". Im übrigen sieht man aus den Tabellen, daß zwar die meisten festen Stoffe dichter sind als die meisten Flüssigkeiten; es gibt aber auch einige Flüssigkeiten, welche dichter als die meisten festen Stoffe sind; und im Vergleich mit einigen festen Stoffen, z. B. Kork, sind sogar alle Flüssigkeiten dichter. Von den Gasen und Dämpfen sind zwar selbst die schwersten noch mindestens 20 mal so leicht wie die leichtesten festen oder flüssigen Stoffe; das gilt aber nur für gewöhnlichen Druck und nicht mehr für Drucke von mehr als 20 Atmosphären. Ist z. B. ein Gefäß mit Arsendampf von 50 Atmosphären Druck oder mit Sauerstoff von etwas über 400 Atmosphären Druck gefüllt, so würde ein Stück festen Lithiummetalls hineingebracht auf dem Dampfe schwimmen.

Besonderes Interesse beansprucht die Frage, wie sich zusammengesetzte Stoffe hinsichtlich ihrer Dichte zu der ihrer Bestandteile verhalten. Da zeigt sich nun, daß bei den eigentlichen chemischen Verbindungen ein einfacher Zusammenhang nicht besteht, daß aber bei den Lösungen und Gemischen wenigstens häufig die Dichte eine additive Eigenschaft oder, wenn das nicht, so doch eine Größe ist, die sich durch eine mehr oder weniger verwickelte Formel mit bald guter, bald freilich nur roher Annäherung darstellen läßt. Im allgemeinen findet bei der Vereinigung von Stoffen eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Volumens statt, und zwar in verschiedenem Maße je nach den sich vereinigenden Stoffen und den Verhältnissen, in denen sie sich vereinigen. So findet z. B., was die Metallegierungen betrifft, bei einigen, wie Gold—Silber, Gold—Kupfer, Silber—Kupfer, Zinn—Blei, Zinn—Antimon eine Vergrößerung, bei anderen, wie Kupfer—Zink, Kupfer—Zinn, Blei—Antimon eine Verkleinerung des Volumens statt, bei noch anderen gibt es eine bestimmte Zusammensetzung, bei der die Dichte ihr Maximum hat u. s. w. Man hat Grund zu der Annahme, daß diejenigen Mischungen, Legierungen, Amalgame u. s. w., bei denen der Gang der Dichte normal ist, physikalische Gemische, die anderen aber chemische Verbindungen sind; und es gibt dies geradezu ein Mittel zur Auffindung chemischer Verbindungen dieser Art ab.

Die Einzelheiten des Problems gehören zwar nicht hierher, sondern in die physikalische Chemie, in die Lehre von den Lösungen und Mischungen u. s. w.; es möge aber wenigstens für einige der Hauptklassen von zusammengesetzten Stoffen auf ein paar typische Arbeiten über die in Rede stehenden Verhältnisse kurz hingewiesen werden.

Zunächst, was die Legierungen von Metallen betrifft, eine Untersuchung von MAEY[2], in der gezeigt wird, daß für einige Legierungen die Formel für das spezifische Volumen

$$v = v_1 + (v_2 - v_1)\frac{p_2}{100} = a + bp$$

mit geringen Abweichungen erfüllt ist, während bei anderen große Abweichungen und unter Umständen sogar Maxima und Minima sowie Unstetigkeiten auftreten; im letzteren Falle ist darauf zu schließen, daß an der betreffenden Stelle eine

---

[1] W. SPRING, Bull. Belg. 1903. p. 1066. — [2] E. MAEY, Ztschr. f. phys. Chem. 38. 292. 1901.

neue Verbindung sich bildet; und man kann auf diese Weise die Verbindungslegierungen von den Mischungslegierungen aussondern. — Für Amalgame hatte übrigens MAEY[1] schon früher ähnliche Untersuchungen angestellt. — Ferner hat HOPKINSON[2] an den auch magnetisch interessanten Nickel-Eisen-Legierungen konstatiert, daß die Dichte im unmagnetischen Zustand (nach dem Erhitzen) 8,14, im magnetischen dagegen (nach dem Abkühlen) nur 7,97 beträgt, selbstverständlich bei derselben Temperatur.

Bei Gläsern haben WINKELMANN und SCHOTT[3] zunächst festgestellt, daß das Glas stets ein größeres spezifisches Gewicht hat, als nach denen der Bestandteile zu erwarten wäre; die Vereinigung der an der Glasbildung beteiligten Oxyde geht also unter Volumenverminderung vor sich. Nun könnte aber immer noch wenigstens die Beziehung bestehen, daß jedes Oxyd immer mit derselben Verdichtung in das Glas eintritt; es müßte sich dann für jedes Oxyd eine spezifische Zahl angeben und aus diesen Zahlen dann das spezifische Gewicht auch neuer Gläser berechnen lassen. Mit einer gewissen, in manchen Fällen guten, in anderen nur rohen Annäherung ist das tatsächlich der Fall; die Fehler bewegen sich meist unter 2 % und steigen nur in einigen Fällen auf 4,7 und 10 %; dabei ergibt sich die Verdichtung am kleinsten, nämlich zu 1,002 bei As_2O_5, am größten, nämlich zu 1,400 bei BaO.

Für Kristalle hat zuerst RETGERS[4] durch sehr umfangreiche Studien die Frage studiert, und zwar, da allgemeine Beziehungen natürlich nicht zu erwarten sind, für Reihen von isomorphen Mischkristallen; dabei wurden nur ganz homogene Stücke benutzt und auch sonst alle Fehlerquellen sorgfältig ausgeschlossen. Es ergab sich, daß man das spezifische Gewicht der Mischung aus dem der Bestandteile unter der Annahme der Vereinigung ohne Volumenänderung berechnen kann; in einzelnen Fällen fanden sich freilich Abweichungen, sie ließen sich aber leicht erklären und durch modifizierte Berechnung beseitigen. Mit anderen Worten: die Kurven verlaufen auch hier kontinuierlich; wo sie einen Knick zeigen, hat man ein Doppelsalz zu vermuten, das mit jedem der beiden Bestandteile in gewissem Sinne isomorph ist.

Für flüssige Lösungen hat u. A. schon MENDELEJEW[5] gezeigt, daß der Differentialquotient ds/dp sich im allgemeinen nicht durch eine einzige Kurve darstellen läßt, sondern daß hierzu mehrere, durch Unstetigkeitsstellen getrennte Kurven erforderlich sind. Bei Schwefelsäurelösungen z. B. sind die einzelnen Zweige geradlinig, und jede Unterbrechung entspricht einer chemischen Verbindung; die erste dem Monohydrat, die zweite dem Bihydrat u. s. w. Auch für die Lösungen von Alkohol ergeben sich gerade Linien mit bestimmten Verbindungsstellen.

Eine ziemlich komplizierte Theorie der Dichte von Lösungen hat GROSHANS[6] entwickelt; er führt schließlich alles auf gewisse charakteristische Konstanten der Elemente zurück, die er als Densitätszahlen bezeichnet, und die z. B. für Kohlenstoff, Sauerstoff und Wasserstoff gleich 1, für Stickstoff gleich 3 u. s. w., schließlich für Blei gleich 26 ist; diese Densitätszahlen gehen mit einem fast konstanten Faktor in die Formel für das Volumen ein.

Bei den Gasen und Dämpfen, soweit sie dem BOYLE-GAY-LUSSACschen Gesetze genügen, steht die hier speziell so genannte Gasdichte bezw. Dampfdichte in einer sehr merkwürdigen und wichtigen Beziehung zum Molekulargewicht. Nach dem Satze von AVOGADRO ist nämlich in gleichen Räumen verschiedener

---

[1] E. MAEY, ibid. 29. 119. 1889. — [2] J. HOPKINSON, Proc. Roy. Soc. 50. 121. 1891. — [3] A. WINKELMANN u. O. SCHOTT, WIED. Ann. 51. 730, speziell 739. 1894. — [4] J. W. RETGERS, Ztschr. f. phys. Chem. 3. 497. 1889. — [5] D. MENDELEJEW, ibid. 1. 273. 1887. — [6] J. A. GROSHANS, Wässerige Lösungen und Densitätszahlen. Berlin 1888. — Vgl. auch G. TH. GERLACH, Ztschr. f. analyt. Chem. 28. 290. 1889.

Gase, gleichviel ob sie Elemente oder Verbindungen sind, bei gleichem Druck und Temperatur die gleiche Anzahl von Molekeln vorhanden. Hieraus folgt, daß die Gewichte der Volumeneinheiten zu den Gewichten der einzelnen Molekeln, d. h. die Dichten zu den Molekulargewichten in einem für alle Gase gleichen Verhältnisse stehen müssen. Nun werden die Molekulargewichte auf das Atomgewicht des Wasserstoffs als Einheit bezogen; die aus zwei Atomen bestehende Wasserstoffmolekel hat also das Molekulargewicht 2. Andererseits hat Wasserstoff, auf Luft gleich 1 bezogen, die Dampfdichte 0,0691; jenes konstante Verhältnis ist also gleich 28,9, und man hat die Formel zwischen Molekulargewicht m und Dampfdichte d:

$$m = 28{,}9\, d \quad .$$

Bezöge man die Dampfdichten, statt auf Luft gleich 1, auf Wasserstoff gleich 2, so würden die Molekulargewichte und die Dampfdichten sogar durch dieselben Zahlen dargestellt werden. Führt man ferner das Molekularvolumen ein, d. h. das Volumen einer Gasmenge, deren Gewicht in Grammen gleich dem Molekulargewicht des Gases ist, so erhält man bei bestimmten Wertepaar von Druck und Temperatur für alle Gase dieselbe Zahl, und zwar für 0° und 76 cm Hg:

$$v = 22{,}32 \text{ Liter} \quad .$$

Die in Rede stehende Beziehung bildet die Grundlage für eine sehr beliebte Methode, die Molekulargewichte der Gase aus ihren Dichten zu berechnen; eine Berechnung, die desto genauere Werte liefert, je genauer die Gasgesetze erfüllt sind, also je weiter das Gas oder der Dampf vom Kondensationspunkt entfernt ist. Andererseits kann man auch das bekannte Molekulargewicht eines Dampfes benutzen, um zur Kenntnis des idealen Wertes seiner Dampfdichte zu gelangen — ein Wert, dem sich der experimentell gefundene immer mehr nähern muß, je mehr sich der Dampf dem Zustand nähert, in dem das Boyle-Gay-Lussacsche Gesetz genau gilt.

Nun hat sich aber in zahlreichen Fällen gezeigt, daß man aus der beobachteten Dampfdichte einen Wert für das Molekulargewicht erhält, der mit seinem sonst bekannten Werte derart in Widerspruch steht, daß es sich durchaus nicht nur um kleine Abweichungen handelt; vielmehr gehen die Differenzen auf das doppelte und selbst dreifache hinauf oder auf dieselben Bruchteile hinunter, und dabei zeigt sich nicht selten, daß der doppelte oder dreifache, in anderen Fällen, daß der halbe Wert des Molekulargewichts ebenso annähernd stimmt wie bei normalen Stoffen der einfache Wert. Die Erklärung hierfür bietet die schon vor längerer Zeit angebahnte und seitdem sehr ausgebildete Annahme, daß bei Steigerung der Temperatur und Abnahme des Druckes ein Zerfall der Molekeln jener Stoffe stattfindet, den man als Dissoziation bezeichnet; je nach den Umständen wird eine verschiedene Anzahl von Molekeln von diesem Zerfall betroffen, und man charakterisiert diesen Zustand durch eine besondere Größe, den Dissoziationsgrad. Umgekehrt kann der Dampf auch unter seinen Molekeln eine Anzahl solcher enthalten, die komplizierter als seine normalen und als durch Zusammenschluß mehrerer solcher entstanden zu denken ist — ein Zustand, den man als Polymerisation bezeichnet. Zum Studium dieser Verhältnisse ist hiernach die Bestimmung der Dampfdichte außerordentlich geeignet; und das ist mit der Hauptgrund, aus dem die Methodik der Dampfdichtebestimmung einen so großen Aufschwung genommen hat. Im übrigen kann auf diese Fragen, die teils in die Wärmelehre — vgl. Band 3 — teils in die allgemeine Chemie gehören, hier nicht näher eingangen werden.

Tabellen

(nach den neuesten und zuverlässigsten Angaben revidiert und ergänzt).

1. Feste und flüssige chemische Elemente.

Element	Dichte	Mittelwert	Element	Dichte	Mittelwert
Aluminium, gegossen	2,56		Nickel, gegossen	8,28	
„ gewalzt	2,66	2,6	„ gehämmert	8,67	8,9
„ gehämmert	2,75		„ gezogen	9,20	
„ rein bei 4°	2,58		Niob	6,7—7,5	7,2
Antimon		6,62	Osmium		22,48
Argon (flüssig)	1,38—1,42	1,4	Palladium	10,9—12,1	11,35
Arsen (14°)		5,72	Phosphor, gelb		1,83
Baryum		3,8	„ rot		2,19
Beryll	1,73—2,13	1,93	„ metallisch		2,34
Blei, gegossen	11,34		Platin, gegossen	20,9—21,5	
„ gewalzt	11,38	11,36	„ gehämmert	21,3	21,4
„ gezogen	11,41		„ gezogen	21,2—21,7	
Bor	2,5—2,7	2,6	Praseodym		6,48
Brom		3,15	Quecksilber (0°)		13,596
Cadmium, gegossen	8,55	8,61	„ fest (−39°)	14,38	
„ gehämmert	8,67		Rhodium		12,1
Cäsium		1,9	Rubidium		1,52
Calcium		1,58	Ruthenium	11,0—12,3	12,1
Cer		6,7	Sauerstoff (flüssig)		0,9
Chlor, flüssig (0°)		1,47	bei 0° u. 200 At.	0,6	
Chrom	5,9—7,0	6,4	bei −130° u. 300 At.	0,9	
Eisen, gegossen	7,0—7,7		bei −183°	1,135	
„ geschmiedet	7,8		Schwefel, rhombisch		2,07
„ gezogen	7,7	7,8	„ monoklin		1,96
„ Stahl	7,6—7,8		„ amorph		1,92
„ rein	7,86		„ flüssig (113°)		1,81
Erbium		4,77	Selen, kristallinisch	4,5—4,8	4,35
Fluor (flüssig, −200°)		1,14	„ amorph	4,2	
Gallium		5,9	Silber, gegossen	10,4—10,5	
Germanium		5,47	„ gepreßt	10,56	
Gold, gediegen	18,6—19,2		„ gewalzt	10,62	10,53
„ gegossen	19,3	19,3	„ gezogen	10,48	
„ gezogen	19,4		„ elektrolytisch	10,53	
Indium		7,4	Silicium, kristallinisch		2,4
Iridium		22,42	„ amorph		2,0
Jod		4,95	Stickstoff, flüssig	(0° u. 300 At.)	0,88
Kalium		0,87	„ beim krit. P.		0,79
Kobalt, gegossen	8,3—8,7	8,8	Strontium		2,54
„ gehämmert	9,1		Tantal		10,6
Kohlenstoff: Diamant		3,52	Tellur, kristallinisch		6,4
Graphit	2,17—2,33	2,25	„ amorph		5,9
Gaskohle		1,9	Thallium		11,8
Holzkohle		1,5	Thorium		11,0
Krypton, flüssig		2,16	Titan	3,5—3,6	3,54
Kupfer, gegossen	8,3—8,9		Uran		18,6
„ gehämmert	8,88—8,95		Vanadium		5,5
„ gezogen	8,93—8,96	8,92	Wasserstoff (flüssig)	(0° u. 300 At.)	0,26
„ elektrolytisch	8,95		„ beim Siedep.		0,07
Lanthan		6,1	Wismut		9,8
Lithium		0,59	Wolfram	17,0—19,2	18,8
Magnesium		1,74	Xenon, flüssig		3,5
Mangan	7,1—8,0	7,6	Zink		7,2
Molybdän		8,56	Zinn		7,3
Natrium		0,98	Zirkonium		4,15
Neodym		6,96			

2. Legierungen.

Aluminium-Antimon (81% Al.)	4,22
Aluminiumbronze (10% Al.)	7,7
Aluminium-Kupfer:	
5% Aluminium	8,37
10 „ „	7,69
Aluminium-Zinn (91% Al.)	2,85
Amalgame:	
Blei-Amalgam	12,0—12,8
Wismut-Amalgam	10,2—11,2
Gold-Amalgam	15,4
Zinn-Amalgam, HgSn	10,3
„ „ $HgSn_2$	9,3
„ „ $HgSn_3$	8,8
Antimon-Blei:	
50% Antimon	8,35
25 „ „	9,64
10 „ „	10,62
Antimon-Eisen:	
81,5% Antimon	7,21
56,9 „ „	8,30*
18,8 „ „	7,80
* Maximum	
Blei-Silber:	
10% Silber	11,22
20 „ „	11,15
50 „ „	10,94
Blei-Wismut-Cadmium:	
7 Cd, 40 Pb, 53 Bi	10,56
Blei-Zinn:	
87,5 Pb, 12,5 Sn	10,60
84 „ 16 „	10,33
77,8 „ 22,2 „	10,05
63,7 „ 36,3 „	9,43
46,7 „ 53,3 „	8,73
30,5 „ 69,5 „	8,24
Cadmium-Zinn (32 : 68)	7,7
Gold-Kupfer:	
98 Au, 2 Cu	18,84
96 „ 4 „	18,36
94 „ 6 „	17,95
92 „ 8 „	17,52
90 „ 10 „	17,16
88 „ 12 „	16,81
86 „ 14 „	16,47

Gold-Silber (12—15° C):		
8,4% Silber	18,041	
12,0 „ „	17,540	
21,5 „ „	16,354	
35,4 „ „	14,870	
52,2 „ „	13,482	
76,7 „ „	11,760	
Kupfer-Silber:		
22% Silber	9,196	
33 1/3% Silber	9,383	
50% Silber	9,657	
75 „ „	10,065	
92 „ „	10,358	
Kupfer-Zink:		
10% Zink	8,61	
20 „ „	8,45	
33 1/3% „	8,31	
Kupfer-Zinn (Bronze):		
10 % Zinn	8,78	
39,2 „ „	8,98*	
50 „ „	8,79	
70 „ „	7,98	
* Maximum		
Messing, gelb { gegossen 8,44, gewalzt 8,56, gezogen 8,70 }	8,5	8,4
„ rot	8,6	
„ weiß	8,2	
Neusilber:		
Chinesisch 26,3 Cu, 36,8 Zn, 36,8 Ni	8,30	8,4
Berlin I. 52 „ 26 „ 22 „	8,45	
„ II. 59 „ 30 „ 11 „	8,34	
„ III. 63 „ 31 „ 6 „	8,30	
Nickelin	8,77	
Platin-Iridium:		
10% Iridium	21,62	
33 1/3% „	21,87	
95% „	22,38	
Woodsches Metall	9,7	

2a. Legierungen,

für die nach Mary (s. oben) das spezifische Volumen eine Funktion des Prozentgehalts ist $v = a + bp$ (der Bestandteil, dessen Anteil p ist, steht zu zweit).

Legierung	a	b	Legierung	a	b
Blei-Antimon . .	0,08791	0,0006106	Quecksilber-Blei .	0,07368	0,0001422
Blei-Cadmium . .	08791	2768	Quecksilber-Zinn .	07368	6345
Blei-Silber . . .	08791	076	Silber-Kupfer . .	0948	169
Blei-Zinn . . .	08811	49	Silber-Wismut .	0955	068
Cadmium-Zinn .	11554	2156	Wismut-Antimon.	10181	4715
Gold-Kupfer . .	05191	605	Wismut-Cadmium	10181	1873
Gold-Silber . .	05191	4309	Wismut-Zinn . .	10181	353
Gold-Zinn . . .	05191	852	Zinn-Antimon . .	13710	1187
Iridium-Platin . .	04461	019	Zinn-Zink . . .	13710	04

3. Hölzer.

Sorte	grün		trocken	
	Grenzen	Mittelwert	Grenzen	Mittelwert
Ahorn	0,87—1,05	0,96	0,61—0,74	0,67
Apfel	0,95—1,26	1,1	0,66—0,84	0,75
Birke	0,80—1,09	0,95	0,51—0,77	0,72
Buche	0,90—1,12	1	0,66—0,88	0,75
Buxbaum . . .	—	—	—	1,33
Ebenholz . . .	—	—	1,19—1,23	1,22
Eiche	0,93—1,28	1,1	0,69—1,03	0,9
Erle	0,63—1,01	0,8	0,42—0,64	0,50
Esche	0,70—1,14	0,9	0,57—0,94	0,75
Fichte	0,40—1,07	0,7	0,35—0,60	0,47
Hainbuche . . .	0,92—1,25	1,1	0,62—0,82	0,75
Kiefer	0,38—1,03	0,7	0,31—0,74	0,55
Lärche	0,52—1,00	0,75	0,44—0,80	0,63
Linde	0,61—0,87	0,75	0,32—0,59	0,48
Mahagoni . . .	—	—	—	1,06
Nußbaum . . .	—	—	0,64—0,70	0,67
Pappel	0,78—1,07	0,9	0,34—0,52	0,38
Pockholz . . .	—	—	1,26—1,33	1,28
Roßkastanie . .	0,76—1,04	0,9	0,52—0,63	0,58
Tanne	0,77—1,23	1,0	0,37—0,60	0,52
Ulme	0,73—1,18	0,95	0,56—0,82	0,68
Weide	0,73—0,97	0,85	0,43—0,63	0,54
Zeder	—	—	—	0,56
Zypresse . . .	—	—	—	0,60

4. Jenenser Gläser nach Winkelmann und Schott (s. o.).

Fabriknummer oder Charakter	Dichte	Fabriknummer oder Charakter	Dichte
S 205	2,248	*O* 658	2,758
802	2,370	121 III	2,848
172 III	2,424	206	3,070
165 III	2,479	*S* 95	3,238
164 III	2,480	665	3,527
290	2,518	1442	3,532
Natrium-Zink-Silikat	2,572	*O* 381	3,578
Kali-Baryt-Silikat	2,580	*S* 120	3,691
16 III	2,585	Blei-Kali-Silikat	3,879
S 201	2,588	Blei-Silikat	4,731
1419	2,629	*S* 163	5,831
Kali-Zink-Silikat	2,688	*S* 57	5,944

5. Quecksilber
bei einigen verschiedenen Temperaturen.

− 20°	13,645	40°	13,497	180°	13,162
− 10	13,620	50	13,473	200	13,115
0	13,595	60	13,449	220	13,068
5	13,583	70	13,425	240	13,021
10	13,571	80	13,400	260	12,974
15	13,558	90	13,376	280	12,927
20	13,546	100	13,352	300	12,880
25	13,534	120	13,304	320	12,834
30	13,522	140	13,256	340	12,787
35	13,509	160	13,209	360	12,741

6. Wasser
bei verschiedenen Temperaturen.

−10°	0,99815	12°	0,99953	55°	0,9858	150°	0,9173
− 8	69	14	27	60	33	160	0,9075
− 6	0,99912	16	0,99897	65	07	180	0,8866
− 4	46	18	0,99862	70	0,9778	200	0,8628
− 2	70	20	23	75	48	250	0,794
0	87	22	0,99780	80	18		
+ 1	93	24	32	85	0,9686		
2	97	26	0,99681	90	53		
3	99	28	26	95	18	Eis	
4	1,00000	30	0,99567	100	0,9584		
5	0,99999	35	406	110	0,9510		
6	97	40	224	120	0,9434	− 0°	0,9167
8	88	45	020	130	0,9352	−10	0,9186
10	73	50	0,98807	140	0,9264	−20	0,9203

Dichtemaximum bei 3,98°.

7. Verdünnte Säuren bei 15°.

Gew.-Proz.	HNO_3	H_2SO_4	HCl	$C_2H_4O_2$	H_3PO_4
0	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
5	1,028	1,032	1,024	1,007	1,028
10	1,059	1,068	1,049	1,014	1,057
15	1,089	1,106	1,073	1,021	1,087
20	1,120	1,144	1,098	1,028	1,120
25	1,153	1,182	1,123	1,035	1,153
30	1,185	1,223	1,149	1,041	1,189
35	1,218	1,264	1,174	1,047	1,226
40	1,251	1,306	1,197	1,052	1,265
45	1,284	1,351		1,057	1,306
50	1,317	1,398		1,062	1,349
55	1,346	1,448		1,065	1,393
60	1,374	1,501		1,069	1,440
65	1,400	1,557		1,071	
70	1,423	1,615		1,073	
75	1,442	1,675		1,075	
80	1,460	1,734		1,075	
85	1,478	1,786		1,074	
90	1,495	1,822		1,071	
95	1,513	1,838		1,066	
100	1,530	1,843		1,055	

8. Verschiedene Lösungen

bei 15° bezw. auf gleichwarmes Wasser.

Gew.-Proz.	NH_3	NaHO	KHO	NaCl	KCl	$CaCl_2$[1] + 6 aq	Na_2CO_3 + 10 aq	K_2CO_3	$FeSO_4$ + 7 aq	$CuSO_4$ + 5 aq	Zucker[2]
2	0,9915	1,023	1,017	1,0145	1,0130	1,0079	1,0076	1,0188	1,011	1,0126	1,0078
4	831	46	33	290	260	159	158	366	21	254	157
6	749	70	49	437	392	241	231	551	32	384	237
8	670	92	65	585	525	323	309	740	43	516	319
10	593	115	83	734	658	407	388	928	54	649	401
12	520	37	101	886	796	491	468	1,1124	65	785	485
14	449	59	19	1,1038	935	577	548	320	77	923	570
16	380	81	37	194	1,1075	663	628	520	88	1,1063	657
18	314	202	55	352	218	750	708	724	1,100	208	744
20	251	25	77	511	361	838	789	929	12	354	832
22	191	47	98	676	509	927	871	1,2140	25	501	922
24	133	69	220	840	1,1657	1,1017	953	352	37	659	1,1013
26	078	90	41	1,2010	(bei	107	1,1035	568	49	817	106
28	026	310	64	(bei	24,9 %	199	117	789	61	980	200
30	0,8976	32	88	26,4 %	1,1723)	292	200	1,3011	74	1,2146	295
32	929	53	311	1,2043)		386	284	242	87		391
34	885	74	36			480	368	473	1,200		490
36	844	95	61			575	452	708	13		590
38	(bei	415	87			671	536	948	26		692
40	14°)	37	412			768	620	1,4187	39		794
45		88	75			1,2012	830	804			1,2057
50		540	589			262	1,2045	1,5441			329
55		91	604			516	(bei	(bei			608
60		643	67			778	23°)	52 %			899
65		95	729			1,3034		1,5708)			1,3320
70		1,748	1,790			3300					510

9. Alkohol.

Gew.-Proz.	bei 0°	bei 10°	bei 20°	bei 30°
0	0,99988	0,99975	0,99831	0,99579
5	0,99135	0,99113	0,98945	0,98680
10	0,98493	0,98409	0,98195	0,97892
15	0,97995	0,97816	0,97527	0,97142
20	0,97566	0,97263	0,96877	0,96413
25	0,97115	0,96672	0,96185	0,95628
30	0,96540	0,95998	0,95403	0,94751
35	0,95784	0,95174	0,94514	0,93813
40	0,94939	0,94255	0,93511	0,92787
45	0,93977	0,93254	0,92493	0,91710
50	0,92940	0,92182	0,91400	0,90577
55	0,91848	0,91074	0,90275	0,89456
60	0,90742	0,89944	0,89129	0,88304
65	0,89595	0,88790	0,87961	0,87125
70	0,88420	0,87613	0,86781	0,85925
75	0,87245	0,86427	0,85580	0,84719
80	0,86035	0,85215	0,84366	0,83488
85	0,84789	0,83967	0,83115	0,82232
90	0,83482	0,82665	0,81801	0,80918
95	0,82119	0,81291	0,80433	0,79553
100	0,80625	0,79788	0,78945	0,78096

[1] Bei 18,3°. — [2] Bei 17,5°.

Temperatur des Dichtemaximums wässeriger Lösungen.

Substanz	Prozent	t	Substanz	Prozent	t
Äthyläther	2,9	3,5	Kaliumnitrat	1,29	2,06
Äthylalkohol	1,33	4,29	Kobaltchlorür	0,55	3,28
"	3,79	4,02	Lithiumchlorid	5,37	− 4,11
"	6,17	2,85	Methylalkohol	1,25	4,10
Ammoniumchlorid	2,6	0,4	"	2,50	3,78
Baryumbromid	4,60	− 0,30	"	5,00	2,56
Baryumchlorid	4,00	− 0,84	Natriumbromid	2,21	0,82
Baryumjodid	3,61	1,15	Natriumchlorid	2,87	− 2,66
Baryumnitrat	3,34	0,52	Natriumjodid	2,68	0,87
Bromwasserstoff	1,98	2,30	Natriumnitrat	1,09	1,86
Calciumchlorid	1,68	1,23	Nickelchlorür	0,55	3,54
Chlorwasserstoff	0,90	2,40	Oxalsäure	1,26	2,25
Essigsäure	2,00	1,43	Platinchlorid	1,29	3,50
Glyzerin	7,40	− 0,78	Propylalkohol	7,54	0,24
Kaliumbromid	3,40	0,21	Salizylsäure	0,48	3,54
Kaliumchlorid	1,41	1,33	Weinsäure	2,21	1,64
"	2,98	− 0,70	Zucker	6,40	0,70
Kaliumjodid	3,12	1,01			

10. Verschiedene feste und flüssige Substanzen (meist bei 0°).

Aceton	0,81	Calciumcarbid	3,12	Holzgeist	0,81
Acetylen	0,45	Campher	1,00	Hydrazin	1,012
Achat	2,59	Cement 2,7 bis	3,1	Hydroxylamin	1,22
Äthyläther	0,74	Chlorcalcium	2,22	Indigo	0,77
Alabaster	2,7	Chlorkalium	1,99	Jodkalium	3,07
Alaun, Kali-	1,75	Chlorlithium	2,06	Jodsilber	5,61
Alaun, Natron	1,64	Chloroform	1,53	Kalk, gebrannt 2,3 bis	3,2
Allylalkohol	0,87	Chlorsilber	5,57	Kalkspat	2,72
Ameisensäure	1,23	Chromalaun	1,83	Kalkstein 2,5 bis	2,8
Ammoniak, kondensiert	0,64	Copal	1,1	Kautschuk	0,95
Amyläther	0,80	Cyan, flüssig (17°)	0,87	Knochen 1,8 bis	2,0
Amylalkohol	0,83	Cymol	0,87	Kochsalz	2,16
Anilin	1,04	Diphenyl	1,17	Kohlensäure, flüss. (0°)	0,914
Arragonit	2,93	Eisenglanz	5,24	" " (15°)	0,814
Arsenige Säure 3,7 bis	4,0	Eisenkies	5,03	" " (31,35°)	0,464
Asbest 2,1 bis	2,8	Eisenvitriol	1,90	" fest (−79°)	1,54
Asphalt	1,12	Elfenbein	1,88	Kork	0,24
Basalt 2,7 bis	3,2	Feldspat	2,55	Kreide 2,1 bis	2,7
Benzol	0,89	Ferrocyankalium	1,90	Kupferglanz	5,75
Bergkristall	2,65	Fett, tierisch	0,92	Kupfervitriol	2,27
Bernstein	1,08	Feuerstein	2,65	Luft, flüssig (−190°)	1,025
Bimstein 0,9 bis	1,6	Fichtenharz	1,07	Magnesia	3,3
Bittersalz	1,75	Fluorwasserstoff	0,99	Magnesiumsulfat	1,69
Bleiglanz	7,65	Flußspat	3,15	Magneteisenstein	5,1
Bleioxydul	9,77	Fuchsin	1,22	Magnetkies	4,4
Bleioxyd	9,25	Gips	2,31	Marmor	2,75
Bleisuperoxyd	8,91	Glas, grünes	2,6	Meerschaum	1,35
Borax	1,72	" Spiegel-	2,46	Meerwasser	1,02
Borsäure	1,46	" Kron-	2,7	Mehl, Weizen-	1,56
Braunkohle 1,2 bis	1,4	" Kristall-	2,9	Mennige	9,08
Braunstein 4,4 bis	4,9	" Flint- 3,15 bis	3,9	Milch	1,03
Bromkalium	2,72	Glaubersalz	1,46	Milchzucker	1,53
Bromnatrium	3,01	Glimmer 2,65 bis	3,15	Naphtol	1,22
Bromoform	2,9	Glyzerin	1,26	Nitroglyzerin	1,60
Bromwasserstoff	1,49	Granat	3,7	Öl, Baum-	0,92
Bromsilber	6,33	Granit 2,5 bis	3,1	" Lein-	0,94
Butter (frisch)	0,87	Gummi arabicum	1,4	" Oliven-	0,92
Buttersäure	0,97	Guttapercha	0,97	" Rüb-	0,91
Butylalkohol	0,82	Hartgummi	1,15	Oxalsäure	1,63

(Fortsetzung.)

Paraffin	0,89	Quecksilberoxydul	9,82	Stearin	0,97
Pech	1,07	Quecksilberoxyd	11,14	Steinsalz	2,28
Perlen	2,7	Salicylsäure	1,49	Terpentin	0,87
Petroleum . . 0,78 bis	0,88	Salmiak	1,46	Toluol	0,88
Phenol	1,08	Salpeter	1,95	Ton . . . . 1,8 bis	2,5
Porphyr	2,75	Salpetersäure	1,53	Tonerde	3,85
Porzellan . . 2,2 bis	2,5	Salzsäure, rauchend	1,22$_5$	Tonschiefer	2,8
Phosphorsäure	1,84	„ 25 %	1,12	Traubenzucker	1,57
Phosphorwasserstoff (fl.)	1,012	Sand, trocken	1,5	Turmalin	3,15
Propionsäure	1,02	„ feucht	1,9	Wachs	0,97
Propylalkohol	0,82	Sandstein	2,3	Wallrat	0,93
Quarz	2,653	Schiefer	2,65	Wasserstoffsuperoxyd	1,45
„ geschmolzen	2,20	Schwefelkohlenstoff	1,27	Wein . . . 0,99 bis	1,03
Quecksilberchlorür	7,10	Schwefelsäure	1,845	Weinsäure	1,75
Quecksilberchlorid	5,42	Schwefelsäureanhydrid	1,94	Ziegelstein . . 1,4 bis	2,2
Quecksilberbromür	7,31	Schwerspat	4,48	Zinnober	8,1
Quecksilberbromid	5,74	Serpentin	2,5	Zucker	1,61
Quecksilberjodür	7,70	Smaragd	2,77		
Quecksilberjodid	6,06	Speckstein	2,6		

11. Luft (trocken)

bei verschiedenem Drucke und Temperatur, unter 45° Breite und im Meeresspiegel.

Anmerkung. Ist p der Druck in cm Hg, t die Temperatur, B die Breite des Ortes, H seine Höhe über dem Meere und R der Erdradius, so ist allgemein die Dichte der Luft von der absoluten Feuchtigkeit f:

$$d = 0{,}001292743\,\frac{p - 0{,}354\,(1 + 0{,}00367\,t)\,f}{(1 + 0{,}00367\,t)\cdot 76} \times (1 - 0{,}00265\cos 2B)\left(1 - 2\,\frac{H}{R}\right) \quad .$$

t	$p = 72$	$p = 73$	$p = 74$	$p = 75$	$p = 76$	$p = 77$
0	0,001225	0,001242	0,001259	0,001276	0,001293	0,001310
2	1216	1233	1250	1267	1284	1301
4	1208	1224	1241	1258	1274	1291
6	1199	1216	1232	1249	1265	1282
8	1190	1207	1223	1240	1256	1273
10	1182	1198	1215	1231	1247	1264
12	1174	1190	1206	1223	1238	1255
14	1165	1182	1198	1214	1230	1246
16	1157	1174	1190	1206	1221	1238
18	1149	1165	1181	1197	1213	1229
20	1142	1157	1173	1189	1205	1221
22	1134	1150	1165	1181	1196	1213
24	1126	1142	1158	1173	1188	1204
26	1119	1134	1150	1165	1180	1196
28	1111	1127	1142	1158	1172	1188
30	1104	1119	1135	1150	1165	1181

Ergänzungen für 76 cm Hg und andere Temperaturen.

t	d	t	d	t	d
−24	0,0014177	35	0,0011456	100	0,0009457
−22	14063	40	11273	110	9210
−20	13952	45	11086	120	8975
−18	13842	50	10924	130	8752
−16	13734	55	10757	140	8540
−14	13628	60	10596	150	8338
−12	13524	65	10433	160	8145
−10	13421	70	10285	170	7961
− 8	13319	75	10138	180	7785
− 6	13219	80	09994	190	7617
− 4	13121	85	09854	200	7456
− 2	13024	90	09718	210	7301
		95	09586		

12. Gase und Dämpfe.

Stoff	Formel	Dichte Luft = 1	Spez. Gew. Wasser von 4° = 1
Aceton	C_3H_6O	2,0025	0,002590
Acetylen	C_2H_2	0,92	1165
Äthan	C_2H_6	1,0367	1341
Äthylen	C_2H_4	0,9674	1252
Äther	$C_4H_{10}O$	2,565	3317
Äthylalkohol	C_2H_6O	1,603	2086
Aldehyd	C_2H_4O	1,532	1981
Allylen	C_3H_4	1,3819	1788
Ammoniak	H_3N	0,5889	0762
Argon	A	1,379	1782
Arsen	As_2	10,39	0,013436
Arsenwasserstoff	H_3As	2,6973	0,003490
Benzol	C_6H_6	2,77	3582
Brom	Br_2	5,3933	6870
Bromwasserstoff	BrH	2,731	3532
Butan	C_4H_{10}	2,0041	2591
Butylen	C_4H_8	1,9349	2504
Chlor	Cl_2	2,491	3167
Chlorcyan	CNCl	2,1244	2747
Chloroform	$CHCl_3$	4,215	4451
Chlorwasserstoff	ClH	1,269	1628
Cyan	$(CN)_2$	1,8064	2336
Cyanwasserstoff	CNH	0,9456	1223
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	2,08	—
Essigsäureäther	$C_4H_8O_2$	3,067	3966
Fluorwasserstoff	FH	0,693	0896
Grubengas	CH_4	0,556	0719
Helium	He	0,1368	0,000179
Jod	J_2	8,716	0,011271
Jodwasserstoff	JH	4,433	0,005746
Knallgas	—	0,414	—
Kohlenoxyd	CO	0,967	0,001251
Kohlensäure	CO_2	1,529	1965
Krypton	Kr	2,818	3654
Methylalkohol	CH_4O	1,12	1448
Neon	Ne	0,674	0,000893
Phosphor	P_2	4,355	0,005631
Phosphorwasserstoff	PH_3	1,185	1535
Propylen	C_3H_6	1,4512	1878
Quecksilber	Hg	6,976	9021
Sauerstoff	O_2	1,1056	1430
Schwefel	S_2	2,20	2843
Schwefelkohlenstoff	CS_2	2,645	3420
Schwefelsäure	H_2SO_4	2,15	2780
Schwefelsäure-Anhydrid	SO_3	2,763	3573
Schwefelwasserstoff	SH_2	1,1921	1523
Schweflige Säure-Anhydrid	SO_2	2,234	2869
Selen	Se_2	5,7	7023
Selenwasserstoff	H_2Se	2,7846	3601
Stickstoff	N_2	0,9673	1254
Stickstoffoxyd	NO	1,039	1344
Stickstoffoxydul	N_2O	1,527	1974
Wasser	H_2O	0,6235	0806
Wasserstoff	H_2	0,0696	0090
Luft	—	1,0000	1293

Literaturauszug.

(Es kann hier natürlich nur ein gang kleiner Auszug aus der mehrere tausend Abhandlungen umfassenden Literatur gegeben werden, und auch dieser nur für die neuere Zeit, etwa von den achtziger Jahren an. Ausführliche Literaturangaben und Tabellen findet man namentlich in LANDOLT und BÖRNSTEINS physikalisch-chemischen Tabellen, 3. Aufl. Berlin 1905, in CLARKES Constants of Nature, 2 Teile, Washington 1888, in dem Ingenieurtaschenbuch des Vereins Hütte, in den chemischen, physikalischen und mineralogischen Handbüchern und a. a. O.)

Äther und Derivate:

P. DOBRINER, LIEB. Ann. **24.** 1. 1887.

Alkoholwassergemische:

DITTMAR und FAWSITT, Proc. Edinb. Soc. **33.** (2) 509. 1887. — D. MENDELEJEW, Petersburg 1887; Abhandlungen der K. Normalaichungskommission.

Alkohole:

LOOMIS, Ztschr. f. phys. Chem. **32.** 589. — PERKIN, Journ. chem. Soc. **45.** 465.

Alkyljodide:

P. DOBRINER, LIEB. Ann. **243.** 23. 1887.

Ammoniak, verflüssigt:

E. LANGE, Ztschr. f. Kälteind. **5.** 39. 1898.

Aromatische Verbindungen:

F. NEUBECK, Ztschr. f. phys. Chem. **1.** 649. 1887.

Benzolprodukte:

K. SEUBERT, Ber. d. chem. Ges. **22.** 2519. 1889.

Bromdampf:

BERMAN und ATKINSON, Proc. Roy. Soc. **66.** 10. 1900.

Chlor und Chloride:

H. MOISSAN, C. R. **137.** 1198. 1903. — FRIDEL u. CRAFTS, ibid. **107.** 301. 306. 1888.

Dämpfe:

A. SCOTT, Proc. Edinb. Soc. **14.** 410. 1887. — R. v. HIRSCH, WIED. Ann. **69.** 456. 1899 (gesättigte Dämpfe u. s. w.).

Eis:

E. L. NICHOLS, Phys. Review **8.** 21. 1889. — H. T. BARNES, Phys. Ztschr. **3.** 81. 1901. — J. H. VINCENT, Proc. Roy. Soc. **69.** 422. 1902. — H. L. COOKE, Trans. Roy. Soc. Canada **8.** 127. 143. 1902.

Flüssigkeitsgemische:

C. F. LINEBURGER, Amer. chem. Journ. **18.** 429. 1896.

Fluor:

H. MOISSAN, C. R. **109.** 861. 1889; **138.** 728. 1904.

Fluorwasserstoffsäure:

THORPE und HAMBLY, Journ. chem. Soc. **53.** 765. 1888; **54.** 163. 1889.

Gase:

Lord RAYLEIGH, Proc. Roy. Soc. **23.** 356. 1888; **50.** 448. 1892; **53.** 134. 1893; Chem. News **67.** 183. 198. 211. 1893; **69.** 231. 1894; **71.** 51. 1895; **76.** 515. 1897. A. LEDUC, C. R. **113.** 186. 1891; **116.** 968. 1248. 1893; **117.** 1072. 1893; **125.** 471. 1897; **126.** 413. 1898; Journ. de Phys. (3) **7.** 5. 1898. — JUL. THOMSEN, Ztschr. f. anorg. Chem. **12.** 1. 1896. — H. BILTZ (tiefe Temperatur), Ztschr. f. phys. Chem. **10.** 354. 1892. — DONGMAN und RAMSAY, Journ. chem. Soc. **77.** 1228. 1900. — (Neue Gase): RAMSAY und TRAVERS, Proc. Roy. Soc. **67.** 329. 1901. — J. DEWAR, ibid. **69.** 360. 1902.

Gase, verflüssigt:

Amagat, C. R. **114.** 1093. 1892. — Ansdell, Chem. News **41.** 75. 1880. — U. Behn, Drudes Ann. **3.** 733. 1900. — U. Behn und Kiebitz, ibid. **12.** 421. 1903. — Cailletet, Journ. de Phys. (2) **5.** 549. 1886. — Olszewski, Phil. Mag. (6) **3.** 535. 1902. — Ladenburg und Krögel, Ber. chem. Ges. **32.** 46. 1415. 1899. — Baly und Donnan, Journ. chem. Soc. **81./82.** 907. 1902.

Hölzer:

A. G. Clayton, Chem. News **86.** 26. 1902.

Kohlenstoffverbindungen:

Ramsay und Steele, Phil. Mag. (6) **6.** 492. 1903.

Kristalle:

J. W. Retgers, Ztschr. f. phys. Chem. **3.** 289. 497. 1889.

Legierungen:

van Aubel, C. R. **132.** 1266. 1901. — E. Maey, Ztschr. f. phys. Chem. **29.** 127. 1899; **38.** 292. 1901. — Laborde, C. R. **123.** 227. 1896.

Lösungen, anorganische:

Th. Gerlach, Ztschr. f. analyt. Chem. **24** ff. 1886 ff., besonders **28.** 466. 1889. — Grotrian, Pogg. Ann. **160.** 247. 1877; Wied. Ann. **8.** 539. 1879; **18.** 177. 1883. — F. Kohlrausch, zum Teil mit Nippoldt, Grotrian u. Hallwachs, Pogg. Ann. **138.** 280. 370. 1869; **154.** 1. 215. 1875; **159.** 233. 1876; Erg.-Bd. **8.** 675. 1878; Wied. Ann. **6.** 1. 145. 1879; **26.** 161. 1885; **50.** 118. 1893; **53.** 14. 1894; **56.** 185. 1895. — F. Kohlrausch u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte, Leipzig 1898. — J. H. Long, Wied. Ann. **11.** 37. 1880. — F. Loomis, Wied. Ann. **60.** 547. 1897. — O. Schönrock, Ztschr. f. phys. Chem. **11.** 781. 1893. — G. Lunge (mit Anderen), Ztschr. f. angew. Chem. **2** ff. 1889 ff. — Pickering, Chem. News u. Ber. chem. Ges. 1890 ff. — G. Charpy, C. R. **114.** 539. 1892. — J. G Macgregor, Trans. Roy. Soc. Canada. **7.** 19. 1890.

Lösungen, Dichtemaximum:

L. de Coppet, Bull. Soc. vaud. **29.** 1. 1893.

Lösungen, ganz verdünnte:

F. Kohlrausch u. Hallwachs, Wied. Ann. **53.** 14. 1894. — F. Kohlrausch, ibid. **56.** 185. 1895. — F. Möller, Drudes Ann. **7.** 256. 1902.

Lösungen, organische:

Lossen, Lieb. Ann. **214.** 96. 1882. — Jones, Ztschr. f. phys. Chem. **13.** 419. — Humburg, ibid. **12.** 403. — Lüdeking, Wied. Ann. **27.** 74. 1885.

Lösungen, Zucker:

Plato, Abhandlung d. K. Normalaichungskommission **2.** 140. 1900.

Luft:

A. Leduc, Ann. Chim. Phys. (7) **15.** 26. 1898. — Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **53.** 147. 1893.

Meerwasser:

S. Makarow, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **23.** (2) 30. 1891. — Knudson, Hydrographische Tabellen. Kopenhagen 1901. — Thorpe u. Rücker, Trans. Roy. Soc. **166.** (2) 1876.

Metalle, geschmolzen:

M. Toepler, Wied. Ann. **53.** 343. 1894. — Vicentini und Omodei, Atti Acc. Lincei **4.** und **5.** 1888.

Nickeleisen:

J. Hopkinson, Proc. Roy. Soc. **50.** 121. 1891.

Ozon:

M. OTTO, C. R. **124.** 78. 1897.

Phenole und Phenoläther:

J. PINETTE, LIEB. Ann. **243.** 32. 1887.

Quecksilber:

THIESSEN und SCHEEL, Ber. d. Physikalisch-Technischen Reichsanstalt 1897/98; Wiss. Abh. d. Reichsanstalt **2.** 184. 1895. — J. BROCH, Trav. Bur. int. poids et mes. **2.** 1883. — CHAPPUIS, ibid. **13.** 1903.

Schwefeldampf:

O. BLEYER und L. KOHN, Ber. chem. Ges. **32.** 50. 1900. — BILTZ und PREUNER, Monatsh. f. Chem. **22.** 627. 1901.

Schwefelsäure:

G. LUNGE und M. ISLER, Ztschr. f. angew. Chem. 1890. p. 129. — DOMKE, Abhandl. d. Normalaichungskommission **5.** 5. 1904.

Stickstoff (bei tiefer Temperatur):

A. BESTELMEYER, Münch. Ber. **33.** 743. 1903.

Wasser:

THIESSEN, SCHEEL und DIESSELHORST, Wiss. Abh. d. Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. **3.** 68. 1900; **4.** 1. 1904.

Potentialtheorie.

Von F. AUERBACH.

Einleitung. Im Artikel „Grundbegriffe" ist der Begriff des Potentials bereits eingeführt worden, und zwar auf Grund der Zuordnung eines Skalarfeldes zu einem gegebenen Vektorfelde. Es sind dort auch schon die verschiedenen Gattungen von Potentialen erwähnt worden, nämlich

1. Das Skalarpotential, und zwar
   a) Das Geschwindigkeitspotential.
   b) Das Beschleunigungspotential.
   c) Das Kraftpotential.
2. Das Vektorpotential.
3. Das Tensorpotential.

Eine weitere Mannigfaltigkeit ergibt sich je nach dem Gesetze, nach dem die die Vorgänge bestimmenden Größen von Zeit und Ort abhängen; am wichtigsten ist in ersterer Hinsicht das von der Zeit unabhängige Potential, genauer gesagt, das Potential, das die Zeit nicht explizite enthält, sich mit ihr also nur insofern ändert, als sich mit ihr die Koordinaten der betreffenden Punkte ändern; in letzterer Hinsicht ist am wichtigsten das Potential von Kräften, die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung abnehmen, weil sich aus ihm zahlreiche kompliziertere Potentiale in einfacher und anschaulicher Weise aufbauen lassen. Es wird daher im folgenden dieses sogen. NEWTONsche Potential vorangestellt und dann erst die anderen Potentiale, darunter auch das physikalisch einfachere Geschwindigkeitspotential angeschlossen werden.

Die Untersuchungen der Potentialtheorie betreffen die Eigenschaften des Potentials und seiner ersten und zweiten Differentialquotienten, seine charakteristische Gleichung, die Aufgabe, aus gegebenen Spezialdaten seine allgemeinen Werte zu bestimmen, endlich die Ausrechnung seiner Werte für spezielle Fälle. Ein großer Teil dieser Untersuchungen ist so überwiegend mathematischen Interesses, daß hier nicht oder nur kurz auf sie eingegangen werden kann, so namentlich das allgemeine Existenz- und Bestimmungsproblem, das sachlich zur Lehre von den partiellen Differentialgleichungen, methodisch zum Teil zur Abbildungslehre gehört. Auch sei darauf hingewiesen, daß sich an anderen Stellen dieses Handbuches noch besondere Angaben zur Potentialtheorie finden, so namentlich in der „Elektrostatik" (Bd. **4**. 6. 20. 79), in der Lehre von den elektrischen Strömen (Bd. **4**. 214), in der Lehre vom Magnetismus und von der magnetischen Induktion (Bd. **5**. 17. 35. 55. 124), sowie in der „Elektrodynamik" (Bd. **5**). Einige Wiederholungen werden sich hiernach kaum vermeiden lassen, ohne den Zusammenhang der Darstellung zu stören.

Potential. Das Kräftepotential oder kurz Potential läßt sich, wie schon im Artikel „Grundbegriffe" betont wurde (p. 73 und 83), auf zwei prinzipiell ganz verschiedene Arten einführen. In formal mathematischer Definition ist

nämlich das Potential diejenige Funktion der rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes, deren negativ genommene Differentialquotienten nach den Achsenrichtungen die auf diese Richtungen entfallenden Komponenten der auf den Punkt wirkenden Kraft ergeben; daß dann auch der Differentialquotient nach jeder anderen Richtung die betreffende Kraftkomponente und insbesondere der Differentialquotient nach der Kraftrichtung die ganze Kraft liefert, folgt von selbst. Die andere Definition geht, statt von dem abstrakten Kraftbegriffe, von dem realen Arbeitsbegriffe aus; sie definiert das Potential als die Arbeit, die zu leisten ist, um den Punkt aus seiner Lage in eine solche Lage zu bringen, in der er ohne Arbeitsleistung bewegt werden kann; man wählt dafür gewöhnlich die unendliche Entfernung von den wirkenden Kräften. Daß beide Definitionen tatsächlich übereinstimmen, folgt aus der Beziehung der Begriffe Kraft und Arbeit zueinander. Auch ergibt sich sofort die Verallgemeinerung, daß die Arbeit bei der Überführung aus einer in eine andere Lage gleich der Differenz der Werte des Potentials für diese beiden Lagen ist; damit tritt denn auch die Identität des Potentials mit dem, was physikalisch als potentielle Energie (vgl. „Grundbegriffe" p. 83) bezeichnet wird, deutlich zutage.

Sieht man von zeitlichen Einflüssen ab, so bleiben als maßgebend übrig die räumliche Charakteristik und die Masse. Die letztere wird stets als Proportionalitätsfaktor auftreten, und zwar bei der Wechselwirkung zwischen zwei Massen als Faktor für jede von ihnen; der noch hinzutretende Wechselwirkungsfaktor (vgl. p. 46) ist im folgenden überall weggelassen. Dagegen kann in bezug auf die Raumgrößen erstens die Richtung von Bedeutung sein, was wir zunächst ausschließen, und zweitens die Entfernung der in Beziehung zueinander stehenden Massen voneinander. Es ist dann das Potential eines Massenpunktes m' auf einen Punkt von der Masse 1, wenn das Entfernungsgesetz der Zentralkraft durch $f'(r)$, also das Entfernungsgesetz des Potentials durch $f(r)$ (dabei ist f' die Ableitung von $f(r)$ nach r) dargestellt wird, und wenn x', y', z' die Koordinaten des wirkenden, x, y, z die Koordinaten desjenigen Punktes sind, in dem das Potential V besteht und die Kraft K mit den Komponenten X, Y, Z herrscht:

(1) $$V = f(r) \cdot m' \quad , \qquad K = \frac{dV}{dr} = f'(r)\, m' \quad ,$$

(2) $$X = f'(r)\frac{x - x'}{r} \cdot m' \, , \quad Y = f'(r)\frac{y - y'}{r} \cdot m' \, , \quad Z = f'(r)\frac{z - z'}{r} \cdot m' \quad .$$

Hat der Punkt, in dem V besteht, nicht die Masse 1, sondern m, so erhält man für die entsprechenden Größen V_m, K_m, X_m, Y_m, Z_m die Formeln

(3) $$V_m = f(r)\, m\, m' \quad , \qquad K_m = f'(r)\, m\, m' \quad ,$$

(4) $$X_m = f'(r)\frac{x - x'}{r}\, m\, m' \, , \quad Y_m = f'(r)\frac{y - y'}{r}\, m\, m' \, , \quad Z_m = f'(r)\frac{z - z'}{r}\, m\, m' \quad .$$

Hat man statt eines einzigen mehrere wirkende Massenpunkte m', m'', ..., in den Entfernungen r', r'', ... von dem Punkte m, so wird:

(5) $$V_m = m\,[f(r')\, m' + f(r'')\, m'' + \ldots] \quad .$$

Geht die Wirkung von einem Kontinuum von unendlich kleinen Massen dm' aus, so wird

(6) $$V = \int f(r)\, dm' \quad ,$$

(7) $$V_m = m \int f(r) \cdot dm' \quad , \qquad K_m = m \int f'(r)\, dm' \quad ,$$

(8) $$X_m = m \int f'(r)\frac{x - x'}{r}\, dm' \, , \quad Y_m = m \int f'(r)\frac{y - y'}{r}\, dm' \, , \quad Z_m = m \int f'(r)\frac{z - z'}{r}\, dm' \quad .$$

Betrachtet man endlich die Wechselwirkung zweier Körper, so hat man:

$$W = \iint f(r)\, dm\, dm' = \int V dm \quad , \tag{9}$$

und hiervon bildet das Potential eines Körpers auf sich selbst, bei dem man jedes Produkt *dm dm'* nur einmal zu nehmen pflegt, das also den Faktor $1/_2$ erhält, einen besonderen Fall.

Diese Formeln sind nun zu spezialisieren für ein bestimmtes Entfernungsgesetz. Für das, wie gesagt, wichtigste unter ihnen, das NEWTONsche oder COULOMBsche (vgl. die Artikel „Gravitation" in Band 1, „Elektrostatik" in Band 4 und „Magnetismus" in Band 5) erhält man:

$$V = \frac{m'}{r} \quad , \qquad K = \frac{m'}{r^2} \quad , \tag{10}$$

$$X = \frac{x - x'}{r^3} m' \quad , \qquad Y = \frac{y - y'}{r^3} m' \quad , \qquad Z = \frac{z - z'}{r^3} m' \quad , \tag{11}$$

$$V_m = \frac{m\, m'}{r} \quad , \qquad K_m = \frac{m\, m'}{r^2} \quad , \tag{12}$$

$$X_m = \frac{x - x'}{r^3} m\, m' \quad , \qquad Y_m = \frac{y - y'}{r^3} m\, m' \quad , \qquad Z_m = \frac{z - z'}{r^3} m\, m' \quad , \tag{13}$$

$$W = \iint \frac{dm\, dm'}{r} \quad . \tag{14}$$

Nomenklatur. In bezug auf die Bezeichnung herrscht keine volle Übereinstimmung. Das Potential für beliebiges Entfernungsgesetz wird häufig Kräftefunktion genannt und der Name Potential auf das NEWTONsche Gesetz beschränkt; andererseits wird aber auch der Name Potential als das allgemeine und das NEWTONsche Potential als das spezielle hingestellt. Die Größe V stellt, da der betrachtete Punkt hier die Masse 1 hat, offenbar das Beschleunigungspotential dar; es wird aber zuweilen auch als Einheitspotential bezeichnet. V_m ist dann das Massenpotential. Von manchen Autoren wird derselbe Unterschied durch die Worte Potentialfunktion und Potential zum Ausdruck gebracht. Die Größe W heißt oft Potential der Wechselwirkung. Andere Ausdrücke, z. B. der die Beziehung zur Arbeit und Energie charakterisierende Ausdruck „Ergal" (CLAUSIUS) sind wieder verschwunden. Um den wirkenden und den beeinflußten Punkt (auf den sich der Potentialwert bezieht) in Kürze zu unterscheiden, kann man letzteren mit BOLTZMANN als „Aufpunkt" bezeichnen. Der Differentialquotient der Größe V nach r, also die Beschleunigung, wird bei dynamischer Auffassung Feldstärke genannt, derjenige von V_m Kraft oder Gesamtkraft; im folgenden ist der von V gewöhnlich als Kraft bezeichnet.

Weitere Bemerkungen. Durch die formale Definition ist das Potential nur bis auf eine willkürlich bleibende, bei der Differentiation herausfallende Konstante bestimmt. Durch die Arbeitsdefinition ist es aber vollständig bestimmt, und zwar derart, daß, wie der Vergleich zeigt, sein Wert im Unendlichen, der nach der ersten Definition eben jene Konstante ist, gleich null wird.

Die Definition durch die negativen Differentialquotienten hat vor der entgegengesetzten den Vorzug, daß sie der Feldanschauung entspricht, wie sie schon in den Grundbegriffen entwickelt wurde; die Kraft fließt nach ihr von Stellen höheren zu solchen niederen Potentials. Die Gleichungen einer Kraftlinie sind

$$dx : dy : dz = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z} \quad ; \tag{15}$$

die Gleichung einer auf ihnen senkrechten Niveaufläche oder Äquipotentialfläche ist

(16) $$V = \text{const} \quad .$$

Endlich müssen zwischen den Kraftkomponenten bezw. den Komponenten der Feldstärke die Beziehungen

(17) $$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

bestehen. Sie besagen einfach, daß die Kraft vom Charakter einer Zentralkraft ist, daß ihr der seitliche oder drehende Charakter fehlt.

Das Potential von Gebilden verschiedener Dimensionen.

Das Punktpotential. Für einen einzelnen Punkt von der Masse m (oben m' genannt) sind die Formeln schon hingeschrieben. Die Gleichung der Niveauflächen ist, wenn c der Parameter ist, der von einer zur anderen Fläche andere Werte annimmt:

(18) $$\frac{m}{r} = c \qquad \text{oder} \qquad r = \frac{m}{c} \quad ,$$

die der Kraftlinien, wenn Θ der Winkel gegen eine beliebige vom Massenpunkte aus gezogene Gerade und c' eine Konstante ist:

(19) $$\Theta = c' \quad ;$$

die Niveauflächen sind also Kugeln, die Kraftlinien gerade Linien; jene sind nach abnehmenden Werten und gleichen Differenzen von c auszuwählen, wobei mit wachsenden Radien die Abstände benachbarter Kugeln immer größer werden; diese hat man in der Anzahl $4\pi m$ und nach allen Richtungen gleichförmiger Verteilung von dem Massenpunkte ausgehen zu lassen. Dieser ist die Quelle oder der positive Pol, die Senke oder der negative Pol ist die unendliche Kugel, nach der alle Kraftlinien hinlaufen. Durch Zeichenwechsel erhält man den umgekehrten Fall. Daß zwischen der Anwendung auf Gravitation einerseits und Elektrizität und Magnetismus andererseits hier eine Unterscheidung zu machen ist, insofern dort gleichartige Massen (andere gibt es nicht) sich anziehen, hier aber sich abstoßen, muß ausdrücklich betont werden, da sonst, besonders hinsichtlich der Konsequenzen für die energetischen Verhältnisse, leicht die größte Verwirrung eintreten kann. — Bei der Annäherung des Aufpunktes an den Pol wird das Potential von der ersten, die Kraft von der zweiten Ordnung unendlich groß.

Zwei Pole. Hier ist

(20) $$V = \frac{m_1}{r_1} \pm \frac{m_2}{r_2} \quad ,$$

die Gleichung der Niveauflächen lautet

(21) $$\frac{m_1}{r_1} \pm \frac{m_2}{r_2} = c \quad ,$$

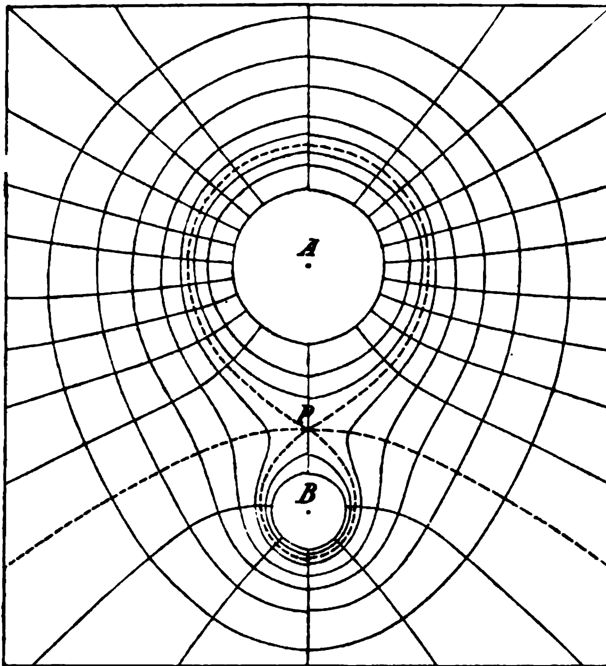
die Gleichung der Kraftlinien, wenn Θ_1 und Θ_2 die Winkel mit der Verbindungslinie der Pole sind:

(22) $$m_1(1 - \cos\Theta_1) + m_2(1 - \cos\Theta_2) = 2c' \quad .$$

Für Pole von gleichem Vorzeichen gilt das positive, für entgegengesetzte das negative Zeichen. Sind die gleichnamigen Pole auch an Stärke (Masse) gleich, so werden die Niveauflächen symmetrisch in bezug auf die in der Mitte der Verbindungslinie errichtete Ebene, und die Axialschnitte werden Lemniskaten,

während die Kraftlinien sämtlich in die Unendlichkeit laufen, wo die den beiden gegebenen Quellen entsprechende Senke liegt (oder umgekehrt). — Sind die beiden Pole entgegengesetzt, aber an Stärke gleich, so ist die auf der Verbindungslinie senkrechte Mittelebene selbst eine Niveaufläche, die übrigen sind geschlossene, jeden Pol für sich umgebende, auf der Innenseite abgeplattete Flächen, die Kraftlinien laufen von der Quelle zur Senke.

Für verschieden große Massen werden die Figuren unsymmetrisch. Als Beispiel diene Figur 48, wo sich die — dem Vorzeichen nach gleichen — Massen wie 1:4 verhalten; ein in ihrem Felde befindlicher Punkt bewegt sich auf einer der (am Rande ansetzenden) Kraftlinien nach demjenigen der beiden Körper hin, in den die Kraftlinie, auf der er sich befindet, mündet; der Punkt *P* ist ein



Figur 48.

Gleichgewichtspunkt, wie er z. B. zwischen Erde und Mond oder zwischen Sonne und Erde existiert. Es ist auch hier wieder zu betonen, daß die Figur nur anwendbar ist auf zwei feste Massen, um deren kombinierte Gravitationswirkung auf dritte Massen es sich handelt, nicht aber auf die gravitierende Wirkung zwischen jenen beiden Massen selbst (wie sie es tatsächlich für elektrische oder magnetische Massen wäre), das Feldbild dieser Wirkung müßte vielmehr auf der Grundlage entgegengesetzter Massen entworfen werden. — Abbildungen dieser anderen Fälle findet man in Bd. 5. 38—42. Daselbst ist auch die Methode auseinandergesetzt, derartige Niveau- und Kraftlinienbilder durch Superposition der für jeden einzelnen Pol geltenden Flächen bezw. Kurven zu gewinnen.

Auch der Fall des von drei oder mehr Massenpunkten herrührenden Potentials und Feldes läßt sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten behandeln, die Niveauflächen sind aber hier natürlich keine Rotationsflächen mehr, und es genügt folglich auch nicht mehr die Betrachtung und Zeichnung eines Axialschnittes; eine Ausnahme macht der Fall, wo die drei Punkte in einer geraden Linie liegen (vgl. MAXWELLS Tafel V im ersten Bande seines Werkes).

Das Linienpotential. Die allgemeine Formel lautet hier, wenn ϱ'' die Liniendichte, d. h. die Masse eines Zentimeters der materiellen Linie (s. p. 40) und r die Entfernung des Aufpunktes von dem Element dl ist:

$$V = \int \frac{\varrho'' \, dl}{r} \quad ; \tag{23}$$

dabei kann die Linie von beliebiger Form und Massenverteilung sein.

Spezielle Fälle: 1. Die unbegrenzte homogene gerade Linie. Sie laufe parallel der x-Achse, und es sei $R = \sqrt{y^2 + z^2}$ der Abstand des Aufpunktes von der Linie. Dann ist:

$$V = -2\varrho'' \log R \quad , \qquad K = \frac{2\varrho''}{R} \quad , \tag{24}$$

$$X = 0 \quad , \qquad Y = 2\varrho'' \frac{y}{R^2} \quad , \qquad Z = 2\varrho'' \frac{z}{R^2} \quad . \tag{25}$$

Man hat hier ein typisches Beispiel für die Umgestaltung des Entfernungsgesetzes der Kraft durch Integration über wirkende Gebilde: aus dem umgekehrten Quadrat (für den Punkt) ist die umgekehrte Entfernung selbst (für die Linie) geworden.

Die Niveauflächen sind gerade koaxiale Kreiszylinder, die Kraftlinien liegen in den auf der Massenlinie senkrechten Ebenen, in deren jeder sie gleichförmig nach allen Richtungen laufen. Das Potential einer unbegrenzten Linie ist, wie man sieht, trotzdem endlich, solange der Aufpunkt in endlichem Abstande bleibt. Rückt dagegen der Punkt bis auf unendlich kleines R erster Ordnung an die Massenlinie heran, so wird — und das gilt auch für gekrümmte und mit variabler Dichte belegte Linien, wenn nur an der Stelle, der sich der Aufpunkt nähert, kein Richtungs- oder Dichtesprung stattfindet — das Potential logarithmisch (also schwächer als von der ersten Ordnung) unendlich, die Kraft unendlich von der ersten Ordnung. Das Linienpotential gehört zur Klasse der logarithmischen Potentiale, auf die man immer dann stößt, wenn das Kraftgesetz, sei es von Natur, sei es wegen der Form der wirkenden Massen (Gerade, Zylinderfläche u. s. w.) die reziproke Entfernung enthält.

2. Die begrenzte homogene gerade Linie. Sie habe die Länge $2L$ und reiche von $x = -L$ bis $x = +L$; dann ist:

für Aufpunkte, deren

$$\left\{\begin{aligned} x > +L&: \quad V = \varrho'' \log \frac{x + L + \sqrt{(x+L)^2 + R^2}}{x - L + \sqrt{(x-L)^2 + R^2}} \quad , \\ +L > x > -L&: \quad V = -2\varrho'' \log R \\ &\qquad + \varrho'' \log[\{L - x + \sqrt{(L-x)^2 + R^2}\} \cdot \{L + x + \sqrt{(L+x)^2 + R^2}\}] \quad , \\ x < -L&: \quad V = \varrho'' \log \frac{L - x + \sqrt{(L-x)^2 + R^2}}{-L - x + \sqrt{(L+x)^2 + R^2}} \quad ; \end{aligned}\right. \tag{26}$$

speziell für Punkte der Äquatorebene:

$$V = \varrho'' \log \frac{\sqrt{L^2 + R^2} + L}{\sqrt{L^2 + R^2} - L} \quad . \tag{27}$$

Man kann das Potential einer geraden, homogenen Massenlinie noch in anderer Weise betrachten und hieran alsdann einen sehr merkwürdigen Schluß knüpfen. In Figur 49 sei AB die Linie, P der Aufpunkt, PC das Lot von P auf AB, EF das Linienelement dl, r seine Entfernung von P, also, von der

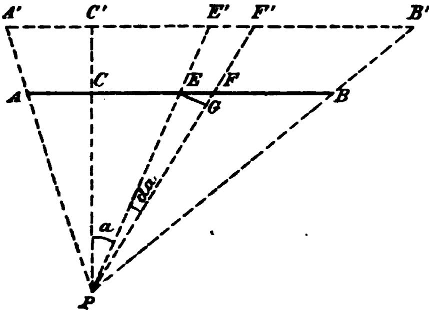
Dichte abgesehen, dl/r oder EF/PE der Beitrag des Elements EF zum Potential; ferner sei der Winkel CPE gleich α, sein Zuwachs EPF gleich $d\alpha$, dann kann man offenbar dl/r durch $d\alpha/\cos\alpha$ ersetzen, erhält für die ganze Linie

(28) $$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \quad ,$$

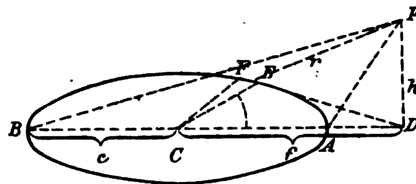
worin nun, je nach der Lage des Aufpunktes, die Grenzen in anderer Weise einzusetzen sind, im einfachsten Falle mit dem Ergebnis

$$\log \frac{\cos\alpha_1 (1 + \sin\alpha_2)}{\cos\alpha_2 (1 + \sin\alpha_1)} \quad ,$$

worauf hier nicht näher eingegangen werden soll. Man bemerkt aber, daß die zu integrierende Größe und folglich auch das ganze Integral ungeändert bleibt, wenn man die Linie AB parallel mit sich verschiebt und dabei derart dehnt oder zusammenzieht, daß ihre Endpunkte immer auf den beiden Strahlen PA und PB bleiben; diese Linien müssen dabei, wenn man nun noch die Dichte berücksichtigt, entweder alle homogen und gleich dicht sein, oder es muß, wenn



Figur 49.



Figur 50.

die Dichte variiert, diese an allen auf gleichem Strahle vom Aufpunkt liegenden Stellen die gleiche sein. Man erhält somit den Satz: Das Potential auf einen Punkt P hat denselben Wert für alle mit P in einer Ebene liegende, untereinander parallele Linien, deren Endpunkte auf denselben beiden von P ausgehenden Strahlen liegen, und deren Belegungsdichte auf irgend einem von P ausgehenden Strahle dieselbe ist.

Für einen in der Verlängerung der Linie selbst gelegenen Punkt wird in der ersten oder dritten der allgemeinen Formeln $R = 0$, und somit, wenn die Abstände des Aufpunktes vom nahen und fernen Ende der Linie mit h und h' bezeichnet werden:

(29) $$V = \varrho'' \log \frac{h'}{h} \quad .$$

3. Homogene Kreislinie. Der Radius sei a, die Höhe des Aufpunktes P (Figur 50) über der Kreisebene h, der Abstand des Aufpunktes von irgend einem Punkte E der Kreislinie r, von ihrem nächsten Punkte (A) u, von ihrem fernsten (B) v, endlich sei 2φ der Winkel zwischen CE und CA; dann findet man:

(30) $$V = 2\varrho'' \frac{a}{u} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \left(\frac{v}{u}\right)^2 \sin^2\varphi}} = 2\varrho'' \frac{a}{u} \cdot F\left(\frac{v}{u}\right)$$

oder auch

$$(31)\qquad V = 2\varrho''\frac{a}{v}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \left(\frac{u}{v}\right)^2\sin^2\varphi}} = 2\varrho''\frac{a}{v}\cdot F\left(\frac{u}{v}\right) \quad .$$

Wie man sieht, hängt das Integral, das ein elliptisches ist, nur von dem Verhältnis v/u ab; dies schafft die Möglichkeit, das Problem zu vereinfachen. Schlägt man nämlich einen auf der Ebene der Kreislinie senkrecht stehenden und durch P gehenden Kreis mit einem solchen Radius, daß die (in der Figur nicht verzeichneten) Punkte G und H, in denen er die Linie AB schneidet, diese innerlich bezw. äußerlich im Verhältnis $u:v$ teilen, so hat man das Problem auf die Bestimmung des Potentials für einen dieser Punkte, also für Aufpunkte in der Ebene der gegebenen Kreislinie zurückgeführt. Ist jetzt Θ der Winkel AGE und s der Abstand des Punktes G vom Mittelpunkte, so findet man das Potential in G:

$$(32)\qquad V_g = 2\varrho'' a\int\limits_0^{\pi}\frac{d\Theta}{\sqrt{a^2\cos^2\Theta + (a^2 - s^2)\sin^2\Theta}} = 2\varrho'' F\left(\frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{a}\right) \quad ,$$

und es gilt die Proportion

$$a + s : a - s = v : u \quad .$$

Das elliptische Integral kann man nun auf eine der bekannten Weisen auswerten; vielleicht am interessantesten ist die Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels, wie sie GAUSS entwickelt hat; es sei

$$a - s = u' \quad , \quad a + s = v' \quad , \quad \sqrt{u'v'} = u'' \quad , \quad \tfrac{1}{2}(u' + v') = v'' \quad , \quad \ldots \quad ,$$

bis schließlich nach genügend häufiger Wiederholung $u^{(n)} = v^{(n)}$ ist. Alsdann hat man die überaus einfache Formel

$$(33)\qquad V_g = 2\pi\varrho''\frac{a}{u^{(n)}} = 2\pi\varrho''\frac{a}{v^{(n)}} \quad .$$

Rückt der Aufpunkt z. B. in zehn gleichen Schritten vom Zentrum nach dem Rande, so nimmt $u^{(n)}$ die relativen Werte an:

1 9,97 9,90 9,78 9,58 9,32 8,97 8,51 7,87 6,87 0 .

Liegt der Aufpunkt in der im Mittelpunkte der Kreislinie errichteten Senkrechten, so kann man, da jetzt alle Linienelemente gleichweit von dem Aufpunkte entfernt sind, die Integration durch eine Multiplikation ersetzen und erhält:

$$(34)\qquad V = 2\pi\varrho''\frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad ;$$

speziell, wenn der Aufpunkt im Mittelpunkte selbst liegt:

$$(35)\qquad V = 2\pi\varrho'' \quad ;$$

wie man sieht, ist dieser Wert unabhängig von dem Radius der Kreislinie; alle konzentrischen Kreislinien erzeugen also bei gleich dichter Belegung in dem Mittelpunkte dasselbe Potential — ein Satz, den man sofort erweitern kann für den Fall, daß die Aufpunkte in Abständen von dem Mittelpunkte liegen, die den Radien proportional sind.

Hat man statt der ganzen Kreislinie nur einen Kreisbogen, so muß man statt der vollständigen elliptischen Integrale unvollständige nehmen. Dagegen wird für variable Dichte das Problem sehr verwickelt.

Durch Kombination der hier angegebenen Fälle kann man leicht Potential und Feld zweier Parallelgeraden, zweier Parallelkreise u. s. w. ableiten.

Das Flächenpotential. Wir kommen nun zur zweiten Stufe, zum Potential zweidimensionaler Massenverteilungen, von materiellen Flächen. Ist jetzt ϱ' die Flächendichte, d. h. die Masse pro Quadratzentimeter (vgl. p. 40), und ist df ein Flächenelement, so hat man allgemein:

$$V = \int \varrho' \frac{df}{r} \quad , \tag{36}$$

oder, wenn man Polarkoordinaten der Fläche mit dem Aufpunkte als Pol einführt:

$$V = \int \varrho' r \, d\Theta \, d\varphi \quad , \tag{37}$$

woraus man ersieht, daß das Potential auch dann noch endlich bleibt, wenn der Aufpunkt in die Fläche hineinrückt.

Homogene Kreisscheibe. Die allgemeine Formel für beliebige Lage des Aufpunktes wird hier sehr verwickelt; wie man einsieht, wenn man erwägt, daß sie aus der für die Kreislinie hervorgeht, wenn man mit da multipliziert und dann von 0 bis a integriert. Sehr einfach gestaltet sich dagegen wegen der radialen Symmetrie der Fall, wo der Aufpunkt auf der im Mittelpunkte der Scheibe errichteten Senkrechten liegt; ist nämlich a der Radius, h die Entfernung des Aufpunktes vom Mittelpunkte, p die von einem Punkte der Bandlinie, so wird

$$V = 2\pi\varrho'\left(\sqrt{a^2 + h^2} - h\right) = 2\pi\varrho'(p - h) \quad , \tag{38}$$

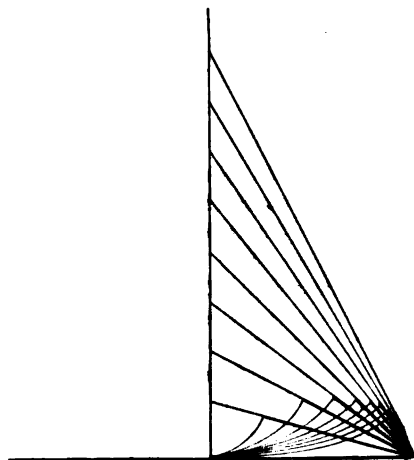
$$K = Z = 2\pi\varrho''\left(\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - 1\right) \quad . \tag{39}$$

Die Formel für V läßt sich, wie Figur 51 zeigt, leicht veranschaulichen, die starken Linien sind die Relativwerte des Potentials auf die in ihrer Verlängerung gelegenen Achsenpunkte.

Ist a groß gegen h, d. h. rückt der Aufpunkt der Scheibe in eine gegen ihren Radius kleine Entfernung, so wird

$$V = 2\pi\varrho' a \quad , \qquad K = 2\pi\varrho' \quad ; \tag{40}$$

das Potential ist also in diesem Falle nur vom Radius, die Kraft auch von diesem nicht mehr abhängig, woran später angeknüpft werden wird. Beide aber bleiben, auch wenn der Aufpunkt in die Scheibe hineinrückt, endlich.



Figur 51.

Bei der Kreislinie ergab sich, daß das Potential im Mittelpunkte gegenüber allen anderen Punkten der inneren Ebene ein Minimum ist; hier, bei der homogenen Kreisscheibe, kann man auch ohne Rechnung übersehen, daß das Potential im Mittelpunkte ein Maximum gegenüber allen anderen Punkten der Scheibe selbst ist; man wird also schließen dürfen, daß es einen Fall geben wird, in dem die Masse weder am Rande angehäuft, noch gleichmäßig über die Fläche verteilt ist, wo vielmehr die Dichte derart von außen nach innen abnimmt, daß das Potential der Scheibe für ihre sämtlichen eigenen Punkte gleich groß z. B. gleich 1, wird. Die Rechnung bestätigt das und liefert für die Dichte das Gesetz

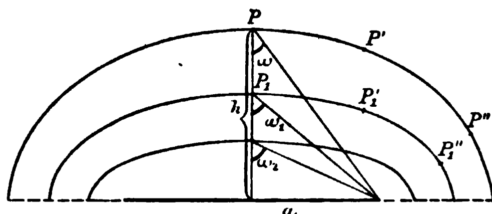
(41) $$\varrho' = \frac{1}{2\pi a \sqrt{a^2 - s^2}} \quad ,$$

und für das Potential zunächst in demjenigen Punkte P der im Mittelpunkte errichteten Senkrechten, von dem aus der halbe Scheibenradius unter dem Winkel ω erscheint — vgl. Figur 52 —

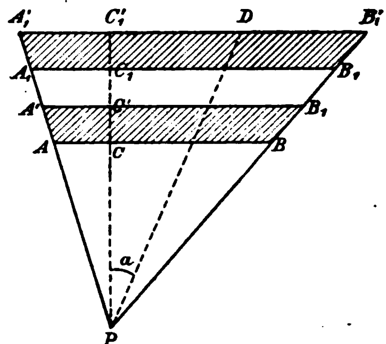
(42) $$V = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{h} = \frac{2}{\pi} \omega \quad ;$$

dieser Wert gilt dann aber auch für alle Punkte P', P'' die mit dem Punkte P auf demselben, mit der Scheibe konfokalen Rotationsellipsoid liegen; und ebenso für die Punkte P_1, P_1', P_1'' u. s. w. Wie man sieht, muß hier die Dichte am Rande unendlich groß werden. Das Weitere über diesen Fall sehe man in der „Elektrostatik", für die er hauptsächlich von Bedeutung ist (Band 4).

Streifen. Für ebene Flächen mit Ecken, also z. B. Quadrat oder Rechteck, bietet die direkte allgemeine Lösung Schwierigkeiten, die sich aber bis zu einem gewissen Grade durch Abbildungsmethoden überwinden lassen. Für Aufpunkte in der Ebene des Rechtecks läßt sich eine brauchbare Formel leicht ableiten.



Figur 52.



Figur 53.

Sehr einfach ist aber ein Fall, der sich an den Fall der begrenzten geraden Linie unmittelbar anschließt, nämlich der Fall eines Parallelstreifens, der außer durch die beiden parallelen Linien durch zwei gerade Linien begrenzt wird, die Stücke der Strahlen sind, die von dem Aufpunkte nach den Enden der Parallellinien gezogen werden. Zwei derartige Streifen, wie die in Figur 53 schraffierten, erzeugen also, wenn sie gleich breit sind, in P dasselbe Potential, andernfalls sind die Potentiale ihren Breiten direkt proportional; die Dichte muß dabei auf jedem Strahle konstant sein, von Strahl zu Strahl darf sie variieren, aber überall nach demselben Gesetze. Ein Fall, der hierin enthalten ist, ist das Potential eines Dreiecks auf einen seiner Eckpunkte. Alles das ergibt sich aus den für die Gerade aufgestellten Formeln einfach durch Integration über die Ausdehnung in der Visierrichtung vom Aufpunkte aus.

Kugelfläche. Von besonderer Wichtigkeit ist das Potential einer homogenen Kugelfläche; dabei sind die beiden Fälle zu unterscheiden, wo der Aufpunkt im inneren Hohlraume oder aber im freien äußeren Raume liegt. Für einen inneren Punkt ergibt sich durch zonenweise Integration, wenn a der Radius, ϱ' die Flächendichte, M die ganze Flächenmasse und s der Abstand des Aufpunktes vom Mittelpunkte ist:

(43) $$V_i = 4\pi\varrho' a = \frac{M}{a} \quad ; \qquad K_i = 0 \quad ;$$

V_i ist, wie man sieht, von s unabhängig, also für alle Punkte im Innern gleich groß und zwar so groß, wie es sich für den Mittelpunkt selbst ohne weiteres ergibt. Hieraus folgt weiter, daß die Kraft im Innern null ist; ein Massenpunkt im Innern einer homogenen Kugelfläche ist also überall im Gleichgewicht, der innere Raum ist ein Gleichgewichtsraum. Man beachte, daß dies im Innern einer Kreislinie durchaus nicht der Fall war. — Für einen äußeren Punkt andererseits ergibt sich:

$$V_a = 4\pi\varrho' \frac{a^2}{s} = \frac{M}{s} \quad ; \qquad K_a = \frac{M}{s^2} \quad ; \tag{44}$$

das Potential auf einen äußeren Punkt ist also mit dessen Abstand vom Kugelmittelpunkte umgekehrt proportional, es ist ebensogroß, wie wenn die ganze Masse in diesem Mittelpunkte vereinigt wäre; noch anders ausgedrückt: eine homogene Kugelfläche von gegebener Masse hat im äußeren Raume ein von ihrer Größe unabhängiges Potential; dasselbe gilt von der Kraft.

Ist die Kugelfläche heterogen, d. h. ist die Dichte eine Funktion von Poldistanz Θ_1 und geographischer Länge φ_1 auf der Kugel, und sind Θ und φ die entsprechenden Größen für den Aufpunkt, so ist, wenn zur Abkürzung

$$\cos\omega = \cos\Theta\cos\Theta_1 + \sin\Theta\sin\Theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)$$

gesetzt wird:

$$V = a^2\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \frac{\varrho'\sin\Theta_1\, d\Theta_1}{\sqrt{a^2 - 2as\cos\omega + s^2}} \quad ; \tag{45}$$

behufs Ausführung muß man den Nenner nach Kugelfunktionen von ω:

$$P_0 = 1\,, \quad P_1 = \cos\omega\,, \quad P_2 = \tfrac{3}{2}(\cos^2\omega - \tfrac{1}{3})\,, \quad P_3 = \tfrac{5}{2}(\cos^3\omega - \tfrac{3}{5}\cos\omega) \quad ,$$

$$P_n = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\ldots n}\left(\cos^n\omega - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-2}\omega + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\omega - \ldots\right)$$

entwickeln und findet dann:

für innere Punkte:

$$V_i = a\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{s}{a}\right)^n \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varrho' P_n \sin\Theta_1\, d\Theta_1\, d\varphi_1 \quad , \tag{46}$$

für äußere Punkte:

$$V_a = a\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{a}{s}\right)^{n+1} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varrho' P_n \sin\Theta_1\, d\Theta_1\, d\varphi_1 \quad . \tag{47}$$

Zylinderfläche. Für eine homogene Zylinderfläche mit kreisförmigem Querschnitte findet sich:

$$V_i = 4\pi\varrho' a \log\left(\frac{2\sqrt{pq}}{a}\right) \quad , \tag{48}$$

$$V_a = 4\pi\varrho' a \log\left(\frac{2\sqrt{pq}}{s}\right) \quad ; \tag{49}$$

wo a der Radius, s der Achsenabstand des Aufpunktes ist und p und q die Längenabschnitte des Zylinders, von der Querebene, in der der Aufpunkt liegt, nach beiden Seiten gerechnet, sind. Nach außen wirkt also die Zylinderfläche

so, wie wenn ihre ganze Masse in ihrer Achse konzentriert wäre; im Innern ist das Potential von dem Achsenabstande des Aufpunktes unabhängig, die Kraft hat also hier keine Komponente nach irgend einer Querrichtung, sie wirkt rein axial. Im mittelsten Querschnitt, bei einem unendlich langen Zylinder aber für beliebige innere Lage, ist sogar die Gesamtkraft gleich null — ein Resultat, das man nach dem Verhalten der Kreislinie vielleicht nicht erwartet hätte.

Ellipsoidoberfläche. Während im Innern einer homogenen Kugelfläche das Potential konstant, die Kraft null ist, gilt das im Innern einer homogenen Ellipsoidoberfläche nicht mehr. Es gibt aber eine solche Ellipsoidoberfläche, für die es der Fall ist; nur muß sie mit Masse von variabler Dichte belegt oder, was offenbar auf dasselbe hinauskommt, zwar homogen, aber von einer, wenn auch sehr kleinen, von Ort zu Ort variierenden Dicke sein. Und zwar wird obige Forderung erfüllt von derjenigen Schicht, die außen und innen von zwei konzentrischen und ähnlichen Ellipsoidflächen begrenzt ist, oder von einer überall gleich dicken Schicht, deren Flächendichte das Gesetz der Dicke der zuerst genannten Schicht befolgt; es sei bemerkt, daß eine Schicht wie die zuerst genannte aus der Kugelschicht durch sogenannte homogene Deformation hervorgeht. Auf das äußere Potential der ellipsoidischen Oberfläche kann hier nicht eingegangen werden.

Das Körperpotential. Die allgemeinen Formeln für das Potential dreidimensionaler Gebilde lauten, je nachdem rechtwinklige Koordinaten — x', y', z' für einen Körperpunkt, x, y, z, für den Aufpunkt — oder Polarkoordinaten — Aufpunkt als Nullpunkt, Körperpunkt r, ϑ, φ — benutzt werden (ϱ die Raumdichte):

$$V = \int \frac{dm}{r} = \iiint \frac{\varrho\, dx'\, dy'\, dz'}{r} = \iiint \varrho\, r \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \quad , \tag{50}$$

$$\left\{\begin{aligned} X &= \iiint \varrho \frac{x-x'}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz' = \iiint \varrho \sin^2\vartheta \cos\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \quad , \\ Y &= \iiint \varrho \frac{y-y'}{r_3}\, dx'\, dy'\, dz' = \iiint \varrho \sin^2\vartheta \sin\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \quad , \\ Z &= \iiint \varrho \frac{z-z'}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz' = \iiint \varrho \sin\vartheta \cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \quad . \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Wie man aus den Polarformeln ersieht, bleiben sowohl das Potential als auch die Kraftkomponenten, also auch die Kraft selbst, endlich, selbst dann, wenn der Aufpunkt in der wirkenden Masse selbst liegt; eine Tatsache, die auch anschaulich insofern verständlich ist, als der unendlich klein erster Ordnung werdenden Entfernung oder ihrem unendlich klein zweiter Ordnung werdenden Quadrate im Nenner das von der dritten Ordnung unendlich kleine Raumelement im Zähler gegenübersteht.

Kugel. Variiert die Dichte ϱ nur mit dem Radiusvektor (Abstand vom Mittelpunkte) s, nicht aber mit Breite und Länge, und ist wieder a der Radius der Kugel, M die ganze Masse, so gelten folgende Formeln:

$$V_a = \frac{M}{r} \quad , \qquad V_i = \frac{4\pi}{s}\int_0^s \varrho\, u^2\, du + 4\pi \int_s^a \varrho\, u\, du \quad , \tag{52}$$

und für innere Punkte speziell bei homogener Massenverteilung (M_s die Masse bis zum Radius s):

$$(53)\quad \begin{cases} V_i = 2\pi\varrho(a^2 - \frac{1}{3}s^2) \quad , \quad K_i = \frac{4\pi}{3}\varrho s = \frac{M_s}{s^2} \quad , \\ X_i = \frac{4\pi}{3}\varrho x \quad , \quad Y_i = \frac{4\pi}{3}\varrho y \quad , \quad Z_i = \frac{4\pi}{3}\varrho z \quad . \end{cases}$$

Nach außen wirkt also die Kugel allgemein, wie wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, im Innern ist bei Homogenität die Kraft mit dem Abstande des Aufpunktes vom Mittelpunkte proportional, also so groß, als ob die Kugel nur bis zu der Schicht, in der der Aufpunkt liegt, reichte und die betreffende Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Während also bei einer homogenen Kugel die Kraft schon von der Oberfläche an nach innen zu abnimmt, tut sie das bei einer nach innen dichter werdenden Kugel nur noch bis zu einem bestimmten Grade der Dichtezunahme; bei stärkerem nimmt sie erst bis zu einer gewissen Tiefe zu und dann erst ab. Im Mittelpunkte aber ist stets das Potential ein Maximum, die Kraft null (wegen der Anwendung auf die Erde vergleiche man den Artikel „Gravitation").

Hohlkugel. Auch diese soll aus homogenen Schichten bestehen, der innere Radius sei a_0, der äußere a; dann hat man in den drei Fällen, wo der Aufpunkt außerhalb, in der Masse oder im Hohlraume liegt, die Formeln:

$$(54)\quad \begin{cases} V_a = \frac{M}{r} \quad , \\ V_i = \frac{4\pi}{s}\int\limits_{a_0}^{s} \varrho u^2 du + 4\pi\int\limits_{s}^{a} \varrho u\, du \quad , \\ V_h = 4\pi\int\limits_{a_0}^{a} \varrho u\, du \quad ; \end{cases}$$

und speziell für homogene Verteilung (V_a bleibt ungeändert):

$$(55)\quad \begin{cases} V_i = \frac{2\pi\varrho}{s}(a^2 s - \frac{2}{3}a_0^3 - \frac{1}{3}s^3) \quad , \quad K_i = \frac{4\pi}{3}\,\frac{s^3 - a_0^3}{s^2} = \frac{M_{a_0,s}}{s^2} \quad , \\ V_h = 2\pi\varrho(a^2 - a_0^2) \quad , \quad K_h = 0 \quad ; \end{cases}$$

die Verhältnisse im Äußern und in der Masse sind also entsprechend wie bei der Vollkugel, im Hohlraume ist dagegen, entsprechend dem Verhalten der Kugelfläche (s. o.) das Potential konstant, die Kraft null.

Bei beliebiger Massenverteilung kommt man wieder wie bei der Kugelfläche auf Kugelfunktionen, nur tritt hier noch der Radiusvektor als Variable hinzu.

Zylinder. Bei unbegrenzter Länge und kreisförmigem Querschnitte wird (s Abstand des Aufpunktes von der Achse):

$$(56)\quad V_a = -2\pi\varrho a^2 \log s \quad , \quad V_i = \varrho\pi a^2(1 - 2\log a) - \varrho\pi s^2 \quad ;$$

bei elliptischem Querschnitte (a, b Halbachsen, x, y Koordinaten des Aufpunktes in bezug auf einen Achsenpunkt):

$$(57)\quad V_i = \varrho\pi a b\left(2\log\frac{2}{a+b} + 1\right) - 2\pi\varrho\frac{b x^2 + a y^2}{a+b} \quad .$$

Bei begrenzter Länge — p, q nach den beiden Seiten von der Querebene aus, in der der Aufpunkt liegt, gerechnet, wird, in einfachem Anschluß an die Formeln für die Zylinderfläche (p. 189) für Kreisquerschnitt:

(58) $$V_a = 2\pi\varrho a^2 \log \frac{2\sqrt{pq}}{s} \quad , \qquad V_i = 2\pi\varrho\left[a^2 \log \frac{2\sqrt{pq}}{a} + \tfrac{1}{2}(a^2 - s^2)\right] \quad ,$$

und für den Hohlzylinder (a_0 bis a):

(59) $$\begin{cases} V_a = 2\pi\varrho(a^2 - a_0^2)\log\dfrac{2\sqrt{pq}}{s} \quad , \\ V_i = 2\pi\varrho\left[a^2\log\dfrac{2\sqrt{pq}}{a} - a_0^2\log\dfrac{2\sqrt{pq}}{s} + \tfrac{1}{2}(a^2 - s^2)\right] \quad . \end{cases}$$

Von besonderem Interesse ist noch die Kraft auf einen Punkt in der Fortsetzung der Achse des homogenen Vollzylinders; sind nämlich h_1 und h_2 die Abstände des Aufpunktes vom zu- und abgewandten Zylinderende, so ist:

(60) $$K = 2\pi\varrho\,[(\sqrt{h_2^2 + a^2} - h_2) - (\sqrt{h_1^2 + a} - h_1)] \quad ,$$

und es lassen sich folgende Spezialfälle unterscheiden:

a) h_1 und h_2 sind klein gegen a: flache Scheibe von der Dicke $\delta = h_2 - h_1$ (vgl. oben p. 187):

$$K = 2\pi\varrho\delta = 2\pi\varrho' \quad .$$

b) h_1 ist klein gegen h_2 und a: dicke Scheibe, Aufpunkt dicht darüber:

(61) $$K = 2\pi\varrho(\sqrt{h_2^2 + a^2} - h_2 - a) \quad .$$

c) h_1 ist klein gegen h_2 und h_2 klein gegen a: $K = -2\pi\varrho h_2$.

d) h_2 ist groß gegen h_1 und a: langer Zylinder:

(62) $$K = -2\pi\varrho\cdot(\sqrt{h_1^2 + a^2} - h_1) \quad .$$

e) h_2 ist groß gegen a, h_1 klein gegen a: $K = -2\pi\varrho a$.

f) h_1 und h_2 sind groß gegen a:

(63) $$K = -2\pi\varrho\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) \quad .$$

Wie man durch Vergleich der Formel unter d) mit der Formel (38) (p. 187) findet, ist die Kraft des langen Zylinders gleich dem Potential seiner Endfläche, falls diese die Raumdichte jenes zur Flächendichte hat, dasselbe gilt von den speziellen Formeln e) und (40). Es ist dies ein Beispiel für die Beziehung zwischen dem Potential eines differentiellen und der Kraft des entsprechenden integralen Gebildes.

Ellipsoid. Die Masse sei gleichförmig verteilt, die Halbachsen seien a, b, c, und es sei λ die ellipsoidische (größte) Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad ;$$

dann ist das Potential im äußeren bezw. inneren Raume:

(64) $$\begin{cases} V_a = \pi\varrho abc\displaystyle\int_\lambda^\infty\left(1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u}\right)\frac{du}{\sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}} \ , \\ V_i \text{ ebenso, nur untere Integralgrenze null} \quad ; \end{cases}$$

oder, wenn die Masse M des Ellipsoids und die Hilfsgröße

$$W = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}$$

eingeführt werden:

$$(65)\quad \begin{cases} V_a = \frac{3}{4} M \left[\int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{W} - x^2 \int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{(a^2+u)W} - y^2 \int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{(b^2+u)W} - z^2 \int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{(c^2+u)W} \right] , \\ V_i \text{ ebenso, nur untere Integralgrenzen null.} \end{cases}$$

Die Werte und Niveauflächen im äußeren Raume sind kompliziert, weil x, y, z auch noch in λ enthalten sind. Dagegen liegen für einen inneren Punkt die Verhältnisse einfach, wie man besonders deutlich erkennt, wenn man zur Abkürzung für die Konstanten die Zeichen

$$(66)\quad \int\limits_0^\infty \frac{du}{W} = D\,, \quad \int\limits_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)W} = A\,, \quad \int\limits_0^\infty \frac{du}{(b^2+u)W} = B\,, \quad \int\limits_0^\infty \frac{du}{(c^2+u)W} = C$$

einführt; es wird dann nämlich:

$$(67)\quad V_i = \frac{3}{4} M (D - Ax^2 - By^2 - Cz^2) \quad ;$$

das Potential im Innern ist also eine Funktion zweiten Grades der Koordinaten des Aufpunktes, und die inneren Niveauflächen sind mit dem Gegebenen koaxiale Ellipsoide. — Ferner werden die Kraftkomponenten:

$$(68)\quad \begin{cases} X_a = \frac{3}{2} M x \int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{(a^2+u)W} \,, \qquad Y_a = \frac{3}{2} M y \int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{(b^2+u)W} \,, \\ Z_a = \frac{3}{2} M z \int\limits_\lambda^\infty \frac{du}{(c^2+u)W} \,, \\ X_i = \frac{3}{2} M A \cdot x \,, \qquad Y_i = \frac{3}{2} M B \cdot y \,, \qquad Z_i = \frac{3}{2} M C \cdot z \;; \end{cases}$$

die Kraftkomponenten sind also für einen inneren Punkt den entsprechenden Komponenten seines Abstands vom Mittelpunkte proportional.

Daß eine homogene ellipsoidische, von ähnlichen und konzentrischen Flächen begrenzte Schicht im Hohlraume keine Kraft ausübt, ist schon oben in anderem Zusammenhange erwähnt worden.

Die in den obigen Formeln vorkommenden elliptischen Integrale gehen, wenn es sich um ein Rotationsellipsoid handelt, in einfachere Funktionen über, und zwar bei dem abgeplatteten in zyklometrische, bei dem verlängerten in logarithmische. Ist nämlich x die Polar-, s die Äquatorialrichtung, a die Polar-, b die Äquatorialhalbachse, und $\varepsilon = (b^2 - a^2)/a^2$ die Abplattung, so ist für das abgeplattete Rotationsellipsoid die axiale und äquatoriale Kraftkomponente:

$$(69)\quad X_i = 3M \frac{\varepsilon - \operatorname{arctg} \varepsilon}{a^3 \varepsilon^3} x \,, \qquad S_i = \frac{3}{2} M \frac{1}{a^3 \varepsilon^3} \left(\operatorname{arctg} \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \right) s \,,$$

speziell für kleine Abplattung (Sphäroid):

$$(70)\quad X_i = \frac{M}{a^3} \left(1 - \frac{3}{5} \varepsilon^2\right) x \,, \qquad S_i = \frac{M}{a^3} \left(1 - \frac{6}{5} \varepsilon^2\right) s \,,$$

also etwas kleiner als für die Kugel von gleicher Masse; andererseits, wenn ε die Verlängerung ist, für das verlängerte Rotationsellipsoid:

$$(71)\quad \begin{cases} X_i = \frac{3M}{a^3 \varepsilon^3}\left[\log\left(\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2}\right) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right] x \quad , \\ S_i = \frac{3M}{2a^3\varepsilon^3}\left[\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2} - \log\left(\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2}\right)\right] s \quad , \end{cases}$$

und speziell für starke Verlängerung:

$$(72)\qquad X_i = \frac{3M}{a^3}(\log 2\varepsilon - 1)\, x \quad , \qquad S_i = \frac{3M}{2a^3}(\varepsilon^2 - \log 2\varepsilon)\, s \quad .$$

Das Potentialproblem des Ellipsoids ist von äußerst zahlreichen Autoren behandelt und gefördert worden; an erster Stelle sind LEGENDRE, DIRICHLET und CHASLES zu nennen.

Andere Spezialfälle. Es sind im Laufe der Zeiten noch zahlreiche Formen auf ihr Potential hin untersucht worden; es muß aber hier genügen, kurz darauf hinzuweisen. So haben behandelt:

Die Kreisfläche und die Ellipsenfläche für beliebige Punkte im Raume: HEINE, BETTI, RIEMANN, CAYLEY, LIPSCHITZ u. A.

Die homogene Kugelfläche mit Rücksicht auf die Frage, wie das Entfernungsgesetz beschaffen sein müsse, damit zwischen der Anziehung der Kugelfläche und der ihres Mittelpunktes ein für alle äußeren Aufpunkte gleicher algebraischer Zusammenhang bestehe (bei dem NEWTONschen Gesetz sind beide identisch); es ergibt sich eine aus der reziproken Entfernung und ihrer Exponentialfunktion zusammengesetzte Funktion sowie eine bestimmte Differentialgleichung: S. VALENTINER, angeregt durch L. KÖNIGSBERGER.

Polygone und Polyeder — MEHLER, MERTENS, CAYLEY, BETTI; insbesondere das Tetraeder: GÜNTHER. — Die Pyramide mit regulärer Grundfläche und verschiedener Seitenzahl: PIERPAOLI; es handelt sich besonders um die Anziehung auf die eigene Spitze und um die Frage, bei welcher relativen Höhe der Pyramide diese Anziehung ein Maximum ist, wenn das Volumen immer dasselbe ist (bei drei Seiten 0,0616, bei sechs Seiten 0,0779, beim Kegel 0,0819). — Das sphärische Dreieck hat u. A. HOPPE behandelt.

Zylinder und Kegel mit Kreis- oder Ellipsenquerschnitt: GRUBE, RÖTHIG, MEHLER, HEINE, H. WEBER, LAMB, BETTI, KIRCHHOFF. — Rotationsparaboloid: BAER. — Auch zahlreiche andere Rotationsflächen sind behandelt worden.

Parallelepiped: BESSEL, RIEMANN, RÖTHIG, KÖTTERITZSCH, LEGEBEKE.

Ringkörper: namentlich ZÜGE, HÜBSCHMANN, DYSON. Ist df das Flächenelement, V_0 das Potential des Meridianschnittes, und liegt der Aufpunkt bei $x = a$ sowie im Abstande r von einem Körperpunkte, s von der Achse, so ist

$$(73)\qquad V = s\int_0^{2\pi} V_0 \cos\varphi \, d\varphi - \int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{(a-x)\, df}{r} \quad ,$$

für Aufpunkte in der Achse fällt das erste Glied weg. Für kreisförmigen oder elliptischen Meridianschnitt läßt sich V durch ein elliptisches Doppelintegral darstellen, für Achsenpunkte ergibt sich ein einfaches elliptisches Integral. — Das Problem steht in engem Zusammenhange einerseits mit den Kugelfunktionen, andererseits mit den Ringfunktionen, worüber namentlich grundlegende Arbeiten von C. NEUMANN und HEINE vorliegen.

Vollkugel, deren Dichte eine ganze rationale Funktion der rechtwinkligen Koordinaten ist: LANGHEINEKEN; es lassen sich für äußere wie für innere Aufpunkte geschlossene Ausdrücke aufstellen; auch wird die analoge Aufgabe für die Ebene gelöst.

Ellipsoide, Schalen, Scheiben von beliebiger Dichteverteilung: DYSON, HOBSON u. A.

Kugelkalotte, Körper zwischen zwei nicht konzentrischen Kugelflächen oder zwischen zwei Kugelkalotten u. s. w. von verschiedenen Autoren.

Mehrere Körper. Auch das von einer Mehrheit von Gebilden, seien es nun Linien, Flächen oder Körper, herrührende Potential sowie das Potential dieser Gebilde aufeinander selbst ist vielfach behandelt worden; der Fall zweier Punkte ist auch bereits angeführt worden. Dabei handelt es sich entweder um Körper mit gegebener Massenbelegung oder um solche, auf denen sich eben unter ihrem gegenseitigen Einflusse die Massen in bestimmter Weise verteilen. Am wichtigsten und in seiner historischen Entwickelung am interessantesten ist der Fall zweier Kugeln, der von POISSON, PLANA, KIRCHHOFF und vielen Anderen durchgeführt worden ist. Dann sind noch zu erwähnen zwei Ellipsoide: MERTENS, VON SCHÄVEN u. A., sowie zwei Polyeder: LIEBENTHAL.

Körper größter Anziehung. Ein besonderes Interesse hat sich für das Problem gezeigt, für eine gegebene Masse eine derartige Anordnung zu finden, daß ihre Anziehung auf einen bestimmten Punkt, sei es von gegebener Lage oder in gegebener Richtung (oder auch die Summe der Anziehungen auf zwei Punkte) ein Maximum werde. Mit diesem Problem haben sich u. A. SELLA, RAGNOLI, LAMPE und SPIJKER beschäftigt; auch die schon genannten Arbeiten PIERPAOLIS über die Pyramide gehören hierher. Am einfachsten lassen sich bestimmte Lösungen auffinden für den Fall konstanter Dichte und axial-symmetrische Gestalt der Körper; jedoch kann hierauf nicht näher eingegangen werden.

Doppelpunkt, Doppellinie, Doppelfläche. Für Massen, die nur positiv sein können, ist mit Punkten, Linien, Flächen und Körpern die Mannigfaltigkeit erschöpft. Dagegen ist für Massen, die positiv oder negativ sein können, von besonderem Interesse der Fall, daß jedem positiven Massenpunkte ein ihm dicht benachbarter von ebenso großer negativer Masse zugehört; je nachdem es sich um punkt-, linien- oder flächenförmige Gebilde handelt, gelangt man so zu drei neuen Klassen von Fällen — dreidimensionale Gebilde kommen hier offenbar nicht in Betracht. Da diese Formen hauptsächlich in der Lehre vom Magnetismus sowie in der Elektrostatik vorkommen und daselbst (vgl. Band **4** und **5**) behandelt werden, genügt hier eine kurze Übersicht.

Die Wirkung irgend eines positiven Punktes des Doppelgebildes auf einen in endlicher Entfernung befindlichen Punkt wird zum größten Teile aufgehoben durch die entgegengesetzte, gleichgroße Wirkung des zugehörigen negativen Punktes, und es bleibt nur noch das Differential übrig; soll also die Wirkung endlich sein, so muß die Punktmasse bezw. die Linien- oder Flächendichte unendlich groß sein, derart, daß ihr Produkt in die Entfernung der beiden zusammengehörigen Punkte voneinander, das sogenannte Massenmoment oder Dichtemoment, endlich ist.

Für das Punktpaar oder den Doppelpunkt ergibt sich das Potential auch aus dem oben aufgestellten Potential zweier entgegengesetzt gleicher Pole dadurch, daß man deren Abstand unendlich klein werden läßt; bedeutet ds den Abstand, $m\,ds = p$ das Moment, x die Richtung von ds und ω den Winkel zwischen der x-Richtung und der Richtung nach dem Aufpunkte, so ist

$$V = -p\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{p}{r^2}\cos\omega = p\frac{x}{r^3} \quad . \tag{74}$$

Die Doppellinie bietet nichts Bemerkenswertes dar, wohl aber die Doppelfläche, bestehend aus einer mit lauter positiven und einer zweiten, unendlich benachbarten, mit lauter negativen, je gleich starken Massenpunkten besetzten Fläche; bedeutet df ein Flächenelement, $p = \varrho\,ds$ die Momentdichte und Θ den

Winkel zwischen der Normale n der Fläche nach ihrer als positiv gewählten Seite und der Richtung r nach dem Aufpunkte, so hat man:

(75)
$$V = \int p \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df = \int p \frac{df \cos \Theta}{r^2} \quad ,$$

und speziell, wenn die Doppelfläche homogen ist — wozu nur die Konstanz von p gehört, während ϱ und ds für sich variieren dürfen —, wenn S der Raumwinkel oder die scheinbare Größe (p. 11) ist, unter der die Fläche vom Aufpunkte aus erscheint:

(76)
$$V = p \int \frac{df \cos \Theta}{r^2} = p S \quad .$$

Das Potential einer homogenen Doppelfläche ist also gleich der Momentdichte, multipliziert mit ihrer scheinbaren Größe vom Aufpunkte aus, es ist somit nur von der Gestalt des Randes abhängig und für alle Flächen mit demselben Rande gleich groß; wenn sich Stücke der Fläche, vom Aufpunkte aus gesehen, überdecken, so daß man das eine mit der positiven, das andere mit der negativen Seite nach vorn sieht, so heben deren Beiträge sich auf. — Hat die Fläche einen ebenen Rand, so ist ihr Potential für alle Aufpunkte in dessen Ebene null; ist die Randlinie überdies zentrisch symmetrisch, so ist das Potential, bei gleichem Abstande, am größten für die Punkte auf der Achse. Das Potential einer geschlossenen Doppelfläche ist im ganzen äußeren Raume null, im ganzen inneren Hohlraume $4\pi p$, d. h. für alle Punkte gleich groß; die Kraft ist folglich sowohl außerhalb wie innerhalb gleich null.

Allgemeine Untersuchungen über das Potential.

Die Stetigkeitsverhältnisse des Potentials. Erinnern wir uns daran, daß beim Hineinrücken des Aufpunktes in die wirkende Masse das Punktpotential unendlich von der ersten Ordnung, das Linienpotential nur logarithmisch unendlich wurde und das Flächen- sowie das Raumpotential endlich blieb, so sehen wir, daß hier ein aufsteigendes Gesetz vorliegt, das noch der Verallgemeinerung und insofern der Ergänzung bedarf, als Flächen und Körper noch nicht durch ein verschiedenes Verhalten geschieden sind. Diese Ergänzung ist leicht zu machen.

Was zunächst das Flächenpotential betrifft, so genügt es der Einfachheit halber eine Kreisscheibe zu betrachten mit dem Punkte, in den der Aufpunkt hineinrückt, als Mittelpunkt; denn jede andere Form — Spitzen und Kanten ausgenommen — wird doch um diesen Punkt herum eine Kreisfläche bilden, und die weiter abliegenden Teile kommen für die Stetigkeitsverhältnisse nicht in Betracht; entsprechend sei die Dichte konstant. — Hier ist nun eine Ergänzung der oben wiedergegebenen Formeln zu machen, mit Rücksicht auf die beiden Fälle, daß der Aufpunkt in die Scheibe von der Seite der positiven oder der negativen z (dies sei die dritte Dimension) hineinrückt; man hat alsdann für das Potential:

(77)
$$\begin{cases} \text{für } z > 0: \quad V = 2\pi\varrho' \left(\sqrt{a^2 + z^2} - z\right) \quad , \\ \text{für } z < 0: \quad V = 2\pi\varrho' \left(\sqrt{a^2 + z^2} + z\right) \quad , \end{cases}$$

und für die Kraftkomponente senkrecht zur Fläche:

(78)
$$\begin{cases} \text{für } z > 0: \quad Z = 2\pi\varrho' \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 1\right) \quad , \\ \text{für } z < 0: \quad Z = 2\pi\varrho' \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} + 1\right) \quad . \end{cases}$$

Wie man sieht, bleibt beim Hineinrücken des Aufpunktes das Potential nicht nur endlich, sondern auch stetig; dagegen wird die Kraft unstetig, sie ist nämlich kurz vor dem Durchgange $-2\pi\varrho'$, kurz nachher dagegen $+2\pi\varrho'$, sie erleidet daher einen Sprung um $4\pi\varrho'$ (oder wenn der Durchgang von der negativen zur positiven Seite erfolgt, um $-4\pi\varrho'$). Es ist einleuchtend, was dieser Sprung für eine Bedeutung hat: die Anziehung (oder Abstoßung) bleibt ihrem Betrage nach bei dem Durchgange ungeändert, sie bleibt auch Anziehung, wenn sie vorher Anziehung war (und Abstoßung, wenn Abstoßung); aber im Raume kehrt sie ihren Richtungssinn um. Die Unstetigkeit ist also nur eine Folge des Umstands, daß man ein festes Koordinatensystem zugrunde legt; verstände man unter Anziehung nach der gegebenen Fläche hin stets eine positive, unter Abstoßung stets eine negative Kraft (oder umgekehrt), so würde alles stetig bleiben. Man kann die Sprungformeln in folgender Weise schreiben:

$$(79)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_i}{\partial n_i} - \dfrac{\partial V_a}{\partial n_i} = -4\pi\varrho' \quad , & \dfrac{\partial V_i}{\partial n_a} - \dfrac{\partial V_a}{\partial n_a} = +4\pi\varrho' \quad , \\[2ex] \dfrac{\partial V_i}{\partial n_i} - \dfrac{\partial V_a}{\partial n_a} = 0 \quad , & \dfrac{\partial V_i}{\partial n_i} + \dfrac{\partial V_a}{\partial n_a} = -4\pi\varrho' \quad , \end{cases}$$

wobei, solange die Fläche offen ist, n_i und n_a beliebig zu nehmen sind.

Während die Normalkomponente der Kraft unstetig ist, bleiben die Tangentialkomponenten offenbar stetig; da nun durch das Verhältnis beider die Richtung der Kraft bestimmt ist, so folgt, daß die Kraftlinien beim Durchgange durch eine Massenfläche gebrochen werden. Dabei gilt, wenn K die ganze Kraft, φ der Einfalls- und ψ der Brechungswinkel ist, die Formel:

$$(80)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - 4\pi\dfrac{\varrho}{K}} \quad ,$$

worin ϱ/K im Gravitationsmaße eine reine Zahl ist. Der Brechungswinkel hängt also, außer vom Einfallswinkel, auch noch von dieser Verhältniszahl ab; setzt man $4\pi\varrho/K = (1-n)\cos\varphi$, so wird:

$$(81)\quad n\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi \quad .$$

Auch die zweiten Differentialquotienten sind vielfach auf ihre Unstetigkeiten geprüft worden, so von Green, Paci, C. Neumann, Korn, Weingarten, Bromwich.

Einzuschalten ist hier die entsprechende Betrachtung für die Doppelfläche. Nimmt man wieder Kreisform und Homogenität, so findet man

$$(82)\quad V = 2\pi p\left(\frac{z}{+\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \quad ;$$

vor dem Durchgange des Aufpunktes ist $V = +2\pi p$, nachher ist $V = -2\pi p$, das Potential erleidet also in diesem Falle selbst einen Sprung und zwar um $-4\pi p$. Daraus folgt, daß die Kraft beim Durchgange des Aufpunktes durch die Doppelfläche unbestimmt unendlich wird; es bezieht sich das aber lediglich auf die unendlich dünne Schicht zwischen den beiden Flächen, die Werte zu beiden Seiten dieser Schicht schließen sich stetig — und zwar in diesem Falle auch dem Richtungssinne nach ungeändert — aneinander an.

Wird hiernach bei der Doppelfläche das Potential selbst, bei der einfachen Fläche die Kraft, also der erste Differentialquotient unstetig, so bleibt, wie zum Teil schon oben bemerkt wurde, beim Körperpotential sowohl das Potential selbst als auch seine ersten Differentialquotienten stetig und endlich, wenn der Aufpunkt aus dem äußeren Raume in die Masse selbst hineintritt. Das gilt aber nicht

mehr für die zweiten Differentialquotienten des Potentials, also die ersten der Kraft; diese erleiden vielmehr einen Sprung. Um diesen zu finden, kann man wieder zunächst einen Spezialfall betrachten, nämlich den einer homogenen Kugel, in deren Zentrum sich der Aufpunkt befindet; man findet dann, daß jede der obigen Größen im äußeren Raume null, im Innern aber gleich $-4\pi\varrho/3$ ist; so groß ist also ihr Sprung. Für allgemeine Konfiguration wird dieser Sprung ein anderer und für jeden der drei zweiten Differentialquotienten verschieden; es läßt sich aber auch dann noch ein sehr allgemeines und einfaches Gesetz für den Sprung angeben, und das führt zu dem Folgenden.

Die Laplacesche und die Poissonsche Gleichung; Grundgesetz des Potentials. Für das Massenpotential gilt, wenn ϱ die Dichte der wirkenden Massen am Orte des Aufpunktes ist, die Gleichung:

(83) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho \quad , \qquad \text{kurz: } \Delta V = -4\pi\varrho \quad ,$$

speziell im freien Raume:

(84) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad , \qquad \text{kurz: } \Delta V = 0 \quad .$$[1]

Diese letztere Gleichung heißt die LAPLACEsche Gleichung, die erste, in der jene als Spezialfall ($\varrho = 0$) enthalten ist, die POISSONsche Gleichung. Sie lautet in Worten: Die Summe der zweiten Differentialquotienten des Potentials ist gleich dem -4π-fachen der Dichte an dem betreffenden Punkte, speziell im freien Raume ist sie null. Der Beweis läßt sich für das äußere und das innere der Massen strenger führen als für deren Oberfläche, und man hat sich deshalb sogar mehrfach entschlossen, für diese nur zu schreiben $0 > \Delta V > -4\pi\varrho$. Statt durch das Potential kann man die Gleichungen auch mit Benutzung der Kraftkomponenten hinschreiben und hat alsdann:

(85) $$\text{allgemein:} \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varrho \quad ,$$

(86) $$\text{im freien Raume:} \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad .$$

Die anschauliche Bedeutung der Gleichungen ist, wie namentlich MACH sehr schön dargelegt hat, eine sehr einfache. Die Summe der zweiten Differentialquotienten einer Größe ist nämlich die Abweichung des Wertes, den sie in dem betreffenden Punkte des Raumes hat, von dem Mittelwerte aller Werte, die sie in der Umgebung jenes Punktes hat. Die Gleichungen besagen also, daß diese Abweichung im freien Raume null ist, und daß sie im Massengebiete mit der Dichte proportional ist. Diese Betrachtung läuft offenbar auf die Einführung des Begriffs der Divergenz der Kraft — vgl. „Grundbegriffe“, p. 18 — hinaus, und in der Tat kann man auch schreiben:

(87) $$\operatorname{div} K = 0 \qquad \text{bezw.} \qquad \operatorname{div} K = 4\pi\varrho \quad .$$ (88)

Noch in anderer Weise kann man denselben Zusammenhang ausdrücken. Es ist nämlich die LAPLACEsche Gleichung äquivalent mit der Gleichung

(89) $$\int \frac{\partial V}{\partial n} df = 0 \quad ,$$

[1] Statt des Symbols Δ werden, namentlich im Auslande, noch verschiedene andere benutzt (Δ^2, ∇^2 u. s. w.)

worin df ein Element einer beliebigen geschlossenen Oberfläche, in deren Innern sich keine wirkenden Massen befinden, ist und n die Richtung der Normale von df nach außen bezeichnet. Entsprechend wird, wenn im Innern sich die Massen M befinden, die der POISSONschen äquivalente Gleichung

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} df = -4\pi M \quad . \tag{90}$$

Diese Gleichungen haben aber die einfache Bedeutung, daß sie aussagen: Die Kraftströmung aus einer geschlossenen Fläche ist das 4π-fache der eingeschlossenen Massen; an die Stelle der Kraftströmung kann man grobsinnlich auch die Anzahl der — entsprechend ausgewählten — Kraftlinien setzen (vgl. das allgemein über die Böschungslinien Gesagte, Art. „Grundbegriffe", p. 70). Auf diese Verhältnisse wird noch zurückzukommen sein.

Die LAPLACEsche Gleichung läßt sich leicht in andere Koordinaten transformieren. In Polarkoordinaten ist sie sogar seinerzeit von LAPLACE zuerst aufgestellt worden und lautet, wenn r der Radiusvektor, ϑ die Poldistanz und φ die geographische Länge ist:

$$\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0 \quad , \tag{91}$$

während bei der POISSONschen die rechte Seite $-4\pi\varrho r^2$ wird. Für allgemeine orthogonale Koordinaten u, v, w ergibt sich, wenn zur Abkürzung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \mathfrak{U}^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = \mathfrak{V}^2 \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \mathfrak{W}^2 \quad ,$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}\frac{\partial V}{\partial w}\right) = 0 \quad , \tag{92}$$

insbesondere sind für elliptische Koordinaten für u, v, w die drei Wurzeln der in λ kubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1$$

zu nehmen.

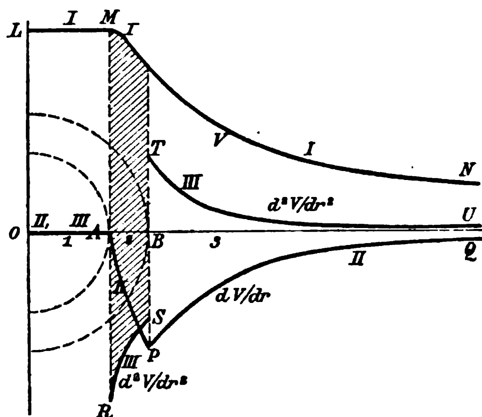
Radiale Symmetrie. Wenn alle Richtungen, sowohl in Breite wie in Länge, gleichberechtigt sind, bleibt als einzige Variable r übrig, und die Potentialgleichung nimmt eine der folgenden Gestalten an:

$$\frac{d\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right)}{dr} = 0 \quad , \quad \frac{d^2(rV)}{dr^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0 \quad ; \tag{93}$$

aus der zweiten von ihnen kann man den Schluß ziehen, daß sich für diesen Fall rV ebenso verhält wie im Falle des nur von einer einzigen rechtwinkligen Koordinate abhängigen Potentials dieses selbst.

Diese Formeln sind anwendbar auf eine homogene Kugel oder Kugelschale; insbesondere lassen sich mit ihrer Hilfe die Stetigkeitsverhältnisse von V, dV/dr,

d^2V/dr^2 sehr anschaulich darstellen, wie das in Figur 54 nach THOMSON und TAIT geschehen ist; die Werte selbst sind in der kleinen Tabelle zusammen-



Figur 54.

gestellt, und zwar getrennt für den Hohlraum (1), die Masse (2) und den Außenraum (3); in der Figur bedeutet die Kurve I das Potential selbst, II den ersten, III den zweiten Differentialquotienten.

(94)

	$0 < r < a_0$	$a_0 < r < a$	$a < r < \infty$
V	$2\pi\varrho(a^2 - a_0^2)$	$\frac{4\pi\varrho}{6r}(3a^2r - r^3 - 2a_0^3)$	$\frac{4\pi\varrho}{3r}(a^3 - a_0^3)$
$-\frac{dV}{dr}$	0	$\frac{4\pi\varrho}{3r^2}(r^3 - a_0^3)$	$\frac{4\pi\varrho}{3r^2}(a^3 - a_0^3)$
$\frac{d^2V}{dr^2}$	0	$-\frac{4\pi\varrho}{3r^3}(r^3 + 2a_0^3)$	$\frac{8\pi\varrho}{3r^3}(a^3 - a_0^3)$

Zweidimensionales Potential. Wenn das Potential nur von zweien der rechtwinkligen Koordinaten abhängt — sei es, daß eine dritte Dimension überhaupt nicht vorhanden, sei es, daß sie ohne Einfluß ist —, so nimmt die LAPLACEsche Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{95}$$

an; und diese Gleichung hat die merkwürdige Eigenschaft, daß sie durch den reellen sowohl wie durch den imaginären Teil, also auch dessen reellen Faktor, jeder beliebigen Funktion befriedigt wird, in der die beiden Variablen x und y ausschließlich in der Verbindung $x + iy$ vorkommen, wo i die Wurzel aus der negativen Einheit ist; setzt man also

$$W = U + iV = f[w] = f[u + iv] \quad , \tag{96}$$

so ist sowohl U als auch V ein mögliches Potential, es stehen ferner die Linien

$$U = \text{const} \quad \text{und} \quad V = \text{const} \tag{97}$$

aufeinander senkrecht, und es sind somit, wenn man V als Potential wählt, die Linien $V = \text{const}$ die Niveaulinien, die Linien $U = \text{const}$ die Kraftlinien, und umgekehrt. — Denkt man sich ferner nicht nur x und y als Koordinaten in einer, sondern gleichzeitig auch U und V als Koordinaten in einer anderen Ebene, so

vermittelt die obige Beziehung eine in den kleinsten Teilen ähnliche, also winkeltreue Abbildung der einen Ebene auf die andere; das zweidimensionale Potentialproblem ist somit auf das Abbildungsproblem zurückgeführt. Das Verfahren ist auch auf gekrümmte zweidimensionale Felder anwendbar, an Stelle von x, y müssen dann die GAUSSischen Flächenkoordinaten p, q eingeführt werden. Mit Hilfe der ähnlichen Abbildung kann man so auch gekrümmte Felder auf ebene zurückführen; speziell für die Kugel kommt man damit auf das Problem der Kartographie. — Auf das Weitere sowie auf die wichtigsten Einzelfälle braucht hier nicht eingegangen zu werden, da sich Ausführliches darüber nebst einigen, die Spezialfälle veranschaulichenden Figuren bei der Theorie der ebenen elektrischen Ströme (Band 4. 238 ff.) findet.

Hängt das Potential gar nur von einer einzigen der rechtwinkligen Koordinaten ab, so kommt man zu den linearen Feldern. Die wichtigste Anwendung hiervon wird auf die linearen elektrischen Ströme gemacht, für die die LAPLACEsche Gleichung alsdann zu dem OHMschen Gesetz führt (vgl. Bd. 4. 214 und 218).

Greenscher Satz. Auf das Potential findet ein Satz seine wichtigste Anwendung, der von GREEN aufgestellt worden ist und sich auf zwei Funktionen U und V bezieht, von denen die eine, U, selbst, während von der anderen, V, die Differentialquotienten innerhalb eines bestimmten Raumes stetig sind; ist $d\tau$ ein Element dieses Raumes, df ein Element seiner Oberfläche und n die Normele von df nach innen, so lautet der allgemeine GREENsche Satz:

$$(98)\quad \int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\tau = -\int U\Delta V d\tau = \int U\frac{\partial V}{\partial n}df \quad .$$

Gelten die angeführten Stetigkeitseigenschaften auch mit Vertauschung von U und V, mit anderen Worten, sind U und V Funktionen, die mit ihren ersten Differentialquotienten stetig sind, so erhält man den speziellen GREENschen Satz:

$$(99)\quad \int(V\Delta U - U\Delta V)d\tau = \int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)df \quad .$$

Durch Identifizierung von U und V erhält man ferner die Formel:

$$(100)\quad \int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = \int V\frac{\partial V}{\partial n}df \quad .$$

Genügen U und V beide der LAPLACEschen Gleichung, so wird

$$(101)\quad \int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) = 0 \quad ,$$

Ist endlich U eine Konstante und V ein Potential von Massen, die außerhalb jenes Raumes liegen, so kommt man auf die der LAPLACEschen äquivalente Gleichung und damit auf diese selbst zurück.

Wenn die Größen innerhalb des betrachteten Raumes Unstetigkeiten erleiden, so kann man trotzdem die spezielle GREENsche Formel anwenden, wenn man nur die Umgebung der Unstetigkeitsstellen aus dem für die Integration zu berücksichtigenden Raume ausschließt und die Oberflächen dieser Ausschlüsse dafür bei den Oberflächenintegralen berücksichtigt. Wird z. B. U in einem Punkte unendlich groß von der ersten Ordnung, so schließt man eine unendlich kleine Kugel aus und erhält dann die modifizierte GREENsche Formel

$$(102)\quad \int V\Delta U d\tau - \int U\Delta V d\tau = \int U\frac{\overline{\partial V}}{\partial n}df - \int V\frac{\partial U}{\partial n}df + 4\pi V_0$$

in der nunmehr Oberflächenwerte durch darübergesetzte Horizontalstriche charakterisiert sind und V_0 den Wert von V in dem Unstetigkeitspunkte, dem Pole bedeutet. Genügen U und V der LAPLACEschen Gleichung, so wird in diesem Falle

(103) $$V_0 = \frac{1}{4\pi}\int\left(\overline{V}\frac{\partial U}{\partial n} - \overline{U}\frac{\overline{\partial V}}{\partial n}\right)df$$

und speziell, wenn $U = 1/r$ gewählt wird:

(104) $$V_0 = \frac{1}{4\pi}\int\left(\overline{V}\frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\overline{\partial V}}{\partial n}\right)df \quad .$$

Gaussische Sätze. Diese Lehrsätze stehen zum Teil in engstem Zusammenhange mit dem GREENschen Satze, sind aber ihrer besonderen Fassungen wegen gerade für physikalische Anwendungen sehr fruchtbar geworden. — Der erste dieser Sätze besagt: Die Summe der Normalkomponenten der Kraft in allen Elementen einer geschlossenen Fläche ist null oder $-4\pi m$, je nachdem die die Kraft hervorrufenden Massen m außerhalb oder innerhalb der Fläche liegen; liegen sie in der Fläche selbst, so ist die Summe $-2\pi m$; nur wenn die Masse in einer Kante oder Spitze liegt, ist die Summe nur $-\omega m$, wo ω den doppelten Kantenwinkel bezw. die Kegelöffnung (Raumwinkel) der Spitze bedeutet. — Es ist von Interesse, diese Verhältnisse mit den ganz ähnlichen, für eine Doppelfläche gültigen, oben angeführten zu vergleichen, wobei zu beachten ist, daß sich die dortigen Werte auf das Potential, die hier angegebenen aber auf die Normalkomponente der Kraft beziehen.

Der zweite der in Rede stehenden Sätze ist als GAUSSischer Mittelwertsatz besonders berühmt geworden und lautet: Das Potential im Mittelpunkte einer von Massen freien Kugel ist der Mittelwert seiner sämtlichen Werte in der Oberfläche dieser Kugel; in Formel:

(105) $$V_0 = \frac{1}{4\pi a^2}\int V\,df \quad .$$

Im freien Raume kann hiernach das Potential weder ein Maximum noch ein Minimum haben; und umgekehrt, wo ein Maximum oder Minimum liegt, sind wirksame Massen vorhanden — eine Folgerung, die wieder auf eine frühere Betrachtung zurückführt, wonach Dichte der Massen und Divergenz der Kraft in einfacher Beziehung zueinander stehen. Welche von beiden Größen man als die primäre, welche als die sekundäre ansehen solle, wird davon abhängen, ob man die Fernwirkung von Polen oder die Feldanschauung der Betrachtung zugrunde legt.

Sind auch im Innern Massen vorhanden, so kann man eine allgemeinere Formel aufstellen. Ist nämlich V das Potential irgend welcher Massen, V_a der von außerhalb der Kugel liegenden Massen herrührende Teil desselben, M_i die Gesamtheit der im Innern gelegenen Massen, so ist

(106) $$V_a = \frac{\int V\,df}{4\pi a^2} - \frac{M_i}{4\pi a} \quad .$$

Endlich als dritter GAUSSischer Satz: Hat das Potential in einem von Massen freien Raume einen konstanten Wert, so hat es diesen selben Wert auch in jedem Raume, in den man aus dem gegebenen ohne Durchschneidung von Massen gelangen kann. Oder auch: Das Potential kann nicht in einem Teile eines massenfreien Raumes einen konstanten, in einem anderen Teile desselben Raumes einen anderen Wert haben. — Und ferner: Wenn das Potential in der gesamten Grenz-

fläche eines massenfreien Raumes einen konstanten Wert hat, so hat es denselben Wert auch in dem ganzen Innern.

Eindeutigkeits-, Existenz- und Bestimmungsproblem des Potentials (DIRICHLETsches Problem). Eine innerhalb eines bestimmten Bereichs eindeutige und stetige Lösung der LAPLACEschen Gleichung wird häufig behufs kurzer Kennzeichnung als vollständige harmonische oder einfach als harmonische Funktion des Bereichs bezeichnet. Die GREENschen Formeln liefern für sie eine sehr merkwürdige Darstellung in der Form der obigen Gleichung (104), d. h. eine Darstellung als Summe zweier Glieder, deren zweites als Potential einer einfachen, deren erstes als Potential einer Doppelbelegung auf der Oberfläche des Bereichs angesehen werden kann, wobei jener bezw. dieser die Dichte

$$(107) \qquad -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}\,, \qquad +\frac{1}{4\pi}V$$

beizulegen ist. Wenn also $\overline{V}$ und $(\partial \overline{V}/\partial n)$ für die ganze Oberfläche gegeben sind (sie müssen freilich, wenn die Lösung einen realen Sinn haben soll, in geeigneter Weise gegeben sein), so ist durch sie die harmonische Funktion des Bereichs vollständig bestimmt und damit zugleich ihre Existenz nachgewiesen. Es ist das auch nicht zu verwundern, wenn man sich überlegt, was jene gegebenen Stücke implizite in sich enthalten.

Nun hat aber die Erfahrung auf zahlreichen Gebieten, namentlich bei Problemen der Elektrostatik und der Wärmeleitung, gelehrt, daß es gar nicht erforderlich ist, daß jene Größen beide gegeben sind, daß es vielmehr genügt, wenn $\overline{V}$ allein, bis zu einem gewissen Grade auch, wenn $(\partial \overline{V}/\partial \overline{n})$ allein, oder wenn für einen Teil der Begrenzung das eine, für einen anderen das andere, oder endlich, wenn eine geeignete Kombination beider gegeben ist, wobei unter Umständen noch gewisse Anhaltspunkte über die Stetigkeitsverhältnisse hinzukommen müssen. Hieraus hat man nun die beiden folgenden Sätze, die also den Charakter von Erfahrungstatsachen haben, abstrahiert: 1. Eindeutigkeitssatz: Eine harmonische Funktion eines begrenzten Bereichs ist durch ihre „Randwerte" (Werte auf der gesamten Begrenzung) eindeutig bestimmt. 2. Existenzsatz: Zu beliebigen, willkürlich gewählten Randwerten gibt es stets eine zugehörige harmonische Funktion. Diese Sätze waren nun zu beweisen, und es waren weiterhin Methoden anzugeben, um die „Randwertaufgabe" wirklich zu lösen, d. h. Potentiale der gewünschten Art zu ermitteln, wobei es, je nach den gegebenen Daten, drei oder noch mehr verschiedene Randwertaufgaben gibt, und wobei begreiflicherweise der Existenzbeweis und die Lösung der Randwertaufgabe vielfach miteinander verknüpft sind.

Was das Eindeutigkeitsproblem betrifft, so ist zunächst darauf hinzuweisen, daß von einer harmonischen Funktion eben die Eindeutigkeit gefordert wird, und daß infolgedessen der Begriff der harmonischen Funktion enger ist als der des Potentials. Denn bei dem letzteren sind eindeutige und vieldeutige Potentiale zu unterscheiden; und es läßt sich auch sofort angeben, wann jene und wann diese physikalisch in Betracht kommen. Das Potential ist nämlich eindeutig in einfach zusammenhängenden Räumen, vieldeutig in zwei- oder mehrfach zusammenhängenden Räumen (vgl. hierüber „Grundbegriffe", p. 19). Dieser Gegensatz spielt z. B. eine entscheidende Rolle in der Theorie des Magnetismus einerseits und des Elektromagnetismus andererseits, wenigstens solange dort Magnetstäbe, hier geschlossene Ströme betrachtet werden; man vergleiche hierüber Bd. 5. 35. 56 und 417. — Es bleibt also noch der Nachweis der Eindeutigkeit mit Rücksicht auf die gegebenen Stücke übrig, und dieser Nachweis ist mit den übrigen Teilen des Problems untrennbar verknüpft.

Der Existenzbeweis ist von GAUSS, W. THOMSON, DIRICHLET u. A. in mehr oder weniger allgemeiner Weise zu führen versucht worden; es haben sich jedoch immer wieder Bedenken gegen die Zulässigkeit der Beweisführung erhoben, so namentlich gegen die Anwendung des sogen. DIRICHLETschen Prinzips. Man ist daher später auf anderen Wegen und mit Hilfe besonderer Methoden vorgegangen, von denen namentlich zu nennen sind: die Methode der Approximation durch Polygone bezw. Polyeder, die Methode des arithmetischen Mittels, die kombinatorische Methode und die Annäherungsmethode von POINCARÉ. Erst ganz neuerdings ist das allgemeine Problem durch die Arbeiten von C. NEUMANN, E. NEUMANN, POINCARÉ, namentlich aber durch die systematische Arbeit von KORN, zu einem gewissen Abschluß gebracht und insbesondere die Existenz der Lösungen des DIRICHLETschen Problems für beliebige, stetig gekrümmte (oder aus einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Flächen zusammengesetzter) Flächen sicher gestellt worden.

Was endlich die Lösung der Randwertaufgaben betrifft, so spielt hier eine hervorragende Rolle die GREENsche Funktion; sie operiert freilich mit negativen Massen und hat daher nur mathematisch eine allgemeine, physikalisch dagegen eine Bedeutung nur auf dem Gebiete der elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Ist r die Entfernung des Oberflächenelements df des gegebenen Bereichs, und ist G eine Funktion der Koordinaten, die im Innern die LAPLACEsche Gleichung erfüllt und in der Oberfläche gleich $-1/r$ ist, so heißt zuweilen G für sich, gewöhnlich aber die Größe

$$U = G + \frac{1}{r} \tag{108}$$

die GREENsche Funktion; es sei bemerkt, daß sie z. B. in der Elektrostatik das Potential einer äußeren Masse samt der von ihr auf der Fläche, die zur Erde abgeleitet ist, induzierten Belegung ist; das Potential der induzierten Belegung allein ist eben G. Beide Funktionen, G und U, haben die Reziprozitätseigenschaft, d. h. sie bleiben ungeändert, wenn man Pol und Aufpunkt miteinander vertauscht. U selbst aber ist in der ganzen Begrenzung und folglich auch im ganzen, von wirkenden Massen freien Innern, null. Daraus folgt weiter, daß, wenn man statt der vorliegenden die entgegengesetzte Oberflächenbewegung herstellt, diese die äußeren Massen in ihrer Wirkung auf das Innere vollständig ersetzt. Das ist der Satz von GAUSS: Für die Wirkung im Innern (Äußern) einer geschlossenen Fläche lassen sich äußere (innere) Massen stets durch eine Oberflächenverteilung von Masse ersetzen. — Die hier erörterten Verhältnisse spielen eine wichtige Rolle einerseits bei der Lehre von der Schirmwirkung, andererseits in der Theorie des Erdmagnetismus (s. Band 5. 206 und 498).

Gelingt es nun, die Funktion U anzugeben, so stellt die Formel

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \bar{V}\,\frac{\partial U}{\partial n}\,df \tag{109}$$

die Lösung der ersten Randwertaufgabe dar. Für Kugel und Kreis gelingt es leicht, die GREENsche Funktion aufzustellen, und man gelangt dann zu den sogen. POISSONschen Integralen. Auch für die anderen Randwertaufgaben hat man sich mit entsprechenden Funktionen beschäftigt, und für das logarithmische Potential gelten gewisse analoge Beziehungen.

Ersatz von Massen durch Oberflächenbelegungen; Satz von GAUSS. Aus der Tatsache, daß eine geeignete Oberflächenbelegung die Wirkung äußerer Massen im geschlossenen Innern aufheben kann, folgt ohne weiteres, daß die gleiche, aber entgegengesetzte Belegung die Massen ersetzen kann, und man erhält damit den wichtigen Satz von GAUSS: Für die Wirkung im Innern (Äußern) einer geschlossenen Fläche lassen sich äußere (innere) Massen stets

durch eine Oberflächenverteilung von Massen ersetzen. Für die betreffende Flächendichte ergibt sich aus den früheren Formeln, da hier $\partial V/\partial n_i = 0$ ist, einfach

$$\varrho' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_a} \quad ; \tag{110}$$

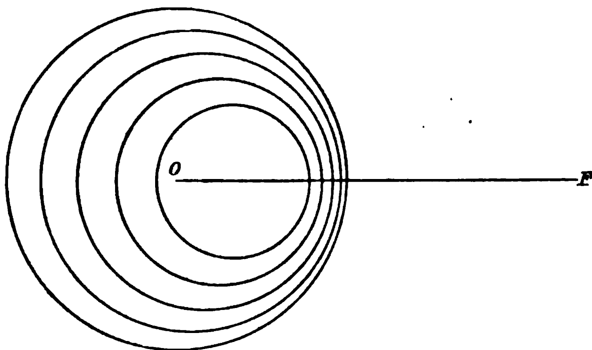
kennt man also das Gefälle nach außen, so kann man die Dichte bestimmen.

Methode der elektrischen Bilder. Den einfachsten Fall eines Ersatzes von Massen durch Oberflächenverteilungen erhält man offenbar, wenn die äußere Masse ein einfacher Massenpunkt, die Oberfläche aber eine Kugel ist. In diesem Falle ist die der äußeren Masse m in der Entfernung s vom Kugelmittelpunkte äquivalente Oberflächenverteilung charakterisiert durch die Dichte in dem von dem Massenpunkte um r entfernten Oberflächenpunkte, wenn a der Kugelradius ist:

$$\varrho' = \frac{m}{4\pi}\frac{s^2 - a^2}{a r^3} \quad ; \tag{111}$$

die Dichte ist also in dem dem Massenpunkte zunächst gelegenen Punkte am größten, nimmt dann zonenweise ab und ist im entferntesten Punkte am kleinsten; das Verhältnis des Maximums zum Minimum ist von dem Verhältnis $S:a$ abhängig, für $S = 2a$ würde es $27:1$ betragen.

Nun hat aber die so gefundene Oberflächenbelegung noch eine zweite Bedeutung, und das führt auf die THOMSONsche Theorie der elektrischen Bilder, so genannt, weil ihre erste Anwendung in der Elektrostatik erfolgte. Ordnet man nämlich dem äußeren Massenpunkte m einen im Inneren der Kugelfläche derart gelegenen zu, daß, wenn S' sein Abstand vom Mittelpunkte ist, sich $S':a = a:S$ verhält, also $SS' = a^2$ ist (Beziehung der reziproken Radien oder geometrische Inversion) und gibt man ihm die Masse ma/s, so wird der innere Punkt, den man das elektrische Bild des äußeren nennt, in seiner Wirkung im äußeren Raume ebenfalls durch die gefundene Oberflächenbelegung vertreten. — Kehrt man nun diese letztere Beziehung dahin um, daß man den inneren Punkt als Vertreter der Oberflächenbelegung ansieht und beachtet man, daß die gesamte Oberflächenbelegung, wie sich auch durch direkte Integration ergibt, gleich ma/s ist, so sieht man ein, daß man hier eine schöne Verallgemeinerung eines früheren Satzes vor sich hat. Eine homogene Kugelfläche wirkt nämlich, wie wir wissen, nach außen so, wie wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre. Wie sich jetzt zeigt, wirkt eine von Zone zu Zone verschieden dichte Kugelfläche so, wie wenn ihre ganze Masse in einem Punkte des Innern vereinigt wäre, der von dem Mittelpunkte in der Richtung der Zonenachse um einen Betrag absteht, der durch die Ungleichförmigkeit der Dichteverteilung bestimmt ist. — Man nennt eine solche Anordnung eine zentrobarische Verteilung, und man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und, indem man Punkt und Bildpunkt festhält, den Mittelpunkt aber verschiebt, aus der Kugelschale eine massive Kugel in derselben Weise wie früher aufbauen, nur daß sie hier nicht aus konzentrischen,



Figur 55.

sondern aus exzentrischen Schalen besteht, die an der dem Außenpole zugekehrten Seite dünner, an der abgekehrten dicker sind (Figur 55). — Wird der Kugelradius unendlich groß gewählt, so erhält man eine Ebene, für die der Bildpunkt zugleich das optische Bild des Punktes ist, und die Massen von Punkt und Bildpunkt werden einander gleich. Somit ergibt sich der Satz: Eine Massenbelegung auf einer unbegrenzten Ebene, deren Dichte von Punkt zu Punkt umgekehrt wie der Kubus der Entfernung r von einem festen Punkte des einen Halbraumes variiert ruft in diesem Halbraume ein Potential hervor, wie wenn ihre Belegung in dessen Bildpunkte vereinigt wäre und umgekehrt; und zwar ist die Flächendichte, wenn s die Länge des Lotes von einem der Punkte auf die Ebene ist:

$$\varrho' = \frac{s}{2\pi r^3} m \quad . \tag{112}$$

Schließlich wird, um auf die Randwertaufgabe zurückzukommen, das Poissonsche Integral für die Kugel mit Hilfe des eben gefundenen:

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \overline{V} \frac{a^2 - s^2}{a r^3} df \tag{113}$$

und entsprechend für den Kreis, wenn dl das Randelement ist:

$$V = \frac{1}{2\pi} \int \overline{V} \frac{a^2 - s^2}{a r^2} dl \quad ; \tag{114}$$

diese und ähnliche Formeln sind dann, worauf aber nicht eingegangen werden kann, nach verschiedenen Richtungen hin entwickelt worden.

In bezug auf die systematische Erörterung und Erledigung aller Randwertaufgaben ist wieder auf die erschöpfende Untersuchung von Korn, namentlich auf die vierte und fünfte seiner Abhandlungen hinzuweisen, da ein Eingehen hierauf für ein physikalisches Handbuch zu weit führen würde.

Potentiale anderer Art.

Geschwindigkeitspotential. Seiner Definition nach hätte das Geschwindigkeitspotential dem Kraftpotential in diesem Artikel vorausgeschickt werden müssen; denn es ist die Größe, deren Gefälle nach den Koordinatenrichtungen die Komponenten der Geschwindigkeit ergibt, also einer Größe von niederer Ordnung als die Kraft. Indessen hat sich die ganze Lehre am Kraftpotential entwickelt, während der Begriff und Name des Geschwindigkeitspotentials erst verhältnismäßig spät von Helmholtz eingeführt worden ist; und dazu kommt, daß die allgemeine Differentialgleichung desselben komplizierter ist als die Laplacesche und nur durch eine gewisse Spezialisierung in diese übergeht. Auch erscheint es nicht angängig, die Lehre vom Geschwindigkeitspotential von der Betrachtung der Erscheinungen, bei denen es eine Rolle spielt, loszulösen, und es muß daher genügen, die Grundlagen festzustellen. Dabei sei vorausgeschickt, daß die Eigenschaften des Geschwindigkeitspotentials sich mit einer geringfügigen Änderung auf eine andere Größe übertragen lassen, nämlich auf das Verrückungspotential, das sich von jenem nur ebenso wie die Verrückungen von den Geschwindigkeiten, d. h. durch das Fehlen des Zeitelements im Nenner, unterscheidet. Das Verrückungspotential ist naturgemäß bei Gleichgewichts-, das Geschwindigkeitspotential bei Bewegungserscheinungen zu benutzen; tatsächlich spielt jenes vorwiegend bei den elastisch-festen Körpern, dieses bei den Flüssigkeiten und Gasen eine maßgebende Rolle.

Wird das Geschwindigkeitspotential mit φ bezeichnet, ist G die Geschwindigkeit und sind u, v, w ihre Komponenten, so hat man die Definitionsformeln:

$$(115)\begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=u \quad , \quad -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=v \quad , \quad -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=w \quad ; \quad -\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=G \quad , \\ \varphi=-\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz) \quad . \end{cases}$$

Die Dimension von φ ist $L^2 T^{-1}$ (vgl. „Grundbegriffe", p. 74), die des Verrückungspotentials entsprechend L^2. Wegen des Minuszeichens vgl. p. 73; in der Literatur findet man meist das Pluszeichen.

Die Grundgleichung für φ ist die sogen. Kontinuitätsgleichung, die aus dem Satze von der Konstanz der Masse hervorgeht und, wenn ϱ die Dichte ist und durch ein rundes ∂ deren partielle, durch ein d ihre ganze Änderung mit der Zeit ausgedrückt wird, allgemein

$$(116) \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}=0 \quad ,$$

oder

$$(117) \qquad \frac{d\varrho}{dt}+\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

lautet; für inkompressible Flüssigkeiten, bei denen ϱ eine Konstante nach der Zeit ist, lautet sie einfacher:

$$(118) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad .$$

Führt man nun statt u, v, w die Größe φ ein, so erhält man allgemein:

$$(119) \qquad \Delta\varphi=-\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}$$

und insbesondere für inkompressible Flüssigkeiten:

$$(120) \qquad \Delta\varphi=0 \quad ,$$

d. h. die Laplacesche Gleichung. Man wird hiernach einen großen Teil der Sätze und Formeln vom Newtonschen Potential nach hier herübernehmen dürfen.

Die Bedingung dafür, daß ein Geschwindigkeitspotential existiere, ist offenbar enthalten in den Gleichungen:

$$(121) \qquad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y} \quad ,$$

wie man durch Einsetzen von φ für u, v, w sieht. Nun sind aber die Größen

$$(122) \qquad \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

die Komponenten der doppelten Drehungsgeschwindigkeit (beim Verrückungspotential der Drehung selbst); man erhält also das Resultat, daß die „Potentialbewegungen" und die „Rotationsbewegungen" im Gegensatz zueinander stehen (und ebenso die „Potentialdeformationen" und die „Rotationsdeformationen"); das Weitere hierüber findet man in der Mechanik der festen und flüssigen Stoffe.

Vektor- und Tensorpotentiale. Das Potential einer punktförmigen Masse ist ein Skalar, der zu ihm gehörige Vektor ist die Kraft in einer bestimmten Richtung; Entsprechendes gilt von dem Geschwindigkeitspotential. Sobald aber das Gebilde, auf das sich das Potential bezieht, schon an sich eine ausgezeichnete Richtung aufweist, hört der reine Skalarcharakter auf; ein Beispiel bietet schon das Potential des einfachen Punktpaares. Im übrigen ist das Vektorpotential nicht wesentlich von dem skalaren unterschieden, namentlich insofern nicht, als es wie dieses drei unabhängige Ableitungen als Komponenten der zugehörigen

Größe ergibt. Bei dem Tensorpotential, als dessen typischer Vertreter das elastische Potential gelten kann, ist das aber anders; hier handelt es sich — vgl. „Grundbegriffe", p. 72 — um sechs abzuleitende Größen, und demgemäß nimmt das Potential hier die kompliziertere Gestalt

$$(123)\quad \left\{\begin{aligned} -V = \tfrac{1}{2}c_{11}x_x^2 &+ c_{12}x_x y_y + c_{13}x_x z_z + c_{14}x_x y_z + c_{15}x_x z_x + c_{16}x_x x_y \\ &+ \tfrac{1}{2}c_{22}y_y^2 + c_{23}y_y z_z + c_{24}y_y y_z + c_{25}y_y z_x + c_{26}y_y x_y \\ &+ \tfrac{1}{2}c_{33}z_z^2 + c_{34}z_z y_z + c_{35}z_z z_x + c_{36}z_z x_y \\ &+ \tfrac{1}{2}c_{44}y_z^2 + c_{45}y_z z_x + c_{46}y_z x_y \\ &+ \tfrac{1}{2}c_{55}z_x^2 + c_{56}z_x x_y \\ &+ \tfrac{1}{2}c_{66}x_y^2 \end{aligned}\right.$$

an, wo u, v, w die Verrückungen oder die Geschwindigkeiten sind und die Abkürzungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x_x \;,\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y_y \;,\qquad \frac{\partial w}{\partial z} = z_z \;,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = y_z \;,\qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = z_x \;,\qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = x_y$$

benutzt sind; die negativen Differentialquotienten nach diesen sechs Größen liefern dann die sechs Druckkomponenten X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y.

Ist der Körper isotrop, so reduzieren sich die 21 Konstanten des obigen Ausdrucks auf zwei, die mit $\varkappa$ und λ bezeichnet werden mögen; es wird dann, wenn noch $x_x + y_y + z_z = D$ (räumliche Dilatation) gesetzt wird:

$$(123\,\text{a})\quad \left\{\begin{aligned} -V = \tfrac{1}{2}\{\lambda D^2 &+ 2\varkappa[(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2)] \\ &+ \varkappa[(y_z + z_y)^2 + (z_x + x_z)^2 + (x_y + y_x)^2]\} \;. \end{aligned}\right.$$

Verallgemeinerte Potentiale. In neuerer Zeit ist der Potentialbegriff in verschiedenen Richtungen erweitert worden, derart, daß an die Stelle der ersten oder zweiten Ableitungen höhere gesetzt sind, daß ferner an die Stelle der LAPLACEschen oder POISSONschen Gleichungen eine verwandte, aber kompliziertere tritt, und daß sich drittens die physikalische Bedeutung des Potentials nicht mehr mit dem Begriffe der potentiellen Energie, sondern mit einem allgemeineren Begriffe deckt. Ein Teil dieser Theorien ist vorwiegend noch rein mathematischen Charakters, ein anderer so eng mit den betreffenden mechanischen oder physikalischen Lehren verknüpft, daß eine Loslösung untunlich erscheint. Es sei daher nur noch ganz kurz auf zwei solche Potentiale hingewiesen.

Das kinetische Potential. Es ist von HELMHOLTZ eingeführt worden und durch die Gleichung

$$(124)\qquad H = E_p - E_a = V - E_a$$

definiert; es ist also die Differenz der potentiellen und der aktuellen Energie oder das um die kinetische Energie verminderte Potential. Während die Summe der beiden Modalitäten der Energie durch ihre Konstanz das Erhaltungsprinzip liefert, ist die Differenz derselben beiden Größen, also das kinetische Potential maßgebend für das allem Geschehen zugrunde liegende Veränderungsprinzip, und hierin liegt die Bedeutung der Größe. Mit dem Nachweis ihrer Größe hat man sich bereits mehrfach beschäftigt, und nächst HELMHOLTZ hat besonders KÖNIGSBERGER ihr Verhalten in einfachen Fällen — die freilich schon verwickelt genug sind — studiert und ist dabei zu sehr interessanten Ergebnissen gelangt.

Auf das thermodynamische Potential wird in Band 3 eingegangen werden.

Das Wellenpotential. Ersetzt man die LAPLACEsche Gleichung durch die, bekanntlich die allgemeine Wellenbewegung liefernde Gleichung

(125)
$$a^2 \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad ,$$

wo a eine Konstante (die Fortpflanzungsgeschwindigkeit) ist, so erhält man für eine geschlossene Fläche f, die den erregenden Pol ausschließt, den Aufpunkt aber einschließt

(126)
$$V = \frac{1}{4\pi}\int df \left[\frac{\partial}{\partial n}\left\{ \frac{F\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r} \right\} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial n} F\left(t-\frac{r}{a}\right) \right] \quad ,$$

wo F eine willkürliche Funktion ist; schließt die Fläche beides ein, so wird das Integral null. Hiernach kann man die Wirkung, statt von der Quelle, von der Fläche ausgehend betrachten. Es ist das die von KIRCHHOFF gegebene Präzisierung des berühmten HUYGENSschen Prinzips, das namentlich in der Akustik und Optik eine wichtige Rolle spielt. Für das Leuchtpotential hat man auch den Ausdruck Luminal vorgeschlagen.

Auswahl aus der Literatur.

Die Literatur zur Theorie und Anwendung des Potentials ist so umfangreich, daß hier nur eine kleine Auswahl, mit besonderer Berücksichtigung der neuesten Zeit und des physikalisch Wichtigen gegeben werden kann; die Literatur für einzelne physikalische Probleme ist jedoch ausgeschlossen (man vergleiche in den einzelnen Bänden des Handbuches). Genauere und reichhaltigere Zusammenstellungen findet man in einigen der folgenden Bücher, namentlich bei BACHARACH sowie bei BURKHARDT und MEYER.

A. Lehrbücher und Zusammenfassungen.

M. BACHARACH, Abriß der Geschichte der Potentialtheorie. Göttingen 1883. — A. BEER, Einleitung in die Elektrostatik u. s. w. Braunschweig 1865. — E. BETTI, Lehrbuch der Potentialtheorie, deutsch von FR. MEYER. Stuttgart 1885. — M. BOCHER, Die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Leipzig 1894. — R. CLAUSIUS, Die Potentialfunktion und das Potential. Leipzig 1859. 4. Aufl. 1885. — P. G. LEJEUNE-DIRICHLET, Die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wachsenden Kräfte. Leipzig 1876. 2. Aufl. 1887. — A. HARNACK, Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials. Leipzig 1887. — E. HEINE, Handbuch der Kugelfunktionen. 2. Aufl. Leipzig 1878—81. — A. KORN, Lehrbuch der Potentialtheorie. 2 Bände. Berlin 1899—1901. — E. MATHIEU, Theorie des Potentials, deutsch von MASER. Berlin 1890. — J. CL. MAXWELL, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, deutsch von WEINSTEIN. Berlin 1883. — C. NEUMANN, Untersuchungen über das logarithmische und NEWTONsche Potential. Leipzig 1877; Untersuchungen über das NEWTONsche Prinzip der Fernwirkung. Leipzig 1896. — E. R. NEUMANN, Studien über die Randwertaufgabe u. s. w. (Preisschrift). Leipzig 1905. — F. NEUMANN, Potential und Kugelfunktionen. Vorlesungen, herausgeg. von C. NEUMANN. Leipzig 1887. — H. POINCARÉ, Théorie du potentiel newtonien. Paris 1899. — B. RIEMANN, Schwere, Elektrizität und Magnetismus, herausgeg. von HATTENDORFF. Hannover 1875. 2. Aufl. 1880. — J. SOMOFF, Theoretische Mechanik, deutsch von ZIWET. Leipzig 1879. — THOMSON u. TAIT, Handbuch der theoretischen Physik, deutsch von HELMHOLTZ und WERTHEIM. Braunschweig 1871—74. — J. TODHUNTER, History of the theories of attraction etc. (NEWTON bis LAPLACE). London 1873.

B. Originalabhandlungen.

Zahlreiche Originalresultate finden sich auch in den obigen Lehrbüchern, die darum nicht nochmals zitiert sind. Spezialprobleme sind in Klammern angedeutet; wo nichts beigefügt ist, behandelt die Arbeit allgemeines oder verschiedenes.

E. BELTRAMI, Rend. Ist. Lomb. 1878; Mem. di Bologna **1.** 573. 1880; Ann. di Mat. (2) **10.** 46. 1880. — J. BOBYLEW (zwei Kugeln), Math. Ann. **7.** 396. 1874. — H. BURKHARDT (eindimensionales Feld), Bull. Soc. Math. **22.** 71. 1894. — T. J. BROMWICH (symmetrisches System), Phil. Mag. (6) **2.** 237. 1901; (zweite Ableitungen des Flächenpotentials), Arch. d. Math. **2.** 295. 1901. — C. CAILLER (heterogene Kugelschicht), Arch. Sc. phys. (3) **31.** 225. 1894. — A. CAYLEY (Ellipse und Kreis) Proc. Lond. Mat. Soc. **6.** 38. 1875; (Polygon und Polyeder), ibid. p. 20. — M. CHASLES (Ellipsoid u. s. w.), Journ. école polyt. **25.** 254. 266. 1837; C. R. **8.** 209; LIOUV. Journ. **5.** 465. 1840; Connaiss. des temps 1845; Rapport s. l. progrès d. l.

géométrie 1870. — CHRISTOFFEL, CRELLES Journ. **64.** 321. 1865. — P. G. LEJEUNE-DIRICHLET, ibid. **32.** 80. 1846; Abhandl. Berl. Akad. d. Wiss. 1839. p. 61; 1846. p. 211; 1850. p. 99; C. R. **8.** 156; OSTWALDS Klassiker Nr. 19. — M. DÖHLER (GREENsche Funktion), In.-Diss. Erlangen 1889. — DOORMANN, Inaug.-Diss. Göttingen 1882. — DINI, Atti Acc. Linc. 1875. (2) p. 689. — F. W. DYSON (Ring), Proc. Roy. Soc. **53.** 372. 1893; Trans. Roy. Soc. **184** A. 1041. 1894; **184** A. 43. 1894; (Ellipsoid), Quart. Journ. of Math. **9.** 259. 1894. — J. FREDHOLM (DIRICHLETsches Problem), Oefv. Svensk. Vetensk. Ak. Vörh. 1900. p. 30. — K. F. GAUSS, Theoria attractionis, Comment. Göttingen 1813; Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus 1839; Allgemeine Lehrsätze über die im umgekehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräfte. Leipzig 1840; vgl. auch OSTWALDS Klassiker Nr. 2. — GLASER (Kugelfunktionen), Inaug.-Diss. Bonn 1880. — TH. GLAUNER (Verzweigungen), Inaug.-Diss. Göttingen 1894. — G. GREEN, An essay on the application of math. analysis to the theories of electicity and magnetism. Nottingham 1828; deutsch von WANGERIN, OSTWALDS Klassiker Nr. 61; Cambr. Trans. 1833. — F. GRUBE (Ellipsoid), Progr. 1883. — E. HÄNTZSCHEL, Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin 1893; Verh. d. phys. Ges. 1893. p. 6. — F. HASENÖRL (zwei Kugeln), Wien. Anz. 1899. p. 324; Wien. Sitzber. **108.** IIa. p. 1667. 1899. — H. v. HELMHOLTZ (Geschwindigkeitspotential), CRELLES Journ. **55.** 25. 1858; (Kinetisches Potential) CRELLES Journ. **100.** 1887. — E. HEINE, Berl. Mon.-Ber. 1854. p. 554; CRELLES Journ. **76.** 271 (Kreisscheibe). — E. W. HOBSON (Ellipsoid, Schale, Scheibe), Proc. Lond. math. Soc. **27.** 519. 1896. — O. HÖLDER, Beitrag zur Potentialtheorie, In.-Diss. Stuttgart 1882. — G. HOLTZMÜLLER, Die isogonalen Verwandtschaften. Leipzig 1882. — R. HOPPE (Linien), Arch. d. Math. (2) **7.** 330. 1889. — TH. HORN, Ztschr. f. Math. u. Phys. **26.** 145. 209. 1881. — H. HÜBSCHMANN (Ring), Inaug.-Diss. Leipzig 1889. — HUSMANN, Arch. Math. **65.** 19. — JOCHMANN, Ztschr. f. Math. u. Phys. **10.** 48. 89. 1865 (log. Potential). — IVORY, Trans. Roy. Soc. 1809. p. 345; vgl. auch OSTWALDS Klassiker Nr. 19. — G. KIRCHHOFF (Zylinder), CRELLES Journ. **48.** 348; (zwei Kugeln), ibid. **59.** 1861. — L. KÖNIGSBERGER (erweitertes und kinetisches Potential), Berl. Sitzber. 1897. p. 158; 1900. p. 1150; 1901. p. 118; 1901. p. 1092; 1905. p. 250. Daselbst auch die Literatur zur Existenz des kinetischen Potentials. — A. KORN, Fünf Abhandlungen zur Potentialtheorie. Berlin 1901—02; C. R. **135.** 231. 1902. — C. LAGRANGE, Nouv. Mém. Acad. Berlin 1773—1777. — E. LAMPE (Körper größter Anziehung), Berl. phys. Ges. 1896. p. 84. — W. LANGHEINEKEN (Kugel), Akad. Pr.-Schr. Leipzig 1901. — P. S. LAPLACE, Mém. Acad. Paris 1782—88; Théorie des mouv. des planètes, deutsch von WANGERIN, OSTWALDS Klassiker Nr. 19. — LEGEBEKE, De Funktie van GREEN. Utrecht 1879. — LEGENDRE, Mém. savants. Paris 1785. — A. LIAPUNOW (Doppelbelegung), C. R. **125.** 694. 1897; DIRICHLETsches Problem), Comm. Soc. Charkow **8.** 1. 1902. — LIEBENTHAL, Inaug.-Diss. Greifswald 1880. — R. LIPSCHITZ, CRELLES Journ. **61.** 22. 1863; **63.** 1. 1863; (Kreisscheibe) ibid. **58.** — G. A. MAGGI, Rend. Linc. (2) **22**; Nuov. Cim. (3) **27.** 21. 1890; **33.** 77. 1893; **33.** 106. 249; **34.** 22. 81. 1893. — F. MERTENS (zwei Ellipsoide), CRELLES Journ. **63.** 360. 1864; (Polygon u. Polyeder), ibid. **69.** 286. 1868. — P. MOLENBRÖK (GREENscher Satz), WIED. Ann. **40.** 157. 1890; **44.** 784. 1891. — G. MORERA (zweite Ableitungen), Nuov. Cim. (3) **22.** 240. 1887; Rend. Ist. Lomb. (2) **20.** 1889. — C. NEUMANN, Das DIRICHLETsche Prinzip 1865; Sächs. Ber. 1870. p. 50; 1878. p. 1. 47; Abhandl. Sächs. Ges. 1887. p. 707; 1888. p. 591; 1890. p. 326; Math. Ann. **2**; **3.** 424. 1871; **11.** 264; **13.** 263; **16.** 431. 1880; Lösung eines allgemeinen Problems. Halle 1861; CRELLES Journ. **59.** 335. 1861; **62.** 1863. — E. R. NEUMANN, Math. Ann. **55.** 1. 1901; **56.** 49. 1902. — A. OBERBECK (Ellipsoid), Arch. Math. **58.** 113. 1875. — M. C. PARAIRA (Anziehung des Ellipsoids, Zusammenstellung), Inaug.-Diss. Amsterdam 1879. — H. PETRINI (Ableitungen), C. R. **130.** 233. 1900; Oefv. Svensk. Vet. Ak. Förh. **57.** 867. 1900. — N. PIERPAOLI (Pyramide), Rend. Linc. (5) **2.** 1. Sem. p. 130. 1892; **3.** 1. Sem. 173. 1894. — PLANA, Mém. s. l. distribution etc. (zwei Kugeln), Turin 1845. — H. POINCARÉ, C. R. **104.** 44. 1887. — S. D. POISSON, Mém. Acad. Paris 1811—1827; N. Bul Soc. philom. Paris **3.** 388. 1813. — A. RAGNOLI (Körper größter Anziehung). Spoleto 1895. — B. RIEMANN, Inaug.-Diss. Göttingen 1851. — RÖTHIG (Parallelepiped), CRELLES Journ. **58.** 249. — H. v. SCHAEWEN (zwei Ellipsoide), Progr. Leipzig 1893. — SCHEIBNER, CRELLES Journ, **54.** 77. — J. R. SCHÜTZ, Gött. Nachr. 1895. p. 10. — H. A. SCHWARZ (Abbildung), Zür. Progr. 1870; Berl. Mon.-Ber. 1870. p. 767. — A. SELLA (Körper größter Anziehung), Rend. Acc. Linc. 1892—94. — A. SOMMERFELD (Verzweigung), Proc. Lond. Math. Soc. **28.** 395. 1897. — N. SPIJKER (Körper größter Anziehung), siehe Beibl. 1906. p. 1. — W. STAHL, Inaug.-Diss. Heidelberg 1870; CRELLES Journ. **79.** 265. 1875. — W. STEKLOW (DIRICHLETsches Problem), C. R. **126.** 1898; **128.** 1899; **130.** 1900. — W. THOMSON (Lord KELVIN), Trans. Edinb. Soc. **25.** 1867; Cambr. Math. Journ. 1848; Phil. Mag. 1853; Reprint of papers. — S. VALENTINER (Kugel und Mittelpunkt), Inaug.-Diss. Heidelberg 1900. — WANGERIN (Rotationskörper), Berl. Mon.-Ber. 1878; CRELLES Journ. **82.** — A. WASSMUTH, Repert. d. Phys. **14.** 428. 1878. — H. WEBER (Zylinder), Math. Ann. **4**; CRELLES Journ. **75.** **76.** — J. WEINGARTEN (zweite Ableitungen), Acta math. **10.** 303. 1887. — ZÜGE (Ellipsoid), Math. Ann. **10.** 273. 1877; (Ringkörper), CRELLES Journ. **104.** 89. 1889; Progr. Lingen 1889; CRELLES Journ. **107.** 148. 1890; Progr. Wilhelmshaven 1896.

Mechanik.

Von F. AUERBACH.

I. Umfang und Gliederung der Mechanik.

Einleitung. Mechanik ist die Lehre von der Bewegung. Wenn man diese Definition so weit wie möglich faßt und wenn man sich überdies auf den, bekanntlich sehr verbreiteten, aber auch lebhaft angefochtenen Standpunkt stellt, daß es die Aufgabe der Physik sei, alle Erscheinungen auf Bewegung zurückzuführen, so kommt man offenbar zu dem Ergebnis, daß die Mechanik die gesamte Physik umfaßt, von ihrer Erstreckung auf andere Naturwissenschaften hier nicht zu reden. Man pflegt aber zunächst alle diejenigen Erscheinungsgebiete abzusondern, als deren Träger man den sogenannten Äther anzusehen hat, also die elektrischen, magnetischen und optischen Erscheinungen; wobei indessen zu beachten ist, daß diese Erscheinungen zwar, nach dem Bilde, das wir uns von ihnen machen, vom Äther ausgehen, sich aber dann auch auf eigentliche Materie erstrecken und, insoweit sie das tun, nicht eigentlich unter die eben gemachte Exklusion fallen; es bleibt also eine breite Brücke namentlich zwischen den elektromagnetischen und den mechanischen Vorgängen bestehen, zumal diese Erscheinungen nichts eigentlich spezifisches haben, sondern sich nur durch andere, mechanische u. s. w. Wirkungen bemerkbar machen. Anders liegt die Sache bei den optischen Erscheinungen, für die wir einen besonderen Sinn haben, und die daher durch die von ihnen ausgehenden spezifischen Sinnesempfindungen scharf abgegrenzt sind (die unsichtbaren Strahlen gehören in diesem Sinne nicht zur Optik). Was nun bleibt, ist das Gebiet der ponderablen Materie. Aber auch hier tut man gut, zwei Abtrennungen vorzunehmen, die sich auf die spezifischen Schall- und Wärmeerscheinungen beziehen, und aus diesen beiden Gebieten Sonderdisziplinen, die Akustik und die Thermik, zu machen, wobei natürlich ein enger Zusammenhang bestehen bleibt; überhaupt liegt die Trennung hier mehr in der experimentellen Methodik, während die Theorie teils, wie bei der Akustik, schon jetzt restlos zusammenfällt, teils, wie in der Thermodynamik, durch die Auffassungen und Untersuchungen der neuesten Zeit immer inniger verschmilzt. — Trennt man nun noch die technische Mechanik, die für das vorliegende Werk nicht in Betracht kommt, ab, so bleibt das übrig, was man als reine Mechanik bezeichnen kann. Es ist die Lehre von der Bewegung ponderabler Materie ohne Rücksicht, genauer gesagt: ohne mehr als durchaus notwendige Rücksicht auf die diese Bewegungen begleitenden Sondererscheinungen — sie völlig zu ignorieren, ist z. B. hinsichtlich der Temperaturerscheinungen nicht immer möglich.

Gliederung der Mechanik. Eine Gliederung des noch immer sehr umfassenden Gebietes der reinen Mechanik ist auf verschiedenen Wegen, die aber in der Hauptsache alle zu demselben Endziele führen, zu gewinnen, so daß es genügt, eine dieser Betrachtungen anzustellen. Betrachten wir zunächst die Bewegung eines einzelnen sogenannten Körpers, d. h. eines Komplexes von Massenpunkten, wobei zunächst die Natur dieses Zusammenhangs — kontinuierlich oder molekular — völlig dahingestellt bleibe. Bei der allgemeinsten Bewegung eines solchen Körpers wird jeder seiner Punkte eine andere Bahn nach Größe und Richtung beschreiben, und das Ergebnis wird sein, daß sich nicht nur die Lage des Körpers im Raume ändern wird, sondern auch die relative Lage seiner Teile gegeneinander, d. h. sein Volumen und seine Gestalt. Es ist nun einleuchtend, daß diese beiden Vorgänge in der Hauptsache gar nichts miteinander zu tun haben, und daß man deshalb gut tut, sie getrennt der Untersuchung zu unterwerfen. Dabei zeigt sich nun — was übrigens von vornherein zu erwarten war — daß für die reinen Orts- und Lageänderungen die Natur des Körpers, d. h. die Art des Zusammenhangs seiner Teile miteinander, gleichgültig ist, daß sich dagegen in bezug auf die relativen Veränderungen die Körper der drei Aggregatzustände wesentlich verschieden verhalten. So gelangt man zu folgender Gliederung des Gebiets. Es gibt zunächst eine „allgemeine Mechanik“, allgemein deshalb, weil sie alle Körper in gleicher Weise umfaßt; sie enthält diejenigen Erscheinungen, die entweder in reinen Lageänderungen der Körper bestehen oder bei denen doch die etwa sie begleitenden Deformationserscheinungen vernachlässigt werden dürfen oder sollen. Man nennt Körper, die sich so verhalten oder bei denen man auf die elastischen Veränderungen keine Rücksicht nimmt, starre Körper, und es ist zu betonen, daß Starrheit in diesem Sinne keine Gradeigenschaft, sondern eine Grenzabstraktion ist, durch die absolut undeformierbare, in Wahrheit nicht existierende Körper bezeichnet werden sollen; leider wird das Wort noch in einem ganz anderen, aus dem englischen herübergenommenen Sinne, nämlich als Widerstand gegen die Gestaltsänderung (siehe Artikel „Elastizität“) gebraucht, was besser vermieden würde. In der allgemeinen Mechanik kommt, außer den Raum- und Zeitgrößen, nur eine einzige Konstante, die Masse, vor, sie reicht (vgl. „Grundbegriffe“, p. 36) zur Charakterisierung der Körper hinsichtlich ihres Verhaltens bei der Bewegung völlig aus.

Wenn sonach die allgemeine Mechanik in gewissem Sinne vom Charakter einer Abstraktion ist, so läßt sich diese Abstraktion in einer bestimmten Richtung noch weiterführen, wodurch man ein erstes und allereinfachstes Kapitel erhält. Die möglichen Bewegungen eines starren Körpers lassen sich nämlich stets zerlegen in eine Bewegung von fortschreitendem und eine solche von drehendem Charakter; bei jener ist die Streckengeschwindigkeit, bei dieser eine in bestimmter Weise gefaßte Winkelgeschwindigkeit für alle seine Punkte dieselbe; bei jener findet eine Orts-, bei dieser nur eine Lagenänderung des Körpers als ganzen statt. Denkt man sich nun den Körper mehr und mehr und zuletzt auf einen materiellen Punkt zusammenschrumpfen, so bleibt nur noch die fortschreitende Bewegung für die Untersuchung übrig. Somit erhält man eine besonders einfache Abteilung der Mechanik, die Mechanik des Massenpunktes.

Das so umschriebene Gebiet der allgemeinen Mechanik muß jedoch in einer gewissen Richtung erweitert werden. Es ist nämlich bisher immer nur von der Bewegung eines einzigen Körpers die Rede gewesen, während sich doch sehr häufig die Betrachtung eines Systems von Körpern erforderlich macht. Während nun feststeht, daß in der allgemeinen Mechanik jeder dieser Körper für sich als starr anzusehen ist, braucht das System als ganzes nicht starr zu sein, es kann sich vielmehr bei den Bewegungen der einzelnen Körper die Konfiguration des Systems völlig verändern. Es ist dabei aber Bedingung, daß diese Ver-

änderungen durch normale Fernkräfte dargestellt werden, nicht aber auf eine innere Elastizität des Systems zurückgeführt werden; denn damit würde das Gebiet der allgemeinen Mechanik überschritten werden. Die Mechanik von Systemen starrer Körper ist also ein zweiter Teil der allgemeinen Mechanik; sie spielt besonders in der Mechanik der Himmelskörper, aber auch sonst eine wichtige Rolle.

Der allgemeinen Mechanik gegenüber steht nun die spezielle Mechanik oder Mechanik der Aggregatzustände. Sie zerfällt naturgemäß zunächst in die drei Abschnitte der Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, denen sich als vierter die Mechanik gemischter, d. h. aus Körpern verschiedener Aggregatzustände zusammengesetzter Systeme, anschließt.

Die allgemeine Mechanik läßt nun aber noch eine weitere Unterscheidung zu. Man kann nämlich die Ortsänderungen der Massenpunkte entweder lediglich als solche betrachten, man kann sie geometrisch beschreiben, indem man als typische Größen lediglich Ort, Zeit und Masse betrachtet; oder man kann die betreffenden Erscheinungen in physikalischen Zusammenhang mit den Kräften bringen, sie also als Wirkungen von Ursachen darstellen; man kann jene Disziplin als formale, diese als physikalische Mechanik bezeichnen. Indessen verliert diese Unterscheidung für den ihre Bedeutung, der auch in der Einführung von Kräften nur einen formalen Schritt erblickt; einen Schritt, der weiter keinen Sinn hat, als den der Vereinfachung und Präzisierung der Darstellung. In der Tat zeigt ein Blick auf die in neuester Zeit von Mathematikern einerseits, von Physikern andererseits gelieferten Darstellungen der Mechanik, daß der in Rede stehende Gegensatz sich mehr und mehr verwischt.

Bisher ist immer nur von Bewegung, sei es nur Orts- oder Gestaltsänderung, die Rede gewesen. Es verdient aber ein Spezialfall, der darin enthalten ist, noch besondere Betrachtung, nämlich der Fall, wo der Ort oder die Konfiguration oder die Gestalt ungeändert bleibt, also der Fall der Ruhe oder, wenn man an die als Ursachen eingeführten Kräfte denkt, der Fall des Gleichgewichts. Hierher gehören erstens Fälle wirklicher Ruhe, sodann aber auch Betrachtungen, bei denen es sich im ganzen um Bewegung, für den zu behandelnden Fall aber nur um einen momentanen Ausschnitt aus dieser Bewegung handelt, der von der Vergangenheit und Zukunft losgelöst betrachtet wird. Man unterscheidet demgemäß zwischen Statik und Dynamik, wobei die erstere zwar nur einen Spezialfall darstellt, aber einen so wichtigen und durch so prägnante Verhältnisse charakterisierten, daß eine eigene Untersuchung gerechtfertigt ist, sei es nun, daß man, wie das gewöhnlich geschieht, die Statik voranschickt und ihr dann die kompliziertere Dynamik folgen läßt, sei es, daß man, was in gewissem Sinne wissenschaftlicher ist, nach Erledigung der allgemeinen Untersuchung die Bedingungen aufsucht, unter denen Ruhe eintritt und die Beziehungen aufstellt, die für sie typisch sind. Zwischen beide aber, Statik und Dynamik, schiebt sich ein Bindeglied ein in der Betrachtung derjenigen Bewegungen, bei denen zwar die einzelnen materiellen Teilchen fortwährend ihren Ort ändern, das Ganze aber ungeändert bleibt in der Lage bezw. Form; eine Bewegung, die man als stationär bezeichnet, und die insofern der Ruhe näher steht als der Bewegung, als bei ihr die Zeit keine maßgebende Rolle spielt, alle gesuchten, die Bewegung charakterisierenden Größen vielmehr wie bei der Ruhe lediglich Funktionen der Ortskoordinaten sind.

Der Gegensatz zwischen Statik und Dynamik gilt in gleicher Weise für die allgemeine wie für die spezielle Mechanik und in letzterer für ihre vier Kapitel. In der allgemeinen Mechanik kann man nun aber sowohl von der Statik wie von der Dynamik einen rein formalen Teil abspalten und erhält alsdann dort die erst neuerdings zu einer besonderen Disziplin erhobene „Geometrie der Massen", hier die weit ältere „Kinematik".

Somit ergibt sich das folgende Tableau der gesamten Mechanik:

Statik	Dynamik	Mechanik
Geometrie der Massen	Kinematik	Geometrische Mechanik
Statik des Massenpunktes	Dynamik des Massenpunktes	Allgemeine Mechanik
Statik der starren Körper	Dynamik der starren Körper	
Statik der Systeme starrer Körper	Dynamik der Systeme starrer Körper	
Statik der elastisch-festen Körper	Dynamik der elastisch-festen Körper	Elastizitätslehre
Hydrostatik	Hydrodynamik	Hydromechanik
Aerostatik	Aerodynamik	Aeromechanik
Statik gemischter Systeme	Dynamik gemischter Systeme	Mechanik gemischter Systeme (Kapillarität, Diffusion, Absorption u. s. w.)

Es sei bemerkt, daß die Nomenklatur anderer Nationen, namentlich die englische, zum Teil von der obigen abweicht; so wird unsere Kräftemechanik dort Dynamik, unsere Dynamik aber Kinetik (im Gegensatze zur Kinematik) genannt.

Ferner besteht keine einheitliche Auffassung der Frage, wo in dem obigen Tableau die Geometrie als mathematische Wissenschaft aufhört und die Physik beginnt. Manche rechnen nicht nur die geometrische, sondern auch einen Teil der allgemeinen Mechanik zur Geometrie, deren Begriff sie somit durch Aufnahme nicht nur des Zeit-, sondern auch des Massenbegriffs erweitern; andere erheben die ganze Mechanik, deren Zertrennung dann vermieden wird, zu einer selbständigen Wissenschaft zwischen Mathematik und Physik. Für das vorliegende Werk erledigen sich diese Fragen dahin, daß die mehr geometrischen und ebenso die mehr funktionentheoretischen Teile der Mechanik, soweit überhaupt, hier nur ganz kurz berücksichtigt werden können.

Endlich ist zu bemerken, daß es nicht erforderlich erscheint, die hier gegebene Klassifikation überall streng innezuhalten. Insbesondere würde die Abtrennung der Geometrie der Massen von der Statik, der Kinematik von der Dynamik zu unnötigen Wiederholungen führen, die durch den erkenntnistheoretischen Gewinn nicht aufgewogen würden.

Der vorliegende Artikel enthält nur die Abschnitte über die Methoden und die Prinzipe der Mechanik. Das übrige Material der allgemeinen Mechanik ist dann teils in den Artikeln über Potentialtheorie, allgemeine Statik und allgemeine Dynamik enthalten, teils sind besondere Spezialartikel herausgelöst, die in sich geschlossene Probleme behandeln: „Fall und Wurf“, „Pendel“, „Kreiselbewegung“, „Gravitation“.

II. Methoden der Mechanik.

Induktive Methoden. Wie die Physik überhaupt, so beruht natürlich auch die Mechanik auf Erfahrung. Die Erfahrung wird teils gewonnen durch Beobachtung — auf diese Weise hat sich namentlich in älteren Zeiten reiches Material angesammelt —, teils auf ad hoc angestellten Experimenten. Der Unterschied der Methoden besteht nur darin, ob man die Zahl der zugrunde zu legenden Erfahrungstatsachen möglichst groß oder möglichst klein zu machen trachtet. Den ersteren Weg schlägt die experimentelle Mechanik ein, indem sie jede einzelne Frage durch den Versuch zu beantworten unternimmt. Von diesen Methoden ist, soweit sie messenden Charakters sind, schon in früheren Artikeln die Rede gewesen; es wird im einzelnen noch weiter auf sie eingegangen werden.

Deduktive Methode. Der induktiven oder experimentellen Methode steht die deduktive gegenüber. Sie benutzt ebenfalls die Erfahrung, jedoch nur in der

Form allgemeiner, eine Summe von Erfahrungen zusammenfassender Sätze, und sie hat das Bestreben, die Zahl dieser notwendigen Sätze auf ein Minimum zu reduzieren. Diese Sätze sagen etwas aus über die in ihnen vorkommenden Begriffe; und je nachdem man diese Begriffe herausgreift und welche von ihnen man in den Vordergrund rückt, ergeben sich verschiedene Methoden für die deduktive Begründung und Entwickelung der Mechanik. Nach den im Artikel „Grundbegriffe“ gegebenen Auseinandersetzungen kann es nicht zweifelhaft sein, wo die Wurzeln der somit konstatierten Mannigfaltigkeit mechanischer Methodik und Systematik liegen. Denn da Raum und Zeit keine Willkür zulassen, kann es sich nur um die dem dritten Grundbegriffe zuzuweisende Rolle und seine Wahl handeln. Es wird also im wesentlichen drei mögliche Systeme der Mechanik geben; je nachdem die Kräfte, die Massen oder die Energie in den Vordergrund der Betrachtung gestellt wird.

Es ist aber noch eine andere Mannigfaltigkeit der Behandlung gegeben, je nachdem man die Materie als ein Kontinuum ansieht oder sie auf molekularer Grundlage aufbaut. Im ersteren Falle wird die methodische Form die infinitesimale, im anderen die statistische sein; in jenem Falle wird man von differentialen Ansätzen zu integralen Wahrheiten, in diesem zu Wahrscheinlichkeitsresultaten gelangen. Dabei läßt sich im Prinzip natürlich auch auf die molekulare Mechanik obige Dreiteilung anwenden, mit Kraft, Masse oder Energie als Hauptbegriff; indessen wird doch tatsächlich nur die molekulare Massenmechanik eine Rolle spielen, und zur energetischen Grundlegung setzt sich die Atomistik sogar in einen gewissen, im Artikel „Grundbegriffe“ angedeuteten Gegensatz; dort ist auch bereits auf die Darlegungen hingewiesen, durch die BOLTZMANN gezeigt hat, daß der Gegensatz zwischen infinitesimalem Ansatz und Atomistik kein schroffer ist. — Somit kommen wir zu folgender Übersicht der Methoden:

1. Die klassische Mechanik.
   Neueste Formen: Die KIRCHHOFFsche und die BOLTZMANNsche Mechanik.
2. Die abstrakte Mechanik.
   Moderne Formen: KELVIN, J. J. THOMSON, HERTZ.
3. Die energetische Mechanik.
4. Die statistische Mechanik.

Es muß an dieser Stelle genügen, die hauptsächlichsten dieser Strömungen kurz zu charakterisieren.

Die klassische Mechanik. Diese ist, nach den vorausgegangenen Ansätzen des Altertums (Archimedes), und nachdem GALILEI die Vorstellung der Trägheit und der Beschleunigung herausgeschält hatte, endgültig fundiert worden durch NEWTONs drei Bewegungsgesetze, sowie durch die von D'ALEMBERT gelieferte Kombination der Rollen, die für die Bewegung die Kräfte einerseits und die inneren Verbindungen andererseits spielen; das schließliche Ergebnis sind die LAGRANGEschen Gleichungen. Der Charakter dieser Darstellung ist offenbar ein gemischter, insofern zwar Fernkräfte, aber doch auch Massenverbindungen eingeführt werden; und hieraus erklärt sich der ganze, den zuerst Eindringenden befremdende Habitus der Methodik, mit ihren Haupt- und Neben- (Bedingungs-) Gleichungen u. s. w. Es sind daher an der klassischen Mechanik, trotz der glänzenden Erfolge, die sie in zwei Jahrhunderten erzielt hat, neuerdings von den verschiedensten Seiten Ausstellungen gemacht worden, die einen doppelten Erfolg gehabt haben: erstens die der klassischen Mechanik treubleibenden Gelehrten zu veranlassen, sie von den Unklarheiten zu befreien, die für sie nicht wesentlich sind und nach deren Beseitigung nach ihrer Meinung jene Ausstellungen hinfällig werden; und zweitens zur Aufstellung neuer Systeme der Mechanik zu führen. Wir wenden uns zunächst

dem ersten Punkte zu und benutzen diese Gelegenheit, um die klassische Mechanik in den ihr von KIRCHHOFF und BOLTZMANN gegebenen Formen zu skizzieren.

Die Kirchhoffsche Mechanik. Sie stellt sich die Aufgabe, die Mechanik von den Unklarheiten, die ihren Grundlagen anhaften, zu befreien, auch wenn das nur durch eine Einschränkung ihrer Aufgabe zu erreichen ist. Es wird daher von einer Ermittelung der Kräfte als der Ursachen der Erscheinungen abgesehen und lediglich unternommen, die Erscheinungen selbst vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben.[1] Der Kraftbegriff erscheint dabei nur als formale Größe, ebenso die Masse als ein die Einfachheit der Beschreibung auch in komplizierteren Fällen ermöglichender Koeffizient. Der der KIRCHHOFFschen Mechanik gemachte Vorwurf des Formalismus trifft nur äußerlich zu; denn die KIRCHHOFFsche Definition von Beschreibung und ihre Ausgestaltung ist von dem, was man exakter Weise als Erklärung bezeichnen kann, nicht wesentlich verschieden (s. Artikel „Grundbegriffe"). Auch die Kraft- und Massendefinition lassen sich leicht ihres formal-mathematischen Gewandes entkleiden und auschaulich charakterisieren. Richtig bleibt, daß KIRCHHOFF ganz ohne oder doch mit einem Minimum von Bildern bezw. Hypothesen auszukommen sucht, und daß dadurch gewisse Bedürfnisse des forschenden Geistes nicht befriedigt werden.

Die Boltzmannsche Mechanik. Sie zeichnet sich aus durch die Voranstellung von sieben Sätzen, die die Gesamtheit der zugrunde gelegten Annahmen enthalten; die ersten beiden bilden die Brücke von der atomistischen Grundanschauung zur Stetigkeitslehre, die übrigen legen den Begriff der Beschleunigung fest. Sie lauten, mit der durch die Verhältnisse gebotenen Abkürzung: 1. Wenn sich zu irgend einer Zeit an irgend einem Orte irgend ein Massenpunkt befindet, so befindet sich zu einer unendlich benachbarten Zeit ein und nur ein Massenpunkt an einem dem ersten unendlich benachbarten Orte; wir sagen, dieser zweite Punkt sei derselbe wie jener erste und nennen dies das Gesetz der Kontinuität der Bewegung; der Inbegriff aller Orte des Punktes heißt seine Bahn. — 2. Die ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit bleiben immer endlich; Gesetz der Differenzierbarkeit (einfach als Erfahrungssatz hingestellt). — 3. Die Beschleunigung irgend eines von den n Massenpunkten eines Systems ist gleich der Summe von $n-1$ Beschleunigungen, deren jede die Richtung der Verbindungslinie des Punktes mit einem der anderen hat und als von diesem letzteren dem betrachteten Punkte erteilte Beschleunigung bezeichnet wird. — 4. Die Beschleunigung eines Punktes durch einen anderen ist immer entgegengesetzt gerichtet wie die des anderen durch den ersten; die beiden Punkte ziehen sich also entweder gegenseitig an oder sie stoßen sich gegenseitig ab. — 5. Die Größe der Beschleunigung eines Punktes durch einen anderen hängt weder von deren absoluter Lage, noch von der Zeit, noch von der Geschwindigkeit, noch von der Umgebung, noch von der Richtung der Verbindungslinie, sondern lediglich von der Länge dieser Verbindungslinie ab. — 6. Die Beschleunigungen, die sich zwei Punkte erteilen, stehen in einem zu allen Zeiten und in allen Entfernungen gleichen Größenverhältnisse zueinander; die Verhältniszahl ist die Masse des zweiten Punktes im Vergleich zu der des ersten. — 7. Bei der Betrachtung beliebig vieler Punkte und der Beschleunigungen, die sie sich erteilen, gilt für jeden Punkt immer dieselbe Verhältniszahl oder, wenn man für einen von ihnen einen beliebigen Faktor ein für allemal einführt, immer derselbe Faktor. Dieser Faktor ist seine Masse, ihr Produkt in die Funktion der Entfernung ist die zwischen den beiden Punkten wirkende Kraft.

Die Hertzsche Mechanik. Nachdem schon verschiedene bedeutungsvolle Ansätze zur Elimination der Kraft aus der Mechanik und zum Ersatz durch besondere

[1] Eine ähnliche Forderung ist freilich schon früher wiederholt aufgestellt worden, zuerst in prägnanter Form vielleicht von D'ALEMBERT im discours préliminaire seines Werkes (1743).

Vorstellungen verborgener Mechanismen gemacht worden waren, so namentlich von Lord KELVIN, MAXWELL, J. J. THOMSON und BELTRAMI, war es dann HERTZ, der das Ideal einer völlig kräftelosen Mechanik systematisch verwirklichte.

Die Komplikation der von uns wahrgenommenen Erscheinungen zwingt uns, hinter den uns sichtbaren Faktoren noch „heimliche Mitspieler" zu suchen, deren Berücksichtigung uns erst in den Stand setzt, von den Vorgängen ein abgerundetes Bild zu geben. Nun bestehen hier zwei Möglichkeiten: entweder man führt als jenes Verborgene etwas begrifflich neues ein, wie z. B. die Kraft oder die Energie; oder aber, man nimmt an, daß auch das Verborgene nichts anderes sei als Masse und Bewegung. Die hypothetische Grundlage besteht also in der Annahme verborgener Massen und verborgener Bewegungen, wie sie namentlich durch HELMHOLTZ bereits ausführlich entwickelt worden war; und das Ergebnis ist die Möglichkeit, die formale Kinematik direkt in eine inhaltliche Kinetik überzuführen. Auch in der letzteren giebt es nichts als Koordinaten, Zeiten und Massen, teils sichtbar, teils verborgen, und ihre Bewegung erfolgt gemäß den Beziehungen, die zwischen ihnen bestehen, seien es Verbindungen innerhalb eines einzigen Systems oder Koppelungen zweier verschiedener Systeme; letztere geben zur Einführung des Begriffs der Kraft Anlaß, wobei aber zu beachten ist, daß dieser Begriff hier keine selbständige Rolle spielt, und daß er seine formale Rolle auch lediglich für Nahkräfte spielt, während es Fernkräfte (ohne Voraussetzung einer Kuppelung) nicht gibt. Von den NEWTONschen Gesetzen der klassischen Mechanik bleibt hier begreiflicherweise nur das erste, das Trägheitsgesetz übrig; da es offenbar nicht ausreicht, um die gesamte Mechanik zu begründen, erhebt sich die Aufgabe, es zu verallgemeinern für diejenigen Fälle, in denen nach der klassischen Mechanik Kräfte wirken, die sich dagegen hier von den kräftelosen Fällen in nichts prinzipiell unterscheiden. Diese Verallgemeinerung des Trägheitsgesetzes, die man auch als seine Kombination mit dem GAUSSischen Prinzip des keinsten Zwanges auffassen kann, ist das HERTZsche Grundgesetz (s. w. u.).

Die energetische Mechanik. Hier wird zwar die Kraft ebenfalls eliminiert, aber zugunsten der Einführung der Energie als eines Grundbegriffs; es ist hierüber schon im Artikel „Grundbegriffe" einiges gesagt worden. Masse und Energie treten hier als gleichwertige und gleichsubstanzielle Begriffe auf, und es fragt sich nur, wie man mittels ihrer Kombination zur Grundlegung der Mechanik gelange. Das Erhaltungsgesetz für jeden von ihnen erweist sich, wie zu erwarten, nicht als ausreichend, und so muß man dem ersten Hauptsatze der Mechanik einen zweiten zur Seite stellen, ganz in Analogie mit der Thermodynamik, für die eine entsprechende Grundlegung bekanntlich mit im wesentlichen abschließenden Erfolge durchgeführt ist. Eine umfassende Darlegung der energetischen Mechanik liegt jedoch noch nicht vor.

Die statistische Mechanik. Hier wird die atomistische Anschauung in den Vordergrund der Betrachtung gerückt und der Übergang von den Bewegungen der Atome zu den sichtbaren Erscheinungen nach dem Verfahren der Statistik, also nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemacht. Für eine besondere Klasse von Körpern, die Gase, ist die Methode zu hoher Durchbildung gelangt; für die allgemeine Mechanik liegen vorerst nur einzelne Ansätze, sowie eine erste umfassende Darstellung von GIBBS vor. Den Ausgangspunkt bildet hier der Begriff der Phase, d. h. der Inbegriff aller n unabhängigen Koordinaten und n Momente (Impulse) des Systems; jede einzelne Phase wird durch einen Punkt im $2n$-dimensionalen „Phasenraume" charakterisiert. Betrachtet man nun eine Menge von, ihrer Natur nach, identischer, aber in verschiedenem augenblicklichen Zustande befindlicher Systeme, so wird der Phasenraum gefüllt von einer großen Zahl von Punkten, und die „Phasendichte" läßt sich als stetige Funktion des Ortes behandeln. Sie ändert sich im allgemeinen mit der Zeit, und zwar in einer durch die gegebenen Bedingungen vollständig bestimmten

Weise; ändert sie sich nicht, so ist statistisches Gleichgewicht vorhanden. Das Grundgesetz sagt hier etwas über diese Phasendichte aus und entspricht, von dieser spezifischen Form abgesehen, den Grundgesetzen der anderen Methoden bezw. deren zwei Hauptsätzen.

Kritik der Methoden. Die neueren Arbeiten über die Grundlegung und Methodik der Mechanik, namentlich aber die Werke von HERTZ und BOLTZMANN, haben eine außergewöhnlich umfangreiche Literatur über die einschlägigen Fragen hervorgerufen; es seien hier wenigstens die Beiträge von BOLTZMANN selbst, sowie die von MACH, MACGREGOR, BASSET, A. GRAY, CAILLER, FITZGERALD, POINCARÉ, CLASSEN, REIFF, VOSS, HEUN, H. A. LORENTZ, N. SCHILLER erwähnt. Derartige kritische, polemische, zum Teil freilich auch aufklärende und aufbauende Auseinandersetzungen in einem Handbuche im einzelnen wiederzugeben, erscheint nicht angezeigt; es können nur einige Gesichtspunkte herausgehoben werden.

Zunächst herrscht wohl, dank jenen Diskussionen, gegenwärtig Einigkeit darüber, daß jede Form der Mechanik nur mit einem oder mehreren Bildern operiert, und es kann nur darüber Meinungsverschiedenheit bestehen, erstens, welches dieser Bilder das beste sei, und sodann, ob man gut tut, dieses Bild nur in seinen Umrissen zu zeichnen und das weitere dann der Verifizierung an den Einzeltatsachen zu überlassen, oder ob es besser sei, mit Hilfe von ausgeprägten Hypothesen das Bild von vornherein speziell auszugestalten. Jenes Verfahren ist offenbar vorsichtig und darum in gewissem Sinne wissenschaftlicher, dieses anschaulicher, aber gefährlicher. Ganz ohne Hypothesen kommt man übrigens auf keine Weise aus. Insbesondere aber verliert der Gegensatz zwischen dem molekularen und dem Kontinuumsbilde, wie namentlich BOLTZMANN in sehr schöner Weise gezeigt hat, sehr viel von seiner Schärfe, wenn man bedenkt, daß auch die Differentialgleichungen nur das Ergebnis von Gedankenoperationen und Hypothesen sind, die zuletzt auf atomistischer Grundlage beruhen. Auch HERTZ geht von Punkten aus; und zu seinem Grundgesetze kommt er nur mit Hilfe von Annahmen über die Beziehungen zwischen den Lagen derartiger, der Zahl nach immer mehr gesteigerter Punkte.

Was nun das Wesen der einzelnen Bilder angeht, so liegt wohl der Kern in dem folgenden, in der genannten Literatur nicht mit der genügenden Einfachheit hervorgehobenen Punkte. Die klassische Mechanik ist, nach ihrer Grundlegung durch die Physiker GALILEI und NEWTON, im wesentlichen von Mathematikern ausgebildet worden, von reinen Mechanikern, wie man sagen kann, wenn man sich die physikalische Mechanik als Gegensatz dazu denkt. Ihnen widerstrebte es, auf die inneren physischen Kräfte, wie Elastizität u. s. w. einzugehen, und deshalb ersetzten sie diese inneren Kräfte durch Bedingungen. Natürlich erhält man damit nur Grenzgesetze, z. B. das sphärische Pendel mit absolut unausdehnbarer Stange; dafür erhält man aber ein relativ einfaches Lösungssystem. HERTZ hat nun diesen letzteren Vorteil weiter ausgenützt, indem er auch die Kräfte, die von außen wirken, sowie etwa statuierte innere Fernkräfte eliminierte und durch Bedingungen ersetzte. Der letzte Schritt wäre nun der, auch noch die von HERTZ beibehaltenen Kräfte zwischen gekoppelten Systemen zu beseitigen; man würde dann eine reine Bedingungsmechanik erhalten, und diese würde das äußerste, sozusagen mathematische Extrem darstellen, gegenüber der physikalischen Mechanik, die gar keine Bedingungen, sondern nur Kräfte kennt. Es scheint nun, daß beide Extreme aussichtslos oder doch unzweckmäßig sind, und daß man mit einem Kompromiß besser wegkommt; solche Kompromisse stellen alle bisher aufgestellten Systeme, besonders die von LAGRANGE und von HERTZ dar. Man kann das ganz besonders deutlich an den verschiedenen Begriffskategorien sehen, mit denen die Mechanik operiert, z. B. mit dem der Verrückung. In der einheitlichen Mechanik gibt es und kann es nur geben unendlich viele denkbare Verrückungen eines Punktes, und unter ihnen eine wirkliche, natürliche. In der

Kompromißmechanik schiebt sich zwischen diese beiden Begriffe ein dritter ein, die mögliche oder virtuelle Verrückung; sie hat an sich gar keinen Sinn, sondern erhält ihn erst dadurch, daß man aus den denkbaren Verrückungen zuerst diejenigen aussondert, die einen Teil der gewünschten Eigenschaften haben, die nämlich den Bedingungen genügen; diejenige von ihnen, die dann auch den Rest der Eigenschaften hat, die nämlich auch den Kräften entspricht, ist die wirkliche. In dieser, wie man sieht, wesentlichen Hinsicht, besteht zwischen allen vorhandenen Formen der Mechanik kein Unterschied, sie unterscheiden sich nur durch die Stelle, wo mit dem Kompromiß eingesetzt wird. Ob man hier einmal weiter kommen und das Zwischenglied des Virtuellen ausmerzen wird, scheint nach dem Gesagten zweifelhaft.

Was schließlich die beiden Bilder als solche betrifft, so kommt es nur darauf an, ob und mit welchem Aufwande von Hypothesen sie die Darstellung der Naturerscheinungen erlauben; dabei wird das Urteil darüber, wie groß dieser Aufwand sei, subjektiv verschieden sein. Viele werden z. B. das Hilfsmittel der Fernwirkung zwischen Massenpunkten für sehr annehmbar erklären, andere werden starre Verbindungen und verborgene Massen vorziehen. Manche werden sich mit Atomen begnügen, andere werden versuchen, durch Einführung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit das Bild plausibel zu machen u. s. w. Und wenn man Bedingungen wie Kräfte für gleich unbefriedigend erklärt, so bleibt nichts übrig, als bei dem einzigen Begriff einzumünden, der an reale Dinge anknüpft, bei dem Begriff der Energie, also bei der energetischen Mechanik. Daß aber auch gegen diese erhebliche Einwendungen zu machen sind, hat Hertz in der Einleitung zu seinem Werke, und haben er und Boltzmann sowie Planck (vgl. oben p. 85) gezeigt; mindestens ist die Zeit für diese, im Prinzip vielleicht vollkommenste Darstellung noch nicht gekommen.

III. Die Prinzipe der Mechanik.

Einleitung. Es möge hier eine kurze Übersicht über die allgemeinen Prinzipe der Mechanik, die großenteils solche der Physik überhaupt sind, folgen. Dabei ist aber zu bemerken, daß für eingehende tatsächliche Darstellung, einschließlich der sehr interessanten historischen Entwickelung, sowie für eine umfassende kritische Analyse der Raum nicht zur Verfügung steht. Auch ist darauf hinzuweisen, daß einerseits schon im Artikel „Grundbegriffe" die in Rede stehenden Gedanken berührt worden sind, andererseits in den nachfolgenden Artikeln noch auf sie zurückzukommen sein wird, und zwar im Zusammenhange mit den tatsächlichen Entwickelungen und den speziellen Problemen. Die hier folgende Zusammenstellung bezweckt also nur einen, durch Unzugehöriges nicht unterbrochenen Überblick. Vorauszuschicken sind dabei die folgenden allgemeinen Bemerkungen.

Wesen und Mannigfaltigkeit der Prinzipe. Unter dem Namen „Prinzipe" oder „Prinzipien" hat man im Laufe der Zeit eine große Anzahl sehr verschiedenartiger und verschiedenwertiger Sätze zusammengeworfen, die sich durch eine gewisse Allgemeinheit ihrer Aussagen und damit durch ihre Anwendbarkeit auf ganze Klassen von Erscheinungen und Theorien auszeichnen. Es erhebt sich die Frage, auf welchen Wegen man zur Erkenntnis dessen, was diese Sätze aussagen, gelangt ist, wobei, wie sich herausstellt, der historische Weg der ersten Produktion nicht immer mit dem einfachsten und berechtigtsten Wege heutiger Reproduktion zusammenfällt. Die aufgeworfene Frage ist im wesentlichen identisch mit der anderen, wie man die große Zahl jener Sätze systematisch anordnen, in was für genetisch verschiedene Klassen man sie einteilen könne. Derartige Einteilungsmöglichkeiten gibt es nun eine ganze Anzahl;

bei allen aber zeigt sich, daß sie nur eine beschränkte Bedeutung haben, und daß die Grenzen zwischen den Einteilungsmöglichkeiten sowohl, wie zwischen den so gebildeten Arten von Prinzipien selbst sich immer mehr verwischen, je tiefer man in die Sache eindringt.

Man kann nämlich unterscheiden:

I. Allgemeine und spezielle Prinzipe — ein rein gradueller Unterschied, solange er nicht näher bezeichnet wird; zumal mit Rücksicht auf den Umstand, daß wirklich spezielle Sätze gar nicht hierher gehören.

II. Formale und inhaltliche Prinzipe. Eine Unterscheidung, die offenbar weniger die Prinzipe an sich, als vielmehr unsere Auffassung vom Wesen wissenschaftlicher Naturerkenntnis überhaupt trifft.

III. Philosophische, mathematische, physikalische Prinzipe. Diese, nach wissenschaftlichen Disziplinen gebildete Unterscheidung fällt mindestens teilweise mit der vorigen zusammen, insofern die mathematischen Prinzipe formalen, die physikalischen inhaltlichen Charakters sein werden, oder doch zu sein scheinen werden, während die philosophischen teils dorthin, teils hierhin gehören und sich von jenen beiden etwa in derselben Weise unterscheiden werden, in der überhaupt philosophische Betrachtungsweise sich von mathematisch-physikalischer unterscheidet. Im weiteren Verfolg dieser Unterschiede und Gegensätze gelangt man zu zwei weiteren Unterscheidungsmöglichkeiten, deren eine sich auf die philosophischen und physikalischen, deren andere sich auf die in die Sprache der Mathematik gekleideten Prinzipe bezieht.

IV. Die Unterscheidung nach dem mathematischen Charakter der Formulierung:

a) Differentialprinzipe,
b) Variationsprinzipe,
c) Integralprinzipe.

Auch hier sind jedoch die Grenzen keineswegs überall scharf zu ziehen; man kann sogar die Dreiteilung fallen lassen und nur zwei Klassen unterscheiden, je nachdem in der Formulierung nur gewöhnliche Differentiale oder Integrale vorkommen oder aber zeitliche Integrationen von Variationen der Koordinaten bezw. ihrer Ableitungen nach der Zeit.

V. Die Unterscheidung nach der Herkunft der in dem Prinzip enthaltenen Aussage:

a) Apriorische Prinzipe einerseits, metaphysische andererseits. Der schon durch den direkten Wortsinn angedeutete Gegensatz dieser beiden Klassen kommt hier nicht in Betracht, sondern nur das gemeinsame. Derartige Prinzipe, die man auch Axiome oder — in etwas verschobener Bedeutung — Postulate nennt, haben heutzutage in der exakten Naturlehre keine Bedeutung mehr; freilich gibt es eine Reihe scheinbarer Axiome; die betreffenden Prinzipe fallen aber stets auch unter eine der folgenden Klassen oder unter mehrere von ihnen; es sei namentlich auf die Gruppe (e) verwiesen.

b) Logische Prinzipe, d. h. solche, die Wahrheiten enthalten, die sich aus anderen Wahrheiten durch reines Denken ableiten lassen. Derartige Sätze gibt es natürlich in Hülle und Fülle; man muß nur zusehen, erstens, ob und inwieweit sie allgemeineren Charakters sind und somit den Namen Prinzipe verdienen, und zweitens, ob sie logischen Charakters im engeren Wortsinne sind; sie können nämlich auch von einem der folgenden Charaktere sein.

c) Psychologische, methodologische, ökonomische Prinzipe. Die psychologischen Prinzipe bezeichnen schon durch ihren Namen eine subjektive Auffassung von den Zusammenhängen natürlichen Geschehens. Bei den methodologischen insbesondere, die nur eine Spezialität jener darstellen, erstreckt sich das Subjektive ganz bewußterweise auf die Arbeitsweise des Forschenden, man kann sie daher auch als Arbeitsprinzipe oder, was vielleicht noch treffender ist,

als Arbeitshypothesen bezeichnen; denn je vorsichtiger man in der Auffassung dieser Dinge wird, desto mehr verwischt sich der ursprüngliche extreme Gegensatz zwischen den Begriffen Prinzip und Hypothese. Ganz besonders deutlich wird das Subjektive bei denjenigen Arbeitsmethoden, die man unter dem Prinzip der Ökonomie zusammenfassen kann; die Ökonomie, d. h. der geringste Aufwand an Arbeit, bezieht sich hier lediglich auf den Forscher selbst; aber es ist einleuchtend, daß das Ergebnis zugleich eine Ökonomie der Natur selbst in unserer Auffassung sein wird, nur mit dem prinzipiell wichtigen Unterschied, daß die Einfachheit der Natur ein metaphysisches, die Einfachheit der Darstellung ein psychologisches bezw. methodologisches Postulat ist. Schließlich nehmen die in Rede stehenden Prinzipe auf diese Weise von selbst auch noch den Charakter heuristischer Prinzipe an, d. h. sie erweisen sich als fähig, dem Fortschritte der Wissenschaft in hervorragendem Maße zu dienen.

d) Erfahrungsprinzipe. Ergebnisse der Erfahrung, die sich aus der Unzahl dieser dadurch herausheben, daß sie grundlegende Bedeutung entweder für alle oder doch für zahlreiche Naturerscheinungen haben. So manches Prinzip, das früher als apriorisch oder logisch angesehen wurde, hat sich bei schärferer Analyse als Erfahrungssatz erwiesen. Die Erfahrungsprinzipe haben streng genommen keine in die Zukunft hineinwirkende Kraft, insofern irgend eine widersprechende neue Erfahrung sie umstoßen oder modifizieren oder einengen kann. Sie können aber, wenn sie eine gewisse Allgemeingültigkeit erreicht haben, zu Postulaten werden, d. h. es kann die Forderung aufgestellt werden, bei dem Auftauchen neuer, anscheinend widersprechender Erscheinungen nicht das Prinzip umzustoßen, sondern zu sehen, ob sich die Erscheinung nicht derart ergänzen bezw. auffassen läßt, daß das Prinzip trotzdem richtig bleibt. Da dies häufig gelingt und hierdurch das betreffende Prinzip nur noch an Ansehen gewinnt, werden diese Prinzipe zugleich wichtige Arbeitsprinzipe, die sich für den Fortschritt und die Vereinheitlichung unserer Erkenntnis als äußerst fruchtbar erweisen.

e) Definitionsprinzipe. Diese, von vielen Autoren unbeachtet gelassene Klasse von Prinzipen ist vielleicht diejenige, unter die sich bei schärfster Analyse die meisten als Prinzipe bezeichneten allgemeinen Sätze einordnen lassen: sie sagen etwas aus von einem Begriff, einem Subjekt, das entweder durch diese Aussage erst definiert wird oder doch durch sie erst eine exakte und fundamentale Bedeutung erhält; ein Zirkel, der offenbar einen Erkenntniswert nur hat, wenn eines von beiden, der Satz oder der Begriff, noch eine andere, außerhalb des Zirkels gelegene Wurzel hat, sei es nun, daß diese von apriorischem oder empirischem oder von noch anderem Charakter ist. In diesem Sinne kommt man hier, wie man sieht, auf das apriorische zurück; es beschränkt sich aber jetzt im wesentlichen auf die drei Grundbegriffe von Raum, Zeit und Materie, und auch diesen Begriffen haftet, wie im Artikel „Grundbegriffe" auseinandergesetzt wurde, so viel empirisches an, daß nicht viel für das apriorische übrig bleibt; und was insbesondere den Begriff der Materie angeht, so ersetzt man ihn für exakt naturwissenschaftliche Zwecke besser durch seinen Maßbegriff, die Masse, die dann ihrerseits wieder zu einem exakten Definitionsprinzip, sei es nun in der Form des Massen- oder des Wechselwirkungsprinzips, Anlaß gibt.

f) Dazu kämen dann schließlich noch Sätze, die irgend etwas aussagen, was keine höhere Bedeutung hat als die eines Übereinkommens (solange bis dieses Übereinkommen aufgehoben oder durch ein anderes ersetzt wird); sie gehören aber kaum noch hierher.

Überblickt man diese verschiedenen Einteilungsmöglichkeiten und Prinzipklassen, so sieht man deutlich, wie innig jede Entscheidung verknüpft ist mit der Auffassung, die man bezüglich des Wesens und der Aufgabe naturwissenschaftlicher Forschung hat. Hierüber, namentlich über die Fragen von Beschreibung und Erklärung, formaler und inhaltlicher Behandlung, abstrakte und bildliche

Darstellung findet man einiges wesentliche im Artikel „Grundbegriffe", ausführlicheres aber in den in der Literatur aufgeführten Werken und Abhandlungen.

Im folgenden sind die Prinzipe ohne besondere Rücksicht auf die obigen Einteilungsgrundsätze in einer natürlich aufsteigenden Reihenfolge angegeben; beigefügt sind einige wenige Bemerkungen, die teils in sich, teils im Hinblick auf das oben Gesagte verständlich sind. Auf Vollständigkeit macht die Übersicht keinen Anspruch; im Gegenteil, es sind im Interesse der Knappheit mehrere sogen. Prinzipe absichtlich weggelassen, die eine allgemeinere oder selbständige Bedeutung kaum besitzen.

Was endlich das Historische betrifft, so tragen die meisten der Prinzipe die Namen einzelner Forscher oder werden doch mit ihnen in Verbindung gebracht; es ist aber zu betonen, daß sie fast sämtlich in allmählicher Klärung der Vorstellungen sich herausgebildet haben und daß somit oft eine ganze Reihe von Forschern an einem und demselben Prinzip beteiligt sind; im folgenden sind nur einzelne bezügliche Hervorhebungen gemacht.

1. **Kausalitätsprinzip.** Es kann in zwei Formen, einer unbestimmten, allgemeinen und einer bestimmten quantitativen Form ausgesprochen werden.

a. Unbestimmte Form. Jeder Vorgang ist die Wirkung einer Ursache; insbesondere ist das Ausbleiben eines Vorgangs die Folge des Umstands, daß keine Ursache vorhanden ist. — Das Prinzip hat in dieser Form keine physikalische Bedeutung, erstens, weil es eine Definition des Begriffspaares Ursache und Wirkung voraussetzt, eine Definition, die aber selbst wieder aus dem Prinzip entnommen werden müßte, und zweitens, weil ein durchgreifender Gegensatz zwischen Ursache und Wirkung nicht vorhanden ist, vielmehr jede Wirkung auch ihrerseits Ursache und jede Ursache ihrerseits Wirkung sein kann. Der einzige Unterschied, der zwischen ihnen bestehen bleibt, ist der der Eindeutigkeit der Beziehung in der einen, Vieldeutigkeit in der anderen Richtung, d. h. verschiedene Ursachen können dieselbe Wirkung, eine und dieselbe Ursache kann aber nicht verschiedene Wirkungen haben; bildlich ausgedrückt: Vereinigung verschiedener Bahnen ist möglich, nicht aber Verzweigung einer Bahn. Damit kommt das Prinzip auf das der Eindeutigkeit alles Geschehens hinaus, womit nach dem zuletzt Gesagten die Einseitigkeit der Zeitfolge zusammenhängt. Spezielle Fälle des Prinzips folgen unter späteren Nummern.

b) Quantitative Form. Die Wirkung ist gleich der Ursache (causa äquat effectum). Auch diese Form des Prinzips hat keine weitergehende Bedeutung als die, daß es Ursache und Wirkung als Maßgrößen relativ zueinander definiert. Dabei bleibt die Zulässigkeit der Definition entweder auf bestimmte Arten von Vorgängen beschränkt, oder es muß dem uns geläufigen Begriffe von Wirkung Gewalt angetan werden; man denke nur an den Satz: kleine Ursachen, große Wirkungen, der (ebenso wie die Umkehrung) bei entsprechender Definition des Begriffpaares ebensogroße wissenschaftliche Berechtigung hat wie der obige, ihm entgegengesetzte.

2. **Der Satz vom zureichenden Grunde**: Von ihm gilt ganz das vom Kausalitätsprinzip, mit dem er nahe verwandt ist, Gesagte; ebenso von seinem Spezialfalle, dem Satze vom unzureichenden Grunde: es geschieht nichts, wenn von zwei entgegengesetzten Möglichkeiten die eine ebenso berechtigt ist wie die andere. Dieser letztere Fall läßt noch eine andere Fassung zu, die teils enger, teils weiter ist.

3. **Das Symmetrieprinzip,** besagend, daß der Symmetrie einer Konfiguration auch stets eine ebensolche Symmetrie der Vorgänge entsprechen muß.

4. **Das Kontinuitätsprinzip:** Alle Zustände sind stetig im Raum, alles Geschehen ist stetig in der Zeit; an jedem Orte und in jedem Momente herrscht ein bestimmter Zustand (natura non facit saltum). Dieses „Postulat" hat sich bisher erfahrungsgemäß allen Tatsachen gegenüber und metaphysisch allen Hypo-

thesen gegenüber, die ihm zu widersprechen schienen, bewährt; der Zusammenhang mit dem Kausalitäts- und Eindeutigkeitsprinzip bedarf keiner näheren Erläuterung.

5. Das Trägheits- oder Beharrungsprinzip. (Galilei, Newton u. s. w.). Jeder sich selbst überlassene Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der geradliniggleichförmigen Bewegung. — In Anwendung des Satzes vom unzureichenden Grunde stellt das Prinzip die geradliniggleichförmige Bewegung mit der Ruhe auf dieselbe Stufe, nämlich der Nichtwirkung, und in Gegensatz zur Beschleunigung, die eine Wirkung ist. Als Definitionsprinzip definiert es den Ausdruck „sich selbst überlassen"; in der Newtonschen Fassung („solange er nicht durch Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu verlassen") wird sogar ein späterer Begriff, der der Kraft, vorweggenommen, so daß nur eine Definition per exclusionem zustande kommt; bei Hertz, wo das Prinzip als Spezialfall des Grundgesetzes (s. w. u.) auftritt, macht es seine Aussage von einem freien Punkte bezw. von einem System, zwischen dessen Punkten keine Zusammenhänge bestehen; es definiert damit rückwärts den Begriff des Zusammenhangs und damit den der Freiheit. — Das Prinzip enthält eine Alternative und muß deshalb zur weiteren Analyse in zwei Teile zerlegt werden:

a) Ein Körper, der sich selbst überlassen ist und es stets war, ist in Ruhe.

b) Ein Körper, der sich selbst überlassen ist, es aber nicht immer war, ist in geradliniggleichförmiger Bewegung; hierher gehört auch der Grenzfall, daß die Ursache der Bewegung unendlich weit zurück liegt. — Die Eindeutigkeit des Prinzips ist nur einseitig: d. h. ein Körper, der sich selbst überlassen ist und immer war, ist in Ruhe; ein in Ruhe befindlicher Körper braucht aber nicht sich selbst überlassen sein, es können vielmehr Einwirkungen auf ihn stattfinden, die sich gegenseitig aufheben; dieser Widerspruch findet seine Aufklärung in dem Zerlegungsprinzip. Dasselbe gilt von dem Bewegungszustand, hier ist sogar die Darstellung durch sich aufhebende Ursachen, verbunden mit Trägheit, die weitaus häufigste, indem die primäre Kraft eine sekundäre Gegenkraft erzeugt und mit dieser zusammen gleichförmige Bewegung unterhält. — Als Erfahrungssatz hat das Prinzip, trotz zahlloser Scheinbeweise, keinen bestimmten Sinn, weil man nicht sagen kann, wann ein Körper als sich selbst überlassen zu betrachten sei und wann nicht. — Endlich setzt das Prinzip, da in ihm die Begriffe geradlinig und gleichförmig vorkommen, behufs Erlangung einer absoluten Bedeutung den absoluten Raum- und Zeitbegriff voraus; ohne diese hat es eine nur relative Bedeutung, und die Relation ist willkürlich (Inertialkoordinatensystem und Inertialzeitskala). Man vergleiche schließlich die ganz abstrakte Formulierung des Prinzips durch Kleinpeter.

6. Die formalen Prinzipe der Analogie, der Ähnlichkeit, der Ökonomie des Denkens u. s. w. (Mach), ferner das **Homogenitätsprinzip** (Fourier, Poisson, Maxwell u. A.); hierauf kann nicht im einzelnen eingegangen werden.

7. Das Kraftprinzip (zweites Axiom der Bewegung nach Newton): Die Beschleunigung ist für einen bestimmten Körper mit der auf ihn wirkenden Kraft gleichgerichtet und proportional. In dieser (deduktiven) Form setzt das Prinzip den anderweitig bekannten Kraftbegriff voraus (Ursprung: die uns fühlbare Muskelkraft, vgl. Artikel „Grundbegriffe"). Oder umgekehrt: Die Kraft, die man als auf einen Körper wirkend anzunehmen hat, ist mit der beobachteten Beschleunigung gleichgerichtet und proportional. In dieser (induktiven) Form ist das Prinzip die Definition der Kraft, wobei die Eindeutigkeit die Vorstellung erfordert, daß auf einen Körper gleichzeitig immer nur eine einzige Kraft wirken kann, vorbehaltlich ihrer nachträglichen Zerlegung aus Anschaulichkeits-, Zweckmäßigkeits- oder Vereinfachungsgründen (s. „Unabhängigkeitsprinzip"). — In beiden Formen ist das Prinzip eine unmittelbare Konsequenz und weitere Ausbildung des Trägheitsprinzips; man könnte diese Ausbildung noch zu höheren Gliedern fortführen, begnügt sich aber hiermit (s. Artikel „Grundbegriffe"). —

Inhaltlich gefaßt, ist das Prinzip ein Spezialfall des Kausalitätsprinzips, indem es die Kraft als die Ursache der Beschleunigung hinstellt; formell gefaßt, führt es aus Gründen der Einfachheit der Darstellung den Kraftbegriff ein, ohne diesem eine besondere Bedeutung beizulegen (s. „Wechselwirkungsprinzip").

8. Massenprinzip. Die Beschleunigung verschiedener Körper durch dieselbe Kraft ist ihren Massen umgekehrt proportional. In dieser (deduktiven) Form setzt das Prinzip die anderweitig festgesetzten Begriffe von Kraft und Masse voraus; den ersteren kann man äußerlich entbehren, wenn man sagt: unter gleichen Umständen. — Oder umgekehrt: Die Massen zweier Körper sind den Beschleunigungen, die sie unter gleichen Umständen annehmen, umgekehrt proportional. In dieser (induktiven) Form liefert das Prinzip die Massendefinition, relativ zu einer willkürlichen Einheitsmasse. — In jedem Falle setzt es eine bestimmte Kenntnis des Ausdrucks „unter gleichen Umständen" voraus; da dieser Ausdruck aber, wie die Erfahrung lehrt, unscharf ist und besonders zwei einander ausschließende Deutungen zuläßt, ist das Prinzip kein brauchbares Mittel zur Gewinnung neuer Erkenntnisse; es ist daher durch das nachfolgende Prinzip zu ersetzen.

9. Das Wechselwirkungsprinzip (Newtons drittes Axiom der Bewegung, Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion): Jeder Wirkung in der Natur entspricht eine gleichgroße und entgegengesetzt gerichtete Wirkung. In dieser allgemeinen Form kommt, wenn das Prinzip überhaupt einen Sinn haben soll, alles darauf an, was man unter „Wirkung" versteht; und es ist oft nicht möglich, dafür eine von dem Prinzip unabhängige Definition zu geben. In besonderer Anwendung auf die Mechanik nimmt das Prinzip die Form an: Die Beschleunigungen, die sich zwei Körper gegenseitig erteilen, sind entgegengesetzt gerichtet und den Massen der Körper umgekehrt proportional. In dieser (deduktiven) Form wird die Kenntnis des Massenbegriffs vorausgesetzt. — Umgekehrt: Die Massen, die man zwei Körpern zuschreiben muß, um zu einer einfachen Darstellung zu gelangen, sind den (beide positiv genommenen) Beschleunigungen, die sie sich bei ihrer Wechselwirkung erteilen, umgekehrt proportional. Die beiden Produkte aus Masse und Beschleunigung werden dann nämlich einander entgegengesetzt gleich und heißen die Kräfte der Wechselwirkung. Diese (induktive) Form des Prinzips liefert zugleich die Definition der Masse — als des inversen Faktors — und der Kraft — als des gleichen Produkts. Rein bildlich bleibt dabei die Vorstellung, daß sich die Körper gegenseitig eine Beschleunigung „erteilen". — Vor dem Massenprinzip hat das Wechselwirkungsprinzip den weiteren Vorzug, daß die Vergleichung zweier Vorgänge und damit der Begriff der „Gleichheit der Umstände" vermieden und alles aus einem einzigen Vorgange abgeleitet wird. Hiermit ist zugleich ein scheinbarer Mangel, der aber in Wahrheit auch ein Vorzug ist, verknüpft, nämlich der, daß das Wechselwirkungsprinzip von vornherein nur relative Bedeutung haben kann, die Kenntnis irgend welcher absoluter Raum- und Zeitpunkte also nicht voraussetzt; die Relation findet zu irgend einem an der Wechselwirkung nicht beteiligten Dritten statt; wo dieses fehlt, verliert auch das Wechselwirkungsprinzip jede Bedeutung. Bei Hertz beschränkt sich das Prinzip naturgemäß auf Nahekräfte (gekoppelte Systeme).

Als einen Spezialfall der drei letzten Prinzipe kann man das Impulsprinzip hinstellen, entsprechend der Bedeutung des Impulses als einer momentanen und deshalb nur eine Geschwindigkeit hinterlassenden Kraft (s. Artikel „Grundbegriffe"). Als Sonderfälle der drei letzten Prinzipe erhält man dann die Sätze: a) Die Geschwindigkeiten eines bestimmten Körpers sind den Impulsen proportional (oder umgekehrt); b) die Geschwindigkeiten zweier Körper unter gleichen Umständen sind ihren Massen umgekehrt proportional (oder umgekehrt); c) Die Geschwindigkeiten, die sich zwei Körper bei einer impulsiven Wechselwirkung erteilen, sind ihren Massen umgekehrt proportional (oder umgekehrt). —

Wie dort die Kraft durch das Produkt aus Masse und Beschleunigung, so wird hier der Impuls durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit gemessen, das auch als Bewegungsgröße bezeichnet wird. Man kann dann rückwärts die Kraft als eine Fortdauer von Impulsen auffassen und erhält dann als ihr Maß die Änderung der Bewegungsgröße.

In den Prinzipen 5, 7 und 9 sind, wie angegeben, die drei von NEWTON an die Spitze der Mechanik gestellten Axiome der Bewegung enthalten. Mit der Frage, inwieweit diese noch heute eine gesonderte Bedeutung haben, vergleiche man u. A. die Ausführungen von THOMSON und TAIT, MACH und HERTZ.

10. Das Unabhängigkeitsprinzip: Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte, so ist die wirkliche Beschleunigung die Resultante der jeder einzelnen Kraft entsprechenden, unabhängig für sich auftretenden Beschleunigungen. Oder kürzer: Gleichzeitig wirkende Kräfte superponieren sich wie Vektoren (geometrische Summe). In dieser Form kann es als Superpositionsprinzip oder als Prinzip von der Zusammensetzung der Kräfte bezeichnet werden. — Das Prinzip stellt, inhaltlich gefaßt, einen Erfahrungssatz dar, dessen Gültigkeit da aufhört, wo man Kräfte einführt, die sich ein- oder gegenseitig beeinflussen und dadurch neue Interferenzwirkungen hervorrufen. Formal aufgefaßt, liefert das Prinzip die Definition des Begriffs „gleichzeitig wirkende Kräfte"; es hat daher hier keine besondere Bedeutung; wohl aber hat es eine solche bei der umgekehrten Anwendung, nämlich als Zerlegungsprinzip oder Isolationsprinzip. Jede Kraft kann man nach den Vektorregeln in Komponenten zerlegen und diesen die entsprechenden Partialbeschleunigungen zuschreiben. Während aber die Zusammensetzung eindeutig ist, ist die Zerlegung vieldeutig, indem nur die letzte Komponente bestimmt, alle übrigen aber willkürlich sind.

Die historisch berühmte Form des Prinzips ist in dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte (STEVIN) ausgesprochen. Die zahllosen logischen Scheinbeweise dieses Satzes haben keinen bestimmten Sinn und können ihn nicht haben; die empirischen Beweise knüpfen an bestimmte Fälle äußerlich gegebener gleichzeitiger Kräfte an und haben die schon oben angegebene Gültigkeitsgrenze. — Verallgemeinert wird der Satz zum Polyeder oder weiter zum Polygon der Kräfte (s. Artikel „Grundbegriffe", „Statik" und „Dynamik"). — Die formal wichtigste Zerlegung ist die in die Komponenten nach den Achsen des gegebenen Koordinatensystems. — Bei Spezialisierung auf gleichgerichtete Kräfte erhält man das Kraftprinzip als direkte Konsequenz.

11. Das Ausbreitungsprinzip: Die Stärke der Wirkung an einer Stelle des Raumes, über den sie sich ausbreitet, ist umgekehrt proportional der Größe der Fläche, über die sie sich verteilt. — Das Prinzip ist für den einfachsten Fall, den einer punktförmigen Kraftquelle und demgemäß kugelförmiger Ausbreitungsflächen historisch berühmt geworden als das Gesetz der Fernwirkung, sei es nun gravitierender (NEWTONsches Gesetz) oder elektrischer oder magnetischer (COULOMBsches Gesetz), sowie als das Gesetz der Abnahme von Schall- und Lichtstärke. Bei punktförmiger Quelle nimmt die Stärke mit dem Quadrat, bei geradliniger (Zylinderflächen) mit der Entfernung selbst umgekehrt proportional ab, bei ebener bleibt sie konstant; in diesen und allen anderen Fällen, den ersten ausgenommen, hängt sie außerdem von der Richtung ab. — Das Prinzip ist nicht an die Fernwirkungsauffassung gebunden, sondern gilt ebenso für die Feldtheorie und wird hier zum Prinzip der Kraftströmung u. s. w. Übrigens sagt das Prinzip nichts aus über die übrigen Vorgänge bei der Ausbreitung, die ihrerseits die Stärke beeinflussen können. — Bei unbegrenzter Ausdehnung kann das Prinzip unter Umständen zu Widersprüchen führen (s. Artikel „Gravitation").

12. Das Prinzip der Erhaltung des Stoffes oder der Konstanz der Masse. Aus der Erfahrung entnommen (vgl. Artikel „Grundbegriffe") und zum Postulat geworden. Das Prinzip verliert aber seine Gültigkeit, sobald es gelingt, den Massen-

begriff einem anderen unterzuordnen (Energie, s. w. u., sowie oben p. 38 und 85). Das Prinzip ist zugleich das erste in der Reihe derjenigen Prinzipe, die man unter dem Namen „Erhaltungsprinzipe“ zusammenfassen kann, und die alle den Charakter regulativer Bedingungen haben, die bei allem Naturgeschehen oder doch bei bestimmt bezeichneten Klassen von Vorgängen erfüllt sein müssen; je nachdem das eine oder das andere der Fall ist, sind es allgemeine oder spezielle Erhaltungsprinzipe. Hierzu gehören außer dem in Rede stehenden noch die drei folgenden Prinzipe, wenigstens in ihrer spezielleren Formulierung.

13. Der Schwerpunktssatz (HUYGENS, NEWTON): Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob in ihm alle Massen vereinigt wären und alle Kräfte angriffen. Der Satz enthält die dynamische Definition des Schwerpunktes, im Gegensatz zu der rein geometrischen Definition des Massenmittelpunktes (s. Artikel „Statik und Dynamik“). — Der Satz ist, ebenso wie die beiden folgenden, eine rein formale Konsequenz (ein Integral) der Bewegungsgleichungen. Der Spezialfall tritt ein, wenn keine äußeren Kräfte wirken und heißt der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes: Der Schwerpunkt eines äußeren Kräften nicht unterworfenen Systems bewegt sich nach dem Trägheitsprinzip, d. h. geradlinig und gleichförmig.

14. Der Flächensatz (EULER, D. BERNOUILLI, D'ARCY u. A.): Das Ende eines Trägheitsradius eines Systems (und ebenso das jedes anderen) dreht sich so, als ob in ihm alle auf diesem Radius liegenden Massen vereinigt wären und alle Drehungsmomente angriffen. Für einen Körper, auf den keine Drehkräfte wirken und dessen Dimensionen klein sind gegenüber seiner Entfernung vom Drehzentrum, wird die Aussage folgende: Bei der Drehung eines Körpers unter der alleinigen Einwirkung eines Zentralkörpers beschreibt der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Dies ist der spezielle Satz von der Erhaltung der Flächen. Empirisch ist der Satz zuerst von KEPLER für das Sonnensystem erwiesen worden; theoretisch enthält er in seiner allgemeinen Form die dynamische Definition des Trägheitsradius; er ist alsdann eine rein logische Konsequenz (ein zweites Integral) der Bewegungsgleichungen.

15. Das Energieprinzip. Der rein mechanische Satz, aus dem sich das Prinzip entwickelt hat, ist der Satz von der lebendigen Kraft, wie er historisch, oder von der kinetischen Energie, wie er in der gegenwärtigen Sprache heißt (DESCARTES, LEIBNIZ, BERNOUILLI u. s. w.). Er lautet allgemein: Der Zuwachs der lebendigen Kraft eines keinen zeitlich veränderlichen Bedingungen unterworfenen Systems ist immer gleich der Arbeit der wirksamen Kräfte in derselben Zeit. Haben die Kräfte ein mit der Zeit sich nicht änderndes Potential, so nimmt der Satz die Gestalt an: die Summe aus der lebendigen Kraft und dem Potential bleibt immer dieselbe; oder: die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie ist konstant. — Kehrt das System in seinen ursprünglichen Zustand und damit zu seinem ursprünglichen Werte der potentiellen Energie zurück, so ist auch die kinetische Energie wieder ebensogroß wie zu Anfang. Dieser Spezialsatz ist der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft. — Wirken endlich überhaupt keine Kräfte, so ist die lebendige Kraft dauernd konstant. — Der Satz von der lebendigen Kraft ist das dritte Integral der Bewegungsgleichungen und zugleich das vierte der mechanischen Erhaltungsprinzipe (Masse, Schwerpunkt, Flächen, lebendige Kraft); es gewinnt aber eine unvergleichlich größere Bedeutung als diese durch seine Erweiterung auf die Gesamtheit der Naturerscheinungen in dem Energieprinzip: Für jedes System gibt es eine seine Arbeitsfähigkeit bestimmende Größe, Energie genannt, die nur von seinem augenblicklichen Zustand abhängt, von dem Wege, auf dem dieser Zustand erreicht wurde, also unabhängig ist. — Und als Spezialfall das Prinzip von der Erhaltung der Energie: Kehrt ein System nach irgend einer Reihe von Prozessen wieder in den Anfangszustand zurück, so ist auch seine gesamte Energie wieder ebensogroß wie an-

fänglich. Und endlich ganz speziell, wenn das System in keiner äußeren Wechselwirkung steht: Die Energie eines abgeschlossenen Systems bleibt bei allen seinen inneren Veränderungen konstant. Dieser letzte Fall liegt offenbar immer vor bei dem Weltganzen; dessen Energie ist also von unveränderlichem Betrage (ROBERT MAYER, v. HELMHOLTZ u. s. w.). — Das Energieprinzip stellt offenbar das Wechselwirkungsprinzip auch für die Energie als gültig hin; hierin liegt ein Gemeinsames der sonst so verschiedenartigen Begriffe Kraft und Energie. — Übrigens gilt das Prinzip, da die kinetische Energie in ihm vorkommt, zunächt auch nur für einen relativen Raum und eine relative Zeit, kann aber zu absoluter Bedeutung erhoben werden (SCHÜTZ). Man vergleiche im übrigen den Artikel „Grundbegriffe".

16. Das Gleichgewichtsprinzip; insbesondere bezeichnet als **Prinzip der virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten** oder als **Prinzip der virtuellen Arbeit** (UBALDO, GALILEI, JOH. BERNOUILLI, MAUPERTUIS, LAGRANGE u. A.): Die hinreichende und notwendige Bedingung für das Gleichgewicht ist bei einem starren System (bei einem System, das Bedingungen in der Form von Gleichungen unterworfen ist) die, daß die Summe der Produkte aus Kräften und virtuellen Verrückungen, kurz die virtuelle Arbeit null sei. — Oder mit Benutzung des Energiebegriffs: Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die potentielle Energie ein Minimum ist (ein Maximum würde eine unechte Art von Gleichgewicht liefern). Oder endlich, wenn man die Energie nicht in Summanden, sondern in Faktoren zerlegt: Gleichgewicht findet statt, wenn die Wirkungsfähigkeit der Energie (ihr Intensitätsfaktor, s. Artikel „Grundbegriffe") ein Minimum ist. — Das Prinzip läßt sich bei gewissen bewußten oder stillschweigenden Voraussetzungen bis zu einem gewissen Grade logisch deduzieren, schließlich aber und allgemein nur als Erfahrungssatz hinstellen. Mit dem Energieprinzip an sich hat es nichts zu tun; es charakterisiert vielmehr den Zustand, der erhalten bleibt, im Gegensatz zu dem, der sich verändert, und eröffnet damit die Reihe derjenigen Prinzipe, die im Gegensatz zu den regulativen Erhaltungsprinzipen von produktiver Bedeutung sind, wenn auch dieses erste Prinzip in der Reihe zunächst negativ ist, d. h. besagt, unter welchen Umständen nichts geschieht.

Für Systeme, deren innerer Zusammenhang nicht starr, sondern einseitig ist (nicht durch Gleichungen, sondern durch Ungleichungen bestimmt ist), tritt an die Stelle des Prinzips ein neues, das FOURIERsche: die obige Größe braucht hier nicht null zu sein, sie darf aber höchstens gleich null sein. — Hierdurch nimmt das Prinzip, statt der Form eines bestimmten Satzes, die einer Tendenz an, indem es von einer doppelt unendlichen Zahl von Möglichkeiten nur die eine Hälfte zuläßt; es wird hiermit zum Spezialfalle eines allgemeineren Tendenzprinzips (s. weiter unten).

Im übrigen muß auf die weitere Ausführung in der „Statik" verwiesen werden, ebenso wie für die folgenden Prinzip auf die entsprechende Behandlung in der „Dynamik". Daselbst finden auch die besonderen Ausdrücke, wie virtuelle Verrückungen u. s. w., verlorene Kräfte u. s. w. ihre Erläuterung.

17. Prinzip der verlorenen Kräfte (D'Alembertsches Prinzip). Die virtuelle Arbeit der „verlorenen" Kräfte ist für starre Systeme null, für solche mit einseitigen Bedingungen höchstens null. Da die verlorenen Kräfte die Überschüsse der äußeren Kräfte über die Produkte aus Massen und Beschleunigungen sind, ist die Bedeutung des Prinzips einleuchtend. Noch deutlicher tritt diese Bedeutung hervor, wenn man von äußeren Kräften ganz absieht und den Zwang (Überschuß der wirklichen Beschleunigung über diejenige, die sich bei Aufhebung aller inneren Bedingungen einstellen würde) einführt; dann besagt das Prinzip: der Zwang hat bei einem freien System keine in die Richtung einer virtuellen Verrückung fallende Komponente (HERTZ). — Auch das D'ALEMBERTsche Prinzip ist vom Energieprinzip unabhängig. — Aus dem Prinzip fließen unmittelbar die Gleichungen der Bewegung (s. „Dynamik").

18. Das Prinzip der kleinsten Wirkung oder der **kleinsten Aktion** (MAUPERTUIS, EULER, LAGRANGE, JACOBI, v. HELMHOLTZ, HÖLDER, HILBERT u. A.). Das Prinzip läßt eine völlig strenge Ausspruchsweise in Worten nicht zu. Man kann ihm aber verschiedene Formen geben, die ihm einen in der einen oder anderen Hinsicht adäquaten Ausdruck verleihen: a) Prinzip des kleinsten Kraftaufwands: Unter allen Bewegungsarten, mittels deren ein konservatives System aus einer Konfiguration in eine andere gelangen kann, wählt es diejenige, für welche der Kraftaufwand ein Minimum ist. — b) Prinzip der kürzesten Zeit: Unter allen benachbarten Wegen, auf denen ein konservatives System aus einer gegebenen Anfangs- in eine gegebene Endkonfiguration gelangen kann, wählt es denjenigen aus, der die Überführung in der kürzesten Zeit bewerkstelligt (in gewissen Fällen kann es freilich auch die längste Zeit sein). — c) Prinzip des kürzesten Weges: Von allen obigen Wegen wird der kürzeste gewählt. — Die Feststellung, wie sich diese verschiedenen Formen des Prinzips zueinander verhalten, inwieweit sie nur für holonome Systeme gelten, und wie sie für andere zu modifizieren sind, verbietet sich an dieser Stelle aus Raummangel. — Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist ursprünglich aus teleologischen Ideen abgeleitet worden; in Wahrheit geht es aus logischen Deduktionen, in Verbindung mit durch die Erfahrung als zweckmäßig erwiesenen Definitionen, hervor.

19. Das Hamiltonsche Prinzip. Die Variation des Zeitintegrals des Überschusses der aktuellen über die potentielle Energie zwischen gegebenen Grenzen ist null. Oder: Dieses Zeitintegral selbst ist ein Minimum für die wirkliche Bewegung (in gewissen Fällen kann es freilich auch ein Maximum sein). Für freie Systeme nach HERTZ wird der Satz: Das Zeitintegral der Energie aus gegebener Anfangs- in gegebene Endlage ist für die wirkliche Bewegung am kleinsten. Auch hier muß indessen zwischen holonomen und nichtholonomen Systemen unterschieden werden. — Das Prinzip hat eine offenbare Beziehung zum Prinzip der kleinsten Wirkung, ist aber doch von ihm wesentlich verschieden. Dagegen ist es mit dem D'ALEMBERTschen wesentlich äquivalent.

Zwischen den letztgenannten Prinzipen, mit beiden in engem Zusammenhange, steht das Prinzip des kinetischen Potentials, d. h. der um die kinetische verminderten potentiellen Energie (v. HELMHOLTZ, KOENIGSBERGER): Von allen möglichen Übergängen ist für den wirklichen der für gleiche Zeit berechnete Mittelwert des kinetischen Potentials am kleinsten.

Die letzten Prinzipe enthalten, wie man sieht, die Differenz der beiden Modalitäten der Energie, also die Differenz derselben beiden Größen, deren Summe im Energieprinzip als konstant hingestellt wird. Dieses letztere und irgend eines jener enthalten also die vollständige Grundlegung der energetischen Physik, wobei das Erhaltungsprinzip regulativ, das andere positiv maßgebend ist.

20. Das Prinzip des kleinsten Zwanges (GAUSS): Bei der unfreien Bewegung ist die Abweichung von der freien Bewegung in jedem Augenblick ein Minimum. Die Größe, um deren Abweichung es sich handelt, ist die Summe der Produkte der Massen in die Quadrate der Abweichungen von der freien Bewegung. Die Natur der zu vergleichenden freien und unfreien Bewegung bedarf übrigens besonderer Präzisierung. Das Prinzip ist unter gewissen Voraussetzungen mit dem D'ALEMBERTschen äquivalent.

Nahe verwandt ist auch das OSTWLDsche Prinzip des „ausgezeichneten Falles“, das ähnlich schon vorher von PETZOLDT formuliert war, der scharfen, einen bestimmten Sinn festlegenden Fassung indessen Schwierigkeiten bereitet. Auch OSTWALDS Prinzip des größtmöglichen Energieumsatzes kommt bei schärferer Analyse auf eines der Prinzipe von GAUSS oder HELMHOLTZ hinaus.

21. Das Grundgesetz von Hertz. Jedes freie System beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geradesten Bahn. Das Prinzip wird als Erfahrungssatz hingestellt, und zugleich als Grundgesetz,

aus dem alles übrige sich eindeutig ergibt. Es ist offenbar am nächsten verwandt mit dem GAUSSischen Prinzip, unterscheidet sich aber von ihm durch die allgemeine und abstrakte Form und die dementsprechend grundlegendere Bedeutung. Andererseits nimmt es offenbar seinen Ausgang von dem Trägheitsprinzip, indem es die geradlinige durch die geradeste Bahn ersetzt (d. h. die von geringster Krümmung unter allen möglichen) und damit die Befriedigung von Bedingungen (Starrheit u. s. w.) erlaubt (Kräfte, die außerdem wirken könnten, gibt es in der HERTZschen Mechanik nicht). Die Bewegung ist gleichförmig, insofern die Bahnbeschleunigung null ist; die Zentripetalbeschleunigung ist aber natürlich nicht null. Im Zusammenhang hiermit kann man das Grundgesetz auch so aussprechen: Ein freies System bewegt sich so, daß seine Beschleunigung stets die kleinste ist, die sich mit der augenblicklichen Lage, Geschwindigkeit und dem Zusammenhange des Systems verträgt. Das Energieprinzip ist eine notwendige Folge des Grundgesetzes, ebenso ergeben sich die klassischen Prinzipe in einfacher Weise. Für unfreie Systeme ergeben sich schließlich entsprechend modifizierte Konsequenzen.

22. Das Prinzip des Ausgleichs der Energie, oder der Zerstreuung oder Vergeudung oder Entwertung der Energie (CARNOT, CLAUSIUS, MACH, OSTWALD, HELM u. A.): Bei allen freiwilligen (ohne fremde Hilfe von statten gehenden) Vorgängen findet ein Ausgleich von Energie, unter Wahrung ihrer Konstanz, statt in dem Sinne, daß ihre Wirkungsfähigkeit vermindert wird; bei erzwungenen Prozessen findet die Steigerung der Wirkungsfähigkeit eines Teiles der Energie (ihre Hebung auf ein höheres Niveau) ihren Ausgleich durch die Minderung der Wirkungsfähigkeit des Restes (Niveausturz, MACH). Wo das in eindeutiger Weise tunlich ist, kann man die Energie in zwei Faktoren zerlegen, einen Quantitäts- und einen Intensitätsfaktor, und kann dann sagen: bei allen freiwilligen Vorgängen nimmt der Intensitätsfaktor ab, der Quantitätsfaktor zu. Man kann dann für die Faktoren auch Namen einführen, Ektropie und Entropie, und sagen: Die Ektropie strebt einem Minimum, die Entropie einem Maximum zu. Im übrigen ist hinsichtlich dieses Prinzips auf den Artikel „Grundbegriffe" sowie auf den die Wärmelehre enthaltenden Band **3** hinzuweisen.

Das letztgenannte Prinzip kann man, wenn das Erhaltungsprinzip der erste ist, als den zweiten Hauptsatz der Physik bezeichnen; beide zusammen bestimmen (regulativ und produktiv) alles Geschehen.

Mit dem zweiten Hauptsatze steht auch das Virialprinzip (CLAUSIUS) in nahem Zusammenhang.

IV. Auswahl aus der Literatur.

a) Ältere Werke in historischer Anordnung.

ARCHIMEDES, Opera, herausg. von HEIBERG. Berlin 1880. Deutsch von NIZZE. Stralsund 1824. — GUIDO UBALDI, Mechanicorum liber. Pesaro 1577. — S. STEVINUS, Beghinselen der Weegkonst. Leiden 1585; Hypomnemata math. Leiden 1608. — G. GALILEI, Opere. Firenze 1890—1900; Discorso etc. Leiden 1638. Deutsch u. a. in OSTWALDs Klassikern. — R. DESCARTES, Principia philosophiae. Amsterdam 1644. — I. NEWTON, Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1686 (auch deutsch in verschiedenen Ausgaben). — W. LEIBNIZ, Mehrere Abhandlungen in den Acta Eruditorum 1686—1695; ferner: Briefwechsel mit JOH. BERNOUILLI. Lausanne 1745. — P. VARIGNON, Projet d'une nouv. Mécanique. Paris 1687; Méc. nouv. Paris 1725. — L. EULER, Mechanica. Petropoli 1736; Theoria motus etc. Petropoli 1765 (beides deutsch von WOLFERS. Greifswald 1848 und 1853). Ferner viele Abhandlungen in den Schriften der Berliner und der Petersburger Akademie. — JOH. BERNOUILLI, Opera. Lausanne 1742. — JAC. BERNOUILLI, Opera. Genf 1744. — J. D'ALEMBERT, Traité de dynamique. Paris 1743 (deutsch in OSTWALDs Klassikern). — MAUPERTUIS, Oeuvres. Paris 1752. Viele Abhandlungen in der Pariser und Berliner Akademie. — J. L. LAGRANGE, Mécanique analyt. Paris 1788; Oeuvres compl. **11. 12.** Paris 1892. Deutsch u. a. von SERVUS.

Berlin 1887. — P. S. LAPLACE, Mécanique céleste. Paris 1799; Oeuvres. Paris 1843—47. — J. KANT, Metaphys. Anf. d. Naturwiss. 1786 (Werke **2.**). — J. B. FOURIER, Th. analyt. de la chaleur. Paris 1822 (deutsch von WEINSTEIN. Berlin 1884); Oeuvres. Paris 1888—90. — J. V. PONCELET, Cours de mécanique. Metz 1826 und 1829 (auch deutsch). — C. F. GAUSS, Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss. 1828 ff.; Ges. Werke 1863 ff. (einzelnes auch in OSTWALDs Klassikern); CRELLEs Journ. **4.** 1829. — G. CORIOLIS, Traité de mécanique etc. Paris 1829. — C. G. J. JACOBI, Vorlesungen über Dynamik, herausg. von CLEBSCH. Berlin 1866. — W. R. HAMILTON, Trans. Roy. Soc. 1834; Lect. on quaternions. London 1853; Coll. Papers.

b) Neuere Werke, in alphabetischer Anordnung.

(Man vergleiche auch die Literatur zu den bezüglichen Abschnitten des Artikels „Grundbegriffe". — Von den rein darstellenden Lehrbüchern konnte natürlich nur eine sehr geringe Anzahl aufgeführt werden.)

J. ANDRADE, Mécanique physique. Paris 1896. — P. APPELL, Traité de mécanique rationelle. Paris 1893—96. — F. AUERBACH, Kanon der Physik. Leipzig 1899. — L. BOLTZMANN, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. Leipzig 1897 und 1904. — L. BOLTZMANN, Über die Prinzipe der Mechanik, zwei Antrittsreden. Leipzig 1903. — J. BOUSSINESQ, Leçons synth. de mécanique rat. Paris 1889. — E. BUDDE, Allg. Mechanik. Berlin 1890. — R. CLAUSIUS, Mechan. Wärmetheorie. Braunschw. 1876 (3. Aufl. 1887). — W. K. CLIFFORD, Elements of dynamics. London 1878. — W. K. CLIFFORD, The common sense of the exact sciences. London 1879 (2 Aufl. 1886). — J. M. C. DUHAMEL, Des méth. d. l. sciences etc. Paris 1866 (2. Aufl. 1886). — E. DÜHRING, Krit. Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik. Leipzig 1872 (3. Aufl. 1887). — C. DE FREYCINET, Essais s. l. philosophie des sciences. Paris 1896. — J. W. GIBBS, Thermodyn. Studien. Deutsch von OSTWALD. Leipzig 1892. — J. W. GIBBS, Elementary principles in statistical mechanic. New York 1902 (deutsche Ausgabe. Leipzig 1905). — G. HELM, Die Energetik in ihrer geschichtlichen Entwickelung. Leipzig 1900. — H. v. HELMHOLTZ, Über die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. — H. v. HELMHOLTZ, Wiss. Abhandl. Leipzig 1892—95. — H. v. HELMHOLTZ, Vorlesung über die Dynamik diskreter Massen, herausgeg. von KRIGAR-MENZEL. Leipzig 1897. — H. v. HELMHOLTZ, Vorlesung über die Dynamik kontinuierlicher Massen. Leipzig 1902. — A. HÖFLER, Studien zur gegenw. Philosophie der Naturwiss. Leipzig 1900. — H. HERTZ, Die Prinzipe der Mechanik. Leipzig 1894. — G. KIRCHHOFF, Vorlesung über math. Physik. Bd. 1: Mechanik. Leipzig 1876 (3. Aufl.) — H. KLEIN, Die Prinzipien der Mechanik. Leipzig 1872. — L. KOENIGSBERGER, Die Prinzipien der Mechanik, math. Unters. Leipzig 1901. — L. LANGE, Die geschichtliche Entwickelung des Bewegungsbegriffs. Leipzig 1886. — A. E. H. LOVE, Theoretical mechanics. Cambridge 1897. — E. MACH, Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag 1872. — E. MACH, Die Mechanik in ihrer Entwickelung. Leipzig 1883 (4. Aufl. 1901). — E. MACH, Die Prinzipien der Wärmelehre. Leipzig 1896 (2. Aufl. 1900). — E. MACH, Populär-wissenschaftliche Vorlesungen. 3. Aufl. Leipzig 1903. — E. MACH, Erkenntnis und Irrtum. Leipzig 1905. — J. C. MAXWELL, Matter and motion. London 1876 (deutsch von FLEISCHL. Braunschweig 1879). — J. C. MAXWELL, Tr. on electricity and magn. Oxford 1873 (deutsch von WEINSTEIN. Berlin 1888). — J. C. MAXWELL, Scientific Papers. Cambridge 1890. — ROB. MAYER, Ges. Abh. Stuttgart 1892. — C. NEUMANN, Die Prinzipien der GALILEI-NEWTONschen Theorie. Leipzig 1870. — C. NEUMANN, Beiträge zur math. Physik. Leipzig 1893. — K. PEARSON, Grammar of science 2. ed. London 1900. — E. PICARD, Quelques réfl. s. l. mécanique. Paris 1902. — M. PLANCK, Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Leipzig 1887. — H. POINCARÉ (deutsch von LINDEMANN), Wissenschaft und Hypothese. Leipzig 1904. — J. RAUSENBERGER, Lehrbuch der analyt. Mechanik. Leipzig 1888. — F. ROSENBERGER, NEWTON und seine physikalischen Prinzipien. Leipzig 1895. — E. J. ROUTH, Tr. on the dynamics etc., 6. Aufl. London 1897 (deutsch von SCHEPP. Leipzig 1898). — W. SCHELL, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl. Leipzig 1879. — J. SOMOFF, Theoretische Mechanik, deutsch von ZIWET. Leipzig 1878. — H. STREINTZ, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883. — W. THOMSON und P. G. TAIT, Tr. on nat. philosophy. Oxford 1867 (deutsch v. HELMHOLTZ und WERTHEIM. Braunschweig 1874). — W. THOMSON, Math. a. phys. Papers. London 1890. — W. VOIGT, Elementare Mechanik. Leipzig 1889. — W. VOIGT, Kompendium der theoretischen Physik. Leipzig 1895. — P. VOLKMANN, Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwiss. u. s. w. Leipzig 1898. — P. VOLKMANN, Einführung in das Studium der theoretischen Physik. Leipzig 1900. — A. VOSS, Die Prinzipien der rationellen Mechanik, in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, **4.** 1. 1901. Daselbst reiche Literaturangaben, auch über spezielle Probleme. — H. WEBER, Über Kausalität in der Naturwissenschaft. Leipzig 1881. — W. WUNDT, Die physikalischen Axiome u. s. w. Erlangen 1866. — M. ZWERGER, Die lebendige Kraft und ihr Maß. München 1885.

c) Abhandlungen und Monographien.

(Eine Rubrizierung unter die einzelnen Methoden, Prinzipe und Probleme ist kaum durchführbar, da die meisten Abhandlungen mehrere Fragen und ihre Beziehungen zueinander behandeln. Wo es sich um ein ausgesprochenes Spezialproblem handelt, ist eine bezügliche kurze Bemerkung in Klammern gemacht. Auch hier mußte die Auswahl sehr beschränkt werden, und es ist überwiegend nur die neueste Zeit berücksichtigt. — Man vergleiche ferner die Literatur zur „Statik" und zur „Dynamik".)

A. B. BASSET (NEWTONS Axiome), Nat. **49.** 529. 1894; (Kleinste Wirkung), Nat. **67.** 343. 1903. — L. BOLTZMANN (HAMILTON) CRELLES Journ. **73.** 111. 1871; (Analogien, Kraftlinien u. s. w.), OSTWALDS Klass.-Bibl. Nr. 69; (HERTZsche Mechanik), DRUDES Ann. **1.** 673. 1900; (Beispiel zu HERTZ' Mechanik), D. Math.-Ver. **8.** 200. 1900. — A. v. BRILL (HERTZsche Mechanik), Mitt. naturw. Ver. Württ. 1899. — A. BUCKENDAHL (GAUSSsches Pr.), Inaug.-Diss. Göttingen 1873. — C. CAILLER (HERTZsche Mechanik), Arch. de Gen. (3) **33.** 4. 1895. — J. CLASSEN (BOLTZMANNsche und HERTZsche Mechanik), Jahrb. Hamb. wiss. Anst. 1898; (Allgemeines) ibid. 1901. — R. CLAUSIUS (Virial, HAMILTONsches Pr. u. s. w.), POGG. Ann. **141.** 124. 1870; **142.** 433. 1871; **146.** 585. 1872; **150.** 106. 1873; Jub.-Bd. 411. 1874; Suppl.-Bd. **7.** 215. 1876. — G. DARBOUX (Parallelogramm), Bull. sciences math. **9.** 281. 1875. — P. DUHEM (Entwickelungsgang der Mechanik, Kritik der Prinzipien), Rev. gén. des sciences **14.** 63. 429. 1903. — J. FARKAS (FOURIERS Pr.), Math.-naturw. Ber. a. Ung. **12.** 463. 1894; **15.** 25. 1897. — G. F. FITZGERALD (HERTZsche Mechanik), Nat. **51.** 283. 1895. — F. FÖRSTER (OSTWALDsches und GAUSSsches Pr.), Ztschr. f. Math. u. Phys. **49.** 84. 1903. — G. FREGE (Trägheitsgesetz), Ztschr. f. Phil. u. phil. Krit. **98.** 145. 1892. — J. W. GIBBS, Amer. Journ. math. **2.** 49. 1897. — A. GRAY (Grundlagen der Dynamik), Nat. **49.** 389. 1894. — ZEMPLEN GYÖZÖ (Energieumsatz), DRUDES Ann. **10.** 419. 1903. — O. HEAVISIDE (kleinste Wirkung), Nat. **67.** 297. 1903. — R. HEGER (Parallelogramm), Progr. Dresden 1887. H. v. HELMHOLTZ (kleinste Wirkung), Berl. Ber. 1887. p. 225; 1892. p. 459; CRELLES Journ. **100.** 1887; vgl. auch Wiss. Abh. — K. HEUN (HERTZsche Mechanik), Sitzungsber. d. Berl. math. Ges. 1901. p. 12. — C. S. HILBERT (kleinste Wirkung), Münch. Ber. **34.** 125. 1904. — O. HÖLDER (HAMILTON und MAUPERTUIS), Gött. Nachr. 1896. p. 122. — K. HOLLEFREUND (kleinster Zwang, Anwendungen), Progr. Berlin 1897. — W. JERMAKOW, vgl. Beibl. 1900. p. 950. — P. JOHANNESSON (Trägheit, didaktisch), Progr. Berlin 1896. — H. KLEIN (Erhaltungs-Pr.), Progr. Dresden 1889. — H. KLEINPETER (Trägheits-Pr.), Arch. syst. Philos. **6.** 461. 1900. — G. KOBB (kleinste Wirkung), Ann. de Toulouse **5.** 1. 1891. — L. KOENIGSBERGER (allgemeines), Berl. Ber. 1896. p. 899. 1173; CRELLES Journ. **118.** 275. 1897; **119.** 25. 1898; (Verborgene Bewegung u. unvollst. Probl.), Berl. Ber. 1897. p. 158; (Prinzipe für mehrere Variable), Berl. Ber. 1901. p. 1092; (Energie-Pr. f. kinet. Potentiale), Berl. Ber. 1904. p. 1342. — L. LANGE (Trägheits-Pr.), Leipz. Ber. **37.** 353. 1885; Phil. Stud. **2.** 266. 539. — J. LARMOR (HERTZsche Mechanik), Rep. Brit. Assoc. 1900. p. 620. — R. LEHMANN-FILHÈS (Parallelogramm, didaktisch), Arch. d. Math. (3) **1.** 124. 1901. — S. LIE (OSTWALDS Pr.) Leipz. Ber. **46.** 135. 1894. — F. LINDEMANN (D'ALEMBERTsches Pr.), Münch. Ber. **34.** 77. 1904. — R. LINDT (Virtuelle Geschw.), Inaug.-Diss. Berlin 1904; Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. **18.** 147. 1904. — H. A. LORENTZ (Grundl. der Mechanik im Anschluß an HERTZ), Versl. Akad. Wet. Amst. 1901—02. p. 876; (Virialsatz), BOLTZMANN-Festschr. 721. 1904. — J. MAC GREGOR (Grundhypothesen), Tr. Canada Soc. **3.** 1892; (2) **1.** 85. 1895; Phil. Mag. (5) **35.** 134. 1892; **36.** 233. 1893. — A. MAYER (kleinste Wirkung), Leipz. Ber. **38.** 343. 1886. — ROBERT MAYER (Erhaltung der Kraft), LIEB. Ann. **42.** 1. 1842. — L. F. MENABREA (Minimum-Pr.), Rend. Acc. Linc. (2) **2.** 201. 1869. — F. MINDING (JACOBI-HAMILTON), Math. Ann. **55.** 119. 1901. — F. A. MÜLLER (Kontinuität), Inaug.-Diss. Marburg 1886. — F. MUIRHEAD (Bewegungsgesetze), Phil. Mag. (5) **23.** 473. 1887. — L. NATANSON (nichtumkehrbare Vorgänge), Ztschr. f. phys. Chem. **21.** 193. 1896. — C. NEUMANN (virtuelle Geschw.) Leipz. Ber. **31.** 53. 1879; **38.** 70. 1886; (OSTWALDS Pr.), Leipz. Ber. **44.** 184. 1892. — M. OSTROGRADSKY (kleinste Wirkung), Mém. Acad. St. Pét. (6) **4.** 385. 1850. — W. OSTWALD (Energieumsatz), Lehrb. d. allg. Chem. **2.** 37. 1891. (Ausgezeichneter Fall u. s. w.), Leipz. Ber. **45.** 599. 1893; **46.** 277. 1894; **47.** 37. 1895. — P. PAINLEVÉ (Flächensatz), C. R. **139.** 1170. 1904. — H. PETRINI (Prinzipien), Arch. f. syst. Philos. **1.** 204. 1895. — J. PETZOLDT (Maxima, Minima und Ökonomie), Inaug.-Diss. Göttingen 1891; (Eindeutigkeit), Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos. **19.** 257. 1895. — H. POINCARÉ (HERTZsche Mechanik), Rev. gén. des sciences **8.** 734. 1897. — F. POSKE (Trägheits-Pr.), Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos. **8.** 385. 1884. — RACHMANINOW (kleinster Zwang), Ztschr. f. Math. u. Phys. **25.** 206. 1879. — W. J. M. RANKINE (Erhaltung der Kraft), Proc. Glasg. phil. Soc. **3.** 1853; **5.** 1855. O. REIFF (HERTZsche Mechanik), DRUDES Ann. **1.** 225. 1900. — M. RÉTHY (kleinste Wirkung, HAMILTON u. s. w.), Math. u. naturw. Ber. a. Ungarn **13.** 1. 270. 1896—97; **20.** 289. 1902; Math. Ann. **48.** 514. 1897; **58.** 169. 1904. — C. G. REUSCHLE (kleinster Zwang), Arch. f. Math. u. Phys. **6.** 238. 1845. — A. RITTER (kleinster Zwang), Inaug.-Diss. Göttingen 1853.

— H. SCHEFFLER (kleinster Zwang), Ztschr. f. Math. u. Phys. **3.** 197. 1858. — J. R. SCHÜTZ (Absolute Erhaltung der Energie), Gött. Nachr. 1897. — F. SIACCI (Parallelogramm), Rend. Acc. Napol. 1899. — P. G. TAIT (Trägheits-Pr.), Proc. Edinb. Soc. **12.** 743. 1882—84. — JAM. THOMSON (Trägheits-Pr.), Proc. Edinb. Soc. **12.** 568. 730. 1882—84. — W. THOMSON (Lord KELVIN) (Erhaltung der Energie), Papers **2.** 182. — K. UCKERMANN (kleinste Wirkung), Inaug.-Diss. Marburg 1893. — P. VOLKMANN (Actio und Reactio), WIED. Ann. **66.** 781. 1898; (Gewöhnliche und HERTZsche Mechanik), Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **14.** 266. 1901. — A. VOSS (Allgemeines), Münch. Ber. 1901. p. 167; Math. Ann. **25.** 258. 1885; (Kleinste Wirkung und HAMILTON), Gött. Nachr. 1900. p. 322; (Energetisches Grundgesetz), Münch. Ber. **31.** 53. 1901. — L. WEBER (Trägheits-Pr. oder GALILEIsches Pr.), Kiel 1891. — A. H. C. WESTPHAL (Parallelogramm), Inaug.-Diss. Göttingen 1868. — R. WRONSKY (Intens.-Gesetz der Energie), Progr. Frankfurt 1888; (Wechselwirkung der Energie), Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **2.** 173. 1889. — E. ZERMELO (statist. Mechanik), Phys. Ztschr. **1.** 317. 1900.

Statik.

Von F. AUERBACH.

— — —

Einleitung. Die Statik läßt sich, wie die Mechanik überhaupt, von verschiedenen Gesichtspunkten aus behandeln, die sich durch den Grad ihres mehr mathematisch-formalen oder mehr physikalisch-realen Charakters unterscheiden. Dabei ist die erstere Behandlung naturgemäß in mancher Beziehung von allgemeinerer Bedeutung, indem sie auch abstrakt mathematische Probleme oder nichtmechanische Naturerscheinungen umfaßt. Von der Geometrie schlechthin unterscheidet sich diese formalmathematische Statik dadurch, daß jedem Punkte im Raume ein bestimmter Mannigfaltigkeitskoeffizient beigelegt wird; man bezeichnet ihn der Kürze halber häufig als Masse der Punkte und nennt die Disziplin entsprechend Geometrie der Massen. Um den Ausdruck „Massen“ zu vermeiden, hat man auch von Punktgrößen gesprochen. Am treffendsten ist aber ein Ausdruck, der von der Vorstellung ausgeht, daß an einem bestimmten Orte nicht bloß ein einziger, sondern eine Vielheit von Punkten, die unter sich alle gleich sind, vorhanden sei, daß also jeder Ort eine bestimmte „Multiplizität“ habe. Wie man nun auch den Namen wähle, dieser Koeffizient kann einen beliebigen Wert annehmen, und zwar nicht bloß positive, sondern auch negative; er kann den Ausdruck nicht bloß für mechanische, sondern auch für gedachte elektrische oder magnetische Massen sein; er kann endlich auch ganz Abstraktes bezeichnen, z. B. das „Gewicht“, mit dem man gewisse Fälle, etwa Beobachtungen, in Rechnung zu ziehen hat. In entsprechend formaler Weise wird dann das ganze System der Begriffe aufgebaut und das System der Gesetze formuliert. Für die Zwecke des vorliegenden Handbuches erscheint die Vorausschickung einer besonderen Geometrie der Massen überflüssig; es soll daher sofort in die eigentliche Statik eingetreten werden.

Die Statik zerfällt naturgemäß zunächst in mehrere Abschnitte, je nach der Komplikation des Gebildes, um dessen Gleichgewicht es sich handelt. Zu beginnen ist mit dem einfachen Massenpunkte; es folgen dann mehrere miteinander verbundene Massenpunkte, den Beschluß macht der kontinuierliche, starre Körper. Bei Punktsystemen und Körpern treten nun gewisse konfigurative Begriffe, nämlich die verschiedenen Massenmomente nebst ihren Zentren in den Vordergrund, so daß es angezeigt erscheint, ihnen besondere Abschnitte zu widmen, die an geeigneter Stelle zwischen die Hauptbetrachtungen einzuschalten sind. Auch die Gleichgewichtsverhältnisse der sogen. einfachen Maschinen verdienen ihrer praktischen Bedeutung halber eine besondere Darstellung. Auf eine in der Praxis überaus wichtig gewordene Methodik, die graphische Statik, kann hier nur skizzenhaft eingegangen werden. Den Beschluß macht eine Lehre, die streng genommen nicht mehr in die Statik der starren Körper gehört, trotzdem

aber hier abgehandelt zu werden pflegt: das Gleichgewicht eines linearen Gebildes, das zwar als nicht ausdehnbar, wohl aber als biegsam angenommen wird, und für das ein Faden oder eine Kette die typischen Beispiele sind.

Über den Bereich der von der Statik dargestellten Erscheinungen ist schließlich eine nicht unwichtige Bemerkung zu machen. Die Statik ist die Lehre von der Ruhe oder dem Gleichgewicht der Körper; je nachdem man das eine oder das andere dieser beiden Worte in Betracht zieht, ergibt sich etwas anderes. Denn dem Gleichgewicht der Kräfte entspricht nicht lediglich die Ruhe, es kann ihm auch eine gleichförmige Bewegung entsprechen; nur Beschleunigung darf nicht vorhanden sein. Es ist alsdann nur erforderlich, einen einmal stattgehabten Impuls sowie — bei der gleichförmigen Drehbewegung — eine gewisse Zusatzkraft (s. w. u.) hinzuzufügen, um die Erscheinung im übrigen ganz nach den Regeln der Statik behandeln zu können. Ob man im einzelnen ein Problem der Statik oder der Dynamik zuweisen solle, wird sich nach dem Zusammenhang des Vorgangs mit anderen, zweifellos dynamischen sowie nach dem Endcharakter der betreffenden Bewegung entscheiden.

Statik des Massenpunktes.

Freier Punkt. Damit ein freier, keinem irgendwie beschaffenen Zwange unterworfener Punkt im Gleichgewicht sei, muß die Resultante aller auf ihn wirkenden Kräfte null sein; dies kann aber nur in der Weise erfüllt sein, daß die Summe aller X-Komponenten der auf ihn wirkenden Kräfte für sich null sei, und daß dasselbe auch für die beiden anderen Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems gelte. Die somit festgelegte notwendige Bedingung für das Gleichgewicht ist dann offenbar auch die hinreichende Bedingung.

Addiert man die Kräfte nicht sämtlich, sondern läßt die letzte von ihnen übrig, so sieht man ein, daß jene Summe dieser letzten Kraft entgegengesetzt gleich sein muß, damit Gleichgewicht bestehe.

Unfreier Punkt. Handelt es sich um einen Punkt, der einem Zwange unterliegt, der also gewissen gegebenen Bedingungen genügen muß, so ist die obige Gleichgewichtsbedingung zwar offenbar immer noch hinreichend, sie ist aber, als unnötig eng, nicht mehr notwendig. Es sind nun insbesondere zwei Fälle von Wichtigkeit:

a) Der Punkt ist gezwungen, sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen, deren Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ ist. Wählt man alsdann das Koordinatensystem so, daß zwei seiner Achsen in die in dem Punkte an die Fläche gelegte Tangentialebene fallen, so genügt es, daß diese beiden Komponenten, also auch ihre Resultante, verschwinde; denn die dritte, auf der Fläche normale Komponente könnte den Punkt nur aus der Fläche herausziehen, oder in sie hineindrücken (wenn man sich die eine Seite der Fläche als die äußere, die andere als die innere vorstellt); beides ist aber nach der Voraussetzung ausgeschlossen. Man kann also sagen: Damit ein auf einer Fläche beweglicher Punkt im Gleichgewicht sei, muß die Resultante der auf ihn wirkenden Kräfte normal zur Fläche sein. Man kann aber auch für diesen Fall die obige, für einen freien Punkt gültige Gleichgewichtsbedingung festhalten, wenn man sich den Zwang, auf der Fläche zu bleiben, als eine Kraft vorstellt, welche alsdann jener Normalkraft gerade gleich und entgegengesetzt anzunehmen ist, so daß die Resultante aller Kräfte wie oben null ist. Es ist noch zu bemerken, daß es im allgemeinen nur einen oder einzelne Punkte auf der Fläche geben wird, in welchen der materielle Punkt im Gleichgewicht sich befindet; dieser Punkt, also die Gleichgewichtslage, ist nach den Regeln der analytischen Geometrie durch die beiden, zu der Flächengleichung hinzukommenden Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{X} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{Y} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{Z} \quad .$$

Ist die Fläche nicht, wie hier angenommen wurde, vollkommen glatt, sondern rauh, so tritt Reibung ein, die man, wie den Zwang als eine normale, als eine tangentiale Kraft einführen kann. Es braucht dann auch die Resultante der Tangentialkräfte nicht gänzlich zu verschwinden, sie muß nur kleiner sein als die Reibung. (Näheres s. „Reibung".)

b) Der Punkt ist sogar gezwungen, sich auf einer gegebenen Kurve zu bewegen. Dann genügt es, wenn die längs der Kurve genommene Komponente der Kräfte verschwindet, oder mit anderen Worten: die Resultante der Kräfte muß in der Ebene liegen, durch welche die Kurve in dem Gleichgewichtspunkte senkrecht hindurch geht. Da hiernach der Winkel x zwischen der Resultante und der Tangente der Kurve ein rechter sein muß, für diesen Winkel aber, wenn ds das Kurvenelement ist, die Formel

$$(2) \qquad \cos\psi = \frac{X}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\frac{dz}{ds}$$

gilt, so ist die Gleichgewichtslage des Punktes, außer durch die beiden gegebenen Kurvengleichungen, durch die Gleichung

$$(3) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

bestimmt. Auch hier kann man wiederum den Zwang, auf der Kurve zu bleiben, als eine Gegenkraft einführen und dann den Satz beibehalten, daß die Resultante aller Kräfte null sein muß.

Ist die Kurve rauh, und wird die Reibung mit η bezeichnet, so tritt an die Stelle der letzten Gleichung die neue

$$(4) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - \eta\,ds = 0 \quad ;$$

es existiert alsdann, statt eines Gleichgewichtspunktes, eine ganze Gleichgewichtsstrecke, deren Länge von der Größe der Reibung abhängt.

Statik verbundener Punkte.

Sobald es sich um mehr als einen Punkt handelt, seien es nun deren nur zwei oder mehrere oder ein ganzes System oder gar ein kontinuierlicher Körper, so fragt es sich, ob und welche Beziehungen zwischen diesen Massenpunkten bestehen. Bestehen gar keine Beziehungen, so bewegt sich jeder Punkt für sich, wie wenn die anderen nicht vorhanden wären. Anders bei sogen. verbundenen Punkten. Verbundene Punkte im allgemeinsten Sinne sind solche, deren Bewegungen irgendwie aufeinander von Einfluß sind, gleichviel, ob man diesen Einfluß durch sichtbare Koppelungen oder durch unsichtbare Kräfte darstellt. Im engeren Sinne versteht man darunter Punkte, deren Entfernung voneinander gewissen Beschränkungen unterliegt. Sie kann z. B. nur zwischen gewissen Grenzen variieren dürfen (elastisch verbundene Punkte); oder sie kann nur einseitig variieren, z. B. nur zunehmen oder nur abnehmen dürfen (Fadenpendel) u. s. w. Der speziellste, uns hier aber zunächst interessierende Fall endlich ist der von Punkten, die starr miteinander verbunden sind, deren Entfernung voneinander sich also nicht ändern darf, deren Konfiguration also immer dieselbe bleibt.

In der Statik starrer Systeme spielen nun begreiflicherweise diejenigen Punkte und Größen eine fundamentale Rolle, durch die man die räumliche Beziehung

der einzelnen Massen und der einzelnen auf sie wirkenden Kräfte in einfacher Weise darstellen kann, und die man als die Mittelpunkte bezw. als die Momente der Massen bezw. Kräfte bezeichnet. Von diesen Größen muß zunächst gehandelt werden.

Massenmittelpunkt und Massenmoment.

Definitionen. Die Massen der einzelnen Punkte seien m_i, die Gesamtmasse, also die Summe aller m_i sei M, in Formel

(5) $$M = \sum m_i \quad .$$

Der Abstand irgend eines Punktes von einem Pole O sei s_i, genommen im Vektorsinne. Dann heißt das Produkt $m_i s_i$ das polare Massenmoment ersten Grades oder das polare lineare Moment des Punktes i. Jeder Punkt des Systems hat natürlich ein anderes Moment; aber auch für jeden anderen Pol O' ist das System der Momentenwerte ein anderes. Nun bilde man die Summe aller Momente, $\sum m_i s_i$ und nenne sie das polare Moment ersten Grades des ganzen Massensystems. Man kann es auch durch seine Komponenten darstellen, indem man die Koordinaten x_i, y_i, z_i der einzelnen Punkte und die Koordinaten x, y, z des Poles O einführt:

$$\sum m_i(x_i - x) \quad , \qquad \sum m_i(y_i - y) \quad , \qquad \sum m_i(z_i - z) \quad .$$

Je nach der Lage des Poles O werden diese Größen verschiedene Werte annehmen, teils positive, teils negative; es wird also einen Pol geben, für den sie null werden, in bezug auf den also auch das Massenmoment des Körpers selbst verschwindet; es wird das derjenige Punkt sein, welcher die Eigenschaft hat, daß zu beiden Seiten jeder beliebigen durch ihn gelegten Ebene die Summe der Produkten der Massen in ihre senkrechten Abstände von der Ebene die gleiche ist. Diesen Punkt nennt man Massenmittelpunkt. Er bleibt offenbar ungeändert, wenn alle Massen des Systems in gleichem Verhältnis geändert werden. Bezeichnet man seine Koordinaten mit x_0, y_0, z_0, so ist also

(6) $$\sum m_i(x_i - x_0) = 0 \quad , \qquad \sum m_i(y_i - y_0) = 0 \quad , \qquad \sum m_i(z_i - z_0) = 0$$

oder

(7) $$\sum m_i x_i = M x_0 \quad , \qquad \sum m_i y_i = M y_0 \quad , \qquad \sum m_i z_i = M z_0 \quad ,$$

die Koordinaten des Massenmittelpunktes sind also

(8) $$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad , \qquad y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \quad , \qquad z_0 = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \quad ,$$

und die Strecke von ihm nach dem Anfangspunkte ist die geometrische Summe der mit ihren Massen multiplizierten entsprechenden Strecken für die Einzelpunkte, dividiert durch die Gesamtmasse. Man kann auch direkt von dieser Beziehung ausgehen, um den Massenmittelpunkt zu definieren; nämlich als den Punkt, der, wenn man in ihm die Gesamtsumme vereinigt denkt, in bezug auf einen Pol dasselbe Moment hat wie das ganze System; und man kann dann leicht zeigen, daß er diese Eigenschaft für jeden beliebigen Pol besitzt. Man erhält somit den Satz: In jedem System von Massenpunkten gibt es einen bestimmten, nur von den Massen und der gegenseitigen Lage der Punkte abhängigen Punkt, den Massenmittelpunkt, der die Eigenschaft hat, daß, wenn man ihm die Gesamtmasse des Systems beilegt, sein polares Moment ersten Grades in bezug auf einen beliebigen Punkt des Raumes gleich dem des ganzen Systems ist. Ein abnormer Spezialfall, auf den im weiteren keine Rücksicht genommen werden soll, ist der, wo die Massen teils positiv, teils negativ sind und die Summe jener gleich der Summe

dieser, die Gesamtmasse also gleich null ist; man kann ein solches System ein magnetisches nennen (vgl. Band 5). Es hat die Eigenschaft, daß das polare Moment in bezug auf alle Punkte des Raumes dasselbe ist, und daß der Massenmittelpunkt in der Richtung der Achse dieses Moments in die Unendlichkeit fällt. Im Gegensatz hierzu kann man ein System, das aus positiven und negativen, sich nicht ausgleichenden Massen besteht, ein elektrisches und ein System von lauter positiven Massen ein gravitierendes System nennen; nur von letzteren soll im folgenden die Rede sein.

Einige aus dem obigen leicht abzuleitende Sätze sind folgende: Der Massenmittelpunkt eines ebenen Systems liegt in seiner Ebene, der eines geradlinigen Systems in dieser Geraden. Hat das System eine Symmetrieebene oder gar eine Symmetrieachse oder gar ein Symmetriezentrum, so liegt der Massenmittelpunkt in diesen Gebilden. Das polare Moment eines beliebigen Systems ist gleich groß für alle Pole, die auf einer um den Massenmittelpunkt beschriebenen Kugelfläche liegen. Zerlegt man ein System in mehrere Partialsysteme oder kombiniert man mehrere Systeme zu einem Gesamtsystem höherer Einheit, so findet man, daß der Massenmittelpunkt des Gesamtsystems der Mittelpunkt der Massen der Partialsysteme und daß das polare Moment des Gesamtsystems die geometrische Summe der polaren Momente der Partialsysteme für denselben Pol ist.

Betrachtet man statt des polaren Moments eines Massenpunktes nur eine seiner Komponenten, so gelangt man zu dem Begriff des Moments eines Massenpunktes in bezug auf eine Ebene; man nennt es auch das planare Moment ersten Grades oder das statische Massenmoment des Punktes; die entsprechende Summe über alle Punkte des Systems ist dann das planare oder statische Moment des Systems. Die statischen Momente für die Koordinatenebenen sind demgemäß

$$\sum m_i x_i \quad , \quad \sum m_i y_i \quad , \quad \sum m_i z_i \quad .$$

Für eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

ist, wird das planare Moment

$$(9) \qquad \frac{\sum m_i (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - \delta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

oder, indem man den Massenmittelpunkt einführt:

$$(10) \qquad \frac{M \cdot (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 - \delta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \quad ;$$

das statische Moment eines Massensystems ist also für jede beliebige Ebene gleich dem statischen Moment der in dem Massenmittelpunkte konzentrierten Gesamtmasse, nämlich gleich dem Produkt dieser Gesamtmasse und dem senkrechten Abstand des Massenmittelpunktes von der Ebene; für alle durch den Massenmittelpunkt gehenden Ebenen wird es null, für alle Ebenen, die eine um den Massenmittelpunkt geschlagene Kugel berühren, wird es gleich groß.

Der Massenmittelpunkt eines kontinuierlichen Massensystems kann innerhalb oder außerhalb seines Bereichs liegen. Bei einer ebenen, krummen Linie ohne Inflexionspunkt liegt er z. B. immer außerhalb; ist ein Inflexionspunkt vorhanden und die Massenverteilung zu diesem beiderseits spiegelbildlich gleich, so liegt er in dem Inflexionspunkte, wobei die Sinuslinie über eine ganze Periode ein Beispiel liefert. Bei ebenen Flächen liegt er sicher innerhalb, falls die Grenzlinien überall nach außen konvex sind; sind sie zum Teil nach außen konkav, so hängt es von der Gestalt und Massenverteilung ab, ob er innerhalb oder außerhalb liegt; bei dem homogenen Halbkreise liegt er z. B. innerhalb; wenn dieser jetzt in immer

schmälere Sicheln übergeht, rückt er bei einer bestimmten Phase nach außen; bei der Kreisringscheibe liegt er außerhalb, nämlich in der Mitte des Kreisloches. Entsprechendes gilt für körperliche Massen, je nachdem ihre Oberfläche überall nach außen konvex oder teilweise in der einen oder der anderen oder beiden Hauptkrümmungsrichtungen nach außen konkav ist.

Im folgenden soll, wo Bedenken nicht vorliegen, der Massenmittelpunkt mit dem kürzeren Namen „Schwerpunkt“ belegt werden; es ist aber ausdrücklich schon jetzt zu bemerken, daß dieser Name strenggenommen einem anderen Begriff, von dem bald die Rede sein wird, zukommt; einem Begriff, der zu dem des Massenmittelpunktes im Prinzip geradezu in einem Gegensatz steht, in einem besonderen, praktisch sehr häufigen Falle freilich mit ihm zusammenfällt.

Aus der großen Fülle von Material über den Schwerpunkt verschiedener Gebilde kann nur das wichtigste hier herausgegriffen werden.

a) Schwerpunkt von Punkten.

Der Schwerpunkt zweier in den Punkten A und A' befindlichen Massen m und m' liegt auf der Geraden AA' und zwar in Abständen von den Punkten, die sich umgekehrt wie die Massen verhalten; es ist also, wenn S der Schwerpunkt ist:

$$AS \cdot m' = A'S \cdot m \quad . \tag{11}$$

Beispielsweise liegt der Schwerpunkt von Sonne und Erde rund 500 km vom Sonnenmittelpunkte entfernt, also ganz tief im Innern des Sonnenkörpers; der Schwerpunkt von Erde und Mond liegt dagegen fast 5000 km vom Erdmittelpunkte entfernt, also zwar ebenfalls im Erdinnern, aber nicht allzuweit von der Oberfläche.

Der Schwerpunkt von drei Punkten A, A', A'' mit den Massen m, m', m'' ist hiernach leicht anzugeben. Man bestimmt zunächst den Schwerpunkt von A und A' auf der Geraden AA', legt diesem die Masse $m + m'$ bei und bestimmt den Schwerpunkt von ihm und dem dritten Punkte auf der Geraden, die sie verbindet. Statt dessen kann man auch zu der eben genannten Linie die entsprechende Verbindungslinie des Schwerpunktes von A und A'' mit A' hinzufügen und hat dann in dem Schnittpunkte beider den Schwerpunkt der drei Punkte; die dritte entsprechende Linie würde durch denselben Punkt gehen. Die möglichen Spezialfälle ergeben sich von selbst: insbesondere werden bei drei gleichmäßigen Punkten jene Linien die Seitenmittentransversalen, und der Schwerpunkt teilt sie im Verhältnis von 1:2.

Ganz entsprechend verhält es sich mit dem Schwerpunkte von vier die Ecken eines Tetraeders bildenden Massenpunkten; nur verhalten sich hier die durch den Schwerpunkt gleicher Massen gebildeten Abschnitte der Transversalen wie 1:3.

b) Schwerpunkt von Linien.

Es sei ϱ die Masse der Streckeneinheit und ds ein Linienelement, also $\varrho\, ds$ die Masse des Linienelements. Die Linie, im allgemeinen eine Raumkurve, sei durch die Gleichungen $z = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ ihrer Vertikal- und Horizontalprojektion, sowie durch die Koordinaten x_0 und x_1 ihrer beiden Endpunkte gegeben. Die Schwerpunktskoordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$ erhält man, indem man aus den beiden gegebenen Gleichungen die Größen dy/dx und dz/dx und hieraus

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

berechnet; es ist dann

(12)
$$\xi = \frac{\int\limits_{x_0}^{x_1} \varrho\, x\, ds}{\int\limits_{x_0}^{x_1} \varrho\, ds} \quad , \quad \eta = \frac{\int\limits_{x_0}^{x_1} \varrho\, y\, ds}{\int\limits_{x_0}^{x_1} \varrho\, ds} \quad , \quad \zeta = \frac{\int\limits_{x_0}^{x_1} \varrho\, z\, ds}{\int\limits_{x_0}^{x_1} \varrho\, ds} \quad .$$

Wenn ϱ konstant, also die Kurve homogen ist, so wird einfacher

$$s = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx \quad ,$$

(13)
$$\xi = \frac{1}{s}\int\limits_{x_0}^{x_1} x\, ds \quad , \quad \eta = \frac{1}{s}\int\limits_{x_0}^{x_1} y\, ds \quad , \quad \zeta = \frac{1}{s}\int\limits_{x_0}^{x_1} z\, ds \quad .$$

Es ist nun zu unterscheiden zwischen geraden Linien, ebenen Kurven und Raumkurven.

Für eine einzige, begrenzte gerade Linie liegt, wenn sie homogen ist, der Schwerpunkt in der Mitte; für zwei von einem Punkte ausgehende Gerade in dem Winkelraum zwischen ihnen; für zwei sich kreuzende Linien in demjenigen Winkelraum, der von den längeren Schenkeln begrenzt wird; für die drei Seiten eine Dreiecks im Mittelpunkte desjenigen Kreises, der dem Dreieck der drei Seitenmitten eingeschrieben ist.

Ebene Kurven. Die Ebene sei die xy-Ebene, die Gleichung sei $y = f(x)$, die Endpunkte seien x_0 und x_1; es sind dann, wenn zur Abkürzung (ϱ Dichte)

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad , \quad \int\limits_{x_0}^{x_1} \varrho \sqrt{1 + y'^2}\, dx = w$$

gesetzt wird, die Koordinaten des Schwerpunktes:

(14)
$$\xi = \frac{1}{w}\int\limits_{x_0}^{x_1} \varrho\, x \sqrt{1 + y'^2}\, dx \quad , \quad \eta = \frac{1}{w}\int\limits_{x_0}^{x_1} \varrho\, y \sqrt{1 + y'^2}\, dx \quad .$$

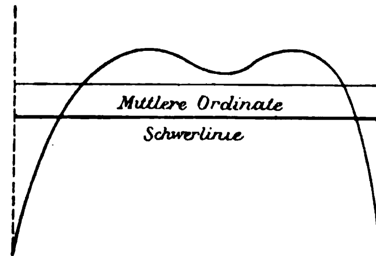
Wenn ϱ konstant ist, so geht w in die Bogenlänge $s = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ über, und es wird einfacher

(15)
$$\xi = \frac{1}{s}\int\limits_{x_0}^{x_1} x \sqrt{1 + y'^2}\, dx \quad , \quad \eta = \frac{1}{s}\int\limits_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx \quad .$$

In bezug auf η ist eine nicht unwichtige Bemerkung zu machen. Man kann die Linie $\eta =$ const. als Schwerlinie der Kurve hinsichtlich ihrer Querdimension bezeichnen, und man muß sie wohl unterscheiden von der Geraden

(16)
$$\eta_1 = \frac{1}{x_1 - x_0}\int\limits_{x_0}^{x_1} y\, dx \quad ,$$

die man als Linie der mittleren Ordinate bezeichnen kann[1]; bei ihr, nicht aber bei der Schwerlinie liegen zu beiden Seiten gleiche Flächenstücke. Für die letztere kommt es eben nicht auf die dx, sondern auf die, für gleiche dx verschieden langen und somit verschieden schweren ds an; die Schwerlinie wird also auf



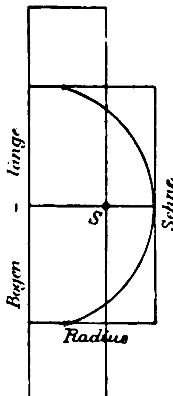
Figur 56.

derjenigen Seite der Ordinatenlinie liegen, auf der die steileren Kurventeile liegen. (Figur 56.)

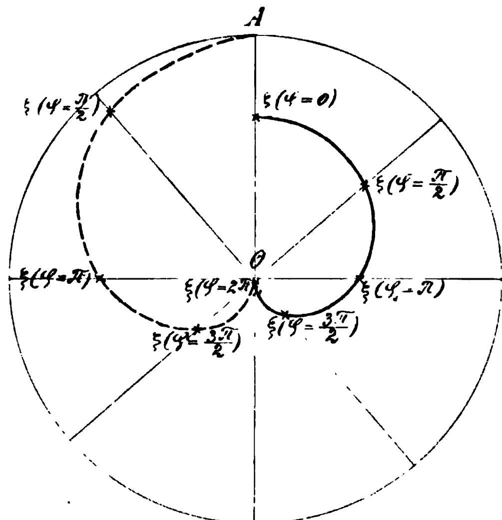
Beispiele. 1. Kreisbogen. a sei der Radius, 2σ die Sehne, φ der Zentriwinkel, die Halbierungslinie des Zentriwinkels die y-Achse und der Mittelpunkt des Kreises der Anfangspunkt der Koordinaten. Dann ist natürlich $\xi = 0$ und

$$(17) \qquad \eta = \frac{1}{s}\int_{-\sigma}^{+\sigma} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{2\sigma a}{s} \qquad \text{oder auch} \qquad = 2a\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\varphi} .$$

Der Schwerpunkt liegt also auf der Halbierungslinie des Zentriwinkels so, daß sich seine Entfernung vom Kreismittelpunkt zum Radius verhält, wie die Sehne zum Bogen.



Figur 57.



Figur 58.

Das Massenmoment des Kreisbogens, d. h. das Produkt $\varrho \cdot s \cdot \eta$, ist also gleich dem Produkt der Dichte, des Kreisradius und der zum Bogen gehörigen Sehne; die beiden Rechtecke in der Figur 57 sind also gleich groß. Speziell

[1] Man vergl. z. B. ihre Anwendung bei Stromstärken, Bd. 4. 255.

für den Halbkreis ergibt sich $\eta = 2a/\pi = 0{,}6366\,a$. (Zum Vergleich sei angeführt, daß die mittlere Ordinate des Halbkreises $0{,}785\,a$ ist.) In der Figur 58 stellt die gestrichelte Linie den Inbegriff aller Schwerpunkte von Kreisbögen dar, die sämtlich in A beginnen, nach linksherum laufen, und deren Zentriwinkel von null bis 2π zunimmt; die Kurve setzt natürlich in der Peripherie ein und endet im Zentrum; dazwischen sind die Lagen des Schwerpunktes für den Quadranten, den Halbkreis und den Dreiviertelkreis durch Kreuzchen bezeichnet.

2. Ellipsenbogen, vom Endpunkte der kleinen Achse bis zu dem Punkte von der exzentrischen Anomalie φ (Winkel zwischen der nach obengedachten kleinen Achse und dem Radius nach dem senkrecht über dem Endpunkte gelegenen Punkte des mit der großen Achse geschlagenen Kreises); Länge des Bogens s, Halbachsen a und b, $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ die numerische Exzentrizität:

$$s = a\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\,E(\varphi, k) \quad ,$$

$$s\xi = a^2\int_0^\varphi \sin\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \quad , \qquad s\eta = a^2\int_0^\varphi \cos\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

und ausgeführt:

$$(18)\quad \begin{cases} s\xi = \dfrac{a^2}{2}\left(1 - \cos\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + \dfrac{1-k^2}{k}\log\dfrac{1+k}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + k\cos\varphi}\right) \quad , \\ s\eta = \dfrac{ab}{2}\left(\sin\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + \dfrac{1}{k}\,\mathrm{arc\,sin}\,[k\sin\varphi]\right) \quad . \end{cases}$$

Speziell wird für den Quadranten

$$(19)\quad \begin{cases} s = a\,E\left(\dfrac{\pi}{2}, k\right) \quad , \qquad s\xi = \dfrac{a^2}{2}\left(1 + \dfrac{1-k^2}{k}\log\sqrt{\dfrac{1+k}{1-k}}\right) \quad , \\ s\eta = \dfrac{ab}{2}\left(\sqrt{1-k^2} + \dfrac{\mathrm{arc\,sin}\,k}{k}\right) \quad , \end{cases}$$

dagegen für die halbe Ellipse, deren Sehne die große Achse ist:

$$(20)\quad s = 2aE\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad \xi = 0\,, \quad \eta = \frac{b}{2\,\varepsilon(\pi/2,\,k)}\left(\sqrt{1-k^2} + \frac{\mathrm{arc\,sin}\,k}{k}\right)$$

und für die halbe Ellipse, deren Sehne die kleine Achse ist:

$$(21)\quad s = 2aE\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad \xi = \frac{a}{2E(\pi/2,\,k)}\left(1 + \frac{1-k^2}{k}\log\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right), \quad \eta = 0 \quad .$$

3. Kettenlinie (s. weiter unten). Es ist

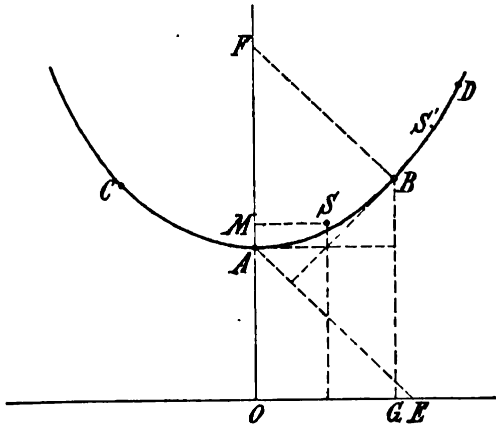
$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) \quad , \qquad s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) \quad .$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes S (Figur 59) des von $x = 0$ bis x reichenden Bogens AB finden sich

$$(22)\qquad \xi = x - \frac{k(y-k)}{s} \quad , \qquad \eta = \frac{1}{2}\left(y + \frac{kx}{s}\right) \quad ;$$

geometrisch erhält man die Abszisse durch die Erwägung, daß sie übereinstimmt mit derjenigen des Schnittpunktes der in A und B gelegten Tangenten; die Ordinate,

indem man $AE = BG$, BF parallel zu AE zieht und OF in M halbiert. Der Schwerpunkt des beiderseitigen Kettenbogens BAC hat natürlich $\xi = 0$ und η wie oben, liegt also im Punkte M. Endlich findet sich der Schwerpunkt S' des nicht vom Scheitel anfangenden Kettenbogens BD aus den Schwerpunkten $\xi_1\,\eta_1$ und $\xi_2\,\eta_2$ der Bögen AB und AD durch die Formeln



Figur 59.

$$(23)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{s_2\,\xi_2 - s_1\,\xi_1}{s_2 - s_1}\ , \\[2ex] \eta = \dfrac{s_2\,\eta_2 - s_1\,\eta_1}{s_2 - s_1}\ . \end{cases}$$

4. Zykloidenbogen. Wenn a der Radius des rollenden Kreises und w der Rollwinkel ist, mit welchem der vom Winkel 0 anfangende Bogen abschließt, so ist

$$x = a(w - \sin w)\ , \qquad y = a(1 - \cos w)\ , \qquad s = 8\,a\sin^2\frac{w}{4}\ ,$$

$$(24)\ \xi = \frac{a}{2}\,\frac{\frac{4}{3}\sin^3\frac{w}{2} - (w - \sin w)\cos\frac{w}{2}}{\sin^2\frac{w}{4}}\ , \quad \eta = a\,\frac{\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{w}{2} - 1\right)\cos\frac{w}{2} + \frac{2}{3}}{\sin^2\frac{w}{4}}\ .$$

Für die ganze Zykloide ($w = 2\pi$) ergibt sich

$$(25)\qquad \xi = a\pi\ , \qquad \eta = \tfrac{4}{3}a\ .$$

Zuweilen empfiehlt es sich, statt rechtwinkliger Polarkoordinaten einzuführen und erst von diesen ausgehend ξ und η zu berechnen, wobei angenommen wird, daß der Anfang des Polarsystems $r\vartheta$ auch der des rechtwinkeligen und die Achse des ersteren die x-Achse des letzteren sei. Für homogene Linien wird dann, wenn ϑ_0 und ϑ_1 den Endpunkten entsprechen und $dr/d\vartheta = r'$ gesetzt wird,

$$(26)\quad \begin{cases} s = \displaystyle\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\vartheta\ ,^1 \qquad \xi = \frac{1}{s}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r\sqrt{r^2 + r'^2}\cos\vartheta\,d\vartheta\ , \\[3ex] \eta = \displaystyle\frac{1}{s}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r\sqrt{r^2 + r'^2}\sin\vartheta\,d\vartheta\ . \end{cases}$$

5. Kardioide von 0 bis π.

$$(27)\qquad r = a(1 + \cos\vartheta)\ , \qquad s = 4a\ , \qquad \xi = \tfrac{4}{5}a\ , \qquad \eta = \tfrac{4}{5}a\ .$$

6. Logarithmische Spirale von 0 bis ϑ.

$$(28)\quad r = ae^{\vartheta},\quad \xi = \frac{a}{5}\,\frac{e^{2\vartheta}(2\cos\vartheta + \sin\vartheta) - 2}{e^{\vartheta} - 1}\ ,\quad \eta = \frac{a}{5}\,\frac{e^{2\vartheta}(2\sin\vartheta - \cos\vartheta) + 1}{e^{\vartheta} - 1}\ ,$$

[1] In gewissen Fällen muß, wenn zwischen ϑ_0 und ϑ_1 der Wert null liegt, vorsichtig integriert werden, am besten durch Zerlegung des Integrals in zwei Teile.

und speziell für den ersten Quadranten

(29) $$\xi = \frac{a}{5}\frac{e^{\pi}-2}{e^{\frac{\pi}{2}}-1} \quad , \quad \eta = \frac{a}{5}\frac{2e^{\pi}+1}{e^{\frac{\pi}{2}}+1} \quad .$$

Raumkurven. Als Beispiel diene die Schraubenlinie. Wenn a der Spindelradius, α der Steigungswinkel, z die Höhe des vorliegenden Stückes und abgekürzt $c = a \operatorname{tang} \alpha$ ist, so sind die gegebenen Gleichungen

$$x = a\cos\frac{z}{c} \quad , \quad y = a\sin\frac{z}{c} \quad ; \quad \text{ferner } s = \frac{z}{\sin\alpha} \quad .$$

Es ergibt sich:

(30) $$\xi = \frac{cy}{z} \quad , \quad \eta = \frac{c(a-x)}{z} \quad , \quad \zeta = \frac{1}{2}z \quad .$$

Der Schwerpunkt liegt also in der halben Höhe der Schraubenlinie, und seine beiden horizontalen Koordinaten lassen sich leicht als vierte Proportionalen konstruieren.

c) Schwerpunkt von Flächen.

Ein kleines Flächenelement ist hier

$$ds = dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad .$$

Es wird also, wenn das Gewicht der Fläche

$$\iint \varrho\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = G$$

gesetz wird,

(31) $$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{G}\iint \varrho\,x\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad , \\ \eta &= \frac{1}{G}\iint \varrho\,y\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad , \\ \zeta &= \frac{1}{G}\iint \varrho\,z\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad . \end{aligned}\right.$$

Ebene Flächen. Es ist, wie man nach Figur 60 leicht einsieht, für die Fläche $ABDC$ in rechtwinkeligen Koordinaten xy

(32) $$G = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_1}^{y_1} \varrho\,dx\,dy \quad , \quad \xi = \frac{1}{G}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\varrho x\,dx\,dy \quad , \quad \eta = \frac{1}{G}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\varrho y\,dx\,dy \quad ,$$

wo $y_0 = f_0(x)$ und $y_1 = f_1(x)$ die Gleichungen der Kurven AB und CD sind. Für konstantes ϱ, also Homogenität wird einfacher, entweder durch Spezialisierung oder auch durch direkte Ableitung, wenn der Flächeninhalt F ist,

$$F = \int_{x_0}^{x_1}(y_1 - y_0)\,dx \quad ,$$

(33) $$\xi = \frac{1}{F}\int_{x_0}^{x_1}(y_1 - y_0)\,x\,dx \quad , \quad \eta = \frac{1}{2F}\int_{x_0}^{x_1}(y_1^2 - y_0^2)\,dx \quad .$$

Wenn die Fläche durch die beiden in Polarkoordinaten gegebenen Kurven $r_0 = f_0(\vartheta)$ und $r_1 = f_1(\vartheta)$ und durch die beiden verbindenden Leitstrahlen $\vartheta = \vartheta_0$ und $\vartheta = \vartheta_1$ begrenzt ist, so findet man bei Homogenität

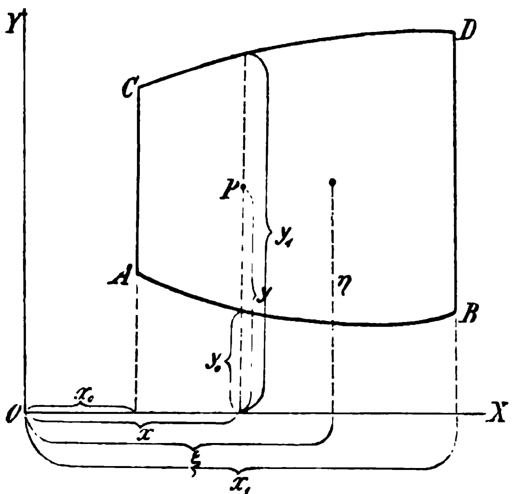
$$F = \frac{1}{2}\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (r_1^2 - r_0^2)\, d\vartheta \quad ,$$

(34) $$\xi = \frac{1}{3F}\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (r_1^3 - r_0^3)\cos\vartheta\, d\vartheta \quad , \qquad \eta = \frac{1}{3F}\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (r_1^3 - r_0^3)\sin\vartheta\, d\vartheta \quad .$$

Beispiele: 1. Um den Schwerpunkt des homogenen Dreiecks zu finden, kann man verschieden verfahren. Man betrachte z. B. eine Seite als Basis, die gegenüberliegende Ecke als Scheitel und lege durch letzteren die x-Achse senkrecht, die y-Achse parallel zur Basis. Ist alsdann h die Höhe, und sind $y = mx$, $y' = m'x$ die Gleichungen der beiden anderen Dreieckseiten, so ergibt sich

(35) $$\xi = \frac{2}{3}h \quad , \qquad \eta = \frac{(m + m')h}{3} \quad ,$$

woraus folgt, daß der Schwerpunkt des Dreiecks in demjenigen Punkte der Halbierungslinie der Basis liegt, welcher vom Scheitel doppelt so weit entfernt ist, wie von der Basis; bekanntlich schneiden sich in diesem Punkte alle drei Halbierungslinien. Es ist zugleich der Punkt, von dem aus das Dreieck durch gerade Linien nach den Ecken in drei flächengleiche Dreiecke geteilt wird. Man beachte, daß der Schwerpunkt des homogenen Dreiecks mit dem Schwerpunkte dreier gleicher, in seinen Ecken konzentrierter Massen zusammenfällt (p. 238).



Figur 60.

2. Um den Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks zu finden, zerlegt man es durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, bestimmt deren Schwerpunkt und verbindet sie; wiederholt man das Verfahren für die andere Diagonale, so erhält man den Schwerpunkt des Vierecks als Schnittpunkt der beiden Verbindungslinien. Beim Trapez vereinfacht sich das Verfahren in mancher Hinsicht; die senkrechten Abstände des Schwerpunktes von Basis und Dach, b und d, verhalten sich hier wie $\frac{1}{2}b + d$ zu $\frac{1}{2}d + b$.

3. Kreissektor vom Radius a und vom Zentriwinkel φ. Man findet für den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte (auf der Mittellinie)

(36) $$\xi = \frac{4}{3}a\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\varphi} \quad ,$$

speziell für den Halbkreis

(37) $$\xi = \frac{4}{3\pi}a = 0{,}4244\, a \quad ,$$

für den Quadranten

$$(38) \qquad \xi = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} a = 0{,}6002\, a \quad ,$$

und für einen sehr schmalen Sektor

$$(39) \qquad \xi = \tfrac{2}{3} a = 0{,}6667\, a \quad .$$

In der Figur 58 (p. 240) ist der geometrische Ort der Schwerpunkte von Kreissektoren aller möglichen Winkel durch die voll ausgezogene Kurve derart veranschaulicht, daß jeder Punkt der Kurve den Ort des Schwerpunktes desjenigen Sektors angibt, welcher in dem betreffenden Radiusvektor seine Mittellinie hat und von dem vertikal nach oben gehenden Sektor OA begrenzt wird; die Gleichung der Kurve ist demgemäß nicht die obige, sondern die nach Ersetzung von φ durch 2φ aus ihr entstehende

$$(40) \qquad \xi = \tfrac{4}{3} a \frac{\sin\varphi}{2\varphi} \quad .$$

4. Kreissegment. Hier muß man eine Differenzrechnung für den entsprechenden Sektor und das in Wegfall kommende Dreieck anstellen, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

5. Für die homogene Fläche der Parabel, begrenzt von dem vom Scheitel ausgehenden Bogen, der Achse und einer Ordinate wird sehr einfach

$$(41) \qquad \xi = \tfrac{3}{5} x \quad , \qquad \eta = \tfrac{3}{8} y \quad ,$$

also vom Parameter der Parabel gar nicht abhängig.

6. Archimedische Spirale: $r = a\vartheta$, Sektor von 0 bis $\pi/2$:

$$(42) \qquad \xi = \frac{2(\pi^3 - 24\pi + 48)}{\pi^3} a \quad , \qquad \eta = \frac{12(\pi^2 - 8)}{\pi^3} a \quad .$$

7. Logarithmische Spirale: $r = a e^{\vartheta}$; Sektor von 0 bis ϑ:

$$(43) \quad \xi = \tfrac{2}{15} a \frac{e^{3\vartheta}(3\cos\vartheta + \sin\vartheta) - 8}{e^{2\vartheta} - 1} \; , \quad \eta = \tfrac{2}{15} a \frac{e^{3\vartheta}(3\sin\vartheta - \cos\vartheta) + 1}{e^{2\vartheta} - 1} \; .$$

8. Die zwischen einem Ast der Kettenlinie und der Abszissenlinie liegende Fläche $OABG$ (Figur 59, p. 242):

$$(44) \qquad \xi = x - \frac{k(y-k)}{s} \quad , \qquad \eta = \tfrac{1}{2}\left(y + \frac{kx}{s}\right) \quad ;$$

der Schwerpunkt dieser Fläche hat also dieselbe Abszisse und die halbe Ordinate wie derjenige der Kettenlinie selbst.

Für Rotationsflächen, deren Achse die x-Achse ist, während der Radiusvektor mit r bezeichnet werden möge, ergibt sich, da der dem Bogenelement ds der Meridiankurve entsprechende ringförmige Streifen die Fläche $2\pi r\, ds$ hat, für das zwischen x_0 und x_1 liegende Stück der Rotationsfläche $G = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi r \varrho\, ds$, wo ϱ nur von x bezw. s abhängen wird; der Schwerpunkt liegt natürlich in der Achse, und es ist

$$(45) \qquad \xi = \frac{2\pi}{G} \int_{x_1}^{x_1} \varrho\, x y\, ds \quad .$$

Pappussche oder Güldinsche Regeln. Von den so bezeichneten Sätzen bezieht sich der eine auf Kurven und die daraus entstehenden Rotationsflächen,

der andere auf Ebenen und die daraus entstehenden Rotationskörper. Nach dem ersten ist der Inhalt einer Rotationsfläche gleich dem Produkt der Länge der Meridiankurve mit der Peripherie desjenigen Kreises, welchen der Schwerpunkt der homogenen Kurve bei der Rotation beschreibt. Wenn nämlich l die Kurvenlänge und r_0 der Radiusvektor des Kurvenschwerpunktes ist, so ist nach Obigem

$$l r_0 = \int_{x_0}^{x_1} r \, ds \quad ,$$

und folglich die Rotationsfläche

$$O = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} r \, ds = l \cdot 2\pi r_0 \quad .$$

Nach dem zweiten Satze ist das Volumen x_0 einer aus zwei in derselben Ebene liegenden Kurven entstehenden Rotationsfigur, die im übrigen durch die beiden zur Rotationsachse senkrechten Ebenen $x = x_0$ und $x = x_1$ begrenzt wird, gleich der ebenen Fläche zwischen jenen beiden Kurven, multipliziert mit der Peripherie des Kreises, welchen der Schwerpunkt dieser homogenen Fläche beschreibt. Es ist nämlich, wenn F diese Fläche ist, nach Obigem

$$F r_0 = \int\int r \, dx \, dr = \int (r_1^2 - r_2^2) \, dx \quad ,$$

wo r_1 und r_2 sich auf die beiden Kurven beziehen; folglich ist das Volumen V

(46) $$V = \int_{x_0}^{x_1} (\pi r_1^2 - \pi r_2^2) \, dx = 2\pi r_0 \cdot F \quad .$$

Im allgemeinen ist der betreffende Körper ringförmig; er verwandelt sich aber in einen gewöhnlichen, vollen Rotationskörper, wenn für die der Achse näher liegende der beiden Kurven die Achse selbst genommen wird.

Beispiele. 1. Kugelzone. Man findet, wenn Homogenität angenommen wird,

(47) $$\xi = \frac{x_0 + x_1}{2} \quad .$$

Der Schwerpunkt der Kugelzonenoberfläche liegt also im Mittelpunkte ihrer Achse.

2. Kettenkonoid, homogene, durch Rotation der Kettenlinie

$$x = \tfrac{1}{2} k (e^{r/k} + e^{-r/k})$$

um die x-Achse entstehende Fläche. Wenn s der Bogen und x, r die Koordinaten seines Endpunktes sind, so findet man

(48) $$\xi = \frac{1}{4} \, \frac{2 s r x - k(s^2 - r^2)}{s r - k(x - k)} \quad ,$$

als Abstand des auf der Achse liegenden Schwerpunktes vom Anfangspunkt der Koordinaten.

d) Schwerpunkt von Körpern.

Die allgemeinen Formeln lauten hier ganz analog den früheren, wenn G das Gewicht und V das Volumen des Körpers ist:

$$G = \int\int\int \varrho \, dx \, dy \, dz \quad ,$$

(49) $$\xi = \frac{1}{G} \int\int\int \varrho x \, dx \, dy \, dz \, , \quad \eta = \frac{1}{G} \int\int\int \varrho y \, dx \, dy \, dz \, , \quad \zeta = \frac{1}{G} \int\int\int \varrho z \, dx \, dy \, dz$$

und, wenn der Körper homogen ist,

$$(50)\quad \begin{cases} V = \iiint dx\,dy\,dz\,, \quad \xi = \frac{1}{V}\iiint x\,dx\,dy\,dz\,, \quad \eta = \frac{1}{V}\iiint dy\,dx\,dy\,dz \\ \zeta = \frac{1}{V}\iiint z\,dx\,dy\,dz \quad ; \end{cases}$$

wo man die Integration nach z auch ausführen kann, so daß man, wenn x_0, x_1, y_0 und y_1, z_0 und z_1 die Grenzen sind, erhält:

$$V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\,dx\,dy \quad .$$

$$(51)\quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{V}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} x(z_1 - z_0)\,dx\,dy \quad , \quad \eta = \frac{1}{V}\int_{y_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} y(z_1 - z_0)\,dx\,dy \quad , \\ \zeta = \frac{1}{V}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (z_1^2 - z_0^2)\,dx\,dy \quad . \end{cases}$$

Speziell bei Rotationskörpern (x-Achse) wird natürlich $\eta = 0$ und $\zeta = 0$, und

$$(52)\qquad G = \pi\int_{x_0}^{x_1} \varrho\, y^2\,dx \quad , \qquad \xi = \frac{\pi}{G}\int_{x_0}^{x_1} \varrho\, xy^2\,dx \quad .$$

In Polarkoordinaten $r\varphi\psi$ nehmen die allgemeinen Gleichungen folgende Gestalt an:

$$G = \iiint \varrho\, r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi \quad .$$

$$(53)\quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{G}\iiint \varrho r^3 \sin\varphi\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi, \quad \eta = \frac{1}{G}\iiint \varrho r^3 \sin^2\varphi\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi \quad , \\ \zeta = \frac{1}{G}\iiint \varrho\, r^3 \sin^2\varphi \sin\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi \quad , \end{cases}$$

und speziell für homogene Körper

$$V = \tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^3 - r_0^3)\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi \quad ,$$

$$(54)\quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{4V}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^4 - r_0^4)\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi, \quad \eta = \frac{1}{4V}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^4 - r_0^4)\sin^2\varphi\cos\psi\,d\varphi\,d\psi, \\ \zeta = \frac{1}{4V}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^4 - r_0^4)\sin^2\varphi\sin\psi\,d\varphi\,d\psi \quad . \end{cases}$$

Beispiele. 1. Parallelschicht eines dreiachsigen Ellipsoids. Dieselbe sei homogen, senkrecht auf der x-Achse und reiche von x_0 bis x_1. Man

findet für die Entfernung des natürlich auf der Achse gelegenen Schwerpunktes vom Mittelpunkt des Ellipsoides, wenn a die entsprechende Halbachse ist:

(55) $$\xi = \frac{3}{4} \frac{x_1^4 - x_0^4 + 2a^2(x_0^2 - x_1^2)}{x_1^3 - x_0^3 + 3a^2(x_0 - x_1)} \quad ;$$

Die beiden anderen Halbachsen kommen also gar nicht vor. Für das ganze Halbellipsoid ($x_0 = 0$, $x_1 = a$) ergibt sich hiernach

(56) $$\xi = \tfrac{3}{8} a \quad .$$

2. Kugelsektor vom Radius a und vom Zentriwinkel φ. Der Schwerpunkt liegt auf der Mittellinie und vom Kugelmittelpunkt um

(57) $$\xi = \tfrac{3}{4} a \cos^2 \frac{\varphi}{4}$$

und speziell
(58) bei einem sehr schmalen Sektor um $\xi = \tfrac{3}{4} a$,[1]
(59) bei der Halbkugel um $\xi = \tfrac{3}{8} a$

entfernt.

3. Halber Kugelkeil vom Kugelradius a und vom Flächenwinkel γ. Wird die Schnittlinie der beiden Meridianebenen zur x-Achse, die Äquatorebene zur yz-Ebene genommen, so ergibt sich

(60) $$\xi = \tfrac{3}{8} a \quad , \qquad \eta = \tfrac{3}{8} \pi \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\gamma} a \quad , \qquad \zeta = \tfrac{3}{16} \pi \frac{\sin \gamma}{\gamma} a \quad ,$$

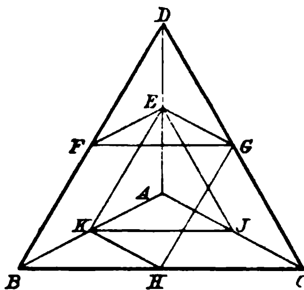
speziell für den Kugeloktanten

(61) $$\xi = \eta = \zeta = \tfrac{3}{8} a \quad .$$

4. Beim homogenen dreiseitigen Prisma liegt der Massenmittelpunkt im Massenmittelpunkte des Mittelquerschnittes.

5. Beim Parallepipedon liegt der Massenmittelpunkt natürlich im geometrischen Mittelpunkt; er ist zugleich der Massenmittelpunkt der acht, mit gleicher Masse ausgestatteten Ecken.

6. Um den Massenmittelpunkt des homogenen Tetraeders zu finden, zerlegt man es, wie die Figur andeutet, durch geeignete Medianflächen EFG, EKJ, $EGHK$ in zwei dreiseitige Prismen und zwei kleine Tetraeder, deren letzterer jedes $^1/_8$, deren ersterer jedes $^3/_8$ des ganzen Tetraeders ausmacht; die Schwerpunkte dieser vier Körper kombiniert man dann zu dem gesuchten. Für die Abstände von einer beliebigen Ebene, die als yz-Ebene diene, findet sich



Figur 61.

(62) $$\xi = \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad ;$$

läßt man die Ebene mit einer Tetraederfläche zusammenfallen, so sieht man ein, daß der Schwerpunkt in $^1/_4$ der zugehörigen Höhe von dieser Fläche absteht; legt man sie durch eine Kante und die Mitte der Gegenkante, so wird $\xi = 0$, der Schwerpunkt liegt also in der Verbindungslinie der Mitten je zweier Gegenkanten; er ist somit der

[1] Man vergleiche dies mit dem Schwerpunkte einer Linie und eines sehr schmalen Dreiecks oder Sektors [Gleichung (39)]; dem Ende bezw. der Peripherie liegt der Schwerpunkt bei der Linie einmal, bei der schmalen Fläche zweimal, bei dem schmalen Körper dreimal so nahe wie dem Anfang bezw. Zentrum, ganz wie dies der Dimensionenzahl dieser Gebilde entspricht.

Mittelpunkt des Parallelogramms *EGHK*. Er ist zugleich der Punkt, von dem aus man durch Ebenen, die durch die Kanten gehen, das Tetraeder in vier gleich große Teiltetraeder zerlegen kann.

Die meisten der angeführten Methoden und Beziehungen sind von POINSOT und MÖBIUS angegeben worden. Die Eigenschaft, durch die Eckpunkte in bezug auf den Schwerpunkt ersetzt werden zu können, haben übrigens nur sehr wenige ebenflächig und geradlinig begrenzte Körper.

7. Beim Kugelsegment vom Radius a und der Höhe h findet man:

(63) $$\xi = \frac{3}{4}\,\frac{(2a-h)^2}{3a-h} \quad .$$

8. Für den parallel abgeschnittenen Kreiskegel wird, wenn h und h' die Abstände der beiden Endflächen von der idealen Spitze sind,

(64) $$\xi = \frac{3}{4}\,\frac{h^4 - h'^4}{h^3 - h'^3} \quad .$$

e) Schwerpunkt zusammengesetzter Körper.

Bei zusammengesetzten Körpern wird man naturgemäß zunächst die Schwerpunkte der einzelnen Teile bilden und aus diesen dann den gemeinsamen Schwerpunkt ableiten; auch bei einfachen Körpern ist dieses indirekte Verfahren nicht selten angezeigt. Allgemeines läßt sich hierüber nicht viel sagen.

Dagegen handelt es sich häufig um den Schwerpunkt zusammengesetzter Körper, deren Teile nicht starr, sondern beweglich miteinander verbunden sind, und bei denen die Lage des Hauptschwerpunktes natürlich in jeder Konfiguration eine andere ist. Hierher gehören z. B. die zusammengesetzten Mechanismen, namentlich die Gelenksysteme. Bei solchen Körpern, bei denen die Konfigurationsänderung nur in ganz bestimmter Weise erfolgen kann, lassen sich begreiflicherweise auch allgemeine Beziehungen zwischen den Lagen der Schwerpunkte bei den verschiedenen Konfigurationen, sowie Regeln für ihre Bestimmung angeben. Es sei hierfür u. a. auf einige Arbeiten von O. FISCHER[1] hingewiesen, in denen mit Hilfe der Begriffe „Hauptpunkt" und „Hauptstrecke" allgemeine Regeln für den Schwerpunkt von Gelenksystemen angegeben sind.

Das quadratische oder Trägheitsmoment.

Wenn man die Masse eines Punktes, statt mit der Entfernung, mit dem Quadrat seiner Entfernung von einem gegebenen Pole multipliziert, erhält man das quadratische polare Moment des Punktes in bezug auf den Pol; die Summe solcher Produkte für alle Punkte des Systems bezw. das Integral über einen kontinuierlichen Körper heißt dessen quadratisches polares Moment. Es hat sich dafür der nicht eben glücklich gewählte Name Trägheitsmoment eingebürgert, er soll daher auch im folgenden benutzt werden. Statt die Abstände von einem Pole, kann man auch die Abstände von einer Achse nehmen und erhält dann das axiale quadratische oder Trägheitsmoment; endlich für die Abstände von einer Ebene das planare quadratische oder Trägheitsmoment. Im Gegensatz zu den Verhältnissen beim linearen Moment ist aber hier, wie gleich im voraus bemerkt sei, das axiale Moment für die Praxis am wichtigsten; es wird auch von manchen Autoren allein mit dem Namen „Träg-

[1] OTTO FISCHER, Katalog math. Modelle (Nachtrag). München 1893. p. 100.

heitsmoment" versehen, und es werden andere Ausdrücke für die anderen Größen vorgeschlagen.

Nennt man die Abstände von einem Pole, einer Achse und einer Ebene in entsprechender Reihenfolge l, r, x, so hat man folgende Formeln:

für einen einzelnen Massenpunkt:

$$(65) \qquad K(l) = m\,l^2 \quad , \qquad K(r) = m\,r^2 \quad , \qquad K(x) = m\,x^2 \quad ;$$

für ein Massensystem:

$$(66) \qquad K(l) = \sum m_i l_i^2 \quad , \qquad K(r) = \sum m_i r_i^2 \quad , \qquad K(x) = \sum m_i x_i^2 \quad ;$$

endlich für einen kontinuierlichen Körper:

$$(67) \qquad K(l) = \int l^2 dm \quad , \qquad K(r) = \int r^2 dm \quad , \qquad K(x) = \sum x^2 dm \quad .$$

Das polare Trägheitsmoment variiert natürlich mit der Lage des Poles, das axiale mit Lage und Richtung der Achse, das planare mit Lage und Richtung der Ebene. Faßt man drei zueinander senkrechte Achsen und die zugehörigen Ebenen ins Auge und nimmt sie zu Koordinatenachsen bezw. -ebenen, so hat man offenbar die Ausdrücke:

$$(68) \text{ axial: } K_{y,z} = \sum m(y^2 + z^2),\; K_{z,x} = \sum m(z^2 + x^2),\; K_{x,y} = \sum m(x^2 + y^2) \quad ,$$

$$(69) \text{ planar: } K_x = \sum m x^2 \quad , \qquad K_y = \sum m y^2 \quad , \qquad K_z = \sum m z^2 \quad ,$$

woraus sich durch Vergleich ergibt:

$$(70) \qquad K_{y,z} = K_y + K_z \quad , \qquad K_{z,x} = K_z + K_x \quad , \qquad K_{x,y} = K_x + K_y \quad .$$

Das Trägheitsmoment für irgend eine Achse ist also gleich der Summe der Trägheitsmomente in bezug auf irgend zwei, durch die Achse senkrecht zueinander gelegte Ebenen. Ebenso findet man eine entsprechende Beziehung zu dem polaren Moment. Es ist nämlich

$$(71) \qquad \begin{cases} K_l = \sum m(x^2 + y^2 + z^2) \\ \quad = K_x + K_y + K_z = \tfrac{1}{2}(K_{y,z} + K_{z,x} + K_{x,y}) \quad ; \end{cases}$$

das Trägheitsmoment in bezug auf irgend einen Pol ist also gleich der Summe der Trägheitsmomente in bezug auf irgend drei durch ihn gelegte, zueinander senkrechte Ebenen, sowie gleich der halben Summe der Trägheitsmomente in bezug auf irgend drei durch den Pol gelegte, zueinander senkrechte Achsen. Endlich sei der interessante, sofort ableitbare Satz angeführt, daß das Trägheitsmoment für irgend eine Ebene gleich der Differenz der Trägheitsmomente in bezug auf irgend einen Punkt der Ebene und in bezug auf die in diesem Punkte auf ihr errichtete Normale ist.

Ermittelt man aus den Gleichungen

$$(72) \qquad M \cdot L^2 = \sum m_i l_i^2 \quad , \qquad M \cdot R^2 = \sum m_i r_i^2 \quad , \qquad M \cdot S^2 = \sum m_i s_i^2$$

die Größen L, R, S, so erhält man das, was man als polaren, axialen, planaren Trägheitsradius bezeichnet; zuweilen benutzt man auch den Ausdruck Gyrationsradius (und entsprechend Gyrationsmoment); der Trägheitsradius ist hiernach das durch die Gesamtmasse dividierte Trägheitsmoment. Der polare Trägheitsradius ist der Radius einer Kugel um den Pol, der axiale ist der Radius eines Kreiszylinders um die Achse, der planare ist der Abstand von der Bezugsebene und heißt daher auch wohl Trägheitsabstand oder Trägheitsarm. In Hinsicht auf das polare Trägheitsmoment kann man einen Körper durch irgend einen mit seiner ganzen Masse begabten Punkt jener Kugelfläche oder auch durch diese ganze Kugelfläche, über die die Gesamtmasse verteilt ist, ersetzt denken; hinsichtlich des axialen Trägheitsmoments spielt diese Vertretungsrolle irgend ein

Punkt jenes Zylinders oder dieser als solcher; hinsichtlich des planaren irgend ein Punkt der zur Bezugsebene im Trägheitsabstand parallelen Ebene oder diese als solche. — Umgekehrt kann man sich den Körper auch durch einen Punkt im beliebigem Abstand von dem Pole, der Achse oder Ebene repräsentiert denken, wenn man in ihm nur eine geeignete Masse konzentriert denkt; wählt man z. B. einen Punkt im Abstand eins, so muß man ihm die Masse K beilegen, d. h. das Trägheitsmoment eines Körpers ist die Masse, die ihn im Abstand eins von dem Bezugsgebilde ersetzt.

Das Trägheitsmoment eines Körpers steht in einer sehr wichtigen und bedeutsamen Beziehung zu seinem Schwerpunkte. Es ist nämlich zunächst offenbar sehr leicht, von dem Trägheitsmoment in bezug auf einen gegebenen Pol zu dem in bezug auf einen anderen Pol überzugehen; die betreffenden Formeln bieten im allgemeinen nichts besonderes dar. Wenn aber der neue Pol der Schwerpunkt ist, wenn r_0 die Entfernung eines Systempunktes von ihm, R aber die Entfernung des Schwerpunktes vom ersten Pole ist, so erhält man infolge der mit dem Begriffe des Schwerpunktes verknüpften Vereinfachung:

$$\sum m r^2 = M \cdot R^2 + \sum m r_0^2 \quad , \tag{73}$$

in Worten: das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf irgend einen Pol ist gleich dem Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf den Schwerpunkt, vermehrt um das Trägheitsmoment der im Schwerpunkte konzentriert gedachten Gesamtmasse in bezug auf jenen Pol. Hieraus folgt aber, daß das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf den Schwerpunkt am kleinsten und desto größer ist, je weiter der Pol vom Schwerpunkte entfernt ist. Dabei ist das polare Trägheitsmoment für alle Pole auf einer um den Schwerpunkt als Mittelpunkt geschlagenen Kugel, das axiale für alle Geraden eines Zylinders um eine durch ihn gehende Achse gleich groß.

Es bleibt nur noch übrig, die Trägheitsmomente zu vergleichen in bezug auf Achsen oder Ebenen von verschiedener Richtung. Eine Achse habe die Richtungskosinus α, β, γ, dann findet sich für sie:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum m r^2 = {} & \alpha^2 \sum m (y^2 + z^2) + \beta^2 \sum m (z^2 + x^2) + \gamma^2 \sum m (x^2 + y^2) \\ & - 2 \beta \gamma \sum m y z - 2 \gamma \alpha \sum m z x - 2 \alpha \beta \sum m x y \quad , \end{aligned} \right. \tag{74}$$

wofür man, wenn man

$$\left\{ \begin{aligned} \sum m (y^2 + z^2) &= A \quad , & \sum m y z &= D \quad , \\ \sum m (z^2 + x^2) &= B \quad , & \sum m z x &= E \quad , \\ \sum m (x^2 + y^2) &= C \quad , & \sum m x y &= F \end{aligned} \right. \tag{75}$$

setzt, schreiben kann:

$$\sum m r^2 = A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 - 2 D \beta \gamma - 2 E \gamma \alpha - 2 F \alpha \beta \quad . \tag{76}$$

Die drei Größen A, B, C sind, wie man sieht, die Trägheitsmomente in bezug auf die Koordinatenachsen, sie sind — da wir hier nur positive Massen betrachten — stets positiv; dagegen können die Größen D, E, F positiv oder negativ sein; man nennt sie nach RANKINE Deviationsmomente, nach CULMAN Zentrifugalmomente; der erstere Ausdruck ist üblich geworden; zuweilen spricht man auch von Trägheitsprodukten. Offenbar ist das Deviationsmoment eines Körpers auf zwei zueinander senkrechte (event. auch schiefe) Ebenen oder Achsen zu beziehen, und zwar ist es die Summe aller Produkte der Einzelmassen in die Produkte ihrer Abstände von jenen Ebenen oder Achsen.

Es sei bemerkt, daß man Trägheitsmoment und Deviationsmoment noch in etwas anderer Weise einander gegenüberstellen und alsdann zu einer neuen Größe, ihrer Resultante, dem resultierenden Massenmoment kombinieren kann, wie das

FINGER getan hat; für einen einzelnen Punkt kann nämlich, wenn jetzt r seine Entfernung von einem beliebigen Punkte der Achse, auf die bezogen werden soll, und u der Winkel zwischen r und der Achse ist, das Trägheitsmoment gleich $m r^2 \sin^2 u$, das Deviationsmoment gleich $m r^2 \sin u \cos u$ und somit das resultierende Moment gleich $m r^2 \sin u$ setzen, wobei die drei entsprechenden Richtungen die der Achse, des Lotes und der Entfernung r sind. Es lassen sich nun hieran interessante Betrachtungen anknüpfen, hinsichtlich deren auf die Arbeiten des genannten Forschers verwiesen werden muß. — Nach dieser Abschweifung kehren wir zum Hauptthema zurück.

Betrachtet man jetzt entsprechend das Trägheitsmoment in bezug auf eine Ebene, deren Normale die Richtungskosinus α, β, γ hat, und setzt man die Trägheitsmomente in bezug auf die Koordinatenebenen

(77) $$\sum m x^2 = A' \quad , \qquad \sum m y^2 = B' \quad , \qquad \sum m z^2 = C' \quad ,$$

so findet man, wenn s der Abstand eines Punktes von jener Ebene ist:

(78) $$\sum m s^2 = A' \alpha^2 + B' \beta^2 + C' \gamma^2 + 2 D \beta \gamma + 2 E \gamma \alpha + 2 F \alpha \beta \quad ,$$

also einen ähnlichen Ausdruck wie vorhin, aber mit anderen Koeffizienten der Quadrate und mit entgegengesetzten Koeffizienten der doppelten Produkte.

Es ist nun leicht einzusehen, wie man diese Formeln vereinfachen kann. Denn beide stellen, geometrisch interpretiert, Flächen zweiten Grades dar, und zwar bei mechanischen Massensystemen Ellipsoide (bei magnetischen, wie beiläufig angeführt sei, dagegen Paraboloide); wählt man nun die Achsen der Ellipsoide zu Koordinatenachsen, so fallen die Deviationsglieder weg, und man erhält einfach:

(79) axial: $$\sum m r^2 = A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 \quad ,$$

(80) planar: $$\sum m s^2 = A' \alpha^2 + B' \beta^2 + C' \gamma^2 \quad .$$

Statt der Richtungskosinus kann man nun auch die Koordinaten x, y, z einführen und die Lineardimensionen passend wählen, so daß man erhält:

(81) axial: $$\sum A x^2 + B y^2 + C z^2 = 1 \quad ,$$

(82) planar: $$\sum A' x^2 + B' y^2 + C' z^2 = 1 \quad .$$

Man nennt die hierdurch dargestellte Oberfläche das Trägheitsellpsoid, und zwar die erste das axiale, die zweite das planare; auch andere Bezeichnungen, mit Benutzung der Namen von Autoren, die sich damit beschäftigt haben, sind zum Teil in Gebrauch. Die Achsen des Ellipsoids nennt man die Hauptträgheitsachsen, die ihnen entsprechenden Momente die Hauptträgheitsmomente. Man erhält somit den Satz: Die Trägheitsmomente für alle durch einen Punkt des Körpers gehenden Achsen sind durch die Momente für drei zueinander senkrechte Achsen vollkommen bestimmt; von diesen Hauptträgheitsmomenten ist eines das größte, ein anderes das kleinste von allen, das dritte ist das größte für einen Hauptschnitt, das kleinste für den dazu senkrechten Schnitt. Diese drei Momente sind darstellbar als die reziproken Quadrate der Halbachsen eines Ellipsoids, des Trägheitsellipsoids; und das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse ist dann gleich dem reziproken Quadrate des betreffenden Radiusvektors. Geht man von dem Körperpunkte zu einem anderen über, so erhält man auch ein anderes Ellipsoid, mit anderen Richtungen und Größen der Halbachsen. Am größten werden die Halbachsen, also die Momente am kleinsten für den Schwerpunkt als Mittelpunkt; man bezeichnet dies als Zentralträgheitsellipsoid oder auch kurz als Zentralellipsoid, die Achsen als Hauptzentralachsen.

Durch etwas andere Wahl der Konstanten bezw. Lineardimension kann man an Stelle der Trägheitsmomente auch die Trägheitsradien einführen; nennt man die Trägheitsradien axial a, b, c, planar a', b', c', so findet man:

$$(83)\quad \begin{cases} a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1 \quad , \\ a'^2x^2 + b'^2y^2 + c'^2z^2 = 1 \quad ; \end{cases}$$

die Trägheitsradien in beliebigen Richtungen sind dann die reziproken Werte der betreffenden Radienvektoren.

Zwischen dem axialen und dem planaren Trägheitsellipsoid bestehen naheliegende Beziehungen; es kann jedoch hierauf ebensowenig eingegangen werden, wie auf ein zweites Paar von Ellipsoiden, die das Verhalten des Körpers in etwas anderer Weise, nämlich durch die direkten (also nicht reziproken) Radienvektoren als Trägheitsradien darstellen, so daß jedem Körperpunkte vier Ellipsoide zugeordnet sind; man kann sie übersichtlich in den Formen

(84)

	reziprok	direkt
axial	$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$	$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$
planar	$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1$	$\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = 1$

zusammenstellen und findet sie der Reihe nach als CAUCHY-POINSOTsches, BINETsches, MACCULLAGHsches und CULMANsches Trägheitsellipsoid zitiert.

Aus der ellipsoidischen Natur der Trägheitsfläche fließt eine große Reihe von allgemeinen Sätzen, von denen hier nur folgende angeführt seien: 1. Die Summe der Trägheitsmomente für drei beliebige, zueinander senkrechte Achsen durch denselben Punkt ist für alle solche Tripel gleich groß, nämlich gleich der Summe der drei Hauptträgheitsmomente. 2. Dagegen ist die Summe der reziproken Momente konstant für drei zueinander in bezug auf das Ellipsoid konjugierte Achsen durch einen Punkt, nämlich wieder gleich der Summe der reziproken Werte der drei Hauptträgheitsmomente. 3. Der Ort aller Achsen durch einen Punkt, die gleiche Trägheitsmomente des Körpers liefern, ist derjenige Kegel zweiten Grades, der mit dem Trägheitsellipsoid für den Punkt gemeinsame Hauptachsen hat. 4. Satz von BINET: Irgend drei Achsen durch einen Punkt, für die die Deviationsmomente verschwinden, sind konjugierte Durchmesser des BINETschen (planaren) Trägheitsellipsoids. — Diesen Satz hat später SOMOW weiter entwickelt. — 5. Der Ähnlichkeitssatz: Sind zwei homogene Gebilde einander ähnlich im Linearverhältnis c, so ist das Verhältnis ihrer Trägheitsmomente in bezug auf ähnlich liegende Achsen c^3 oder c^4 oder c^5, je nachdem die Gebilde ein-, zwei- oder dreidimensional sind.

Spezialfälle sind solche, in denen entweder ein oder zwei der Hauptmomente unendlich klein werden — ein Fall, der nur bei zwei- bezw. eindimensionalen Körpern eintreten wird — sowie der Fall, daß zwei oder alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich werden; das Ellipsoid wird dann zum Rotationsellipsoid bezw. sogar zur Kugel, und es werden alsdann alle Momente in bezug auf Achsen in der betreffenden Ebene bezw. überhaupt sämtliche Momente einander gleich. Dabei sei gleich hier bemerkt, daß der Geltungsbereich der Trägheitskugel weiter ist, als man zunächst wohl annehmen dürfte. Es hat nämlich von homogenen Körpern nicht bloß die Kugel, sondern auch jeder der fünf regulären Polyeder — Würfel, Oktaeder, Tetraeder, Ikosaeder, Pentagondodekaeder — als Zentralträgheitsellipsoid eine Kugel.

Es bietet sich nun die Aufgabe dar, für die verschiedenen ein-, zwei- und dreidimensionalen Gebilde die gesamte „Trägheitskonfiguration", d. h. Lage und Gestalt des Ellipsoids für alle Punkte, insbesondere natürlich das Zentralträgheitsellipsoid und damit auch die Trägheitsmomente und Trägheitsradien für

verschiedene Achsen — Pole und Ebenen spielen keine erhebliche Rolle — zu bestimmen. Von den Resultaten kann hier nur das wichtigste herausgegriffen werden. Die Berechnungen sind zum Teil sehr verwickelt, können aber mit Hilfe der oben angeführten und anderer allgemeiner Sätze oft wesentlich vereinfacht werden.

Eine gute Übersicht über die dabei anzuwendenden Methoden findet man in einer Dissertation von J. VAN RYN; es sind im wesentlichen folgende Methoden: a) Integration, b) Differentiation, c) HUYGHENSsche Methode, d) mittels Symmetrieflächen, e) Methode für Rotationskörper, f) Methode von TOWNSEND, g) Methode bei ähnlichen Figuren, h) mittels konjugierter Durchmesser, i) Inversionsmethode. Die Integrationsmethode ist natürlich die allgemeinste, aber jede der anderen bietet in bestimmten Fällen Vorteile und liefert außerdem noch gewisse Nebenbestimmungen. Auch über die Trägheitsprodukte und die äquivalenten Massen findet man in der Schrift wichtige Angaben.

a) Linien.

Für ebene Kurven von konstantem Querschnitt q und konstanter Dichte ϱ findet man, wenn $y = f(x)$ und hieraus $dy/dx = y$ gegeben ist:

(85) $$K_x = q\varrho\int_{x_0}^{x_1} y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad K_y = q\varrho\int_{x_0}^{x_1} x^2\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad ,$$

oder für Polarkoordinaten ($r = \varphi[\vartheta]$):

(86) $$K_x = q\varrho\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r^2\sqrt{r^2+r'^2}\sin^2\vartheta\,d\vartheta\ , \qquad K_y = q\varrho\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r^2\sqrt{r^2+r'^2}\cos^2\vartheta\,d\vartheta \quad .$$

Für eine mit der Drehungsachse in einer Ebene gelegene und gegen diese um den Winkel α geneigte Gerade von der Länge l und der Masse m erhält man z. B., wenn ihr Anfangspunkt um c von der Achse absteht:

(87) $$K = \frac{m}{3}(3c^2 + 3cl\sin\alpha + l^2\sin^2\alpha) \quad ;$$

geht die Achse durch den Anfangspunkt der Geraden, so wird

(88) $$K = \tfrac{1}{3} m l^2 \sin^2\alpha \quad ;$$

geht sie durch den Schwerpunkt der Geraden

(89) $$K = \tfrac{1}{12} m l^2 \sin^2\alpha \quad ;$$

der Trägheitshalbmesser ist im ersten Falle $h = \frac{1}{3} l\sqrt{3}\sin\alpha$, im zweiten dagegen $h = \frac{1}{6} l\sqrt{3}\sin\alpha$; das Zentralellipsoid ist ein Kreiszylinder mit l als Achse. Steht die Achse auf der Linie senkrecht, so wird:

(90) $$K = \tfrac{1}{12} m l^2 \quad , \qquad h = \frac{l}{6}\sqrt{3} \quad .$$

Als Beispiel für die Ausdrücke in Polarkoordinaten diene der Kreisbogen vom Radius a und vom Zentriwinkel γ. Das Trägheitsmoment desselben in bezug auf einen Durchmesser OX, welcher durch den Anfang des Bogens hindurchgeht, ist:

(91) $$K_x = \tfrac{1}{2} q\varrho a^3(\gamma - \sin\gamma\cos\gamma) \quad ,$$

dasjenige für einen hierzu senkrechten Durchmesser OY:

(92) $$K_y = \tfrac{1}{2} q\varrho a^3(\gamma + \sin\gamma\cos\gamma) \quad ;$$

endlich findet sich für die ganze Kreisperipherie für irgend einen Durchmesser als Achse

(93) $$K = \pi q \varrho a^3 = \tfrac{1}{2} m a^2 \quad , \qquad h = \frac{a}{2}\sqrt{2} \quad .$$

Handelt es sich um Raumkurven, welche durch ihre Horizontal- und Vertikalprojektionen $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$ gegeben sind, bei $x = a$ anfangen und bis $x = b$ reichen, so ergibt sich

(94) $$\left\{\begin{aligned} K_x &= q\varrho\int_a^b (y^2 + z^2)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx \quad , \\ K_y &= q\varrho\int_a^b (z^2 + x^2)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx \quad , \\ K_z &= q\varrho\int_a^b (x^2 + y^2)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx \quad . \end{aligned}\right.$$

Für eine mit der Drehungsachse nicht in derselben Ebene liegende Gerade z. B. ergibt sich, wenn l die Länge der Linie, α und β ihre Winkel mit der x-Achse und y-Achse, von denen erstere die Drehungsachse sei, und endlich b der Abstand des Anfangspunktes der Geraden von der Drehungsachse ist:

(95) $$K_x = \frac{m}{3}(l^2 \sin^2\alpha + 3\,b\,l\cos\beta + 3\,b^2) \quad .$$

b) **Flächen.**

Für das Parallelogramm mit den Seiten a und b und der Masse m ergibt sich das Trägheitsmoment um eine beliebige Schwerpunktsachse, wenn p und q die senkrechten Abstände zweier Nachbarecken von der Achse sind:

(96) $$K = \tfrac{1}{6} m (p^2 + q^2) \quad ;$$

am größten, nämlich

(97) $$K = \tfrac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

wird es, wenn die Achse auf der Ebene des Parallelogramms senkrecht steht; ist die Achse mit der Seite b parallel, und bedeutet α den Winkel des Parallelogramms, so wird:

(98) $$K = \tfrac{1}{2} \cdot a^2 \sin^2\alpha \quad .$$

Die Hauptzentralachsen des Parallelogramms sind die Achsen der ihm eingeschriebenen Ellipse; sie liegen also schief gegen die Seiten; beim Rhombus insbesondere fallen sie in die Diagonalen.

Das Trägheitsmoment einer Dreiecksfläche in bezug auf eine beliebige Schwerpunktsachse läßt sich am einfachsten durch die Projektionen der Seiten a, b, c auf eine zur Achse senkrechte Ebene ausdrücken; sind diese Projektionen α, β, γ, so erhält man nämlich:

(99) $$K = \frac{m}{36}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad ;$$

steht die Achse auf der Dreiecksebene senkrecht, so wird offenbar:

(100) $$K = \frac{m}{36}(a^2 + b^2 + c^2) \quad ;$$

liegt sie in ihr, so kann man die dritte Projektion durch die beiden ersten ausdrücken und erhält:

(101) $$K = \frac{m}{18}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \quad .$$

Für beliebige Lage der Schwerpunktachse gilt übrigens der von REYE aufgestellte und nach ihm benannte Satz: Das Trägheitsmoment einer Dreiecksfläche ist gleich dem der drei Seitenmitten, wenn jede von ihnen den dritten Teil der Dreiecksmasse enthält. — Endlich sei noch das Trägheitsmoment um eine durch die dritte Ecke gehende, in der Dreiecksebene gelegene Achse angeführt:

(102) $$K = \frac{m}{6}(a^2 + ab + b^2) \quad .$$

Die Hauptzentralachsen finden sich, wenn die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Schwerpunkte mit p, die halbe Gegenseite mit q bezeichnet wird, als die Achsen der durch die Dreiecksecken gehenden Ellipse:

(103) $$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}q^2} = 1 \quad .$$

Den REYEschen Satz kann man übrigens nach verschiedenen Richtungen hin erweitern und auf das Trägheitsmoment des Stabes, des Rechtecks sowie beliebiger Polygone ausdehnen. So findet man u. a. folgende Sätze: Verteilt man den dritten Teil der Masse eines homogenen Stabes gleichmäßig auf die beiden Endpunkte, den vierten Teil der Masse eines homogenen Dreiecks gleichmäßig auf die Ecken, den fünften Teil der Masse eines homogenen Tetraeders gleichmäßig auf die Ecken und bringt den Rest im Schwerpunkt an, so hat das jedesmal entstandene System für jede beliebige Ebene oder Achse dasselbe Trägheitsmoment wie die gegebene Anordnung.

Allgemein wird für ebene Flächen, von der Dicke δ und der Dichte ϱ, begrenzt durch die Ordinaten x_0 und x_1 und die Kurven $y_1 = f_1(x)$ und $y_0 = f_0(x)$:

(104) $$K_x = \tfrac{1}{3}\delta\varrho\int_{x_0}^{x_1}(y_1^3 - y_0^3)\,dx \quad , \qquad K_y = \delta\varrho\int_{x_0}^{x_1}(y - y_0)\,x^2\,dx \quad .$$

Beispielsweise sind die Trägheitsmomente eines elliptischen Ringes in bezug auf seine Achsen, wenn a und b die inneren, a_1 und b_1 die äußeren Halbachsen sind:

(105) $$K_a = \tfrac{1}{4}\pi\delta\varrho(a_1 b_1^3 - ab^3) \quad , \qquad K_b = \tfrac{1}{4}\pi\delta\varrho(a_1^3 b_1 - a^3 b) \quad ,$$

und speziell für den Kreisring in bezug auf irgend einen Durchmesser

(106) $$K = \tfrac{1}{4}\pi\delta\varrho(r_1^4 - r^4) \quad , \qquad h = \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 + r_1^2} \quad ;$$

durch Fortlassung der negativen Glieder in diesen Formeln erhält man die Trägheitsmomente voller Ellipsen bezw. Kreisflächen.

Das Trägheitsmoment der oben definierten ebenen Fläche in bezug auf die zu ihr senkrechte z-Achse ergibt sich

(107) $$K_z = \delta\varrho\int_{x_0}^{x_1}[(x^2(y_1 - y_0) + \tfrac{1}{3}(y_1^3 - y_0^3)]\,dx \quad ;$$

durch Vergleichung ergibt sich die merkwürdige Beziehung

(108) $$K_z = K_x + K_y \quad .$$

Für den Kreisring z. B. ist

(109) $$K_z = \frac{1}{2}\pi\,\delta\,\varrho\,(r_1^4 - r^4) \quad , \qquad h = \sqrt{\tfrac{1}{2}(r^2 + r_1^2)} \quad .$$

Das Trägheitsmoment von Umdrehungsflächen $z = f(x)$ für die zum Drehungswinkel ψ gehörige Rotationsfläche wird

(110) $$K_z = \delta\,\varrho\,\psi\int_{x_0}^{x_1} x^3\sqrt{1 + z'^2}\,dx \quad .$$

Für beliebige krumme Flächen $z = f(x, y)$ ist, wenn zur Abkürzung $\sqrt{1 + (\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2} = W$ gesetzt wird,

(111) $$\begin{cases} K_x = \delta\,\varrho\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}(y^2 + z^2)\,W\,dx\,dy \quad , \qquad K_y = \delta\,\varrho\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}(z^2 + x^2)\,W\,dx\,dy \quad , \\ K_z = \delta\,\varrho\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}(x^2 + y^2)\,W\,dx\,dy \quad . \end{cases}$$

Die Formeln für bestimmte Fälle werden hier begreiflicherweise sehr kompliziert und können hier nicht wiedergegeben werden. Es sei aber auf eine Abhandlung von TALQUIST hingewiesen, worin die Trägheitsmomente der gleichförmig mit Masse belegten Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoids durch elliptische Funktionen in der WEIERSTRASSschen Form dargestellt und Anwendungen auf spezielle Fälle bis zur Kugel gemacht werden.

c) Körper.

Für Rotationskörper in bezug auf die geometrische Achse als Drehungsachse erhält man

(112) $$K_x = \frac{1}{2}\pi\,\varrho\int_{x_0}^{x_1}(y_1^4 - y_0^4)\,dx \quad ,$$

wo das negative Glied wegfällt, wenn der Rotationskörper nicht, wie der Allgemeinheit halber angenommen wurde, hohl, sondern massiv ist.

Für Rotationskörper senkrecht zur geometrischen Achse ergibt sich

(113) $$K_z = \pi\,\varrho\left[\int_{x_0}^{x_1} x^2(y_1^2 - y_0^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x_1}(y_1^4 - y_0^4)\,dx\right] \quad .$$

Für schiefe Achsen werden die Formeln komplizierter, und in noch höherem Maße werden sie es natürlich für beliebig gestaltete Körper; jedoch hat man die wichtigsten Typen durch geeignete Methoden berechnen können.

1. Kugel vom Radius r in bezug auf einen Durchmesser:

(114) $$K = \frac{2}{5}\,m\,r^2 \quad ;$$

in bezug auf eine vom Mittelpunkt um a abstehende Achse wird:

(115) $$K = \frac{m}{5}(2\,r^2 + 5\,a^2) \quad .$$

2. Zylinder von der Länge l und dem Radius r; in bezug auf die geometrische Achse:

(116) $$K = \frac{m\,r^2}{2} \quad ;$$

in bezug auf die zur geometrischen senkrechte, durch den Mittelpunkt gehende Achse:

(117) $$K = m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right) \quad .$$

3. Ellipsoid. In bezug auf eine beliebige Mittelpunktsachse mit den Richtungskosinus α, β, γ wird:

(118) $$K = \frac{m}{5}\left[(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right] \quad ,$$

also speziell für die drei Hauptzentralachsen:

(119) $$A = \frac{m}{5}(b^2 + c^2) \quad , \qquad B = \frac{m}{5}(c^2 + a^2) \quad , \qquad C = \frac{m}{5}(a^2 + b^2) \quad .$$

Handelt es sich um ein Rotationsellipsoid mit c als Polarhalbachse, so wird:

(120) $$K = \frac{m}{5}\left[a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\gamma^2\right]$$

und insbesondere:

(121) $$A = B = \frac{m}{5}(a^2 + c^2) \quad , \qquad C = \frac{2}{5}ma^2 \quad .$$

4. Gerader Kreiskegel vom Basisradius r und der Höhe h hin; in bezug auf die Figurachse:

(122) $$K = \tfrac{3}{10}\, m r^2 \quad ,$$

also von der Höhe, soweit diese nicht in der Masse enthalten ist, unabhängig; in bezug auf die zur Figurachse senkrechte Schwerpunktsachse:

(123) $$K = \tfrac{3}{80}\, m h^2 \quad ,$$

also diesmal den Radius explizite nicht enthaltend.

5. Rechtwinkliges Parallepipedon; in bezug auf die Mittelpunktsachse mit den Richtungskosinus α, β, γ ergibt sich:

(124) $$K = \frac{m}{12}\left[(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right] \quad ,$$

insbesondere

(125) $$A = \frac{m}{12}(b^2 + c^2) \quad , \qquad B = \frac{m}{12}(c^2 + a^2) \quad , \qquad C = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \quad .$$

Drückt man K, statt durch die Seiten, durch die halben Seiten aus, so erhält man statt des Faktors $\frac{1}{12}$ den Faktor $\frac{1}{3}$; vergleicht man jetzt Parallepiped und Ellipsoid, so sieht man, daß das Verhältnis ihrer Momente bei gleichen Ausmaßen $5:3$ ist, das gilt also auch für das Verhältnis von Würfel zu eingeschriebener Kugel. Für den Würfel wird im übrigen, gleichviel wie die Mittelpunktsachse gerichtet sein möge (das Zentralellipsoid ist eine Kugel, s. oben):

(126) $$K = \tfrac{1}{6}\, m a^2 \quad .$$

6. Für das Tetraeder ist schon oben ein Satz gelegentlich angeführt worden (p. 256); er läßt sich auch dahin aussprechen, daß das Trägheitsmoment des homogenen Tetraeders sich zu dem des gleichbelasteten Eckensystems verhält wie seine Masse zur 20-fachen jeder Ecke; im übrigen sei auf eine Abhandlung von Hoppe verwiesen.

Ferner ist eine Folge von Arbeiten von Rehfeld zu nennen, in der die Frage der Reduktion des Trägheitsmoments von Körpern auf das einzelner Oberflächenpunkte elementar behandelt und auf verschiedene Körper angewandt wird.

7. Auch für das schiefe Parallepipedon kann man die Rechnung durchführen, sowie das Zentralellipsoid, das durch die acht Ecken geht, bestimmen; seine Halbachsen sind das $\sqrt{3}$-fache der Halbkanten, liegen ihnen aber natürlich nicht parallel.

In bezug auf Flächen und Rotationskörper sei noch der folgende Satz von TOWNSEND angeführt: Besitzt eine geschlossene ebene Fläche eine Symmetrieachse und ist ihr Trägheitsradius in bezug auf sie R, so ist das Trägheitsmoment des Rotationskörpers, den die Fläche durch Rotation um eine im Abstande d mit der Symmetrieachse parallele Achse beschreibt,

$$K = 3R^2 + d^2 \quad , \tag{127}$$

wo von der Masse bezw. Dichte abgesehen ist.

Zusammensetzung von Kräften.

Wie wir im Vorangegangenen Massen in mannigfacher Weise zusammengesetzt und die Zusammensetzung durch Einführung bestimmter Punkte, Achsen und Momente zum Ausdruck gebracht haben, so müssen wir nun ganz analog mit den auf die Massen wirkenden Kräften verfahren. Insbesondere wird es sich auch hier darum handeln, die Kräfte zu summieren und den Punkt zu ermitteln, der in bezug auf sie das ganze Massensystem bezw. den kontinuierlichen Körper zu vertreten fähig ist. Man nennt diesen Punkt hier den Mittelpunkt der Kräfte oder auch ihren Angriffspunkt, letzteres im Gegensatz zu den Angriffspunkten der einzelnen Kräfte, um deren Zusammensetzung es sich handelt. Es ist empfehlenswert, die in Rede stehende Betrachtung in aufsteigender Linie vorzunehmen und mit dem einfachsten Falle, dem Falle paralleler Kräfte, und hier wieder mit einem System, das nur aus zwei Punkten besteht und auf das nur zwei Parallelkräfte wirken, zu beginnen.

Das System soll starr sein, d. h. die Entfernung je zweier seiner Massenpunkte soll unveränderlich sein. Das gibt ein System von Bedingungsgleichungen, und zwar, wenn das Massensystem aus n Punkten besteht, $\frac{1}{2}n[n-1]$; indessen ist diese Zahl größer als erforderlich, da, nachdem einmal drei der Punkte in ihrer gegenseitigen Lage festgelegt sind, für die übrigen nur noch je drei Bedingungen, nämlich konstante Entfernung von den drei ersten Punkten, zu befriedigen sind, so daß man auf $3n-6$ als notwendige Zahl der Bedingungen kommt. Durch die Entfernung von drei gegebenen Punkten ist freilich die Lage eines Punktes nicht ein-, sondern zweideutig bestimmt; es ist also noch eine Hinzufügung über den Sinn der Lage bezw. der Entfernungen zu machen.

Nun betrachten wir die auf die einzelnen Punkte wirkenden oder, wie wir sagen, in ihnen angreifenden Kräfte; sie werden sich, außer durch diese Angriffspunkte, noch durch Größe und Richtung unterscheiden; in letzterer Hinsicht hat man es also im allgemeinen mit konvergenten — oder divergenten — Kräften zu tun, und nur in einem Spezialfalle werden diese in Parallelkräfte übergehen. Indessen ist die Frage der Konvergenzkräfte leicht zu erledigen.

Konvergente Kräfte nämlich, die in einem und demselben Punkte angreifen, lassen sich einfach nach dem Satze vom Parallelogramm zusammensetzen, der, wie von den Strecken und Geschwindigkeiten, auch von den Beschleunigungen und Kräften als einfacher Ausfluß der betreffenden Definitionen gilt (vgl. Artikel „Allgemeine Mechanik", p. 225); wegen erfahrungsmäßiger Illustrationen des Satzes wird in der Dynamik noch das Notwendige gesagt werden.

Greifen die konvergenten Kräfte nicht an demselben Punkte an, so kann man sie doch durch solche, die das tun, ersetzen, und zwar mit Hilfe eines weiteren, auf Grund der Definitionen ebenfalls an sich einleuchtenden Satzes, der besagt, daß

man eine Kraft, ohne ihre Wirkung zu ändern, in ihrer eigenen Richtung beliebig verschieben darf. Hiernach braucht man die beiden Kräfte RA und SB, die auf die Punkte A und B wirken, nur durch solche zu ersetzen, die auf den Schnittpunkt der Linien RA und SB oder ihrer Verlängerungen wirken; ein Schnittpunkt, der bei zwei in derselben Ebene wirkenden Kräften stets (eventuell in der Unendlichkeit, s. w. u.) vorhanden ist; liegen die beiden Kräfte nicht in einer Ebene, so muß man sie in eine solche bringen, was indessen mit ihrer Konvergenz nichts mehr zu tun hat und weiter unten zu erledigen sein wird. Das Ergebnis ist also, daß sich konvergente Kräfte immer durch eine einzige ersetzen und somit auch durch eine einzige, nämlich die ihrer Resultanten gleiche und entgegengesetzte, im Gleichgewicht halten lassen.

Sind die Kräfte einander parallel, so treten nun aber besondere und besonders wichtige Verhältnisse auf, die einer aufsteigenden Betrachtung, vom einfachsten Falle beginnend, wert sind.

Parallelkräfte auf zwei Punkte. Greifen an den Punkten A und B (Figur 62), die sich in unveränderlicher gegenseitiger Lage befinden, die Kräfte P und Q an, so lassen sie sich zu einer einzigen Kraft R zusammensetzen, die dieselbe Richtung hat, so groß wie beide einzelnen zusammengenommen ist, und an einem Punkte C angreift, der AB im umgekehrten Verhältnisse der Kräfte P und Q teilt, so daß also

$$P : CB = Q : AC \quad .$$

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf das Prinzip der virtuellen Verrückungen (Prinzip 16, p. 227, vgl. auch w. u.) oder auf das von manchen als Prinzip betrachtete Hebelgesetz (s. w. u.). Es ist aber leicht einzusehen, daß das Prinzip vom Parallelogramm der Kräfte (p. 225) vollkommen ausreicht, da es den vorliegenden Fall als Spezialfall enthält.[1] Es ist hierzu nur nötig zu bemerken, daß man den Angriffspunkt einer Kraft nach Belieben in deren Richtung verschieben darf, wenn man in dieser Richtung eine starre Verbindung sich denkt. Verlängert man nun PA und QB über A bezw. B hinaus bis zu ihrem im Unendlichen gelegenen Schnittpunkt, in den auch die Verlängerung von RC mündet, so hat man ein Parallelogramm mit dem unendlich kleinen Winkel $A\infty B$. Die Diagonale ∞CR desselben ist dann offenbar 1. parallel mit den Seiten ∞AP und ∞BC; 2. gleich ihrer Summe, und 3. teilt sie den spitzen Winkel, also auch jede durchgelegte Linie AB, im umgekehrten Verhältnis der Seiten P und Q. Ist der Punkt C unbeweglich, so findet Gleichgewicht statt; ist er beweglich, so wird er allerdings eine Verschiebung durch die Resultante R erfahren, es besteht aber immer noch Drehgleichgewicht in bezug auf die durch C senkrecht zur Zeichnungsebene gelegte Achse, und als Bedingung für dieses Drehgleichgewicht erhält man die Formel:

$$P \cdot AC = Q \cdot BC$$

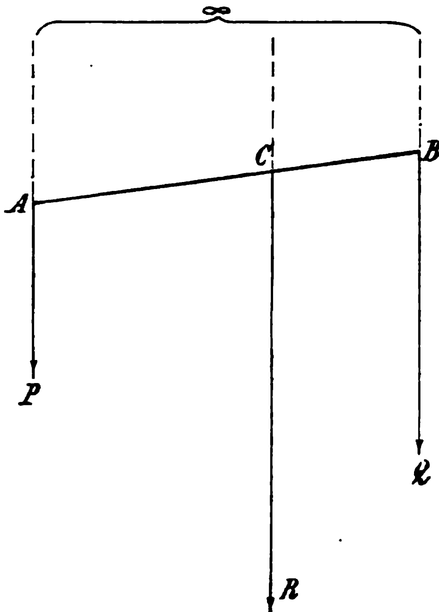
oder einfacher, wenn man statt der schiefen Linien AC und BC die in gleichem Verhältnisse stehenden Lote p und q einführt, die man von C auf die Kraftlinien PA und QB fällen kann, und die auch auf der Gleichgewichtsachse durch C (senkrecht zur Zeichnungsebene) senkrecht stehen:

$$P \cdot p = Q \cdot q \quad . \tag{128}$$

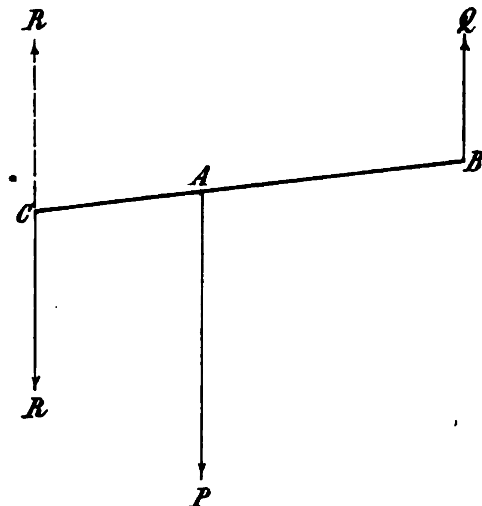
Man nennt das Produkt einer Kraft in ihren senkrechten Abstand von einer zu ihr senkrechten Achse das Kraftmoment; es ist, wie man sieht, ähnlich gebildet wie das Massenmoment, nur daß die Kraft nicht, wie die Masse, ein Skalar, sondern schon an sich ein Vektor ist und deshalb eine Festsetzung über die

[1] Man vergleiche hierzu freilich die didaktisch-kritischen Bemerkungen von F. POSKE, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. 15. 5. 1902.

Richtungsbeziehung zwischen Kraft und Achse, auf die sich das Moment beziehen soll, getroffen werden muß, eben die Festsetzung, daß Kraft und Achse aufeinander senkrecht stehen sollen. Steht eine Kraft schief zu einer Bezugsachse, so muß man sie in eine mit der Achse parallele und eine auf ihr senkrechte Komponente zerlegen; jene liefert zu dem Moment keinen Beitrag, es ist also lediglich das Produkt dieser mit ihrem senkrechten Abstande von der Achse zu bilden; dies gilt, ob nun die ganze Kraft mit der Achse in einer Ebene liegt oder windschief zu ihr ist. Es sei bemerkt, daß man, wie vom Kraftmoment, so auch vom Beschleunigungsmoment reden kann (es fällt dann nur der Faktor Masse fort); und daß man in ganz analoger Weise auch die nicht selten nützlichen Begriffe des Geschwindigkeitsmoments bezw. des Moments des Impulses oder der Bewegungs-



Figur 62.



Figur 63.

größe aufstellen kann. — Führt man das Kraftmoment, wie hier, im Hinblick auf Gleichgewichtsprobleme ein, so nennt man es auch das statische Moment der Kraft.

Man kann nunmehr die obige Formel in Worte fassen und gelangt so zu dem Satze vom Hebel: der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die statischen Momente der beiden Kräfte einander gleich sind; exakter ist es übrigens mit Rücksicht auf den entgegengesetzten Sinn der Drehungstendenz, zu sagen: wenn die statischen Momente der beiden Kräfte entgegengesetzt gleich sind.

Ist der Punkt C verschiebbar, so muß man, um die Verschiebung zu verhindern, um also vollständiges Gleichgewicht herzustellen, in C eine der Resultante von P und Q gleiche und entgegengesetzte Kraft anbringen. Diese Gegenkraft stellt zugleich, wenn C durch eine reale Vorrichtung festgehalten ist, den Druck dar, den diese Vorrichtung erleidet.

Wenn die beiden Kräfte P und Q zwar immer noch parallel sind, aber (Figur 63) entgegengesetzte Richtung haben, so gibt es ebenfalls eine Resultante R; aber sie ist gleich $P - Q$, hat die Richtung der größeren (P) und greift in einem Punkte der Verlängerung von BA über A hinaus, C an, der so liegt, daß

(129) $$P \cdot AC = Q \cdot BC \quad .$$

Die entgegengesetzte Kraft R' hält wiederum den Kräften P und Q das Gleichgewicht; allgemeiner: jede der drei Kräfte P, Q, R' hält den beiden anderen Gleichgewicht, und es gilt die Proportion:

$$P:Q:R' = BC:AC:AB \quad , \tag{130}$$

in Worten: Drei parallele Kräfte erzeugen Gleichgewicht, wenn die größte den beiden anderen entgegengesetzt gerichtet ist, und wenn sie den Abständen der Angriffspunkte der beiden anderen voneinander bezw. proportional sind.

Die Resultante R der Kräfte P und Q wird immer kleiner und rückt mit ihrem Angriffspunkte immer mehr von A nach links, je kleiner die Größendifferenz von P und Q wird. Für $P = Q$ wird $R = 0$ und $BC = \infty$. Es gibt alsdann keine Resultante. In der Tat lehrt die Erfahrung, daß keine Verschiebung der Linie AB, sondern nur eine reine Drehung derselben erfolgt, die sich durch eine einzige Kraft weder erreichen noch aufheben läßt. Man nennt zwei derartige gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte ein Kräftepaar.

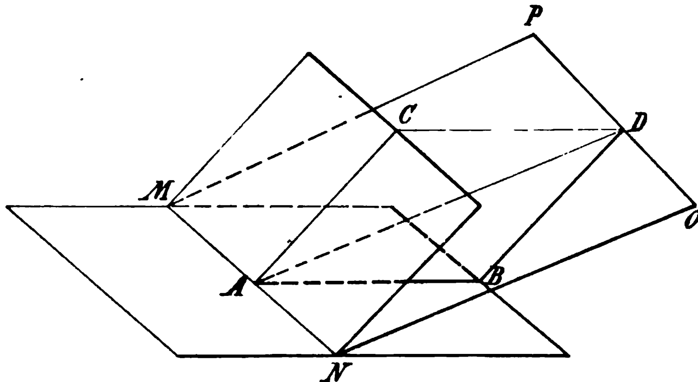
Kräftepaare. Der senkrechte Abstand der beiden Kräfte heißt Hebelarm, das Produkt desselben mit der Größe der Kraft heißt das Moment des Kräftepaares. Es lassen sich leicht folgende drei Sätze beweisen:

Ohne daß die Wirkung des Kräftepaares auf das System geändert wird, und unter der Voraussetzung, daß die neuen Angriffspunkte mit den alten starr verbunden sind, darf es

1. parallel mit sich verschoben werden;
2. in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt gedreht werden;
3. sein Hebelarm und die Kraftgröße in umgekehrten Verhältnissen verändert werden, so daß das Moment dasselbe bleibt.

Hiernach sind für ein Kräftepaar überhaupt nur zwei Dinge charakteristisch; die Richtung der Ebene, in der es liegt, und sein Moment.

Kräftepaare, die in derselben oder in parallelen Ebenen liegen, lassen sich zu einem einzigen, in einer ebenfalls parallel gerichteten Ebene gelegenen Kräfte-



Figur 64.

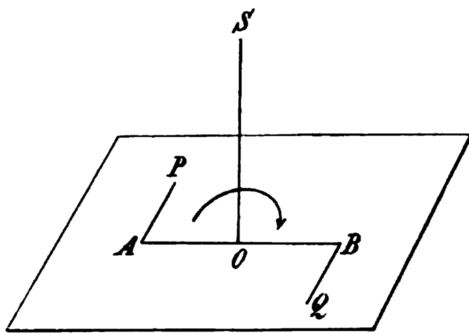
paar vereinigen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen ist, wobei als positiv die Momente derjenigen Kräftepaare zu rechnen sind, welche eine Drehung in dem einen, als negativ die Momente derjenigen, welche eine Drehung im entgegengesetzten Sinne hervorzubringen streben.

Wie also bei der Zusammensetzung von Parallelkräften die Kraftgrößen, so sind hier die Momente algebraisch zu summieren; während aber dort außerdem

noch der Angriffspunkt zu bestimmen ist, kommt hier keine weitere Bestimmung hinzu.

Liegen zwei Kräftepaare (Figur 64) in verschiedenen Ebenen, die sich in der Geraden MN schneiden, so erhält man das resultierende Kräftepaar, wenn man senkrecht auf MN die den einzelnen Momenten gleichen Linien AB und AC und zu dem durch sie gebildeten Parallelogramm die Diagonale AD konstruiert; AD ist dann das Moment und die Ebene $MNOP$ die Ebene des resultierenden Kräftepaares. Man kann diesen Satz als den Satz vom Parallelogramm der Kräftepaare bezeichnen. Ebenso findet man die Resultante vieler Kräftepaare durch fortgesetzte Parallelogrammkonstruktion.

Diese Darstellung der Momente durch Linien in den Ebenen der Kräftepaare hat den prinzipiellen Übelstand, daß hierdurch das Moment eines einzigen gegebenen Kräftepaares unbestimmt bleibt; es wird seiner Richtung nach erst mit Hilfe der Schnittlinie der Ebene mit der eines anderen Kräftepaares bestimmt. Man macht sich hiervon frei, wenn man das Moment eines Kräftepaares darstellt durch eine an Länge ihm gleiche Linie OP, welche (Figur 65) senkrecht auf seiner Ebene steht, und zwar nach einer durch Übereinkunft bestimmten Seite, z. B. so, daß, wenn man in OS auf der Ebene steht, man die durch das Kräftepaar angestrebte Drehung im Uhrzeigersinne vor sich gehen sieht. Man nennt diese Linie die Achse des Kräftepaares. Sie kann gemäß den obigen Sätzen genau so behandelt werden wie eine Kraft, nur daß sie außerdem auch noch parallel mit sich verschoben werden darf; sie ist wie die Kraft ein Vektor, aber nicht, wie diese, ein polarer, sondern ein axialer. Gewöhnlich denkt man sich, um die Anschauung zu fixieren, die Achse in der Mitte des Hebelarmes errichtet.



Figur 65.

Ein Kräftepaar, dessen Achse die Winkel $\alpha\beta\gamma$ mit den Koordinatenachsen bildet, kann man hiernach in drei Kräftepaarkomponenten zerlegen, deren Achsen bezw. die x-, die y-, die z-Achse, und deren Momente, wenn m das gegebene ist, gleich $m\cos\alpha$, $m\cos\beta$, $m\cos\gamma$ sind.

Zerlegung einer Kraft in eine Kraft und ein Kräftepaar. Wir haben gesehen, daß man wohl ein Kräftepaar, nicht aber eine Kraft parallel mit sich verschieben kann, ohne die Wirkung zu ändern. Wohl aber kann man eine Kraft parallel mit sich verschieben, wenn man zu der verschobenen Kraft noch ein Kräftepaar hinzunimmt, dessen Moment gleich dem Produkt der Kraft in deren senkrechte Verschiebung ist. Mit Benutzung des Begriffs des Kraftmoments kann man diesen Satz kürzer so aussprechen: Eine Kraft darf parallel mit sich auf einen anderen Angriffspunkt übertragen werden, wenn ein Kräftepaar in der Verschiebungsebene hinzugefügt wird, dessen Moment gleich dem Moment der Kraft in bezug auf den neuen Punkt ist. Zum Beweis dieses Satzes braucht man sich nur in dem neuen Angriffspunkte zwei der gegebenen gleich große entgegengesetzte Kräfte R und $-R$ angebracht zu denken; erstere ist die verschobene Kraft, letztere setzt sich mit der ursprünglich gegebenen zu dem Kräftepaar zusammen.

Umgekehrt kann man jede gegebene Kraft mit jedem in derselben Ebene gegebenen Kräftepaar zu einer einzigen Kraft vereinigen, indem man letzteres so lange dreht und verschiebt, bis eine seiner beiden Kräfte in demselben Punkte,

aber in entgegengesetztem Sinne angreift wie die Kraft; macht man die Kraftgröße des Paares, unter entsprechender Änderung seiner Armgröße, derjenigen der Kraft gleich, so heben sich die gegebene Kraft und die ihr entgegengesetzte Kraft des Paares auf, und es bleibt nur eine einzige Kraft übrig, und zwar eine der gegebenen an Größe und Richtung gleiche, die sich von ihr nur durch den Angriffspunkt unterscheidet.

Eine Kraft und ein in einer dazu geneigten Ebene liegendes Kräftepaar lassen sich auf ein kleineres Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht auf der Kraft steht, und eine der gegebenen gleiche und parallele Kraft zurückführen. Denn man kann das Paar in eines senkrecht, und in ein zweites, dessen Ebene die Kraft enthält, zerlegen, und dann letzteres nach dem Obigen mit der Kraft zu einer Kraft vereinigen.

Wie man sieht, ist die Kombination einer Kraft in einer bestimmten Richtung mit einem Kräftepaar, dessen Achse dieselbe Richtung hat, die allgemeine Repräsentantin eines Systems von Kräften. Die Kraft bewirkt, wenn sie nicht äquilibriert wird, eine Verschiebung, das Kräftepaar eine Drehung des Systems um die Verschiebungsrichtung als Drehungsachse. Man kann daher ein derartiges System von Kräften ein Korkziehersystem nennen; als kürzeres Wort empfiehlt sich die Bezeichnung „Renk", die einem von englischen Autoren benutzten Worte nachgebildet ist, oder, indem man an den eine derartige Beanspruchung darstellenden Vorgang des Bohrens denkt, die Bezeichnung „Bohr". Ferner nennt man die gemeinsame Achse nach POINSOT die Zentralachse des Kraftsystems.

Schließlich kann man die Kraft, die mit der Achse des Kräftepaares ohnehin schon parallel ist, sogar in eine Linie mit ihr bringen, muß dann aber zum Ausgleich ein neues Kräftepaar hinzufügen, das man dann mit dem schon vorhandenen zu einem neuen, größeren, vereinigen kann, ohne daß hierdurch sich dessen Achse der Richtung nach ändert.

Alle die hier angedeuteten Methoden der Zerlegung und Vereinigung von Kräften und Kräftepaaren lassen sich leicht analytisch darstellen und an die betreffenden Formeln zahlreiche interessante Folgerungen knüpfen; es muß aber darauf verzichtet werden, hier darauf einzugehen. Die Lehre vom Bohr gewinnt übrigens ihre besondere Bedeutung erst in der Dynamik, im Zusammenhange mit der Darstellung der Bewegung als Schraubenbewegung.

Gleichgewicht starrer Körper. Mittelpunkt der Kräfte.

Gleichgewicht starrer Körper. Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems unendlich vieler, starr untereinander verbundener materieller Punkte, d. h. eines starren Körpers, lassen sich nach dem Obigen unmittelbar aufstellen und mathematisch formulieren. Die auf die verschiedenen Punkte des Körpers wirkenden Kräfte lassen sich nämlich zu einer Kraft und einem Kräftepaar zusammensetzen, welche einzeln verschwinden müssen. Bei Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems muß also erstens

$$(131)\qquad \sum R\cos\alpha = 0 \quad , \qquad \sum R\cos\beta = 0 \quad , \qquad \sum R\cos\gamma = 0 \quad ,$$

und zweitens

$$(132)\qquad \sum Rp\cos\lambda = 0 \quad , \qquad \sum Rp\cos\mu = 0 \quad , \qquad \sum Rp\cos\nu = 0$$

sein, wo $\alpha\beta\gamma$ die Winkel der Kraft, $\lambda\mu\nu$ die Winkel der Achse des Kräftepaares mit den Koordinatenachsen sind und p der Arm des Kräftepaares ist. Durch die folgende Betrachtung lassen sich nun die Winkel $\lambda\mu\nu$ eliminieren. In der Figur 65 sei OS die auf der Papierebene senkrechte Achse des Paares,

und die Linie OA bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$; dann hat man

$$\cos\alpha\,\cos\lambda + \cos\beta\,\cos\mu + \cos\gamma\,\cos\nu = 0\quad,$$
$$\cos\alpha_1\,\cos\lambda + \cos\beta_1\,\cos\mu + \cos\gamma_1\,\cos\nu = 0\quad,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1\quad.$$

Hieraus findet man, wenn

$$w = \sqrt{(\cos\beta_1\cos\gamma - \cos\gamma_1\cos\beta)^2 + (\cos\gamma_1\cos\alpha - \cos\alpha_1\cos\gamma)^2 + (\cos\alpha_1\cos\beta - \cos\beta_1\cos\alpha)^2}$$

gesetzt wird,

$$(133)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{\cos\beta_1\,\cos\gamma - \cos\gamma_1\,\cos\beta}{w}\quad, \\[2ex] \cos\mu = \dfrac{\cos\gamma_1\,\cos\alpha - \cos\alpha_1\,\cos\gamma}{w}\quad, \\[2ex] \cos\nu = \dfrac{\cos\alpha_1\,\cos\beta - \cos\beta_1\,\cos\alpha}{w}\quad. \end{cases}$$

Sind nun $x\,y\,z$ die Koordinaten von A in bezug auf O als Anfangspunkt, so ist

$$\cos\alpha_1 = \frac{x}{r}\quad,\quad \cos\beta_1 = \frac{y}{r}\quad,\quad \cos\gamma_1 = \frac{z}{r}\quad;$$

es wird also

$$(134)\quad \cos\lambda = \frac{y\cos\gamma - z\cos\beta}{p},\quad \cos\mu = \frac{z\cos\alpha - x\cos\gamma}{p},\quad \cos\nu = \frac{x\cos\beta - y\cos\alpha}{p}\quad,$$

wo

$$p = \sqrt{(y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2}$$

gerade der Hebelarm des Kräftepaares ist. Die Gleichungen (131) und (132) nehmen hiernach die Form an

$$(135)\quad \begin{cases} \sum R\cos\alpha = 0\quad,\quad \sum R\cos\beta = 0\quad,\quad \sum R\cos\gamma = 0\quad, \\ \sum R(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,\ \sum R(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0,\ \sum R(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0, \end{cases}$$

oder, unter Einführung der Kraftkomponenten $X\,Y\,Z$, die noch einfachere Form

$$(136)\quad \begin{cases} \sum X = 0\quad,\quad \sum Y = 0\quad,\quad \sum Z = 0\quad, \\ \sum(yZ - zY) = 0\quad,\quad \sum(zX - xZ) = 0\quad,\quad \sum(xY - yX) = 0\quad. \end{cases}$$

Gleichgewicht von drei Kräften. Unter welchen Umständen drei gegebene Kräfte Gleichgewicht erzeugen, kann man mit Hilfe eines an sich einleuchtenden Prinzips leicht einsehen. Dieses Prinzip sagt aus, daß, wenn ein System im Gleichgewicht ist, das Gleichgewicht auch dann noch fortbesteht, wenn einzelne Teile des Systems festgestellt werden. Nimmt man nun zwei beliebige Punkte des Körpers, deren jeder in der Wirkungslinie einer der Kräfte liegt, so darf die dritte Kraft in bezug auf die Verbindungslinie jener Punkte kein Moment haben (s. oben p. 260), ihre Richtung muß also durch diese Verbindungslinie hindurchgehen. Erwägt man nun, daß dies ebenso für jedes andere Punktepaar der Wirkungslinien der ersten beiden Kräfte gelten muß, so sieht man ein, daß die drei Kräfte in einer Ebene liegen müssen, woraus weiter folgt, daß ihre Richtungen durch einen Punkt gehen müssen, worin der Fall, daß sie parallel sind, mit inbegriffen ist.

Gleichgewicht unter der Wirkung von Parallelkräften. Wählt man als gemeinsame Richtung der Kräfte die z-Achse, läßt man von den Gleichungen (136) die selbstverständlichen fort und vereinfacht die übrigen, so findet man

$$(137) \qquad \sum Z = 0 \quad , \qquad \sum y Z = 0 \quad , \qquad \sum x Z = 0 \quad ,$$

in Worten: die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines von Parallelkräften angegriffenen Körpers ist die, daß die algebraische Summe der Kräfte verschwindet, und daß die Summen der Momente der Kräfte in bezug auf zwei beliebige senkrechte Ebenen (denn es ist offenbar nicht erforderlich, daß dies gerade, wie in den beiden letzten der obigen Gleichungen, die xz- und die yz-Ebene seien) ebenfalls verschwinden. Es möge hieran gleich die Bemerkung geschlossen werden, daß, wenn die obigen Gleichungen nicht erfüllt sind, also kein Gleichgewicht besteht, die Parallelkräfte eine Resultante haben, deren Größe R und deren Angriffspunkt $\xi\eta$ sich aus den Gleichungen

$$(138) \qquad \sum Z = R \quad , \qquad \sum y Z = R\eta \quad , \qquad \sum x Z = R\xi$$

ergeben. Diesen Punkt nennt man den Mittelpunkt der Parallelkräfte; seine Lage hängt von den relativen Größen und den Angriffspunkten, nicht aber von der Richtung der Einzelkräfte ab. Eine besondere Stellung endlich nimmt der Fall ein, daß zwar die erste, nicht aber die beiden letzten der Gleichungen (137) erfüllt sind; es resultiert dann ein Kräftepaar, dessen Ebene der Richtung der Kräfte parallel ist. (Ein Beispiel für diesen Fall bietet die Kompaßnadel dar.)

Kräfte- und Massenmittelpunkt. Die Einführung des Mittelpunktes der Parallelkräfte drängt die Frage in den Vordergrund des Interesses, in welchem Verhältnisse dieser Punkt zu dem früher eingeführten Mittelpunkte der Massen stehe. Daß das Verhältnis im Prinzip ein gegensätzliches sein wird, geht unmittelbar aus der Erwägung hervor, daß die beiden Begriffe, auf die sich jene Punkte beziehen, Kraft und Masse, selbst im Gegensatze zueinander stehen. Im allgemeinen besteht sogar nicht einmal dieser Zusammenhang des Gegensatzes, die beiden Begriffe sind völlig unabhängig voneinander; beispielsweise sei auf den Fall hingewiesen, wo ein Körper von bestimmter Figur und Verteilung der mechanischen Masse von magnetischen Parallelkräften angegriffen wird; ein Fall, in dem für die Feststellung des Gleichgewichts der Mittelpunkt der magnetischen Kräfte — die Pole — und der Massenmittelpunkt, jeder für sich in Betracht zu ziehen sind. Gehen wir nunmehr zu den Gravitationskräften über, so wird jetzt allerdings die Masse der Widerstand gegen die Wirkung dieser Kraft, und der Zusammenhang ist klar. Man sieht auch sofort ein, daß und unter welchen Umständen beide Punkte, Kräfte- und Massenmittelpunkt praktisch zusammenfallen werden; nämlich dann, wenn es erlaubt ist, Masse und Gewicht zu identifizieren, wobei von dem sie unterscheidenden Faktor abgesehen werden darf. Erforderlich ist aber, daß diese Identität nicht bloß für den Körper als Ganzes, sondern für den Vergleich aller einzelnen Punkte gelte, oder, wie man es auch ausdrücken kann, daß jener Faktor für alle Punkte derselbe sei. Dazu ist aber erforderlich, daß die Beschleunigung durch die gravitierenden Kräfte für alle Punkte gleich groß sei, was der Fall sein wird, wenn der Körper Dimensionen hat, die gegenüber seiner Entfernung von dem Orte, von dem ausgehend die Kraft zu denken ist, sehr klein sind, z. B. bei einem irdischen Körper in bezug auf die Schwerkraft der Erde. Für einen solchen Körper fällt also der eigentliche Schwerpunkt in den Massenmittelpunkt, und man kann jenen bequemen Namen auch auf diesen übertragen, wie dies oben geschehen ist. Dagegen wird z. B. beim Monde der Mittelpunkt der von der Erde auf ihn ausgeübten Anziehungskräfte, soweit er existiert (s. u.), schon nicht unmerklich von seinem Massenmittelpunkte abweichen.

Zentrobarische Körper. Eine ganz neue Frage aber erhebt sich, wenn man nun noch einen Schritt weiter geht und von Parallelkräften zu beliebigen Gravitationskräften übergeht, die nicht nur der Größe, sondern auch der Richtung nach von Punkt zu Punkt variieren. Es ist dies die Frage, ob in diesem Falle überhaupt noch ein „Attraktionszentrum" — wie wir im Anschlusse an HELMHOLTZ und WERTHEIM (als Übersetzer von THOMSON und TAIT) — sagen wollen, existiert, in dem Sinne, daß dieser Punkt der Angriffspunkt der von einem anderen Körper oder mehreren anderen Körpern auf ihn ausgeübten Anziehungskräfte sei, welches auch die relative Lage dieser Körper zu ihm sein möge. Man wird sogar geneigt sein, die Existenz eines solchen Attraktionszentrums für sehr unwahrscheinlich zu halten. Es ist aber nachgewiesen worden, und zwar im wesentlichen von W. THOMSON (später Lord KELVIN), daß es Körper mit einem solchen Punkte gibt; und man hat sie als zentrobarische Körper bezeichnet. Sie sind es dann für jede Kombination äußerer Körper, und sie sind es auch für ihre eigene aktive Attraktionswirkung auf jene. In ähnlichem Sinne spricht man auch von zentrodynamischen Körpern.

Von den Eigenschaften zentrobarischer Körper können nur die wichtigsten hier angeführt werden: 1. Das Attraktionszentrum liegt notwendig im Innern des Körpers, deutlicher gesagt, es liegt so, daß es von außen nur mit Durchschneidung der Masse erreicht werden kann (im Innern eines Hohlraumes des Körpers kann es also liegen, nicht aber im Figurmittelpunkte eines Ringes). Auch muß der Körper äußerlich durch eine einzige Fläche begrenzt sein (ein System mehrerer, wenn auch starr verbundener Körper hat also nie ein Attraktionszentrum). 2. Durch Verteilung einer Masse über eine den Körper umschließende Fläche kann dieser stets zu einem zentrobarischen Körper mit gegebenem Attraktionszentrum ergänzt werden. 3. Eine gegebene Masse läßt sich in einer, aber auch nur in einer Weise über eine gegebene Oberfläche so verteilen, daß sie ein gegebenes Attraktionszentrum hat. 4. Eine gegebene Masse kann auf unendlich viele verschiedene Arten so über einen gegebenen Raum verteilt werden, daß sie ein gegebenes Attraktionszentrum hat. 5. Das Attraktionszentrum fällt mit dem Massenmittelpunkte zusammen, und das Zentralträgheitsellipsoid ist eine Kugel; von homogenen Körpern haben hiernach nur die Kugel und die fünf regulären Polyeder nebst den entsprechenden Hohlkörpern Attraktionszentra.

Ein Körper, der nicht zentrobarisch ist, kann unter Umständen wenigstens aus zentrobarischen Schichten bestehen; hiermit geht das Problem, wie man erkennt, in die Potentialtheorie über, auf die wegen des weiteren verwiesen werden muß (vgl. besonders p. 205).

In neuerer Zeit sind die Probleme der zentrodynamischen Körper vielfach ganz allgemein studiert worden, so von WERNICKE die Frage, welche Beziehungen zwischen der Massenverteilung und dem Beschleunigungsgesetz die Existenz zentrodynamischer Körper bedingen.

Gleichgewichtsachsen. In nahem Zusammenhange hiermit steht die Lehre von den Gleichgewichtsachsen. Wenn nämlich eine gerade Linie die Eigenschaft hat, daß, wenn man ein gegebenes, unter der Wirkung gegebener Kräfte im Gleichgewicht befindliches System um sie dreht und in der neuen Lage an denselben Punkten des Systems dieselben Kräfte in derselben absoluten Raumrichtung wirken läßt, das System immer noch im Gleichgewicht ist, so nennt man jene Linie eine Gleichgewichtsachse. Als Bedingungen für die Existenz einer solchen findet man, wenn $\varphi\chi\psi$ die Richtungswinkel einer gewissen, durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden sind, und wenn zur Abkürzung

$$(139)\quad \begin{cases} \sum yY + \sum zZ = f\,, \quad \sum zZ + \sum xX = g\,, \quad \sum xX + \sum yY = h\,, \\ \sum yZ = \sum zY = F\,, \quad \sum zX = \sum xZ = G\,, \quad \sum xY = \sum yX = H\,, \end{cases}$$

gesetzt wird, die drei Gleichungen:

$$(140)\qquad \begin{aligned} -f\cos\varphi + H\cos\chi + G\cos\psi &= 0 \quad , \\ +H\cos\varphi - g\cos\chi + F\cos\psi &= 0 \quad , \\ +G\cos\varphi + F\cos\chi - h\cos\psi &= 0 \quad , \end{aligned}$$

woraus sich

$$(141)\qquad \begin{vmatrix} -f & H & G \\ H & -g & F \\ G & F & -h \end{vmatrix} = 0$$

ergibt. Jede Linie, welche der Gleichgewichtsachse im Raume parallel ist, ist ebenfalls als Gleichgewichtsachse zu betrachten. Wenn die Gleichung

$$(142)\qquad \frac{\cos\varphi}{F} + \frac{\cos\chi}{G} + \frac{\cos\psi}{H} = 0$$

erfüllt wird, so gibt es sogar zwei in einer Ebene gelegene Gleichgewichtsachsen, und jede Linie, welche in dieser oder einer ihr parallelen Ebene liegt, ist ebenfalls eine Gleichgewichtsachse. Wenn endlich ein System drei weder in derselben noch in parallelen Ebenen liegende Gleichgewichtsachsen hat, so kann jede Linie im Raume als Gleichgewichtsachse betrachtet werden. Von besonderer Wichtigkeit ist noch der Satz, daß man jede Linie durch geeignete Anbringung eines Kräftepaares zu einer Gleichgewichtsachse machen kann. Die Bedeutung der Gleichgewichtsachsen für die Natur des Gleichgewichts wird sogleich noch deutlicher hervortreten.

Virial. Von Nutzen für die Untersuchung von Gleichgewichtsverhältnissen kann zuweilen auch eine Funktion werden, die von MÖBIUS zuerst eingeführt worden, von CLAUSIUS als Virial der Kräfte bezeichnet worden ist und eine besondere Rolle dann weiter in der Dynamik, namentlich in der Thermodynamik spielt. Greift eine Kraft R in einem bestimmten Punkte eines starren Systems an und fällt man von diesem Punkte das Perpendikel r auf eine Achse, so heißt das Produkt dieser Strecke in die Projektion der Kraft auf diese Richtung ihr Virial in bezug auf diese Achse. Bei mehreren Kräften, die in verschiedenen Punkten angreifen, kann man in geeigneter Weise die Summe bilden und erhält so das Virial des Systems; in Formel, wenn α der Winkel zwischen R und r ist:

$$(143)\qquad V = \sum r R \cos\alpha \quad ,$$

wo die Richtungen von R und r derart in bezug gesetzt zu werden pflegen, daß man, wenn man die Koordinaten x, y, z des Punktes und die Kraftkomponenten X, Y, Z einführt, für die drei Koordinatenachsen als Bezugsachsen die Ausdrücke

$$(144)\qquad V_x = -\sum(yY + zZ)\,, \quad V_y = -\sum(zZ + xX)\,, \quad V_z = -\sum(xX + yY)$$

erhält.

Man kann dieses Virial das axiale nennen und ihm ein polares an die Seite stellen, bei dem an die Stelle der Achse ein Punkt tritt; es ist offenbar definiert durch

$$(145)\qquad V = -\sum(xX + yY + zZ) \quad ,$$

wenn der Pol der Nullpunkt des Koordinatensystems ist, und allgemein für einen Pol x_0, y_0, z_0 durch

$$(146)\qquad V = -\sum[(x - x_0)X + (y - y_0)Y + (z - z_0)Z] \quad ,$$

was sich von dem vorigen, da man es in der Form

$$(147) \qquad V = -\sum(xX + yY + zZ) + x_0\sum X + y_0\sum Y + z_0\sum Z$$

schreiben kann, nur durch eine Konstante unterscheidet. Es sei bemerkt, daß das Virial in einem leicht ersichtlichen Zusammenhange mit dem Potential steht; jedoch kann hierauf nicht eingegangen werden.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Das Problem des Gleichgewichts kann noch in einer etwas anderen Weise behandelt werden, bei der man, gemäß der Grundvorstellung der klassischen Mechanik, zwischen Kräften, die auf das System wirken, und Bedingungen, denen es außerdem unterworfen ist, unterscheidet; ist das System ein freies, so fallen die Bedingungen weg, und die Methode wird mit der früheren identisch.

Ist δs eine virtuelle, d. h. mit den Bedingungen vereinbare Verschiebung eines Punktes, bildet dieselbe mit der Kraft P den Winkel φ, und sind ihre Komponenten δx, δy, δz, so kann man das Prinzip der virtuellen Verrückungen (auch als Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten oder der virtuellen Arbeit bezeichnet, s. o. p. 227, sowie w. u.) in einer der beiden Formen

$$(148) \qquad \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

oder

$$(149) \qquad \sum R\cos\varphi\,\delta s = 0$$

aussprechen. Wenn man den Erfahrungssatz zu Hilfe nimmt, daß eine auf den virtuellen Verschiebungen senkrechte Kraft durch den, dem Körper auferlegten Zwang (s. o. p. 234) aufgehoben wird, so kann man ohne Schwierigkeit das Prinzip beweisen, d. h. zeigen, daß eine der obigen Gleichungen die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht ist. Für einen einzelnen Punkt erfolgt der Beweis einfach dadurch, daß im Gleichgewicht entweder $R = 0$ oder $\varphi = 90^0$ ist, die Gleichung $R\cos\varphi\,\delta s = 0$ also erfüllt wird. Bei zwei Punkten sind vier Fälle möglich, nämlich 1. $R = 0$ und $R' = 0$, 2. $\varphi = 90^0$ und $\varphi' = 90^0$ 3. $R = 0$ und $\varphi' = 90^0$, 4. $R' = 0$ und $\varphi = 90^0$. In jedem dieser Fälle ist aber die Gleichung

$$R\cos\varphi\,\delta s + R'\cos\varphi'\,\delta s' = 0$$

die notwendige Folge; daß die Bedingung auch hinreichend ist, ergibt sich, wenn man, was erlaubt ist, $\delta s' = 0$ setzt. Ebenso läßt sich der Beweis erweitern für zwei starr verbundene Punkte und schließlich für ein ganzes Punktsystem.

Ehe von diesem Prinzip die bezeichnete Anwendung gemacht wird, ist es wichtig, dasselbe noch in einer anderen Weise zu formulieren.

Es handle sich um ein System von n Punkten; in der Gleichung (148) kommen alsdann $3n$ Verschiebungen vor. Sind nun zwischen den Punkten m Bedingungsgleichungen gegeben, so lassen sich m jener Verschiebungen durch die $3n - m$ übrigen ausdrücken. Die so erhaltene Gleichung bezieht sich dann offenbar auf ein vollkommen freies System, die Verschiebungen sind sämtlich beliebig, und folglich muß der Koeffizient jeder Verschiebung für sich verschwinden, was $3n - m$ Gleichungen ergibt. Diese zusammen mit den m Bedingungsgleichungen bestimmen die $3n$ Koordinaten, die Aufgabe ist also gelöst. Aber diese Methode ist kompliziert und wenig elegant, und sie wird entbehrlich durch die Benutzung der sogen. LAGRANGEschen Multiplikatoren. Aus den gegebenen Bedingungsgleichungen

$$U = 0 \quad , \qquad V = 0 \text{ u. s. w.} \quad ,$$

wo U, V u. s. w. Funktionen der Koordinaten x, y, z, x_1, y_1, z_1 u. s. w. sind folgt:

$$(150)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots = 0 \quad , \\ \frac{\partial V}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial V}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots = 0 \quad , \\ \qquad (m \text{ Gleichungen}) \\ \text{wozu noch die Gleichung (148) hinzutritt: } \ldots \\ X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + Z_1\,\delta z_1 + X_2\,\delta x_2 + \ldots . = 0 \quad . \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen addieren wir, nachdem wir die ersten m derselben bezw. mit den vorläufig noch unbestimmten Größen λ, μ, u. s. w. multipliziert haben. Das Resultat ist:

$$(151)\quad \left(X_1 + \lambda\frac{\partial U}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial V}{\partial x_1} + ..\right)\delta x_1 + \left(Y_1 + \lambda\frac{\partial U}{\partial y_1} + \mu\frac{\partial V}{\partial y_1} + \ldots\right)\delta y_1 + \ldots . = 0 .$$

Nun bestimmen wir die n Größen λ, μ u. s. w. derart, daß die ersten m Klammergrößen in der soeben erhaltenen Gleichung verschwinden, daß also:

$$(152)\quad X_1 + \lambda\frac{\partial U}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots = 0 \quad , \qquad Y_1 + \lambda\frac{\partial U}{\partial y_1} + \mu\frac{\partial V}{\partial y_1} + \ldots = 0 \text{ u. s. w.}$$

wird; die Gleichung reduziert sich hierdurch auf $3n - m$ Glieder; da sie sich aber nunmehr auf ein völlig freies System bezieht, also sämtliche noch übrige δ beliebig sind, so muß jedes noch vorhandene Glied, also jede Klammergröße für sich verschwinden; die letzte der so erhaltenen Gleichungen lautet:

$$(153)\qquad Z_n + \lambda\frac{\partial U}{\partial z_n} + \mu\frac{\partial V}{\partial z_n} + \ldots . = 0 \quad .$$

Es hat sich somit ein ganz symmetrisches System von $3n$ Gleichungen, bestehend aus sämtlichen gleich null gesetzten Klammergrößen der Gleichung (151) ergeben. Mit den m gegebenen Bedingungsgleichungen hat man also $3n + m$ Gleichungen, durch welche sich die $3n$ Koordinaten und die m Multiplikatoren gerade bestimmen lassen. Das Problem ist also gelöst.

Der Wert dieser Methode läßt sich erst durch die physikalische Deutung der zuletzt gewonnenen $3n$ Gleichungen (152) und (153) erkennen. Während nämlich bei einem freien System

$$X = 0 \quad , \qquad Y = 0 \quad , \qquad Z = 0 \quad , \qquad X_1 = 0 \ldots .$$

ist, sind hier auch $3n$ gewisse Größen $= 0$, nämlich die linken Seiten obiger Gleichungen. Faßt man diese als die auf das unfreie System wirkenden Kräfte auf, so verhält sich mithin alles wie bei einem freien System. Ein unfreies System kann also dadurch, daß die Bedingungen desselben mit Hilfe der LAGRANGEschen Multiplikatoren als Kräfte formuliert und diese Kräfte zu den gegebenen hinzugefügt werden, in ein freies verwandelt werden. Damit erhält zugleich die schon oben (p. 234) eingeführte Anschauung, den Zwang als eine Kraft zu betrachten, eine tiefere Begründung.

Beispiele. Für das Gleichgewicht eines Punktes auf einer Fläche sind die beiden Gleichungen

$$(154)\qquad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \quad , \qquad f(x, y, z) = 0$$

gegeben, woraus sich zur Bestimmung von x, y, z und λ die vier Gleichungen

$$(155)\quad X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0 , \quad Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0 , \quad Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0 , \quad f(x, y, z) = 0$$

ergeben; den Druck des Punktes auf die Fläche erhält man dann schließlich durch Einsetzen der gefundenen Werte in dem Ausdruck

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \quad .$$

Für das Gleichgewicht eines Punktes auf einer Kurve sind die drei Gleichungen

$$(156) \qquad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \quad , \qquad f_1(x,y,z) = 0 \quad , \qquad f_2(x,y,z) = 0$$

gegeben, woraus man zur Bestimmung von x, y, z, λ, μ die Gleichungen

$$(157) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} X + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \quad , & \\ Y + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \quad , & \begin{array}{l} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{array} \quad , \\ Z + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \quad , & \end{array} \right.$$

erhält; aus diesen findet man mittels der Determinante

$$(158) \qquad \begin{vmatrix} X & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ Y & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ Z & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

zunächst λ und μ und schließlich x, y, z.

Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen auf das Gleichgewicht eines starren Systems. Der analytische Ausdruck für die Starrheit des Systems ist die Konstanz des Abstands irgend zweier Punkte voneinander. Sind also X_1, Y_1, Z_1, X_2 .... die gegebenen Kraftkomponenten, x_1, y_1, z_1, x_2 .... die Koordinaten der Punkte, c_{12}, c_{13}, c_{23} ... Konstanten und ist n die Zahl der Punkte, so sind außer der Grundgleichung

$$(159) \qquad X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + Z_1\,\delta z_1 + X_2\,\delta x_2 + \ldots\ldots = 0$$

noch die $n(n-1)/2$ Bedingungsgleichungen

$$(160) \qquad \left\{ \begin{array}{c} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = c_{12}^{\,2} \quad , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_{n-1} - x_n)^2 + (y_{n-1} - y_n)^2 + (z_{n-1} - z_n)^2 = c_{n-1,n}^{\,2} \end{array} \right.$$

gegeben. Schreibt man nun die aus letzteren sich ergebenden Verschiebungsgleichungen, z. B.

$$(x_1 - x_2)\,\delta(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\,\delta(y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)\,\delta(z_1 - z_2) = 0 \quad ,$$

in der Form

$$(x_1 - x_2)\,\delta x_1 + (y_1 - y_2)\,\delta y_1 + (z_1 - z_2)\,\delta z_1 + (x_2 - x_1)\,\delta x_2 + (y_2 - y_1)\,\delta y_2 + (z_2 - z_1)\,\delta z_2 = 0$$

und wendet man das oben angegebene Verfahren mit den Multiplikatoren an, wobei der Symmetrie halber ein und derselbe Multiplikator bald λ_{12}, bald λ_{21} u. s. w. geschrieben werden soll, so erhält man die Gleichungen

$$(161) \quad \begin{cases} X_1 + \lambda_{12}(x_1 - x_2) + \lambda_{13}(x_1 - x_3) + \dots + \lambda_{1n}(x_1 - x_n) = 0 \quad , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n + \lambda_{n1}(x_n - x_1) + \lambda_{n2}(x_n - x_2) + \dots + \lambda_{n,n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

und entsprechend für die beiden anderen Koordinaten. Jedes dieser drei Gleichungssysteme für sich addiert ergibt, da sich alles übrige weghebt,

$$(162) \quad X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0, \quad Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0, \quad Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = 0 \quad .$$

Eine weitere Gleichung erhält man, wenn man die Gleichungen des x-Systems mit $y_1 \dots y_n$, die des y-Systems mit $x_1 \dots x_n$ multipliziert und dann letztere von ersteren abzieht. Es fallen dann wiederum alle Glieder von dem Typus

$$\lambda_{rs}[y_r(x_r - x_s) + y_s(x_s - x_r) - x_r(y_r - y_s) - x_s(y_s - y_r)]$$

fort, weil die Klammergröße verschwindet und es ergibt sich

$$(163) \quad y_1 X_1 - x_1 Y_1 + \dots + y_n X_n - x_n Y_n = 0 \quad ,$$

sowie, wenn man analog das y- und das z-System, und das z- und das x-System behandelt, zwei entsprechende Gleichungen. Man ist also jetzt im Besitze von sechs für das Gleichgewicht notwendigen Gleichungen. Daß dieselben aber auch hinreichend sind, ergibt sich aus der Erwägung, daß von den $3n$ Verschiebungskomponenten der Punkte des Systems nur sechs willkürlich sind; ein erster beliebig herausgegriffener Punkt kann sich nämlich beliebig bewegen, liefert also drei Komponenten, ein zweiter muß sich auf der um den ersten geschlagenen Kugelfläche bewegen, liefert also nur zwei weitere Komponenten, ein dritter muß sich auf dem Schnittkreise der um die beiden ersten geschlagenen Kugeln bewegen, liefert also nur eine, die sechste Komponente, und alle übrigen Punkte liefern keine weiteren willkürlichen Verschiebungen. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ergibt also als notwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers die Gleichungen

$$(164) \quad \begin{cases} \sum X = 0 \quad , \quad \sum Y = 0 \quad , \quad \sum Z = 0 \quad , \\ \sum(yZ - zY) = 0 \quad , \quad \sum(zX - xZ) = 0 \quad , \quad \sum(xY - yX) = 0 \quad , \end{cases}$$

d. h. dieselben, welche oben [p. 265, Gleichungen (136)] auf anderem Wege abgeleitet wurden.

Fouriersches Prinzip. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen gilt in der obigen Form für starre Verbindungen der Systempunkte. Sind diese Verbindungen dagegen von einseitigem Charakter, sind also die Bedingungen des unfreien Systems nicht in Gleichungen, sondern in Ungleichungen, unter denen aber die Gleichung natürlich eingeschlossen ist, gegeben, so erfährt das Prinzip eine entsprechende, von FOURIER angegebene Modifikation; die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht ist dann nämlich

$$(165) \quad \sum R \cos\varphi\, \delta s \leqq 0 \quad .$$

Fälle, in welchen dieses Prinzip von Bedeutung wird, sind z. B. der Fall eines Punktes oder Körpers, der sich auf einer Fläche oder aus dieser heraus, aber nicht in sie hinein bewegen kann, ferner der Fall zweier durch einen biegsamen, aber unausdehnbaren Faden verbundenen Punkte, deren Entfernung demgemäß gleich oder kleiner als eine gegebene Größe sein muß.

Arten des Gleichgewichts.

Experimentelle Ermittelung des Schwerpunktes. Die experimentelle Bestimmung des Schwerpunktes wird sich, gerade wie die der Masse, an die Kraftdefinition halten; man wird also, wie dort das Gewicht, so hier den Mittelpunkt der Schwerkräfte bestimmen. Es ist auch ohne weiteres einleuchtend, wie man dabei zu verfahren hat. Man hängt den Körper oder die Fläche oder die Linie an einem Faden auf und legt die durch den Aufhängepunkt gehende Lotlinie fest; in ihr muß, damit das Moment der Schwerkraft verschwinde, der Schwerpunkt liegen; diese Linie kann man eine Schwerlinie nennen. Wiederholt man jetzt den Versuch mit veränderter Aufhängung, so erhält man eine zweite Schwerlinie; der Schnittpunkt beider ist demnach der Schwerpunkt. Die Probe würde ergeben, daß er auch in jeder weiteren Schwerlinie liegt, daß sich diese also sämtlich in einem Punkte, eben dem Schwerpunkte, schneiden. In geeigneten Fällen, namentlich bei flächenartigen Gebilden, kann man statt der Aufhängung auch die Balanzierung auf einer Schneide vornehmen, und zwar ebenfalls in zwei verschiedenen Lagen; man kann natürlich auch gleich mit einer Spitze versuchen, wenn dies vorteilhaft erscheint.

Die experimentelle Ermittelung des Trägheitsmoments wird, da sie an die dynamische Definition desselben anknüpft, besser auf die Dynamik verschoben.

Arten des Gleichgewichts. Es ist erforderlich, zunächst zu präzisieren, was man unter Gleichgewicht verstehen wolle. Denn Gleichgewicht, oder, wie wir hier der Bequemlichkeit halber einmal sagen wollen, Ruhe findet statt, wenn kein Anlaß zu Bewegung vorliegt. Diese Bewegung nun kann von verschiedenem Charakter sein, insbesondere sind die beiden Extreme der reinen Verschiebung und der reinen Drehung zu unterscheiden. Es wird also Verschiebungsgleichgewicht und Drehungsgleichgewicht geben; dazwischen aber werden zahllose Fälle gemischten Gleichgewichts liegen. Um für die beiden reinen Fälle zu einfachen Vorstellungen zu gelangen, wird man sich etwa für das Verschiebungsgleichgewicht einen Würfel, für das Drehungsgleichgewicht eine Kugel denken; jener kann in irgend einer Richtung gleiten, diese sich um irgend eine Achse oder um irgend einen Punkt — je nachdem man einfache oder zweifache Mannigfaltigkeit betrachten will — drehen. Nun ist aber einleuchtend, daß für das Verschiebungsgleichgewicht im wesentlichen nicht der Körper, sondern die Konfiguration seines Verschiebungsfeldes maßgebend ist; zur allgemeinen Charakterisierung des Gleichgewichts wird sich also der Fall der Drehung besser eignen.

Neutrales, stabiles und labiles Gleichgewicht. Von der Lage des Schwerpunktes hängt es nicht nur ab, ob der betreffende Körper sich im Gleichgewicht befinde oder nicht, sondern auch, von welcher der drei Arten, die man in bezug auf das Gleichgewicht unterscheiden kann, dasselbe ist. Man bezeichnet einen Gleichgewichtszustand als:

1. Neutral oder indifferent, wenn die Lage, in die das betreffende System durch eine kleine Bewegung gebracht werden kann, ebenfalls eine Gleichgewichtslage ist. Beispiel: Homogene Kugel auf einer horizontalen Ebene.

2. Stabil, wenn das System in irgend einer Richtung ein wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt und dann sich selbst überlassen, entweder unmittelbar oder nach einigen Schwingungen die ursprüngliche Lage wieder annimmt. Beispiele: Eine homogene Kugel im tiefsten Punkte der Höhlung einer hohlen Fläche; eine an einem Faden vertikal herabhängende Kugel; eine um den Berührungspunkt herum im Vergleich zu den übrigen Teilen schwerere Kugel auf einer horizontalen Ebene.

3. Labil oder instabil, wenn das System in irgend einer Richtung so verschoben werden kann, daß es, sich selbst überlassen, sich immer weiter von

der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt. Beispiele: Eine homogene Kugel auf dem höchsten Punkte einer gewölbten Fläche; eine auf einer Spitze stehende Kugel; eine um ihren höchsten Punkt herum im Vergleich zu ihren übrigen Teilen schwerere Kugel auf einer horizontalen Ebene.

Für diese drei Arten von Gleichgewichtszuständen kann man nun einerseits geometrische, andererseits analytische Kriterien aufstellen. Es mögen zunächst die ersteren betrachtet werden. Dabei soll der Deutlichkeit halber derjenige Punkt, welcher bei der in Gedanken auszuführenden Bewegung des Körpers fest bleibt, Drehpunkt genannt werden. Nun ist klar, daß die den Drehpunkt und den Schwerpunkt verbindende Linie ihre vertikale Richtung bei der Lagenänderung nicht beibehalten kann; soll trotzdem, wie es das neutrale Gleichgewicht verlangt, auch in der neuen Lage Gleichgewicht sein, so darf jene Linie überhaupt nicht existieren, der Schwerpunkt muß mit dem Drehpunkte zusammenfallen. Im neutralen Gleichgewicht liegt also der Schwerpunkt im Drehpunkte.

Beim stabilen Gleichgewicht soll die durch die Lagenänderung ein wenig geneigte Drehpunkt-Schwerpunktlinie durch die Schwerkraft wieder in die ursprünglich vertikale Lage gebracht werden, was nur möglich ist, wenn die Kraft an ihrem unteren Endpunkte angreift; dieser muß also der Schwerpunkt, der obere der Drehpunkt sein; umgekehrt soll beim labilen Gleichgewicht die durch die kleine Lagenänderung erzeugte Neigung der betrachteten Linie noch gesteigert werden, was nur geschehen wird, wenn die Schwerkraft am oberen Endpunkte angreift; hier muß also der obere Punkt der Schwerpunkt, der untere der Drehpunkt sein.

Es ergibt sich also der Satz: *Beim neutralen Gleichgewicht liegt der Schwerpunkt im Drehpunkte, beim stabilen senkrecht unter ihm, beim labilen senkrecht über ihm.*

In manchen Fällen sind in derselben Lage des Körpers zwei oder auch alle Arten des Gleichgewichts gleichzeitig vorhanden. Beispiele: Eine auf ihrem Rande stehende Münze ist für Drehungen in ihrer Ebene, sowie für Drehungen um ihren vertikalen Durchmesser in neutralem, für Drehungen um die horizontale, durch den Berührungspunkt in ihrer Ebene gelegte Achse dagegen im labilen Gleichgewicht. Eine auf einem Sattel ruhende Kugel ist nach den beiden Bergseiten zu in stabilem, nach den beiden Talseiten zu in labilem, endlich in zwei gewissen diagonalen Richtungen in neutralem Gleichgewicht.

Gleichgewicht auf mehreren Punkten. Bisher wurde ein einziger Punkt als fest angenommen. Sind deren zwei vorhanden, so kann eine Drehung nur um ihre Verbindungslinie als Achse erfolgen; die Bedingung für das Gleichgewicht wird also die sein, daß die Summe der statischen Momente der Kräfte in bezug auf diese Achse null sei. Bei der Schwerkraft insbesondere muß der Schwerpunkt in der durch jene Achse gelegten Vertikalebene liegen; und das Gleichgewicht ist stabil, indifferent oder labil, je nachdem er unter, in oder über dieser Achse liegt; indifferent ist es auch dann, wenn die Achse selbst vertikal ist, und zwar bei beliebiger Lage des Schwerpunktes — ein Fall, für den eine Tür das nächstliegende Beispiel ist (vgl. weiter unten über das Horizontalpendel).

Wird ein Körper mit drei in einer Horizontalebene liegenden Stützpunkten von der Schwerkraft angegriffen, so ist er im Gleichgewicht, wenn die Vertikale durch den Schwerpunkt die Basis innerhalb des durch die Stützpunkte gebildeten Dreiecks trifft. Bei mehr als drei Punkten tritt an die Stelle des Dreiecks das betreffende Polygon.

Reaktionsdruck. Bei einem einzigen Stützpunkte hat dieser natürlich den ganzen Reaktionsdruck, d. h. das Gewicht des Körpers auszuhalten; bei zwei Stützpunkten wird sich der Druck auf beide in gewisser, durch die Konfiguration bestimmter Weise verteilen. Im allgemeinen erfährt aber in diesem Falle die Achse nicht nur einen Druck in ihrer Richtung, sondern auch einen Querdruck

und außerdem die Wirkung eines Kräftepaares, das eine Biegung hervorzubringen strebt.

Prinzip der virtuellen Verrückungen; Arbeitskriterium des Gleichgewichts. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen läßt eine noch viel kürzere und anschaulichere Ausspruchsweise zu, als sie oben gegeben wurde. Denn das Produkt der Kraft in die in ihre Richtung fallende Komponente der Verrückung ist die Arbeit der Kraft; man erhält also die neue Form (A die virtuelle Arbeit):

$$\sum A = 0 \quad ; \tag{166}$$

in Worten: Gleichgewicht findet statt, wenn für jedes mögliche System von Verrückungen die gesamte Arbeit null ist. Man kann den Satz daher auch als Satz von der virtuellen Arbeit bezeichnen.

Führt man nun die potentielle Energie ein, deren Abnahme die nach außen geleistete Arbeit ist, so erhält man

$$\sum \delta V = 0 \quad ; \tag{167}$$

dies besagt, daß die potentielle Energie im Gleichgewichtszustand des Systems einen ausgezeichneten Wert hat, derart, daß sie gegenüber den Werten in Nachbarzuständen entweder ein Maximum oder ein Minimum ist, wenn sie nicht gar mit diesen Nachbarwerten übereinstimmt. Man sieht sofort, daß hier drei Möglichkeiten vorliegen, und man wird schon von vornherein vermuten, daß diese den drei oben charakterisierten Arten des Gleichgewichts entsprechen. In der Tat lehrt eine einfache Betrachtung, daß die potentielle Energie eines Systems beim stabilen Gleichgewicht ein Minimum, beim labilen ein Maximum und beim neutralen eine Konstante sein muß.

Es ist nicht unwichtig, sich ganz besonders zu vergegenwärtigen, worin hiernach das Charakteristikum des eigentlichen, nämlich stabilen oder „echten" Gleichgewichts (im Gegensatz zum „unechten") besteht: die potentielle Energie ist ein Minimum und — das ist das Interessanteste an dem Zustande — die kinetische Energie ist ebenfalls ein Minimum, nämlich im Ruhezustande null. Vom Standpunkte des Erhaltungsprinzips aus ist daher, wenn man nur an mechanische Energie denkt, der Eintritt von Ruhe im Verlaufe einer Bewegung unmöglich; Ruhe kann nur als Ergebnis der Zerstreuung von Energie eintreten. Ferner muß man, um nicht auf grelle Widersprüche zu stoßen, sich über das Vorzeichen des veränderlichen Gliedes der potentiellen Energie in dem betreffenden Falle Klarheit verschaffen — was, wie die Literatur lehrt, z. B. hinsichtlich der Gravitation fast nirgends geschieht. Hier ist nämlich die potentielle Energie, wenn vom Massenfaktor abgesehen wird, nicht etwa $1/r$ — wenn sie das wäre, würde sie ja mit Annäherung immer größer werden — sondern sie ist, wenn C eine sehr große Konstante ist, gleich $C - 1/r$; es hängt das mit dem Umstand zusammen, daß hier positive Massen eine negative Kraft (Anziehung) liefern.

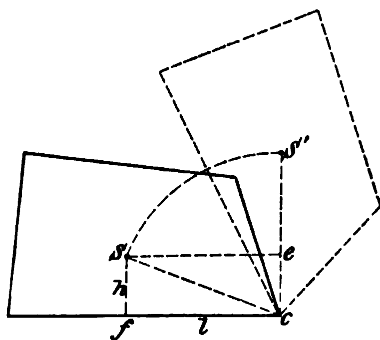
Auch das Virial kann man zur Kennzeichnung der Art des Gleichgewichts benutzen; das Gleichgewicht ist nämlich in bezug auf eine Achse stabil, indifferent oder labil, je nachdem das Virial in bezug auf diese Achse negativ, null oder positiv ist.

Besitzt das System eine Gleichgewichtsachse, so ist das Gleichgewicht in bezug auf diese indifferent, und man spricht von Astasie oder von einem astatischen System. Bei einem solchen bleibt einmal vorhandenes Gleichgewicht bestehen, wenn der Körper gegen die Kräfte oder das System der Kräfte gegen Körper gedreht wird. Von besonderer Wichtigkeit ist dieser Fall bekanntlich den bei magnetischen Systemen; auch in der Mechanik spielt er bei gewissen Untersuchungen, auf die indessen hier nicht eingegangen werden kann, eine wichtige Rolle.

Über das labile Gleichgewicht, die in seiner Umgebung möglichen Bewegungen und die energetischen Beziehungen dabei sind in neuester Zeit wichtige Arbeiten von LIAPUNOW, KNESER, PAINLEVÉ u. A. erschienen, auf die hier nur hingewiesen werden kann.[1]

Standfestigkeit. Von der Lage des Schwerpunktes hängt nicht bloß die Natur des Gleichgewichts, sondern auch die größere oder geringere Fähigkeit des betreffenden Körpers ab, äußeren Einflüssen, welche eine Drehung desselben zu bewirken streben, Widerstand zu leisten. Die Stabilität eines Körpers ist z. B. desto größer, je tiefer der Schwerpunkt unter dem Drehpunkte liegt; in demselben Verhältnis ist natürlich seine Empfindlichkeit gegen Änderungen in der Verteilung seiner Massen kleiner (s. Artikel „Messung von Massen und Kräften"). Das stabile Gleichgewicht kommt praktisch außer in besonderen Fällen (wie dem obigen der Kugel auf der Hohlfläche) nur bei Körpern vor, welche in einem Punkte hängen, nicht aber bei solchen, welche auf einem Punkte stehen; im letzteren Falle ist vielmehr dieser Stützpunkt gewöhnlich auch Drehpunkt, das Gleichgewicht ist labil und der Körper fällt bei der leisesten Lagenänderung um. Eine Ausnahme findet nur dann statt, wenn der Körper eine so große Trägheit hat, daß man jene Lagenänderungen durch geschickte Bewegungen stets momentan wieder ausgleichen kann (Balanzieren); oder in dem anderen Falle, wo die Masse des Körpers rings um den Stützpunkt so weit abwärts reicht, daß der Schwerpunkt außerhalb der Masse des Körpers unter den Stützpunkt in die Masse des Stützkörpers hineinfällt. Beispiele: Ein im Mittelpunkte seiner inneren Bodenfläche auf einer Nadelspitze stehender Topf; ein Korkpfropfen, der für sich auf einer Nadelspitze im labilen, dagegen, wenn man vier Gabeln schräg nach unten in seine Peripherie spickt, im stabilen Gleichgewicht ist.

Um nicht nur im stabilen Gleichgewicht zu sein, sondern diese Lage auch mit einer gewissen Festigkeit behaupten zu können, d. h. um „standfest" zu sein, muß ein Körper durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, unterstützt sein. Die Bedingung ist dann die, daß das vom Schwerpunkte gefällte Lot zwischen die drei gedachten Punkte falle. Wollte man nämlich einen solchen Körper um eine der drei Kanten des durch die Stützpunkte gebildeten Dreiecks drehen, so würde nicht nur der Körper, sich selbst überlassen, wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehren, es sei denn, daß man die Drehung über die Lage, in welcher der Schwerpunkt sich senkrecht über der Drehkante befindet, hinaus fortsetzt; sondern der Körper würde dieser Drehung selbst schon Widerstand leisten, weil bei dieser Drehung (Figur 66) der Schwerpunkt von s bis s' gehoben, also Arbeit geleistet werden muß. Diese Arbeitsgröße, also die Hubhöhe es' wird demgemäß auch das Maß der Standfestigkeit abgeben; bezeichnet man die Höhe des Schwerpunktes über der Grundfläche, also fs, mit h und die Entfernung des Fußpunktes f von der Drehkante c, also fc, mit l, so hat man offenbar



Figur 66.

$$es' = cs' - ce = cs - fs = \sqrt{(l^2 + h^2)} - h \quad ,$$

[1] A. LIAPUNOW, Journ. de Math. (5) **3.** 81. 1897. — F. LEVI-CIVITÀ, Atti Ist. Ven. (7) **8.** 1897. — A. KNESER, Sitz.-Ber. Dorp. Naturf.-Ges. 1896. p. 153; CRELLES Journ. **115.** 308. 1895; **118.** 186. 1897. — P. PAINLEVÉ, C. R. **124.** 1222. 1897; **124.** 1340. 1897; **125.** 1021. 1897.

und da die Standfestigkeit S außerdem ebenso wie die zu leistende Arbeit dem im Schwerpunkte vereinigt zu denkenden Gewicht G des Körpers proportional ist,

$$(168) \qquad S = G(\sqrt{l^2 + h^2} - h) \quad ;$$

die Standfestigkeit ist also desto größer, je schwerer der Körper, je breiter seine Basis ist und je tiefer sein Schwerpunkt liegt. Wie man außerdem sieht, bezieht sich die Standfestigkeit immer nur auf eine bestimmte Kante, und es kann daher die Standfestigkeit eines Körpers nach verschiedenen Richtungen eine sehr verschiedene sein. Von besonderer Wichtigkeit ist die Standfestigkeit von Körpern, welche im großen und ganzen homogen und im Vergleich zu ihrer Höhe schmal sind, z. B. von Mauern; man kann dann aus der obigen Formel die einfachere

$$(169) \qquad S = G\left(h + \frac{1}{2}\frac{l^2}{h} - h\right) \quad , \quad \text{also} \quad S = \frac{G l^2}{2 h}$$

herleiten, welche zeigt, daß durch gleichmäßige Verdoppelung der Breite die Standfestigkeit verachtfacht, durch Verdoppelung der Breite nur an der Basis vervierfacht wird, daß sie dagegen bei Verdoppelung der Höhe ungeändert bleibt. Das letztere Ergebnis mag befremden, man muß aber erwägen, einmal, daß es sich hier nur um die Mauer als Ganzes (nicht um das Herabfallen eines Teiles vom anderen), und sodann, daß es sich auch für die Mauer als Ganzes um zwei verschiedene Dinge handelt: einmal um die Arbeit, welche aufgewendet werden muß, um die Mauer umzukanten, und diese, also nach unserer Definition die Standfestigkeit, ist von der Höhe unabhängig, weil in demselben Maße, in welchem die Hubhöhe des Schwerpunktes mit wachsender Höhe der Mauer abnimmt, das zu hebende Mauergewicht zunimmt; und andererseits um den Drehungswinkel, welcher genügt, um die Mauer ins labile Gleichgewicht zu bringen, und dieser ist desto kleiner, je höher die Mauer ist. Es werden also bei der höheren Mauer unbedeutendere Verschiebungen, wenn auch mit demselben Kraftaufwand, den Einsturz bewerkstelligen.

Statische Experimente. Für didaktische Zwecke ist es von Wert, die Gesetze des Gleichgewichts auch induktiv zu behandeln, wobei freilich scharf betont werden muß, inwieweit es sich bei den betreffenden Feststellungen um Erfahrungstatsachen und inwieweit es sich vielmehr um Definition von Begriffen handelt — eine Unterscheidung, die in vielen Darstellungen, z. B. in betreff des Parallelogramms der Kräfte, zu wünschen übrig läßt. Für die gedachte induktive Behandlung sind vielfach, und auch noch in neuester Zeit, Apparate konstruiert worden, mit denen man die Verhältnisse in einer für Lehrzwecke geeigneteren Form darlegen kann, als dies Maschinen, die für die Praxis gebaut sind, erlauben. Als Beispiele seien erwähnt ein von TÖPLER herrührender und von HENNIG[1] beschriebener Vorlesungsapparat und ein System von Apparaten von WILHELM NEU.[2] Jener besteht im Prinzip aus einer schweren gußeisernen Kreisscheibe, deren glatte Unterseite auf einer Unterlage mittels dreier Kugeln möglichst reibungslos ruht; an der Oberseite lassen sich mittels konischer Löcher Fäden befestigen und über Rollen durch Gewichte spannen, während in den Rand Rillen eingedreht sind, um die die Fäden geschlungen werden können; das erstere Fädensystem stellt Kräfte, das letztere Kräftepaare auf die Scheibe dar. Mit dem Apparat kann man Versuche über das Kräftepolygon, über das Gleichgewicht und den Mittelpunkt paralleler Kräfte sowie ebener Kräftepaare, über das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten u. s. w. anstellen, und zwar sowohl für freie als auch für bedingte Systeme. Bei den Apparaten von NEU werden die Kräfte mit Hilfe elastischer

[1] R. HENNIG, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **1.** 137. 1888. — [2] W. NEU, Programm Realgymn. Augsburg 1894; vgl. auch Ztschr. z. Förd. d. phys. Unt. **2.** 1885.

„Tarierdrähte" gemessen. — Auch V. v. LANG[1] hat einen Demonstrationsapparat angegeben.

Relatives Gleichgewicht. Die Aussage, daß ein Körper im Gleichgewicht sei, z. B. daß er ruhe, bezieht sich (vgl. „Grundbegriffe", p. 28) immer auf ein bestimmtes Bezugssystem, sei es nun, daß dieses, soweit bekannt, im Weltraume ruht, oder daß es mit der Erde fest verbunden ist u. s. w. Dabei ist es für die relative Gleichgewichtskonfiguration gleichgültig, ob der Bezugskörper selbst ruht oder sich gleichförmig bewegt; nicht aber, ob er sich beschleunigt bezw. verzögert bewegt. Jede Änderung des Bewegungszustands zeigt sich auch in der Art des Gleichgewichtszustands. Hierher gehören zunächst die Beharrungserscheinungen bei miteinander bewegten Körpern, die eintreten, wenn einer dieser Körper in seinem Bewegungszustand geändert, z. B. plötzlich in Bewegung versetzt oder plötzlich angehalten wird, wobei dann der andere Körper seine bisherige Bewegung fortsetzt und damit seine Lage zum ersten Körper ändert. Ferner bietet sich für das Drehgleichgewicht das einfache Beispiel des Fadens, der von einem Punkte herabhängt, der sich selbst horizontal fortbewegt. Erfolgt diese Bewegung gleichförmig, so hängt das Pendel senkrecht herunter, gerade wie bei ruhendem Aufhängepunkt; bei beschleunigter Bewegung hängt es dagegen unter einem Winkel nach rückwärts, dessen Tangens gleich dem Verhältnis der horizontalen Beschleunigung des Aufhängepunktes zur vertikalen Beschleunigung durch die Schwere ist; und bei verzögerter Bewegung hängt der Faden in demselben Maße nach vorn. Die Beschleunigung des Bezugssystems ist sonach wie eine Kraft zu behandeln, die sich mit den übrigen Kräften kombiniert. Schließlich sei daran erinnert, daß mit den hier in Betracht kommenden physikalischen Verhältnissen die psychischen im Einklange stehen, insofern die gleichförmige Bewegung als solche nicht empfunden wird, vielmehr ohne fremde Anhaltspunkte von der Ruhe nicht zu unterscheiden ist; während jede Änderung der Bewegung empfunden wird, und zwar Beschleunigung als Vorwärts-, Verzögerung als Rückwärtsbewegung.

Einfache Maschinen.

Allgemeines. Unter der Bezeichnung „einfache Maschinen" faßt man eine Reihe von Apparaten zusammen, die den Charakter von Maschinen haben, insofern sie dazu dienen, die in der Natur vorkommenden Verhältnisse in einer für die praktische Anwendung geeigneten Weise umzugestalten, insbesondere in bezug auf Richtung, Konfiguration, Größe der dabei auftretenden Einzelgrößen zu dirigieren, zu spezialisieren oder zu modifizieren, und welche den Charakter der Einfachheit aufweisen, insofern sie keine Gliederung und Zusammensetzung in konkreter und kein Zusammenwirken verschiedener Prinzipien und Vorgänge in abstrakter Hinsicht darbieten. Namentlich gehören hierher der Hebel, die Rolle, die schiefe Ebene, der Keil und das Zahnrad. Andere hierher gehörige Maschinen sind spezielle Formen oder Anwendungen der oben genannten Maschinen, z. B. die Wage ein auf dem Hebel beruhender Meßapparat (s. Artikel „Wage"), noch andere Modifikationen oder Kombinationen derselben, so das Wellrad ein modifizierter Hebel, die Schraube eine modifizierte schiefe Ebene, der Flaschenzug eine Kombination von Rollen, der Bohrer eine Kombination von Keil und Schraube.

Das, was diese Maschinen leisten, ist ein Mehrfaches und kann unter die folgenden Gesichtspunkte gebracht werden: 1. Änderung der Kraftrichtung (einzelne Rolle). 2. Änderung des Angriffspunktes der Kraft (Zahnräder,

[1] V. v. LANG, Ztschr. f. Instrumentenk. **3.** 159. 1883.

Seilräder). 3. Vergrößerung der Kraft auf Kosten Schnelligkeit der Leistung oder auf Kosten des zurückgelegten Weges bezw. der Hubhöhe, oder umgekehrt Beschleunigung der Leistung auf Kosten des Kraftaufwands (Hebel, schiefe Ebene). 4. Vereinigung mehrerer dieser Leistungen, namentlich der Vergrößerung der Kraft und der Richtungsänderung (Flaschenzug, Keil).

Andererseits kann man sich die Frage vorlegen, wie man die einfachen Maschinen nach den Grundlagen und der Art ihrer Wirkung zu klassifizieren habe. Da bietet sich nun zunächst die Unterscheidung zweier Klassen dar: der Maschinen mit fortschreitender Bewegung (schiefe Ebene u. s. w.) und der Maschinen mit drehender Bewegung (Hebel, Zahnrad u. s. w.); dabei stellt sich indessen sofort eine dritte Klasse von Apparaten ein, bei denen beide Bewegungsarten miteinander kombiniert sich vorfinden (bewegliche Rollen, Schraube); auch wird hiermit der Charakter des Bewegungsvorgangs offenbar noch nicht erschöpfend festgelegt. Man kann auch, in einem gewissen Parallelismus mit der eben angegebenen Gliederung, die Einteilung nach dem zugrunde zu legenden Prinzip treffen, wobei das sogen. Hebelprinzip und das Prinzip der virtuellen Verrückungen gewöhnlich in einen Gegensatz zu dem Prinzip vom Parallelogramm bezw. von der Zusammensetzung der Kräfte gebracht wird, was, bei der nahen erkenntnistheoretischen Beziehung zwischen diesen Sätzen nicht eben von wesentlicher Bedeutung ist. So ist denn in diese Lehre mit der Zeit eine gewisse Unklarheit gekommen, die man neuerdings, namentlich für didaktische Zwecke, zu beseitigen sich bemüht hat, worüber besonders auf die Arbeiten von Grimsehl[1] hinzuweisen ist. Eine prinzipielle Gliederung der einfachen Maschinen hat u. a. Reuleaux[2] versucht; er unterscheidet Drehkörperpaar (Hebel), Prismenpaar (schiefe Ebene), Schraubenpaar (Schraube), Tracke (Seil an der Rolle u. s. w.). Im folgenden sollen, in Anbetracht dieser Schwierigkeiten, die einfachen Maschinen ohne besondere Rücksicht auf prinzipielle Gliederung angeführt werden.[3]

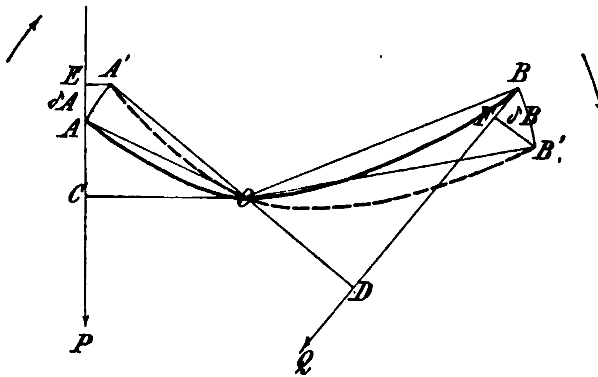
Erhaltung und Vergeudung von Energie. Schließlich ist zu beachten, in welcher Beziehung die Apparate zu den beiden Hauptsätzen stehen. Gewöhnlich behandelt man sie lediglich vom Standpunkt des Erhaltungsprinzips, was auch im folgenden geschehen soll; d. h. man nimmt an, daß die Leistung gleich dem Aufwande sei. Mit anderen Worten, man läßt die Verluste, die durch Reibung u. s. w. entstehen, und denen eine Umsetzung in Wärme und andere Energieformen entsprechen, außer Acht. Für strengere Zwecke und im Hinblick auf wirkliche praktische Anwendung ist das natürlich nicht mehr erlaubt. Man muß dann die Reibung irgendwie einführen, und es geschieht das meist mit Hilfe von Konstanten, die man empirisch bestimmt. Die Folge davon ist dann, daß die Maschine nur noch einen bestimmten, unter 1 bezw. 100 % liegenden Wirkungsgrad besitzt, der neben den für sie geltenden Hauptgesetzen für ihre Anwendung mit maßgebend wird. Man vergleiche hierüber die technischen Lehr- und Handbücher sowie den Abschnitt über Reibung.

Hebelprinzip. Ein Hebel im allgemeinsten Sinne des Wortes besteht aus zwei starren, von einem festen Punkte ausgehenden und in diesem starr miteinander verbundenen, in einer und derselben vertikalen Ebene verlaufenden geraden Linien. Der feste Punkt heißt der Drehpunkt; er ist gewöhnlich in der Wirklichkeit durch eine auf der genannten Vertikalebene senkrechte, kurze Dreh-

---

[1] E. Grimsehl, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **15.** 138. 1902; **16.** 65. 1903; **17.** 129. 1904. — [2] F. Reuleaux, Kinematik **2.** 1900; Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **16.** 1. 1903. — Auf die weitere didaktische Literatur kann hier nicht eingegangen werden. — [3] Eine überaus interessante Darstellung der historischen Entwickelung der Vorstellungen von dem Wesen der statischen Apparate und damit der Statik überhaupt hat E. Mach in seiner Mechanik (Leipzig 1883, seitdem mehrere Neuauflagen) gegeben. — Näheres in technischer Hinsicht findet man in den Hand- und Lehrbüchern von Weisbach u. A.

achse ersetzt, wodurch horizontale Schwankungen besser ausgeschlossen sind; hiervon und von dem Gewicht des Hebels soll im folgenden abgesehen werden. Dagegen soll an jedem seiner Endpunkte eine Kraft in beliebiger Richtung wirken; die Verallgemeinerung der für diesen Fall gültigen Betrachtungen für den Fall, daß außerdem auch in anderen Punkten des Hebels Kräfte angreifen, z. B. die in den Schwerpunkten vereinigt gedachten Gewichte der beiden Linien, wird keine Schwierigkeit darbieten. Es fragt sich alsdann, unter welchen Umständen die beiden Kräfte P und Q im Gleichgewicht sind. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen gibt die Antwort hierauf ohne weiteres. Sind nämlich δA und δB von den Verrückungen, welche die Punkte A und B bei einer kleinen Drehung erfahren, die Komponenten in der Richtung der Kräfte P und Q, so muß



Figur 67.

$$P\delta A + Q\delta B = 0$$

sein oder vielmehr, wenn berücksichtigt wird, daß δA von A aus in der der Kraft entgegengesetzten Richtung verläuft

(170) $$-P\delta A + Q\delta B = 0 \quad , \qquad \text{also} \qquad P\delta A = Q\delta B \quad .$$

Die wirklichen Verrückungen AA' und BB', von welchen $AE = \delta A$ und $BF = \delta B$ die nach den Kraftrichtungen genommenen Komponenten sind, sind Kreisbögen von in Anbetracht der Starrheit des Winkels gleichen Zentriwinkeln, AOA' und BOB', aber verschiedenen Radien OA und OB; sie verhalten sich also zueinander wie diese Radien. Bedenkt man nun, daß man diese Bögen ihrer Kleinheit wegen als gerade Linien betrachten kann, fällt man vom Drehpunkte O die Senkrechten OC und OD auf die Kraftrichtungen und nennt man die Winkel, welche δA mit AA' und δB mit BB' bildet, also auch die Winkel AOC und BOD α und β, so hat man

$$\delta A = AA' \cos\alpha \quad , \qquad \delta B = BB' \cos\beta \quad ,$$

und ebenso $$OC = OA \cos\alpha \quad , \qquad OD = OB \cos\beta \quad ;$$

andererseits: $$AA' : OA = BB' : OB \quad ; \qquad \text{mithin} \qquad OC : OD = \delta A : \delta B \quad .$$

Setzt man für δA und δB diese ihnen proportionalen Werte in die Gleichung (170) ein, so erhält man

(171) $$P \cdot OC = Q \cdot OD \quad .$$

OC und OD heißen die Hebelarme, die Produkte aus Kraft und zugehörigem Hebelarme die statischen Momente des Hebels. In Worten lautet daher die Gleichung: Damit der Hebel im Gleichgewicht sei, müssen die statischen Momente einander gleich sein.[1]

[1] Sachlich nicht stichhaltig, aber historisch interessant ist der ARCHIMEDES-GALILEIsche Beweis des Hebelgesetzes, siehe z. B. MACH, Die Mechanik.

Wirken an beiden Hebelteilen mehrere Kräfte, so tritt an die Stelle der obigen Gleichung die allgemeinere

$$(172) \qquad \sum Pa = \sum Qb \quad ,$$

wo a und b die Abstände der verschiedenen linksseitigen bezw. rechtsseitigen Kraftangriffspunkte vom Drehpunkte, senkrecht zu den bezw. Kraftrichtungen sind. Hierin ist auch der Fall enthalten, daß der Hebel eigenes Gewicht besitzt, also, wie man auch sagt, kein mathematischer, sondern ein physischer Hebel ist. Wirken dann außer den Gewichten G und H der beiden Hebelseiten nur noch in den Endpunkten die Kräfte P und Q, sind ferner a und b die Hebelarme, c und d die Abstände der Schwerpunkte der beiden Hebelseiten vom Drehpunkte, so ist

$$(173) \qquad Pa + Gc = Qb + Hd \quad .$$

Der Zug der Kräfte und Gewichte überträgt sich natürlich durch die starren Seiten des Hebels auf den Drehpunkt; auf diesen wirkt also die Resultierende aller dieser Kräfte; hiernach kann man die Stärke und Festigkeit beurteilen, welche man dem Drehpunkte oder eventuell dem denselben tragenden Stativ geben muß, damit er imstande sei, jener Gesamtwirkung Widerstand zu leisten.[1]

Die Gleichung (171) bezw. (172) ist, wie gezeigt, die Bedingung des Gleichgewichts; welcher Art dieses Gleichgewicht ist, ob es nämlich indifferent, stabil oder labil ist, hängt davon ab, ob der Gesamtschwerpunkt in, unter oder über dem Drehpunkte liegt (s. oben p. 274). Der Hebel mit indifferentem Gleichgewicht verharrt in jeder beliebigen, derjenige mit stabilen nur in einer bestimmten Stellung, nämlich in derjenigen, in welcher der Gesamtschwerpunkt vertikal unter dem Drehpunkte liegt, der Hebel mit labilem Gleichgewicht endlich schlägt um und verwandelt sich dadurch in einen solchen mit stabilem Gleichgewicht.

Formen des Hebels. Je nach der Gestalt kann man zwischen geradlinigen und krummlinigen Hebeln unterscheiden; ein prinzipieller Unterschied wird jedoch hierdurch nicht bedingt, da man sich die beiden krummen Teile eines krummlinigen Hebels meist ohne weiteres ersetzt denken kann durch die geradlinigen Verbindungen des Drehpunktes mit den beiden Enden[2]; nur wenn auch an den Zwischenstellen Kräfte wirken, ist dies nicht ohne weiteres möglich. Greifen nur an den Enden Kräfte an und zwar, was häufig der Fall ist, in senkrechter Richtung, so sind die beiden geraden Linien selbst die Hebelarme. Ein geradliniger Hebel ist im allgemeinen, da die beiden geraden Linien im Drehpunkte einen Winkel miteinander bilden, ein Winkelhebel. Derartige Winkelhebel kommen z. B. bei der Briefwage vor, wo sie zu Messungen dienen, ferner zur Arbeitsleistung dienend bei manchen Werkzeugen; so dient der Hammer außer seinem Hauptzwecke noch dem Nebenzwecke, mittels einer geschlitzten Metallkante kleine Gegenstände, wie Nägel, aus sehr festen Verbindungen zu befreien: in dieser Beziehung ist er ein Winkelhebel und dient, da die Kraft an dem weit längeren Stiele angreift, zur vergrößerten Übertragung dieser Kraft an das Ende des anderen Armes. Eine große Rolle spielt die Wirkung von Winkelhebeln beim Mechanismus des menschlichen und tierischen Körpers, insbesondere des Knies, wie denn auch statt Winkelhebel vielfach Kniehebel gesagt wird.

---

[1] Der bei allen einfachen Maschinen auftretende Druck auf die Achse wird, als nur technischen Interesses, im folgenden nicht berührt. Messen kann man diesen Druck, indem man den Drehpunkt nicht fest, sondern an einer festen Rolle (s. u.) aufhängt; an das um diese geschlungene Seil muß man dann ein Gewicht gleich der Resultierenden von P und Q, z. B. bei Parallelkräften das Gewicht $P + Q$ hängen, damit Gleichgewicht stattfinde. — [2] OA und OB in Figur 67.

Besonders häufige Spezialfälle sind die beiden, wo der Winkel des Hebels gleich 180° oder gleich 0° wird; im ersten Falle erhält man den zweiarmigen und speziell, wenn die beiden Arme gleich lang sind, den gleicharmigen Hebel, im letzteren Falle den einarmigen Hebel. Der gleicharmige Hebel, bei welchem Kraftersparnis offenbar ausgeschlossen ist, dient nur zur Kraftübertragung und gleichzeitigen Richtungsumkehr, also in Fällen, wo der Angriffspunkt der Last unzugänglich ist, wo ein Abwärtsziehen bequemer ist als ein Aufwärtsziehen oder umgekehrt, oder wo beide Methoden miteinander abwechseln sollen (z. B. manche Konstruktionen von Pumpenstengeln, Orgelgebläsen u. s. w.), endlich zu direkten Wägungen (s. Artikel „Wage"). Beim ungleicharmigen, gleichviel ob ein- oder zweiarmigen Hebel hat man praktisch die beiden Fälle zu unterscheiden, wo die Kraft am längeren, die zu überwindende Last am kürzeren, oder umgekehrt die Kraft am kürzeren, die Last am längeren Hebelarme wirkt; im ersteren Falle findet Kraftersparnis (d. h. Kraftvergrößerung) auf Kosten des Zeitaufwands, im letzteren Zeit- oder Wegersparnis auf Kosten von Kraftaufwand statt. Die Schere bietet ein Beispiel für beide Fälle dar, und zwar in den meisten Formen für den ersten, als Papierschere für den zweiten. Die Schere ebenso wie die Zange sind zweiarmige, der Nußknacker ein einarmiger Hebel. Jedoch ist zu bemerken, daß diese drei Werkzeuge streng genommen keine einfachen Hebel sind, sondern, ihrem Zwecke entsprechend, Verbindungen je zweier Hebel mit gemeinschaftlichem Drehpunkte. Ein einfacher Hebel, und zwar ein einarmiger, ist dagegen z. B. ein gehobener, ruhender Schiebkarren; daß durch Fortrollen des Drehpunktes oder vielmehr des um denselben angebrachten Rades der ganze Apparat eine fortschreitende Bewegung ausführen kann, kommt hier nicht in Betracht.

Zusammengesetzter Hebel. Eine Reihe von Hebeln, welche derart verbunden sind, daß sie mit ihren sukzessiven Enden aufeinander wirken, nennt man einen zusammengesetzten Hebel. Von Wichtigkeit ist hier namentlich der Fall, daß nur am Anfang des ersten und am Ende des letzten Hebels Kräfte wirken. Es findet in diesem Falle Gleichgewicht statt, wenn das Produkt der einen Kraft mit dem Produkt aller ihr zugewandten Hebelarme gleich ist dem Produkt der anderen Kraft mit dem Produkt aller dieser zugewandten Hebelarme. Durch passende Wahl der Längenverhältnisse der Arme kann man auf diese Weise offenbar eine große Kraftersparnis erzielen. Die Brückenwage (s. Artikel „Wage") liefert ein Beispiel hierfür.

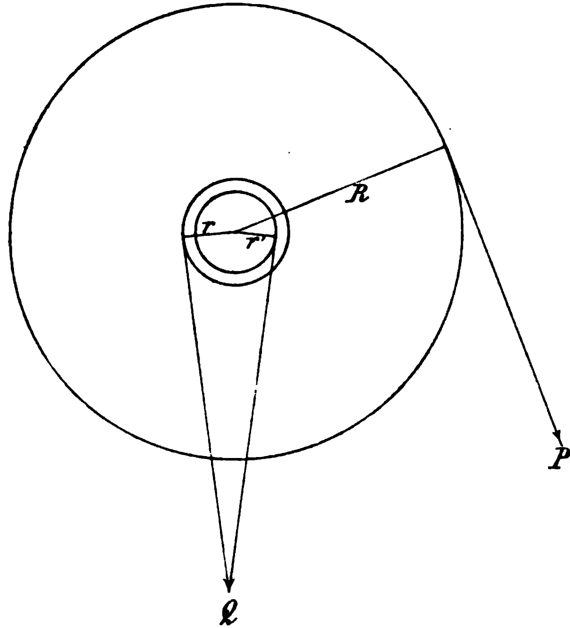
Rad an der Welle. Zu einer Modifikation des Hebels gelangt man, wenn man im Drehpunkte desselben auf der Hebelebene eine Senkrechte errichtet und den einen der beiden Hebelarme an einen beliebigen anderen Punkt dieser Senkrechten, der sogen. Welle, verpflanzt, ohne im übrigen seine Richtung zu ändern. Wie man nämlich häufig zum Angriffspunkte der Last keinen Zugang hat, so hat man nicht selten überhaupt zur Ebene, in der die Last wirkt, keinen Zugang; die Welle ermöglicht es alsdann, die Kraft nicht nur an einem anderen Punkte, sondern sogar in einer anderen Ebene angreifen zu lassen. Überdies gewinnt man dabei den Vorteil, daß die Drehungen des einen und die des anderen Hebelarmes sich nun gegenseitig nicht mehr stören können. Ein einfaches Beispiel bietet der Schlüssel: Der Schaft ist die Welle, die Breite des Bartes der Hebelarm der Last (es ist einleuchtend, daß die Ebene dieses Armes unzugänglich ist), der Querhalbmesser des Ringes ist der Hebelarm der Kraft; eine Kraftersparnis findet hier kaum statt, da der letztere Hebelarm meist nicht wesentlich länger als der erstere ist.

Die verbreitetste derartige Modifikation des Hebels ist das Rad an der Welle. Bei ihm ist die Welle in den beiden Endlagern drehbar und trägt irgendwo ein aufgesetztes Rad. Um eine Last Q, die an einem um die Welle gewundenen Seile hängt, im Gleichgewicht zu halten, muß man, wenn

r und R die Radien von Welle und Rad sind, an der Peripherie des Rades eine Kraft

$$P = \frac{r}{R} Q \tag{174}$$

wirken lassen; um jene Last zu heben, also eine etwas größere Kraft; denn r ist der Hebelarm der Last, R derjenige der Kraft. An die Stelle des Rades tritt häufig eine am Ende angebrachte Kurbel, deren Stange alsdann R ist. Die Kraftersparnis im Verhältnis von $r:R$ wird nochmals verteilt, wenn an beiden Enden Kurbeln angebracht werden. Dies ist z. B. bei der zweimännigen Haspel der Fall; bei der Winde dagegen, bei welcher die Welle nicht wie bei der Haspel horizontal, sondern vertikal steht, ist meist nur am oberen Ende, hier dafür aber eine vierarmige Kurbel, d. h. ein Drehkreuz angebracht. Ähnliche Apparate sind die Göpel, Tretwerke u. s. w.



Figur 68.

Um eine möglichste Kraftersparnis zu erzielen, müßte man die Welle möglichst schwach oder das Rad möglichst groß machen. Da nun beides, über eine gewisse Grenze hinaus, mit augenscheinlichen Unzuträglichkeiten verknüpft ist, wendet man in der Differentialwelle (Figur 68) den Kunstgriff an, die Welle aus zwei Wellteilen von wenig abweichenden Radien r und r' bestehen zu lassen, derart, daß das Seil, an dem die Last hängt, von dem kleineren Wellteile sich abwindet, während es sich auf dem größeren aufwindet. Es ist dann die Kraft

$$P = \frac{1}{2} \frac{r - r'}{R} Q \quad ; \tag{175}$$

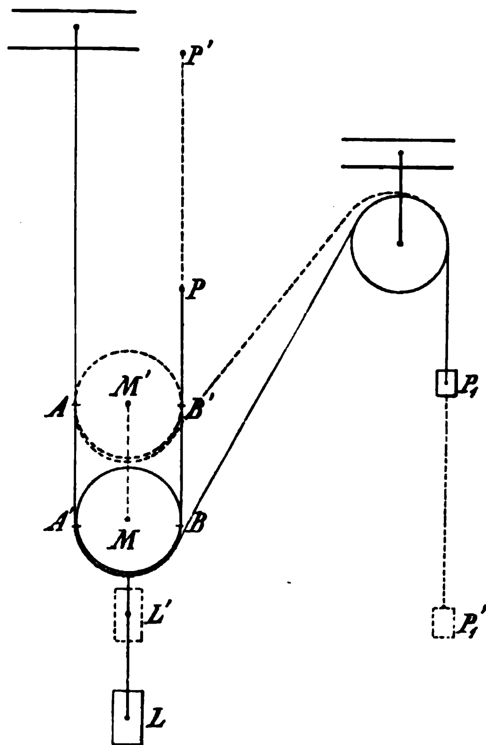
man kann also P durch Verkleinerung von $r - r'$ beliebig verkleinern, ohne die gedachten Unzuträglichkeiten befürchten zu müssen.

Rolle und Flaschenzug.

Rollen. Eine Rolle ist eine kreisförmige, flache Scheibe, die sich um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse drehen und an dem mit einer Rinne versehenen Rande ein Seil aufnehmen kann. Zum Zwecke der Befestigung oder des Anhängens von Gewichten ist an dem Mittelpunkte die sogen. Schere angebracht, deren beide Seiten über den Rand der Rolle hinausragen und dort sich zusammenschließen. Ist diese Schere an einem festen Gegenstand angebracht, so daß der Mittelpunkt der Rolle unbeweglich ist, so hat man eine feste Rolle vor sich. Sie ist im Prinzip nichts anderes als ein gleicharmiger Hebel und somit im Gleichgewicht, wenn an den Enden des um sie gelegten Seiles gleich große Kräfte angreifen. Diese Rolle leistet daher keine Kraftersparnis,

sondern dient als Leit- oder Richtungsrolle nur zur Richtungsänderung; also z. B. um durch die Schwere eines Gewichts eine Last zu heben, wobei die Kraft der Last entgegengesetzt sich bewegt; oder um durch die Vorwärtsbewegung eines Pferdes eine Last zu heben, wobei Kraft und Last in aufeinander senkrechten Richtungen sich bewegen; dasselbe findet bei manchen Klingelzügen statt, nur daß hier die Kraft vertikal wirkt, die Last horizontal bewegt wird.

Eine bewegliche oder lose Rolle andererseits erhält man, wenn man das eine Seilende an einem festen Punkte anhängt, das Seil über die untere Rinne der Rolle führt und auf das andere Seilende eine Kraft wirken läßt. Damit Gleichgewicht bestehe, müssen die beiden Seilenden gleich gespannt sein; es muß aber hier noch eine weitere Bedingung erfüllt werden; da nämlich der Mittelpunkt der Rolle hier beweglich ist, würde die Resultierende der beiden an den Seilenden wirkenden Kräfte die Rolle heben, wenn nicht in diesem Mittelpunkte oder an der mit ihm verbundenen nach unten stehenden Schere mittels eines Hakens eine gleich große Last angebracht wäre. Ist die resultierende Kraft größer als diese Last, so wird letztere gehoben. Sind insbesondere die beiden Seilenden vertikal, so verteilt sich die Last auf beide zur Hälfte, und da die auf das angehängte Seilende ausgeübte Zughälfte von dem festen Punkte, an dem es aufgehängt ist, aufgenommen wird, so braucht man an dem freien Ende nur mit der halben Kraft zu ziehen. Durch eine bewegliche Rolle wird somit die Kraft verdoppelt, natürlich wieder auf Kosten der Geschwindigkeit bezw. des Weges; denn es ist klar, daß, wenn durch Zug nach oben das freie Seilende P bis P' gehoben wird, der Rollenmittelpunkt und folglich auch die Last nur um die Hälfte, von M bis M' bezw. von L bis L' gehoben wird; man sieht dies am einfachsten ein, wenn man bedenkt, daß die beiden gleichen Seilstücke AA' und BB' fortfallen müssen, um das Stück PP' zu liefern.



Figur 69.

Um den Zug, was meist bequemer ist, statt nach oben nach unten ausüben, also auch ein Gewicht P_1 dafür verwerten zu können, schlingt man das freie Seilende um eine feste Rolle.

Rollenzug. Noch weiter kann man die Last verkleinern, indem man das freie Seilende, statt unmittelbar an ihm zu ziehen, oder es um eine feste Rolle zu schlingen, als Last an die Schere einer zweiten losen Rolle hängt, so daß eine nochmalige Verteilung stattfindet und an dem freien Seilende der zweiten Rolle nur noch ein Viertel der ursprünglichen Last als Kraft zu wirken braucht. So kann man fortfahren und hat schließlich für das Gleichgewicht, wenn n Rollen vorhanden sind:

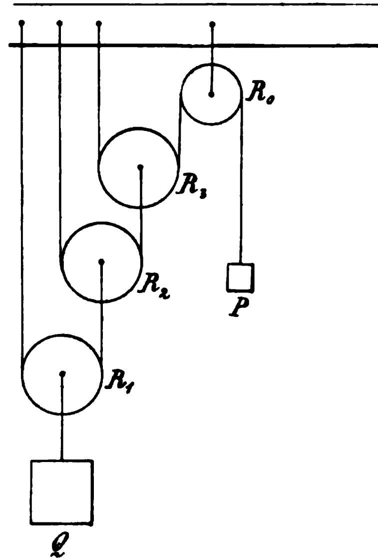
$$P = \frac{Q}{2^n} \tag{176}$$

Schließlich kann man wieder wie oben eine feste Rolle R_0 hinzufügen, um P abwärts wirken lassen zu können. Der obigen Formel verdankt dieser Apparat (Figur 70) auch den Namen Potenzrollenzug (Potenzzug, fälschlich Potenzflaschenzug).

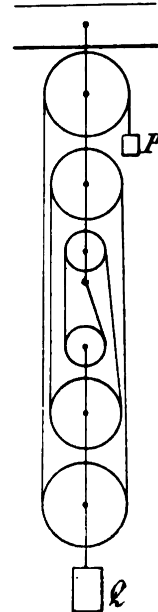
Flaschenzug. Unter einer Flasche versteht man ein System von Rollen, welche entweder auf dieselbe Achse gesetzt sind oder, falls sie übereinanderhängen, doch eine gemeinschaftliche Schere besitzen. Verbindet man nun eine feste Flasche mit einer losen in der Weise, daß das an der Schere der festen Flasche angeknüpfte Seil zunächst um die oberste der losen Rollen, dann hinauf und um die unterste der festen Rollen, dann wieder hinunter und um die zweite lose Rolle geht u. s. w., bis es von der obersten festen Rolle herabhängt, so erhält man den Flaschenzug (Figur 71). Eine an die lose Schere gehängte Last verteilt sich hierbei auf so viel Seilstrecken, als im ganzen Rollen vorhanden sind; sind dies n, so findet Gleichgewicht statt, wenn das an das freie Seilende gehängte Gewicht

$$P = \frac{Q}{n} \tag{177}$$

ist: ein etwas größeres Gewicht wird also die Last heben. Wie man sieht, ist der Flaschenzug für die Kraftersparnis weniger günstig als der Rollenzug; er wird aber trotzdem häufiger angewandt, da seine Konstruktion praktisch sicherer und vorteilhafter ist. Unter den auf Rollen und Flaschenzügen beruhenden Maschinen ist der Krahn die verbreitetste und wichtigste.[1]



Figur 70.



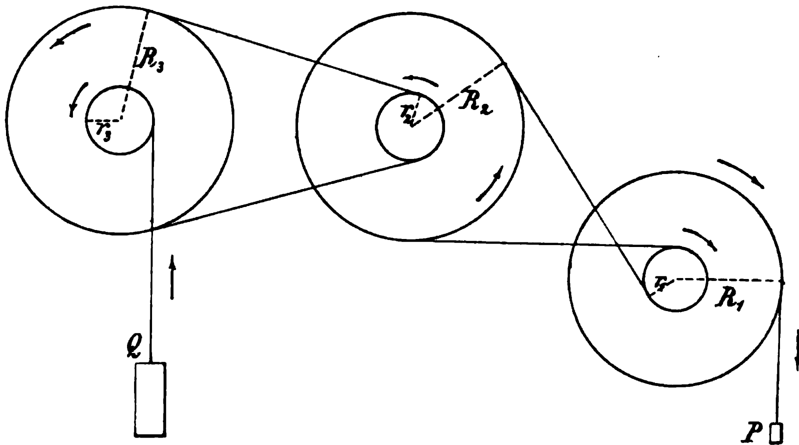
Figur 71.

Räderwerke.

Der doppelte Zweck der Übertragung von Bewegungen an andere Stellen und der Kraftersparnis auf Kosten der Geschwindigkeit oder umgekehrt wird in ebenso einfacher wie günstiger Weise durch Apparate erreicht, deren leitende Idee der Gedanke ist, daß, wenn an einer Achse zwei Räder von verschiedenem Durchmesser starr verbunden sitzen, bei der gleichzeitigen Umdrehung die Peripherien verschiedene Geschwindigkeiten annehmen. Hierzu kommt dann der zweite Gedanke, daß man durch irgend eine geeignete Verbindung die Geschwindigkeit des großen Rades in unveränderter Größe auf das kleinere Rad eines zweiten ähnlichen Apparats übertragen kann, wodurch dessen großes Rad wiederum eine noch größere Geschwindigkeit erhält. Setzt man dies fort, und

[1] GRIMSEHL (a. a. O.) verwirft, wenigstens für didaktische Zwecke, die Ableitung der Apparate dieses Abschnitts aus dem Hebel, da der wesentlich wirksame Teil bei ihnen das biegsame Seil sei, sie also zu den Seilmaschinen (s. w. u.) gehören.

bringt man an den beiden freien Anfangs- und Endrädern R_1 und r_n Kraft und Last an, so wird man, wenn die Kraft K an R_1, die Last L an r_n wirkt, eine sehr beträchtliche Kraftersparnis erzielen, dafür aber freilich die Last nur um einen sehr kleinen Bruchteil der Strecke, welche die Kraft beschreibt, fördern;



Figur 72.

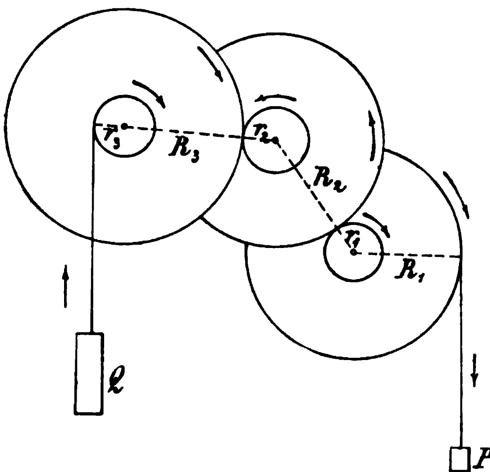
wirkt dagegen K an r_n, L an R_1, so kann man, freilich mit großem Kraftaufwand, sehr erhebliche Geschwindigkeiten erzielen. Im ersten Falle gilt die Formel

(178) $$P = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{R_n} Q \quad ,$$

im zweiten die umgekehrte

(179) $$P = \frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdot \ldots \cdot \frac{R_n}{r_n} Q \quad .$$

Seilräder und Zahnräder. Die beiden wichtigsten, durch die Methode der Geschwindigkeitsübertragung von Apparat zu Apparat sich unterscheidenden Formen der Räderwerke sind die Seil- oder Riemenräder und die Zahnräder, deren Beschreibung sich erübrigt. Die Riemenräder haben den Vorzug, daß man die Bewegung auf größere Entfernungen übertragen kann und daß man bei der Übertragung der Bewegung von einem Räderpaar zum nächsten nach Belieben die Richtung der Drehung beibehalten oder umkehren kann, je nachdem man den Riemen gewöhnlich oder gekreuzt umlegt. Die Zahnräder andererseits wirken sicherer, weil ein Gleiten, wie das des Riemens, bei ihnen nicht stattfinden kann; man braucht, im Zusammenhange hiermit, bei ihnen keinen oder mindestens keinen so erheblichen Übertragungsverlust, wie bei jenen anzunehmen; sie sind auf weit kleinere Räderwerke anwendbar; schließlich gestatten sie die Übertragung der



Figur 73.

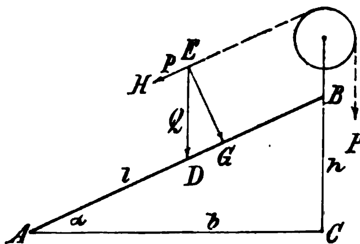
Bewegung in andere, zur ursprünglichen geneigte Ebenen. Will man bei kleinen Apparaten die erstere Verbindungsart anwenden, so nimmt man statt des Riemens Schnüre (Schwungmaschine, stroboskopische Scheibe u. s. w.). Zahnräderwerke werden in der Physik namentlich zur Erzielung großer Drehungsgeschwindigkeiten verwendet (Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, der Eelektrizität u. s. w.).[1] Im Räderwerk der Uhr hat gewöhnlich beim „Sekundenrad" das Getriebe (d. h. das kleine Rad) zehn Zähne, beim „Mittelrad" das große Rad achtmal 10 = 80, das Getriebe zwölf Zähne, beim „Minutenrad" das große Rad $7^1/_2$mal 12 = 90, das Getriebe zwölf Zähne, beim „Wechselrad" das große Rad dreimal 12 = 36, das Getriebe zwölf Zähne, endlich beim „Stundenrad" das große Rad viermal 12 = 48 Zähne; die Umdrehungszeiten sind demgemäß bezw. 1, 8, 60, 180, 720 Minuten, d. h. wenn von den beiden Hilfsrädern abgesehen wird, eine Minute, eine Stunde, zwölf Stunden.

Schiefe Ebene, Schraube, Keil.

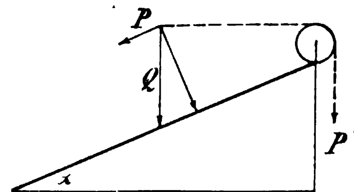
Schiefe Ebene. Fällt man von der schiefen Ebene AB das Perpendikel BC auf die horizontale Ebene, so heißt AB die Länge l, AC die Basis b und BC die Höhe h der schiefen Ebene. Das Gewicht eines auf dieser schiefen Ebene ruhenden Körpers sei durch die Vertikallinie $ED = Q$ dargestellt und in die beiden Komponenten EG senkrecht gegen die schiefe Ebene und EH parallel mit ihr zerlegt gedacht. Die erstere Komponente wird durch den Widerstand der schiefen Ebene aufgehoben, für die andere $EH = P$ gilt die Proportion

(180) $$P : Q = h : l \quad .$$

Mit dieser Kraft würde der Körper die schiefe Ebene hinabgleiten oder rollen, wenn ihr nicht eine ebensogroße, entgegengesetzt gerichtete Kraft das Gleichgewicht hielte. Versteht man unter P die Gegenkraft, so erhält man den Satz:



Figur 74.



Figur 75.

Auf der schiefen Ebene findet Gleichgewicht statt, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge. Da nun die Höhe stets kleiner ist als die Länge, so findet Kraftersparnis statt, und zwar eine desto größere, je sanfter geneigt die schiefe Ebene ist. Bezeichnet man den Neigungswinkel BAC mit α, so ist noch einfacher (Figur 74)

(181) $$P = Q \sin \alpha \quad .$$

In zahlreichen Fällen, so bei ansteigenden Straßen, Rampen u. s. w. wird das Prinzip der schiefen Ebene in dieser Form angewendet[2]; in anderen Fällen,

[1] Zur Erleichterung des Betriebes ist meist am freien Kraftrade eine Kurbel angebracht, welche trotz des größeren zu beschreibenden Weges bequemer und vorteilhafter wirkt. —
[2] Praktisch wird die Steigung einer schiefen Ebene meist nicht durch den Winkel α, sondern durch das Verhältnis $1 : l/h$ oder auch in Prozenten $(100\, h/l)$ angegeben.

wo es unbequem ist, schräg aufwärts zu ziehen, führt man ein an der Last angebrachtes, der schiefen Ebene parallel laufendes Seil irgendwo über eine feste Rolle und kann nun in beliebiger Richtung, z. B. seitwärts oder vertikal nach unten mit Gewichten arbeiten. In noch anderen Fällen läßt man die Kraft horizontal (Fig. 75) an der Last angreifen, hat dann aber, weil jetzt eine größere Komponente des Gewichts Q in Betracht kommt, statt der obigen Gleichung die neue

(182) $$P' = Q \operatorname{tang} \alpha \quad ,$$

woraus hervorgeht, daß in diesem Falle Kraftersparnis nur bei Steigungen bis zu 45° stattfindet. Der Kraftersparnis steht auch hier wieder in allen Fällen ein verhältnismäßiger Mehraufwand an Zeit bezw. Weg gegenüber; die Last muß, um eine Hebung s zu erfahren, den Weg $s/\sin \alpha$ zurücklegen. Schließlich ist zu bemerken, daß bei den obigen Betrachtungen die Reibung außer acht gelassen ist. Ist dieselbe von merklichem Einfluß, so muß man, da sie der Normalkraft $EG = \sqrt{Q^2 - P^2}$ proportional ist, statt P die Kraft $P + k\sqrt{Q^2 - P^2}$ zur Anwendung bringen, wo k der Reibungskoeffizient ist (s. Artikel „Reibung").

Über die freie Bewegung eines sich selbst überlassenen Körpers auf der schiefen Ebene s. Artikel „Fall und Wurf".

Schraube. Die wichtigste Modifikation der schiefen Ebene und in ihren Anwendungen weit verbreiteter als diese selbst ist die Schraube. Dieselbe läßt sich auffassen als eine um einen Zylinder, die Schraubenspindel, gewundene schiefe Ebene; jedoch tritt in der Wirklichkeit, was freilich an dem Prinzip nichts ändert, an die Stelle der Ebene häufig ein dreikantiger oder vierkantiger Stab. Das Gewinde paßt genau in die entsprechend vertieft gearbeitete Schraubenmutter. Ist die letztere, was der häufigere Fall ist, fest, denkt man sich das Ganze vertikal und läßt man am Kopfe der Schraube eine horizontale Drehkraft wirken, so steigt die Schraube, je nach der Drehrichtung und der Schnittrichtung des Gewindes (man unterscheidet rechtsgewundene und linksgewundene Schrauben) entweder in die Höhe oder in die Tiefe, kann also in jenem Falle eine Last heben (Schraubenwinde), in diesem einen Druck ausüben (Schraubenpresse). Ist Q diese Last oder dieser Druck, so ergibt die Auffassung der Schraube als einer schiefen Ebene (zweiter der beiden oben unterschiedenen Fälle), sofort, wenn r der Spindelradius und h die Höhe eines Schraubenganges ist, die Gleichung

(183) $$P = \frac{h}{2\pi r} Q = Q \operatorname{tang} \alpha \quad ,$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie die Ganghöhe zum Spindelumfang, oder sie ist gleich dem Produkt der Last mit der Tangente des Steigungswinkels. Es würde hiernach Kraftersparnis stattfinden, wenn der Steigungswinkel $\alpha < 45°$, also die Ganghöhe kleiner als der Spindelumfang ist — ein Schluß, der jedoch durch die sehr beträchtliche Reibung der Schraube in der Mutter hinfällig gemacht wird. Dieser Reibung verdanken es die Schrauben, daß sie weit weniger als Kraftmaschinen als vielmehr einerseits als Befestigungsvorrichtungen, andererseits als Messungsvorrichtungen benutzt werden.[1] In ersterer Hinsicht sind die Druck- und Klemmschrauben, sowie die Schraubstöcke zu erwähnen und auf die Propfenzieher hinzuweisen, welche insofern ein instruktives Beispiel abgeben, als von ihnen diejenigen Konstruktionen, welche die Schraube als Kraftmittel verwenden wollen, sich fast immer als un-

[1] Eine Ausnahme von freilich immenser Bedeutung bildet die Schiffsschraube, die aber, da die Mutter hier durch das flüssige Wasser dargestellt wird, mehr in die Hydrodynamik als hierher gehört; eine entsprechende Rolle beginnt neuerdings die Luftschiffschraube zu spielen.

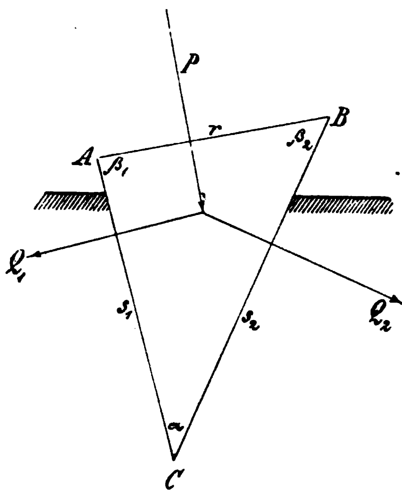
praktisch erwiesen haben, nicht aber diejenigen, bei welchen die Schraube nur als Reibungsmittel, als Kraftmittel aber die Muskelkraft mit Hebel- oder Zahnradunterstützung benutzt wird. Für die Physik sind die Schrauben gerade in der letzterwähnten Hinsicht am wichtigsten, nämlich als Stell- und Meßschrauben, weil bei ihnen eine verhältnismäßig beträchtliche Drehung nur eine sehr kleine Hebung oder Senkung bezw. Fortrückung hervorruft; die Mikrometerschraube, das Sphärometer und die Teilmaschine sind Beispiele (s. Artikel „Messung von Raum- und Zeitgrößen").

Die Schraube ohne Ende, welche nur wenige Gänge und keine Mutter hat, dient zur Übertragung der Bewegung auf ein Zahnrad, in dessen Zähne die Gänge eingreifen. Hängt die Last an dem mit diesem Zahnrad verbundenen Getriebe und wirkt die die Schraube drehende Kraft, wie dies gewöhnlich geschieht, nicht am Schraubenkopf selbst, sondern an einer Kurbel, so ist, wenn r der Radius des Getriebes, R der des Zahnrades, ϱ der der Spindel und l der der Kurbel, endlich h die Ganghöhe der Schraube ist:

$$P = \frac{\varrho}{l} \cdot \frac{h}{2\varrho\pi} \cdot \frac{r}{R} \cdot Q = \frac{hr}{2\pi l R} Q \quad ; \tag{184}$$

der Spindelradius fällt also aus der Formel ganz heraus.

Der Keil. Dieses Werkzeug dient zur Trennung von Teilen eines Körpers, zu deren direkter Trennung entweder der günstigste Punkt nicht zugänglich ist oder ein zu großer Kraftaufwand erforderlich wäre. Bei dem Keil wirkt die Kraft P auf den Rücken AB, treibt die Spitze desselben in den zu teilenden Körper hinein und zerlegt sich dabei in zwei zu den Seiten AC und BC senkrechte Kräfte Q_1 und Q_2. Entweder direkt oder durch Übertragung der Betrachtungen über die schiefe Ebene erhält man, wenn r den Rücken, s_1 und s_2 die Seiten, α den Spitzenwinkel, β_1 und β_2 die beiden anderen Winkel bezeichnen, die Formeln



Figur 76.

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{Q_1}{P} = \frac{s_1}{r} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha} \quad , \\ &\frac{Q_2}{P} = \frac{s_2}{r} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha} \quad , \\ &P = Q_1 \cos\beta_2 + Q_2 \cos\beta_1 \quad , \end{aligned}\right. \tag{185}$$

oder, wenn der Keil symmetrisch, also $Q_1 = Q_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $s_1 = s_2$ ist:

$$P = \frac{r}{s} Q = Q \cos\beta \quad . \tag{186}$$

Wie man sieht, verhält sich die Kraft zur Last, wie der Rücken zur Seite; je schärfer also der Keil ist, eine desto geringere Kraft genügt, um den Körper zu zerspalten; auch hier muß freilich wiederum der Rücken beträchtlich eindringen, um die Körperhälften wenig auseinander zu bringen. Der Keil findet bei einer großen Zahl von Werkzeugen Anwendung, so bei den Beilen, Messern, Scheren, Meißeln, Nägeln und Nadeln. Beim Hobel ist der Keil mit einer schiefen Ebene, beim Bohrer ist er mit einer Schraube verbunden.

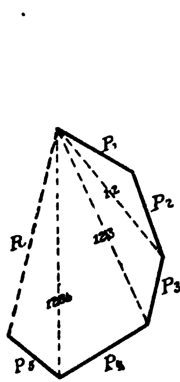
Seil- und Kettenmaschinen.

Diese, wesentlich vom technischen Standpunkte interessante Klasse einfacher Maschinen kann und braucht hier nur erwähnungsweise behandelt zu werden. Wird das Wort Seil möglichst allgemein gefaßt, so versteht man unter einer Seilmaschine ein Seil oder eine Verbindung von Seilen, an welchen Kräfte angreifen. Ein Angriffspunkt heißt ein Knoten, weil hier eine Richtungsänderung stattfindet, und es gibt feste und lose Knoten. Um das Gleichgewicht zu finden, muß man nach dem Zerlegungsprinzip in jedem Knoten Gleichgewicht herstellen. Durch Vermehrung der Knoten ins Unendliche gelangt man von den Seilpolygonen zu den parabolischen Kettenlinien und zu den wirklichen Kettenlinien (s. w. unten).

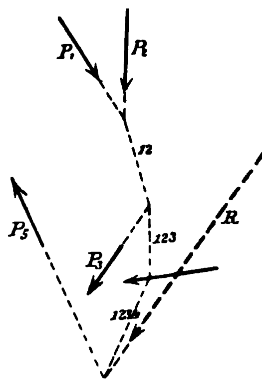
Graphische Statik.

Wie in der Physik überhaupt, so werden auch in der Mechanik, neben den rechnerisch-analytischen Methoden, vielfach geometrisch-synthetische Methoden angewandt, um die betreffenden Probleme zu lösen. In der Technik wird diese Methode sogar ihrer Bequemlichkeit und hinreichenden Genauigkeit halber der Rechnung vielfach vorgezogen. Was insbesondere die statischen Probleme betrifft, so hat sich hier eine besondere Disziplin, die graphische Statik, ausgebildet, die auch in rein wissenschaftlicher Hinsicht Interesse genug darbietet, um einige andeutende Bemerkungen über sie zu rechtfertigen. In bezug auf die weitere Ausgestaltung muß natürlich auf die technischen Lehr- und Handbücher verwiesen werden.

Kräfte in der Ebene; Kräfte- und Seilpoylgon. Das Kräftepolygon, von dem schon die Rede gewesen ist, erhält man, indem man die einzelnen Kräfte der Größe und Richtung nach aneinander ansetzt (Figur 77 a); die Verbindungslinie des Anfangs- und des Endpunktes stellt die Resultante aller Kräfte nach Größe und Richtung dar. Um auch ihre Lage zu erhalten, muß man das sogen. Seilpolygon konstruieren, indem man (Figur 77 b) die Kräfte P_1 und P_2 bis zu ihrem Schnittpunkte verlängert und durch diesen eine Parallele 12 zu der Diagonale der beiden Kräfte im Kräftepolygon zieht; diese Parallele verlängert man bis zum Schnittpunkte mit der Verlängerung der dritten Kraft, zieht die Parallele 123 zu der Diagonale aller drei Kräfte im Kräfteparallelogramm und fährt so fort, bis man die Lage der Resultante aller Kräfte gefunden hat; P_1, 12, 123 ... ist das Seilpolygon. Wie man sieht, sind die Seiten des Kräftepolygons den Kräften, seine Diagonalen vom Anfangspunkte aus dagegen den Seiten des Seilpolygons parallel. Wie man ferner einsieht, geht durch den Schnittpunkt zweier beliebiger (nicht benachbarter) Seiten des Seilpolygons die Resultante aller zwischen ihnen liegenden Kräfte; so kann man z. B. in Figur 77 in beiden Polygonen die Resultante der Kräfte 3, 4, 5 leicht einzeichnen. Wenn der Fall eintritt, daß im Kräftepolygon eine Diagonale mit der nachfolgenden Seite zusammenfällt, entstehen Unbequemlichkeiten, die man vermeidet, indem man entweder die Reihenfolge der Kräfte, die ja gleichgültig ist, abändert, oder indem



Figur 77 a.

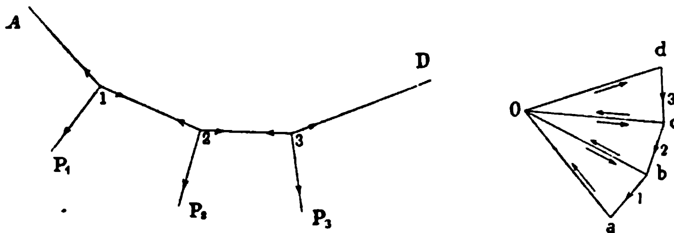


Figur 77 b.

man eine Hilfskraft 0 einführt und dann durch Bestimmung der Teilresultante nach dem obigen Satze wieder eliminiert. Es ist sogar vielfach üblich, diese Hilfskraft von vornherein und auf alle Fälle einzuführen; man nennt dann ihren Eckpunkt im Kräftepolygon dessen Pol und die von ihm ausgehenden Diagonalen die Polstrahlen; die im Seilpolygon entsprechenden Seiten heißen dessen äußerste Seiten.

Das Kräftepolygon kann geschlossen oder offen sein; im letzteren Falle ist eine Resultante vorhanden, im ersten ist sie null. Ist zwar das Kräftepolygon geschlossen, das Seilpolygon aber offen, so erhält man ein Kräftepaar; sind endlich beide offen, so hat man Kraft und Kräftepaar. Die möglichen Fälle des Zustandes eines Systems stellen sich somit in sehr anschaulicher Form dar.

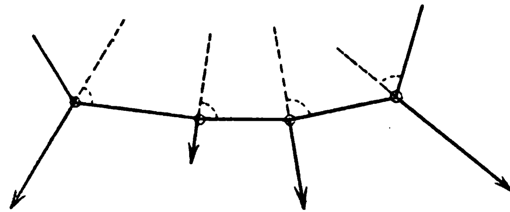
Seil- und Kräftepolygon im engeren Sinne. An einem in den Punkten A und D befestigten Seile, das als gewichtslos und unausdehnbar angenommen wird, sollen an einzelnen Stellen Kräfte P angreifen, die, wenn Gleichgewicht herrscht, durch die Spannungen an den Enden der Stücke, in die das Seil durch die Kräfte geteilt ist, äquilibriert werden. Ein solches Seilpolygon ist in Figur 78



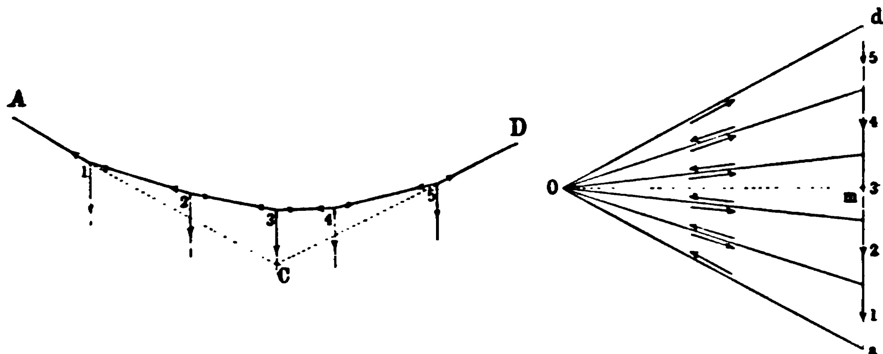
Figur 78.

angedeutet, das entsprechende Kräftepolygon ist ihm zur Seite gestellt. Letzteres ist so gewonnen, daß von einem beliebigen Pole 0 aus ein Dreieck Oab konstruiert ist, dessen Seiten nach Größe und Richtung den drei im Punkte 1 des Seilpolygons zusammenstoßenden Kräften entsprechen, und zwar die beiden von 0 ausgehenden Strahlen den Spannungen im Seile, die dritte Seite der von außen angreifenden Kraft P_1; entsprechend sind dann die anderen Dreiecke gebildet. Daß diese Darstellung möglich ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache des Gleichgewichts der Kräfte.

Von den vielen möglichen Fällen sind nun folgende zwei am wichtigsten. 1. Der Fall, daß die Kräfte P die Winkel des Seilpolygons gerade halbieren (zum Zwecke der Realisierung kann man z. B. kleine Ringe auf das Seil ziehen und an ihnen die Kräfte angreifen lassen). Der Symmetrie halber müssen in diesem Falle die beiden in einem Eckpunkte des Seiles angreifenden entgegengesetzten Spannungen gleich groß sein, und folglich müssen alle Spannungen gleich groß sein; das Seil ist also in allen seinen Stücken gleich stark gespannt. Eine einfache Rechnung ergibt, daß infolgedessen die Kräfte P sich wie die Kosinusse der halben Polygonwinkel verhalten, oder daß sich umgekehrt bei gegebenen Kräften die Winkel nach diesem, offenbar inversem Gesetz einrichten; in Figur 79 ist das mit übertriebenem Kontrast veranschaulicht.


Figur 79.

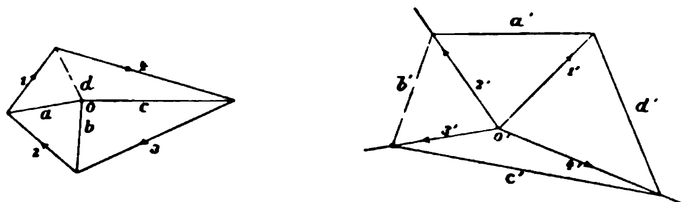
2. Der Fall, daß alle Kräfte P in derselben Richtung, z. B. senkrecht nach unten wirken, wie das etwa angehängte Gewichte tun werden. Das Kräftepolygon wird dann offenbar eine vertikale Gerade (Figur 80). Es findet sich, daß in diesem Falle die horizontalen Komponenten der Spannungen in allen Seilstücken gleich groß, die vertikalen aber verschieden sind; und zwar ist die Summe der vertikalen Spannungskomponenten zweier beliebiger Seilstücke gleich der Summe aller zwischen ihnen liegenden Belastungen. Ist unter den Seilstücken ein horizontales, so ist in ihm die vertikale Spannungskomponente null, und folglich



Figur 80.

ist sie für ein beliebiges Stück gleich der Summe aller Belastungen zwischen diesem und dem horizontalen. Andere Spezialfälle sind die, wo die Kräfte alle gleich groß und die Seilstücke alle gleich lang sind. Hat man z. B. vier gleich lange Stücke, an deren Treffpunkten drei gleich große Gewichte ziehen, so findet man, unabhängig von der Größe der Gewichte (diese würde nur dann einen Einfluß haben, wenn Dehnbarkeit vorhanden wäre), daß die beiden den festen Endpunkten benachbarten Stücke einen Winkel von 72° 11′, die beiden mittelsten Stücke einen Winkel von 46° 3′ mit der Horizontalen machen.

Reziproke Figuren. Der Gegensatz, in dem Kräftepolygon und Seilpolygon zueinander stehen, derart, daß die Seiten des einen den Polstrahlen des anderen parallel sind, hat MAXWELL zu der Theorie der reziproken Figuren geführt, die sich als sehr fruchtbar zur Erörterung von Kräftesystemen und Gleichgewichtsbedingungen erwiesen hat. Ist also z. B. das Polygon mit den Seiten 1, 2, 3, 4



Figur 81.

in Figur 81 gegeben, so zieht man von dessen Ecken gerade Linien a, b, c, d nach einem beliebigen Pole 0 in seiner Ebene, dann konstruiert man ein zweites Polygon, dessen Seiten a', b', c', d' mit den Polstrahlen a, b, c, d parallel sind, und schließlich zieht man durch die Ecken dieses zweiten Polygons gerade Linien, 1′, 2′, 3′, 4′, die mit den Seiten des ersten, 1, 2, 3, 4 parallel sind, und die sich in einem Punkte 0′ schneiden. Diese beiden Polygone heißen alsdann reziprok. Natürlich ist es die Frage, ob sich zu einer, ein gegebenes Spannungssystem darstellenden Figur eine reziproke konstruieren läßt, bezw. unter welchen

Bedingungen dies der Fall ist; hierfür hat MAXWELL die merkwürdige Regel nachgewiesen, daß dies immer dann und nur dann möglich ist, wenn die gegebene Figur sich als Projektion eines Polyeders betrachten läßt; das andere Polygon ist dann auch die Projektion eines Polyeders, und diese beiden Polyeder sind einander derart zugeordnet, daß jeder Ecke des einen eine Seitenfläche des anderen entspricht.

Räumliche Systeme. Anwendungen. Für den Fall räumlicher Anordnung der Kräfte und Systemteile werden die Betrachtungen entsprechend komplizierter, und es müssen teilweise neue Grundlagen aufgestellt werden.

Unter den Anwendungen sind die bedeutsamsten die auf die Stab- und Gelenksysteme, namentlich aber auf die sogenannten Fachwerke, und zwar die ebenen einerseits, die räumlichen andererseits.

Die Kettenlinie.

Läßt man bei dem Seilpolygon die Zahl der Seilstücke und der an ihren Treffpunkten angreifenden Kräfte mehr und mehr wachsen, während die Länge der einzelnen Stücke entsprechend abnimmt, so kommt man zuletzt zu dem Falle eines stetig gekrümmten linearen Systems, das man als Seilkurve oder Kettenlinie bezeichnet. Die Theorie der Kettenlinie gehört natürlich streng genommen in die Lehre von der Elastizität; betrachtet man sie aber als unausdehnbar und als vollkommen biegsam, so kann man eine allgemein mechanische Theorie aufstellen, deren statischer Teil hier in seinen Grundzügen folgt.

Gleichgewicht eines biegsamen, unausdehnbaren Fadens. Es handelt sich also darum, die Spannungen in dem Faden, d. h. die negativen Drucke, welche seine Teile auszuhalten haben, hauptsächlich aber seine Gleichgewichtsfigur zu finden. Physikalisch ist die letztere Aufgabe nach dem Obigen durch die Angabe gelöst, daß der Faden diejenige Gestalt annehmen muß, bei welcher sein Schwerpunkt möglichst tief liegt, und es handelt sich hiernach nur noch um die mathematische Lösung.

Es seien $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ die Koordinaten der Endpunkte, die Komponenten der auf diese wirkenden Kräfte $X_1\ Y_1\ Z_1$ und $X_2\ Y_2\ Z_2$, endlich $X ds$, $Y ds$, $Z ds$ die Komponenten der auf ein beliebiges Bogenelement des Fadens wirkenden Kraft. Die Größe, welche alsdann nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen [Gleichung (148), p. 269] gleich null zu setzen ist, enthält dann die folgenden Glieder:

$$X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + Z_1\,\delta z_1 + X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + Z_2\,\delta z_2 + \int_{x_1}^{x_2} ds\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) \quad .$$

Nun ist aber das System einer Bedingung unterworfen, nämlich der, daß das Bogenelement ds von unveränderter Lage bleiben muß. Man muß also zu den obigen noch das mit dem LAGRANGEschen Faktor λ multiplizierte und über den ganzen Faden integrierte Glied δds, d. h. den Ausdruck

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda \left(\frac{dx}{ds}\, d\,\delta x + \frac{dy}{ds}\, d\,\delta y + \frac{dz}{ds}\, d\,\delta z \right)$$

hinzufügen. Dabei empfiehlt es sich, die einzelnen Teile desselben partiell zu integrieren, also z. B.

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda \frac{dx}{ds}\, d\,\delta x = \left[\lambda \frac{dx}{ds}\,\delta x \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) \delta x$$

zu setzen und schließlich alle Glieder nach den δ gleicher Größen zu ordnen. Es ergibt sich dann die Gleichung

$$\left[X_1 - \left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)_{x_1}\right] \delta x_1 + \left[Y_1 - \left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)_{y_1}\right] \delta y_1 + \left[Z_1 - \left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)_{z_1}\right] \delta z_1$$
$$+ \left[X_2 + \left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)_{x_2}\right] \delta x_2 + \left[Y_2 + \left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)_{y_2}\right] \delta y_2 + \left[Z_2 + \left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)_{z_2}\right] \delta z_2$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left\{\left[X ds - d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)\right] \delta x + \left[Y ds - d\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)\right] \delta y + \left[Z ds - d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)\right] \delta z\right\} = 0 .$$

Nunmehr darf das System als ein völlig freies betrachtet werden, die δ sind sämtlich willkürlich, man kann z. B. alle bis auf eins gleich null setzen, und es muß daher dessen Faktor, und in analoger Weise alle anderen Faktoren für sich verschwinden. Man erhält somit die neun Gleichungen:

$$(187) \quad \begin{cases} X_1 - \left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)_{x_1} = 0 , \quad Y_1 - \left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)_{y_1} = 0 , \quad Z_1 - \left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)_{z_1} = 0 , \\ X_2 + \left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)_{x_2} = 0 , \quad Y_2 + \left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)_{y_2} = 0 , \quad Z_2 + \left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)_{z_2} = 0 , \end{cases}$$

$$(188) \quad X ds - d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) = 0 , \quad Y ds - d\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right) = 0 , \quad Z ds - d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right) = 0 ,$$

von denen die sechs ersten die Grenzbedingungen, die drei letzten die Hauptgleichungen des Problems darstellen. Es ergibt sich nun auch unmittelbar die physikalische Bedeutung des Multiplikators λ. Es ist nämlich $X ds$ die X-Komponente der auf ds wirkenden äußeren Kraft, es muß also $d(\lambda dx/ds)$ die jener Kraft das Gleichgewicht haltende X-Komponente der Spannung von ds sein. Diese X-Spannung ist nun das Resultat des Umstands, daß die $+X$-Spannung an dem einen Ende von ds etwas größer ist, als die $-X$-Spannung am anderen Ende und zwar um das Differential der letzteren. Die X-Komponente der Spannung in einem Punkte des Fadens ist also $-\lambda dx/ds$ und folglich die gesamte Spannung in diesem Punkte gerade $-\lambda$. Man erkennt wieder aufs Deutlichste die physikalische Bedeutung der LAGRANGEschen Methode: Der Faden kann sich nicht ausdehnen, dieser Zwang ruft Spannung hervor und diese Spannung findet ihr Maß in dem LAGRANGEschen Multiplikator.

Schreibt man jetzt S für λ und führt die zweiten Glieder der Gleichungen (188) aus, so erhält man

$$(189) \quad \begin{cases} X ds + dS \frac{dx}{ds} + S d \frac{dx}{ds} = 0 , \quad Y ds + dS \frac{dy}{ds} + S d \frac{dy}{ds} = 0 , \\ Z ds + dS \frac{dz}{ds} + S d \frac{dz}{ds} = 0 . \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen sind unmittelbar geeignet, um die beiden gestellten Aufgaben zu lösen. Multipliziert man die erste derselben mit dy/ds, die zweite mit dx/ds und zieht die zweite von der ersten ab, so heben sich die mittleren Glieder fort; bringt man dann die letzten Glieder nach rechts und dividiert die ganze Gleichung durch den Faktor von S, so erhält man einen der Spannung S gleichgesetzten Bruch. Zwei ebensolche Brüche erhält man aber auch, wenn man die analoge Operation mit der zweiten und dritten, sowie mit der dritten und ersten der Gleichungen (189) ausführt, man kann also alle drei Brüche einander gleich setzen und findet:

$$(190)\qquad \frac{X\dfrac{dy}{ds}-Y\dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{dx}{ds}d\dfrac{dy}{ds}-\dfrac{dy}{ds}d\dfrac{dx}{ds}}=\frac{Y\dfrac{dz}{ds}-Z\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dy}{ds}d\dfrac{dz}{ds}-\dfrac{dz}{ds}d\dfrac{dy}{ds}}=\frac{Z\dfrac{dx}{ds}-X\dfrac{dz}{ds}}{\dfrac{dz}{ds}d\dfrac{dx}{ds}-\dfrac{dx}{ds}d\dfrac{dz}{ds}}\quad .$$

Dies sind die beiden Gleichungen der Kurve, welche der Faden bildet.

Es handelt sich nun noch um die Ermittelung der Spannung. Multipliziert man nun die Gleichungen (189) bezw. mit $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ und addiert sie, erwägt man, daß das zweite Glied verschwindet, weil der Faktor von dS

$$\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds}=d\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]=d(1)=0$$

wird und ferner, daß der Faktor von S im letzten Gliede sich durch den ersten Krümmungsradius r, d. h. durch den Krümmungsradius in der Schmiegungsebene nach der Formel

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{ds}\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

ausdrücken läßt, so erhält man

$$(191)\qquad X\,d\frac{dx}{ds}+Y\,d\frac{dy}{ds}+Z\,d\frac{dz}{ds}=-S\frac{ds}{r^2}\quad .$$

Multipliziert man andererseits die Gleichungen (189) bezw. mit dx/ds, dy/ds, dz/ds und addiert sie, so wird der Faktor von dS gleich eins, der von S gleich null, und es wird

$$(192)\qquad X\,dx+Y\,dy+Z\,dz+dS=0\quad .$$

Quadriert man endlich die Gleichungen (189) und addiert sie, benutzt die beiden Beziehungen (191) und (192) und nennt die Kraft R, so findet man

$$(193)\qquad R^2\,ds^2-dS^2-S^2\frac{ds^2}{r^2}=0\quad .$$

Damit ist eine Relation zwischen Spannung, Krümmungsradius und wirkender Kraft gefunden. Die Gleichungen (190) bis (193) enthalten die Lösungen des allgemeinen Problems.

Kettenlinie. Die obigen Resultate lassen sich leicht für den Fall der Schwerkraft spezialisieren. Die xy-Ebene sei die Vertikalebene, die y-Achse der Schwere entgegengerichtet; dann hat man als Hauptgleichungen, wenn ϱ die Dichte des Fadenmaterials ist (Gewicht der Längeneinheit):

$$(194)\qquad d\left(S\frac{dx}{ds}\right)=0\quad ,\qquad d\left(S\frac{dy}{ds}\right)=\varrho\,ds\quad .$$

Man kann diese Gleichungen übrigens auch direkt ableiten. Sukzessive erhält man nun folgende Ausdrücke:

$$S\frac{dx}{ds}=c\quad ,\qquad S\frac{dy}{ds}=\varrho s+k\quad ,\qquad \text{folglich}\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\varrho}{c}s+c'\quad ;$$

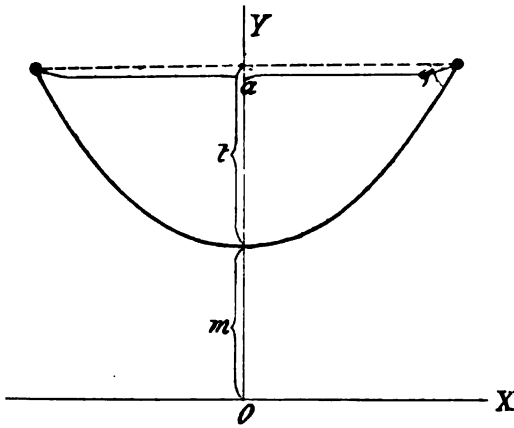
hieraus

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varrho}{c}\frac{ds}{dx}=\frac{\varrho}{c}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\quad ,$$

folglich integriert

$$y=\frac{1}{2}\frac{c}{\varrho}\left(e^{\frac{\varrho}{c}x+c_1}+e^{-\frac{\varrho}{c}x-c_1}\right)+\alpha\quad .$$

Die Integrationskonstanten bestimmen sich durch die für die beiden Endpunkte des Fadens gegebenen Beziehungen zwischen x und y; es zeigt sich dabei, daß die Gleichung am einfachsten wird, wenn man die y-Achse durch den tiefsten Punkt, den sogenannten Scheitel der Kurve hindurchlegt und die x-Achse in einem gewissen Abstand m unterhalb des Scheitels zieht. Es wird dann



Figur 82.

$$(195)\quad y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) \quad .$$

Diese Gleichungskurve eines hängenden unausdehnbaren Fadens heißt die gemeine Kettenlinie. Es handelt sich noch darum anzugeben, wie man den in ihr vorkommenden Parameter m zu bestimmen habe. Geometrisch bedeutet derselbe die Höhe des Scheitels über dem Koordinatenanfang, physikalisch, wie leicht abzuleiten, das Verhältnis der Scheitelspannung zum Gewichte der Längeneinheit. Von den Formeln, welche m bestimmen, sind die wichtigsten, wenn der Einfachheit halber die Kette symmetrisch, also beide Endpunkte in gleicher Höhe angenommen werden (anderenfalls sind die Formeln ein wenig zu modifizieren, bezw. anders zu deuten):

1. Aus Kettenlänge s und Hängetiefe t:

$$(196)\qquad m = \frac{1}{2t}\left(\frac{1}{4}s^2 - t^2\right) \quad .$$

2. Aus s und dem Hängewinkel φ:

$$(197)\qquad m = \tfrac{1}{2} s \operatorname{ctg} \varphi \quad .$$

3. Aus s und der Spannweite a:

$$(198)\qquad \frac{e^{\frac{2m}{a}} - e^{-\frac{2m}{a}}}{4\frac{m}{a}} = \frac{s}{a} \quad ,$$

eine transzendente Gleichung, aus der mit Hilfe von Tafeln m ermittelt werden kann.

4. Aus dem Hängewinkel φ und der Hängetiefe t:

$$(199)\qquad m = \frac{t\cos\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi} \quad .$$

Schließlich ergibt sich die Scheitelspannung

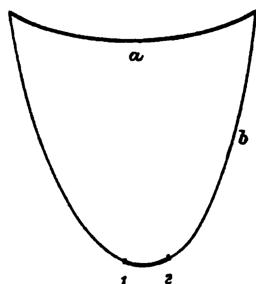
$$(200)\qquad S_0 = \varrho m \quad ,$$

und die Spannung in irgend einem Punkte, wenn ψ der Neigungswinkel daselbst ist:

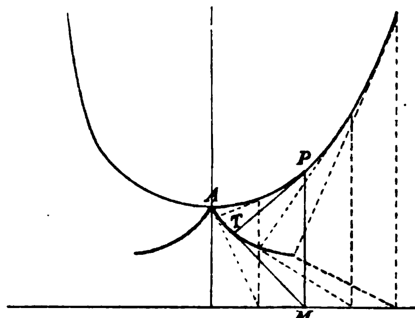
$$(201)\qquad S = S_0 \sec\psi \quad .$$

Übrigens ist zu beachten, daß man die Gleichung der Kettenlinie durch Herübernahme des Faktors m nach links so schreiben kann, daß in ihr nur x/m einerseits und y/m andererseits vorkommt; daraus folgt aber, daß alle vollständig ausgebildeten, d. h. beiderseits bis in die Unendlichkeit reichenden Kettenlinien einander ähnlich und nur durch den Maßstab sich unterscheiden; wenn

begrenzte Kettenlinien einander sehr unähnlich sein können, wie z. B. die Kurven *a* und *b* in Figur 83, so liegt das nur daran, daß sehr verschieden lange Stücke ausgebildet sind, und daß man mit der ganzen Kurve *a* lediglich das Stück 12 der Kurve *b* vergleichen darf, das ihr in der Tat geometrisch ähnlich ist.



Figur 83.



Figur 84.

Von den zahlreichen geometrischen Eigenschaften der Kettenlinie sei hier nur die folgende angeführt. Fällt man von einem Punkte P der Kettenlinie (Figur 84) die Ordinate PM, legt man andererseits in P die Tangente PT an die Kurve, deren Länge man gleich dem Bogen PA macht und verbindet man T mit M, so findet man leicht, daß der Winkel PTM ein rechter ist, und daß die Länge der Linie TM von der Lage des Punktes P unabhängig, nämlich gleich der Kurvenkonstante m ist. Wenn man also nach und nach die verschiedenen Punkte P wählt, so erhält man in den Punkten T die Evolvente, und findet demnach, daß die Evolvente der Kettenlinie eine sogen. Traktorie ist. Die hier festgestellte Beziehung gibt zugleich in leicht ersichtlicher Weise ein Mittel an die Hand, in einem beliebigen Punkte einer Kettenlinie die Tangente an sie zu legen.

Das unterste Stück der Kettenlinie ist übrigens annähernd eine Parabel, und erst in den höheren Teilen entfernt sie sich merklich von ihr; man sieht das sofort ein, wenn man die Gleichung entwickelt und höhere Potenzen von x/a vernachlässigt. In der Tat hat Galilei die Kettenlinie für eine Parabel gehalten, und erst Bernouilli hat die richtige Gestalt ermittelt.[1]

In neuester Zeit ist die Stabilität des Gleichgewichts hängender, der Schwere unterworfener Fäden in exakterer Weise behandelt worden, und es ist namentlich auf eine Arbeit von Kneser[2] hinzuweisen, in der u. a. auch der Satz bewiesen wird: Der Schwerpunkt der Kettenlinie liegt tiefer als der Schwerpunkt jeder anderen dieselben Endpunkte verbindenden Kurve von derselben Länge. Damit ist dann das Problem mit dem Energie- oder Virialkriterium des Gleichgewichts in Zusammenhang gebracht.

Verallgemeinerung des Problems. Das Problem der Kettenlinie läßt sich in zwei Richtungen verallgemeinern. Die eine betrifft die Kettenlinie unter der Wirkung irgend einer kontinuierlichen Belastung der einzelnen Teile, derart, daß die Belastung pro Einheit der Horizontalprojektion durch eine beliebige Funktion

$$p = f(x) \tag{202}$$

dargestellt wird; man nennt dies die Belastungskurve und die von ihr und der Abszissenachse begrenzte Fläche die Belastungsfläche. Es ergibt sich nun die einfache Beziehung:

$$p = H\frac{d^2y}{dx^2} \quad , \tag{203}$$

---

1. Die Lösung findet sich, als Antwort auf die Fragestellung Jac. Bernouillis, in den Acta Erud. 1691, und zwar gleichzeitig von Joh. Bernouilli, Leibnitz und Huygens. —
2. A. Kneser, Crelles Journ. **125**. 189. 1903.

wo H eine Konstante, nämlich die Horizontalkomponente der Spannung in dem Faden ist. Die Ordinate der Belastungskurve ist also proportional der zweiten Ableitung der Ordinate der Kettenlinie, anders ausgedrückt: die Krümmung der Kurve ist mit der Belastung proportional. Bei gegebener Belastungskurve erhält man für die Seilkurve die Formel:

$$y = \frac{1}{H}\int dx \int f(x)\,dx + cx + c' \quad , \tag{204}$$

aus der hervorgeht, daß es zu jedem Belastungsgesetze unendlich viele Seilkurven gibt, von denen durch besondere Festsetzungen eine ausgewählt werden muß. Für gleichförmige Belastung erhält man eine Parabel, wie sie bei der Kettenbrücke annähernd realisiert ist; bei einer Belastung, die von dem Nullwerte in der Mitte gleichförmig nach beiden Seiten zunimmt, erhält man eine kubische Parabel u. s. w.

Ferner kann man das Problem ausdehnen von hängenden Linien auf hängende Flächen, womit es natürlich, von allem anderen abgesehen, schon deshalb komplizierter wird, weil die Frage der Biegsamkeit von Flächen ohne Ausdehnung hier bekanntlich nur sehr beschränkte Antworten zuläßt. Es muß daher genügen, auf eine Arbeit von KÖTTER[1], in der gezeigt wird, daß man auf ABELsche Funktionen stößt, sowie auf einschlägige Arbeiten von LECORNU[2] zu verweisen.

Einige Literatur zur Statik

(soweit nicht schon im Texte angeführt).

a) Allgemeines (die Literatur zur Mechanik überhaupt, in der die Statik natürlich meist mitbehandelt ist, ist hier nicht berücksichtigt; man vergleiche den vorhergehenden und die folgenden Artikel). L. POINSOT, Elements de Statique. Paris 1804 (und zahlreiche neue Auflagen sowie deutsche Ausgaben). — A. F. MÖBIUS, Lehrbuch der Statik, 2 Bde. Leipz. 1837. — G. MONGE, Traité élémentaire de Statique. Paris 1786. — J. B. GÖBEL, Die wichtigsten Sätze der neueren Statik, In.-Diss. Zürich 1877. — J. PETERSEN, Lehrbuch der Statik fester Körper. Kopenhagen 1882. — L. HENNEBERG, Statik der starren Körper. Darmstadt 1886. — E. J. ROUTH, A Treatise on analytical statics. Cambridge 1896—1902.

b) Geometrie der Massen (Schwerpunkt, Trägheitsmoment u. s. w.). J. BINET (Konjugierte Achsen und Trägheitsmomente), Journ. Ec. polytechn. **16**. 41. 1813. — A. F. MÖBIUS, Der baryzentrische Kalkül. Leipzig 1827. — H. GRASSMANN, Die lineale Ausdehnungslehre, ältere Form. Leipzig 1844 (die neuere Form später, vgl. Ges. Werke **1**. Leipzig 1894). — W. THOMSON (Lord KELVIN), (Hauptachsen der Körper), Cambr. and Dubl. Math. Journ. **1**. 1846. — A. CAYLEY (Hauptachsen), Cambr. and Dubl. Math. Journ. **1**. 207. 1846. — R. TOWNSEND (Hauptachsen, Momente u. s. w.), Cambr. and Dubl. Math. Journ. **1** u. **2**. 1846—1847. — L. POINSOT (Trägheitsmomente), Journ. de Math. **16**. 1851. — J. N. HATON DE LA GOUPILLIERE, Theorème nouveau de la géom. des masses, Thèse. Paris 1857. — D. CHELINI (Trägheitsmomente), Mem. de Bologna (2) **5**. 144. 1865. — TH. REYE (Momente), Z. Math. Phys. **10**. 433. 1865; CRELLES Journ. **72**. 1870. — G. JUNG (Momente), Rend. Ist. Lomb. (2) **8**. 1875. — J. J. VAN RYN (Trägheitsmoment), In.-Diss. Utrecht 1890. — H. J. TALQVIST (Ellipsoid), Acta soc. fenn. **17**. 493. 1891. — PH. WEINMEISTER (REYEscher Satz u. s. w.), Ztschr. f. phys. u. chem. Unt. **4**. 301. 1891. — R. HOPPE (Tetraeder), Arch. f. Math. u. Phys. (2) **11**. 85. 1892. — TH. REYE, Die Geometrie der Lage, 3. Aufl. **2**. Leipzig 1892. — A. WERNICKE (zentrodynamische Körper), Progr. Braunschweig 1892. — J. FINGER (Trägheits-, Deviations- und resultierendes Moment), Wien. Ber. **101**. (IIa) 1649. 1892; **102**. (IIa) 592. 1893. — R. MEHMKE (Trägheitsmomente), Math. Ann. **23**. 1894. — H. KEFERSTEIN (didaktisch), Ztschr. f. phys. u. chem. Unt. **16**. 77. 1903. — E. REHFELD (Reduktion der Trägheitsmomente), Archiv der Math. u. Phys. (3) **6**. 237. 1903.

c) Graphische Statik. J. CL. MAXWELL (reziproke Figuren), Phil. Mag. (4) **27**. 250. 1864; Papers **1**. 514 u. 598; **2**. 161. — C. CULMAN, Die graphische Statik Zürich 1866. — J. BAUSCHINGER, Elemente der graphischen Statik. München 1871. — A. FAVARO, Atti Ist. Ven. (4) **2**. 1661. 1873. — A. FÖPPL, Theorie des Fachwerks. Leipzig 1880; Das Fachwerk im Raume. Leipzig 1892. — F. SCHUR (Ebene einfache Fachwerke), Math. Ann. **48**. 142. 1897. — A. FÖPPL, Vorlesungen über technische Mechanik **2**. Leipzig 1900. — R. LAUENSTEIN, die graphische Statik. 7. Aufl. Stuttgart 1902.

---

[1] F. KÖTTER, CRELLES Journ. **103**. 44. 1888. — [2] L. LECORNU, Journ. Ec. polyt. **48**. (1880); Ann. Ec. norm. (3) **17**. 501. 1900.

Kinematik und Dynamik.

Von F. AUERBACH.

Einleitung. Gegenstand des vorliegenden Artikels ist die Bewegung der Punkte, Punktsysteme und starren Körper; der vorangegangene Artikel, der der Ruhe und dem Gleichgewicht derselben Gebilde gewidmet war, ist also als Spezialfall in dem jetzigen enthalten. Wie in der Statik, so kann man auch in der Bewegungslehre auf verschiedene Weise zu Werke gehen, je nach dem Grade der Begriffe, die man einführt. Dabei ist auch hier wieder die merkwürdige Tatsache zu konstatieren, daß der historische Gang entgegengesetzt gewesen ist der erkenntnistheoretischen Klimax, wie sie sich uns heute darstellt. Erkenntnistheoretisch nämlich kann man sich zunächst damit begnügen, verschiedene Lagen von Punkten bezw. Konfigurationen von Systemen rein geometrisch miteinander zu vergleichen, sie geometrisch aufeinander zu beziehen; eine Untersuchung, die offenbar rein mathematischen Charakters sein wird. Man kann dann zweitens die Zeit als neuen Begriff und damit zugleich die Begriffe der Geschwindigkeit und der Beschleunigung der Bewegung in den Kreis der Betrachtung ziehen. Man kann endlich drittens diesen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen impulsive bezw. dauernde Kräfte zuordnen, womit man die Lehre zu einer physikalischen macht. Historisch hat man mit der Lehre von den Bewegungen als Wirkungen von Kräften angefangen; man hat sich alsdann gefragt, welchen Teil dieser Lehren man unabhängig von Kraftvorstellungen behandeln könne, als rein tatsächliche Zeitfolge von Zuständen im Raume; und zuletzt hat man sich auch noch vom Zeitbegriffe unabhängig zu machen versucht. So stehen sich formell zwei Disziplinen, die reine Geometrie der Bewegung und die allgemeine Dynamik, gegenüber, zwischen die sich als Mittel- und Bindeglied die eigentliche Kinematik einschiebt. Es sei im übrigen auf die Tabelle und die zugehörigen Bemerkungen im Artikel „Mechanik“ verwiesen. In bezug auf die Nomenklatur herrscht übrigens auch hier keine Übereinstimmung; insbesondere wird unsere Dynamik von englischen Autoren vielfach als Kinetik der Statik einerseits, der Kinematik andererseits gegenübergestellt; eine Bezeichnung, die sich auch deshalb nicht empfiehlt, weil der Ausdruck „Kinetik“ bei uns neuerdings für etwas ganz anderes, nämlich für die Molekulartheorie — mit Rücksicht auf die Bewegungen der kleinsten Teile — in Anspruch genommen wird. — Was endlich die Methodik betrifft, so werden auch hier — neben induktiv-experimentellen, zwei verschiedenartige theoretische Verfahren angewandt, nämlich das rechnerisch-analytische und das zeichnerisch-synthetische; sie gehen aber häufig derart Hand in Hand miteinander, daß eine Trennung zwischen „analytischer“ und „graphischer“ Dynamik lästig und überflüssig erscheint.

Im vorliegenden Artikel werden nur die allgemeinen Lehren sowie solche Sonderfälle behandelt, auf die in anderem Zusammenhang einzugehen sich keine Gelegenheit bietet. Den zusammenhängenden Spezialgebieten hingegen sind die besonderen Artikel „Fall und Wurf", „Pendel", „Kreiselbewegung" und „Gravitation" gewidmet. Auf diejenigen Bewegungsarten, die als Schwingungen und Wellen zusammengefaßt zu werden pflegen, wird noch ausführlich in der Akustik zurückzukommen sein; sie müssen aber wegen ihrer Bedeutung auch für die eigentliche Mechanik schon hier kurz behandelt werden.

A. Kinematik.

Arten der Bewegung. Hiervon ist schon bei den „Grundbegriffen", p. 27, in Kürze die Rede gewesen. Eine Bewegung eines Punktes kann zunächst von dreierlei Charakter sein, nämlich 1. geradlinig oder 2. krummlinig, aber eben oder 3. doppelt gekrümmt, also räumlich; der zweite dieser Fälle ist ein Spezialfall des dritten, der erste ein solcher des zweiten. Die Bewegung auf einer Geraden nennt man eine Verschiebung, Schiebung, Gleitung oder Translation. Von den krummlinigen Bewegungen ist die kreisförmige die einfachste: sie heißt Drehung oder Rotation, und sie findet in einem bestimmten Augenblick um eine bestimmte Drehungsachse statt. Jede ebene Bewegung läßt sich als Kombination einer Verschiebung mit einer Drehung in derselben Ebene ansehen; anders ausgedrückt: jede ebene Bewegung ist eine reine Drehung relativ zu einem Punkte, der seinerseits fortschreitet. Auch eine räumliche Bewegung setzt sich aus einer Drehung mit einer Verschiebung zusammen; hier aber liegt die letztere schief zur Drehungsachse, sie läßt sich also in eine Verschiebung in der Ebene der Drehung und in eine solche in der Achse der Drehung zerlegen. Die reine Kombination einer Drehung mit einer Verschiebung längs der Drehungsachse heißt eine Schraubung oder Windung oder Torsion (der letztere Ausdruck bleibt aber besser für Deformationen von Körpern aufbewahrt).

Hiernach kann man die Bewegung eines Punktes allgemein auffassen als die Bewegung auf einer geraden Linie, die sich um ihn dreht, und zwar in einer Ebene, die sich ihrerseits um die gerade Linie dreht. Fällt die Drehung der Ebene fort, so ist die Bewegung eben; fällt auch die Drehung der Geraden fort, so ist sie geradlinig.

Auch die Bewegung eines ganzen Systems starr verbundener Punkte oder eines starren Körpers kann auf die obigen Typen zurückgeführt werden. Ist ein Punkt des Gebildes im Raume fest, so ist jede Bewegung eine Drehung um eine Achse. Bewegt sich eine Ebene des Körpers in sich selbst, so ist jede Bewegung des Körpers eine Drehung um einen ihrer Punkte. Liegt die Achse dort oder das Zentrum hier in der Unendlichkeit, so erhält man den Spezialfall der Verschiebung. Die allgemeinste Bewegung ist dann wieder eine Schraubung um eine gewisse Achse.

Größe der Bewegung. Auch die für die Bewegung charakteristischen Quantitätsgrößen sind schon im Artikel „Grundbegriffe" behandelt worden. Die Verschiebung wird durch eine Strecke gemessen; da diese ein Vektor ist, kann man sie durch ihre drei rechtwinkligen Komponenten ersetzen; gemessen werden alle Strecken in Zentimetern (cm). Dagegen wird eine Drehung gemessen durch den Winkel, um den die Drehung erfolgt; dabei wird gewöhnlich das Bogenmaß (p. 9) benutzt; eine ganze Umdrehung wird dann durch 2π, eine halbe, bei einem ganzen Körper auch als Umwendung bezeichnet, durch π ausgedrückt. Bei einer Schraubung muß man zur Charakterisierung eine Strecke, entsprechend der Verschiebung auf der Achse, und einen Winkel, entsprechend der Drehung um die Achse, angeben; eine ganze Windung wird wieder durch 2π, eine halbe

durch π ausgedrückt, letztere zuweilen als Umschraubung bezeichnet. Allgemein kann man hiernach die Verschiebung, die Drehung und die Schraubung mit den Symbolen $V[s]$, $D[\omega]$, $S[s, \omega]$ bezeichnen.

Insoweit handelt es sich um rein geometrische Größen. Fügt man jetzt den Begriff der Zeit hinzu, die man in Sekunden mißt, so erhält man als charakteristisch für die Bewegung die Begriffe der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und der — übrigens entbehrlichen — höheren Differentialquotienten; für die Verschiebung sind es solche der Strecke und sie heißen Streckengeschwindigkeit bezw. Streckenbeschleunigung, bei der Drehung handelt es sich dagegen um Winkelgeschwindigkeit bezw. Winkelbeschleunigung; bei der Schraubung um beides. Über alles das ist schon in den Grundbegriffen das Wesentliche gesagt worden. Es sei nur noch hinzugefügt, daß bei der Schraubung als ein neues Charakteristikum das Verhältnis der Strecken- zur Winkelgeschwindigkeit bezw. Beschleunigung auftritt.

Äquivalenz von Bewegungen. Der Übergang eines Systems aus einer Anfangslage in eine Endlage kann auf unendlich viele verschiedene Arten erfolgen; das Ergebnis aller dieser Bewegungen oder Bewegungsfolgen ist dasselbe, diese Bewegungen heißen daher äquivalent. Dabei kommt es einerseits auf die Natur der einzelnen Teilbewegungen, andererseits auf ihre Reihenfolge an; und zwar gelten dabei ganz bestimmte Regeln, von denen hier nur die wichtigsten, vom einfachsten zum kompliziertesten Falle aufsteigend, angeführt werden können. — 1. Zwei entgegengesetzt gleiche Verschiebungen sind äquivalent der Ruhe. — 2. Zwei entgegengesetzt gleiche Rotationen um dieselbe Achse sind äquivalent der Ruhe. — 3. Zwei einander sowohl hinsichtlich der Verschiebung als auch hinsichtlich der Drehung entgegengesetzt gleiche Schraubungen sind äquivalent der Ruhe. — 4. Eine Folge (heißt hier stets soviel wie Aufeinanderfolge) zweier Verschiebungen ist äquivalent einer einzigen, die die Vektorsumme jener beiden ist; dabei ist die Reihenfolge der beiden Verschiebungen gleichgültig. — 5. Dasselbe gilt für eine beliebige Zahl von Verschiebungen. — 6. Eine Folge von Verschiebungen, deren Vektorsumme null ist, ist der Ruhe äquivalent. — 7. Die Folge zweier Drehungen um dieselbe Achse ist äquivalent einer einzigen Drehung um dieselbe Achse, mit der algebraischen Winkelsumme der beiden Drehungen. — 8. Die Folge zweier unendlich kleiner Drehungen um parallele Achsen ist äquivalent einer einzigen Drehung um eine parallele, in derselben Ebene gelegene Achse, die den Abstand jener beiden Achsen im umgekehrten Verhältnis der Winkel der beiden Drehungen teilt, und innerhalb oder außerhalb liegt, je nachdem der Sinn beider Drehungen gleich oder entgegengesetzt ist; der resultierende Drehungswinkel ist wieder die algebraische Summe der beiden einzelnen. — 9. Sind in dem vorigen Falle die beiden Winkelamplituden entgegengesetzt gleich, so spricht man von einem unendlich kleinen Drehpaar, und dieses ist äquivalent mit einer unendlich kleinen Verschiebung, deren Richtung zur Ebene der beiden Drehachsen senkrecht ist, deren Sinn dahin gerichtet ist, wohin sich die Teilchen bei ihrer Drehung bewegen, wenn sie sich zwischen den beiden Achsen befinden, und deren Größe das Produkt aus Achsenabstand und Drehamplitude ist. — 10. Die Folge einer unendlich kleinen Drehung und einer unendlich kleinen Verschiebung senkrecht zur Drehachse ist äquivalent einer gleichsinnigen und gleichstarken Drehung um eine parallele Achse, die in der zur Verschiebungsrichtung senkrechten Ebene der Drehachse liegt und von ihr einen durch das Verhältnis der Verschiebung zur Drehung bestimmten Abstand hat, und zwar nach derjenigen Seite, wo die Punkte durch Verschiebung und Drehung entgegengesetzte Antriebe erhalten. — 11. Wenn sich zwei endliche Drehungen um parallele Achsen kombinieren, so resultiert ebenfalls eine einzige Drehung um eine parallele Achse; aber diese liegt nicht mehr in der Ebene jener, sondern bildet mit ihnen ein Prisma, dessen Basiswinkel durch die halben Amplituden

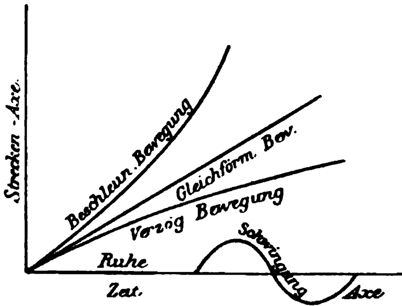
der beiden Drehungen, einmal im Drehungssinne, das andere Mal entgegengesetzt, bestimmt sind. Die Reihenfolge der Drehungen ist hier nicht mehr vertauschbar. Ein Drehpaar ist auch hier mit einer Verschiebung äquivalent, deren Richtung ist aber hier nicht so einfach bestimmt. — 12. Die Folge einer endlichen Verschiebung und einer endlichen Drehung ist eine gleichsinnige und gleichstarke Drehung um eine parallele Achse, die mit der Anfangs- und Endlage der ursprünglichen Achse ein gleichschenkliges Dreieck bildet, dessen Spitzenwinkel gleich dem Drehungswinkel ist. Man kann also auch umgekehrt eine Drehung um eine gegebene Achse durch eine solche um eine andere ersetzen, wenn man nur eine geeignete Verschiebung hinzufügt. — 13. Die Folge zweier Drehungen um zwei durch denselben Punkt gehende Achsen ist äquivalent einer einzigen Drehung um eine Achse, die ebenfalls durch jenen Punkt geht; die drei Achsen bilden eine Pyramide, bei der die beiden durch die neue Achse gehenden Flächen mit der dritten Winkel gleich den halben Amplituden der Teildrehungen bilden (der eine im Sinne, der andere gegen den Sinn der Drehung); die halbe resultierende Amplitude ist gleich dem der neuen Achse anliegenden Außenwinkel der Pyramide; die Reihenfolge der Drehungen ist nicht vertauschbar. — 14. Die Folge einer Drehung und einer auf der Drehachse nicht senkrechten Verschiebung ist äquivalent einer Schraubenbewegung, die die Achse und die Amplitude mit der Drehung gemein hat, und deren Verschiebung die Projektion der gegebenen Verschiebung auf die Achsenrichtung ist. — 15. Die Folge zweier Drehungen um zwei windschiefe Achsen ist äquivalent einer Schraubung, deren Verschiebungskomponente gleich der doppelten Projektion des kürzesten Abstandes der gegebenen Achsen auf die Schraubenachse ist, während diese selbst sowie die Amplitude der Drehkomponente der Schraubung mit den entsprechenden Größen für diejenige Drehung übereinstimmt, die den beiden gegebenen Drehungen äquivalent ist, nachdem deren Achsen durch Parallelverschiebung zur Schneidung gebracht sind. — Umgekehrt ist jede Schraubung äquivalent einer Folge zweier Drehungen um windschiefe Achsen, deren eine man willkürlich wählen darf. — 16. Die Folge von beliebig vielen Drehungen, ohne oder mit Verschiebungen, ist äquivalent einer Schraubung. — 17. Die Folge zweier Schraubungen ist äquivalent einer einzigen Schraubung; dabei ist die Reihenfolge der Schraubungen nicht vertauschbar.

Bewegung des Punktes.

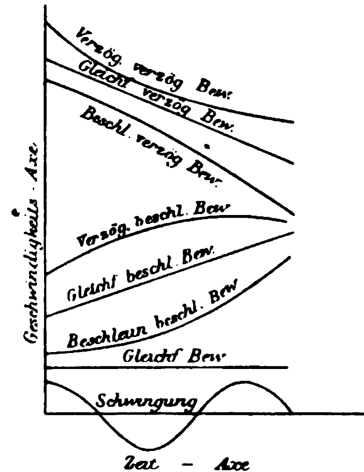
Diagramme der Bewegung eines Punktes. Um sich ein Bild von einer zu untersuchenden Bewegung zu machen, kann man sie graphisch darstellen, und zwar auf sehr verschiedene Arten, die nun der Reihe nach kurz betrachtet werden sollen; man nennt solche Zeichnungen Diagramme. Das nächstliegende ist das Diagramm der Bewegung (Figur 85), das die Zeit als Abszisse, die Strecke als Ordinate benutzt, letztere hier als reine Zahlengröße gedacht, also ohne Rücksicht auf die Richtung der Bewegung, wohl aber mit Rücksicht auf den Sinn der Bewegung (positiv oder negativ); der Ausgangspunkt der Bewegung wird durch einen Punkt der Abszissenachse, ein Umkehrpunkt durch ein Maximum oder Minimum der Kurve dargestellt. Der Ruhe entspricht die Abszissenachse selbst als Diagramm, der gleichförmigen Bewegung eine vom Anfangspunkt ausgehende gerade Linie, deren Steigungswinkel der arctang der Geschwindigkeit ist, und die je nach der Richtung der Bewegung nach oben oder unten läuft (Eisenbahnfahrpläne); die beschleunigte Bewegung wird durch eine nach außen konkave, die verzögerte durch eine nach außen konvexe Kurve dargestellt; die Sehne zwischen zweien ihrer Punkte gibt durch ihren Steigungswinkel ein Bild der mittleren Geschwindigkeit auf dieser Strecke. Geht die beschleunigte Bewegung in eine gleichförmige über, so setzt sich die Kurve in der Richtung ihrer Tangente als Gerade fort;

geht die verzögerte Bewegung in die Ruhe über, so schließt sich an die Kurve die horizontale Gerade an.

Zweitens kann man die Geschwindigkeit selbst als Ordinate der Zeit als Abszisse zuordnen; man erhält dann das Diagramm der Geschwindigkeit (Figur 86). Die Ruhe wird hier wieder durch die Zeitachse dargestellt, die gleichförmige Bewegung aber durch eine zu der Zeitachse im Abstande der Geschwindigkeit parallele horizontale Linie, die beschleunigte durch eine an-, die verzögerte durch eine absteigende Gerade, wobei der arctang des Steigungswinkels die Beschleunigung bezw. Verzögerung angibt. Das Diagramm der Geschwindigkeit gibt aber auch ein Bild der zurückgelegten Strecken, nämlich durch die von der Kurve, der Zeitachse und zwei Ordinaten eingeschlossene Fläche, wobei man die Lage über oder unter der Zeitachse als positiv oder negativ rechnen muß, wenn man die schließliche Ortsänderung, dagegen alles positiv, wenn man den zurückgelegten Gesamtweg bekommen will.



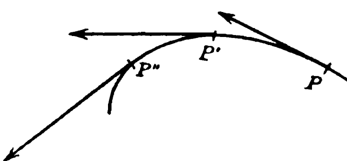
Figur 85.



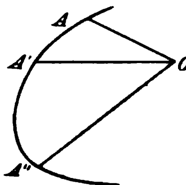
Figur 86.

Schließlich kann man noch das Diagramm der Beschleunigung entwerfen, das durch seine Ordinaten die Beschleunigungen, durch seine Flächen zwischen zwei Ordinaten die Änderung der Geschwindigkeit angibt; für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung erhält man eine horizontale Linie, für alle anderen Bewegungen Kurven.

Vektordiagramm der Geschwindigkeit; Hodograph. Die obige Methode, Geschwindigkeiten graphisch darzustellen, ist insofern unvollkommen, als sie nur



Figur 87 a (Bahn).



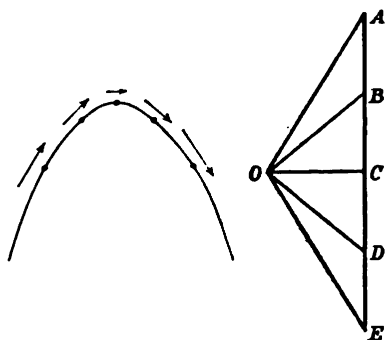
Figur 87 b (Hodograph).

den Zahlenwert, nicht aber die Richtung der Bewegung zur Anschauung bringt. Um die Geschwindigkeit einer Bewegung in ihrem Vektorcharakter darzustellen, muß man anders verfahren. Es sei die Kurve der Figur 87 a die Bahn eines Punktes, P, P', P'' seien drei Lagen desselben; dann ziehe man von einem beliebig gewählten Pole O aus gerade Linien OA, OA', OA'', die durch Größe und Richtung den Geschwindigkeiten in jenen drei Lagen entsprechen, wie dies in Figur 87 b angedeutet ist. Verbindet man nun die Punkte A, A', A'', so

erhält man eine der Bahnkurve zugeordnete Kurve, die man den **Hodograph** der Bewegung nennt. Diese Idee, die sich in der Folge als sehr fruchtbar erwiesen hat, stammt von MÖBIUS her; der Name Hodograph ist aber erst von HAMILTON eingeführt worden.[1]

Der Hodograph jeder gleichförmigen ebenen Bewegung ist kreisförmig. Ist die Bewegung zugleich geradlinig, so ist der Hodograph freilich auf einen einzigen Punkt beschränkt; erfolgt die Bewegung auf einem Kreise, so wird auch der Hodographenkreis gleichförmig beschrieben; bei jeder anderen Bahngestalt wird er ungleichförmig beschrieben. Der Hodographenkreis ist geschlossen, wenn die Bahn, ohne daß sie geschlossen zu sein braucht, einen Richtungsumgang repräsentiert, so daß also die Endtangente nach Richtung und Sinn der Anfangstangente parallel ist, z. B. bei einem Umgange einer ebenen Spirale (bei einer rämlichen Spirale ist er nur dann ein Kreis, wenn die Steigung gleichförmig ist). Bei Kurven, die keine Inflexionskurve haben, wird der Hodograph immer in gleichem Sinne durchlaufen, bei Bahnen mit Inflexionspunkten dagegen finden Umkehren statt, die sich bei der gleichförmigen Bewegung, also dem kreisförmigen Hodographen, natürlich nicht räumlich, sondern nur zeitlich bemerklich machen. — Der Hodograph einer ungleichförmigen Bewegung ist kein Kreis um den Pol; er kann aber in besonderem Falle trotzdem ein Kreis sein, und ist es z. B. bei der elliptischen Planetenbewegung nach dem NEWTONschen Gesetze; der Pol liegt aber hier exzentrisch.

Man erinnere sich nun an die Definition der Beschleunigung einer krummlinigen Bewegung (p. 33) als der dritten Seite des Dreiecks, dessen erste beiden Seiten zwei aufeinander folgende Geschwindigkeitsvektoren sind. Man sieht dann sofort ein, daß diese dritte Seite, also die Beschleunigung, ein Element des Hodographen ist und kommt somit zu dem Satze: Die Geschwindigkeit im Hodographen ist die Beschleunigung in der Bahn. Hieraus ergeben sich ohne weiteres die beiden wichtigen Spezialfälle: 1. Der Hodograph einer gleichförmig beschleunigten Bewegung wird mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen. 2. Der Hodograph einer Bewegung mit beliebig veränderlicher, aber immer in derselben Richtung stattfindenden Beschleunigung — diese Bewegung wird dabei im allgemeinen krummlinig sein — ist geradlinig. Bei einer Bewegung, deren Beschleunigung sowohl nach Größe wie nach Richtung konstant ist, erhält man also eine geradlinige und gleichförmig durchlaufene Hodographenkurve. Als Beispiel diene die Figur 88, in der links die Wurfparabel, rechts ihr Hodograph dargestellt ist; die Beschleunigung ist immer vertikal und gleich groß ($AB = BC = CD = DE$), die Geschwindigkeit dagegen nimmt von OA bis auf OC (horizontal) ab und dann wieder bis auf OE zu.



Figur 88.

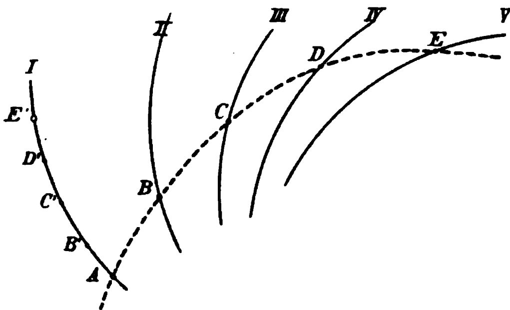
In neuerer Zeit hat man noch einen weiteren Hodographen, nämlich den der Beschleunigung, eingeführt, der in ganz analoger Weise erhalten wird; er hat aber nicht die umfassende Bedeutung wie der Geschwindigkeitshodograph. — Auch auf die Bewegung mehrerer Punkte kann man das Verfahren ausdehnen; es muß aber an diesem Hinweise genügen.

---

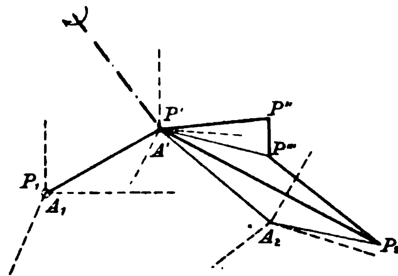
[1] F. A. MÖBIUS, Mech. d. Himmels, § 22. 1843. — W. R. HAMILTON, Elem. of quaternions p. 100. 718. London 1866.

Relative Bewegung des Punktes. Im Artikel „Grundbegriffe" ist bereits besprochen worden, daß eine absolute Bewegung im Prinzip keine Bedeutung hat, daß also alle in der Wirklichkeit zu betrachtende Bewegung relativen Charakters ist. Der Grad der Relativität kann aber verschieden sein, und so macht man die praktische Unterscheidung zwischen relativer und absoluter Bewegung, wobei man das bewegte System zu einem anderen in Beziehung setzt und dieses letztere in jenem Falle als ruhend ansieht, d. h. auf seine etwaige Bewegung keine Rücksicht nimmt, in diesem sie dagegen berücksichtigt und mit der Bewegung des eigentlichen Systems kombiniert. Die wichtigsten Gesetze dieser Kombination, soweit es sich um die Bewegung eines Punktes handelt, sind hier anzuführen; längerer Erörterungen bedarf es dabei nicht, da es einleuchtet, daß es sich im wesentlichen um die Anwendung der Sätze vom Parallelogramm der Strecken, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen handeln wird.

In Figur 89 sei $AB'C'D'E'$ die relative Bahn des Punktes, *I II III IV V* seien die Lagen, die diese Bahn infolge der Bewegung des Systems selbst zu den Zeiten, die den genannten Buchstaben entsprechen, annimmt; dann erhält man als absolute Bahn offenbar die Linie $ABCDE$. Jeder dieser letzteren Punkte heißt für einen bestimmten Augenblick „der mit dem betrachteten Punkte zusammenfallende Systempunkt". Man erhält hiernach den Satz: Die absolute



Figur 89.



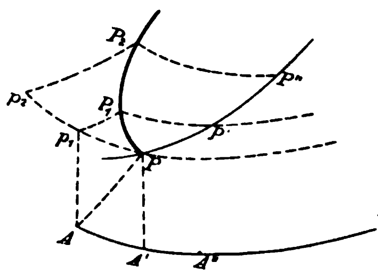
Figur 90.

Geschwindigkeit eines Punktes ist die Resultante aus seiner relativen Geschwindigkeit in bezug auf ein gegebenes System und der Geschwindigkeit des zusammenfallenden Systempunktes. Umgekehrt erhält man die relative Geschwindigkeit aus der absoluten, indem man letztere mit der im entgegengesetzten Sinne genommenen Geschwindigkeit des zusammenfallenden Systempunktes kombiniert. Wenn sich das System lediglich verschiebt, haben natürlich alle seine Punkte die gleiche Geschwindigkeit, und es erübrigt sich die Betrachtung des zusammenfallenden Punktes; wenn das System rotiert, muß man seine Bewegung auf den Drehpunkt beziehen; noch komplizierter wird es, wenn das System eine Schraubung erfährt. Analytisch fällt die Aufgabe, wie ohne weiteres ersichtlich, mit dem Problem der Koordinatentransformation zusammen, wofür die Formeln schon früher angegeben wurden; diese Formeln sind nunmehr für die drei Fälle der Verschiebung, der Drehung und der Schraubung zu entwickeln, was hier unterbleiben muß.

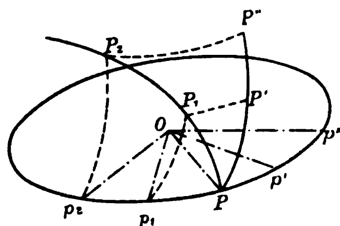
Bisher ist nur von der Bewegung und der Geschwindigkeit die Rede gewesen; in bezug auf die Beschleunigung der relativen Bewegung liegen die Verhältnisse, wie man schon aus früheren Betrachtungen über die Beschleunigung krummliniger Bewegung schließen wird, nicht so einfach, oder doch nur dann, wenn das Bezugssystem eine reine Verschiebung erfährt, in welchem Falle die absolute Beschleunigung des bewegten Punktes wiederum die Resultante aus der relativen Beschleunigung und der Beschleunigung des zusammenfallenden Systempunktes ist. Anders im allgemeinen Falle. Es sei in Figur 90 P_1 die Anfangs-,

P_2 die Endlage des Punktes bei einer sehr kleinen Bewegung; dann ist eine bestimmte Kurve von P_1 nach P_2 die absolute Bahn. Die absolute Bewegung kann man sich nun zusammengesetzt denken aus der mit der Anfangsgeschwindigkeit in der Anfangsrichtung vollzogenen Bewegung $P_1 P'$ und der die Beschleunigung nach Größe und Richtung darstellenden Bewegung von P' nach P_2. Diese letztere aber setzt sich zusammen aus der relativen Bewegung in bezug auf die Anfangslage des Bezugssystems, wodurch der Punkt von P' nach P'' gelangt, aus einer Drehung, die die Anfangsachsen des Systems A_1 in die Endachsen A_2 überführt, und durch die der Punkt aus P'' in die Lage P''' gelangt, und endlich aus der Verschiebung des Systems von A' nach A_2, wodurch der Punkt von P''' nach P_2 gelangt; die Kurve zwischen A_2 und P_2 ist dabei die relative Bahn des Punktes. Man nennt die durch die Strecke $P''P'''$ dargestellte Beschleunigung die zusammengesetzte zentripetale Beschleunigung und erhält somit den Satz: Die absolute Beschleunigung eines Punktes ist die Resultante aus der relativen Beschleunigung gegen das System, der Beschleunigung des zusammenfallenden Systempunktes und der zusammengesetzten zentripetalen Beschleunigung. Wie man leicht findet, ist die zusammengesetzte zentripetale Beschleunigung gleich dem doppelten Produkte der Winkelgeschwindigkeit des Systems und der Projektion der relativen Geschwindigkeit auf eine zur Drehachse senkrechte Ebene; in dieser Ebene liegt sie, und zwar senkrecht zur relativen Geschwindigkeit. Übrigens wird sie, wie man hieraus entnimmt, nicht bloß in dem schon angegebenen Falle null, wo sich das System nur verschiebt, sondern auch noch in den beiden anderen Fällen, wenn der Punkt in dem betrachteten Moment in relativer Ruhe ist oder wenn die relative Geschwindigkeit parallel der momentanen Drehachse ist. An Stelle der zentripetalen kann man auch die entgegengesetzt gleiche zentrifugale Beschleunigung einführen (vgl. oben) und kann dann sagen: Die relative Beschleunigung ist die Resultante aus der absoluten, der entgegengesetzten des zusammenfallenden Punktes und der zusammengesetzten zentrifugalen Beschleunigung (Satz von CORIOLIS).

Die konstruktive Ableitung der absoluten aus der relativen Bahn eines Punktes oder umgekehrt gestaltet sich folgendermaßen. Ist zunächst die Bewegung des Systems, auf den die Punktbewegung bezogen wird, eine reine Verschiebung, $AA'A''$ in Figur 91, und ist $PP'P''$ die absolute Bahn, so braucht



Figur 91.



Figur 92.

man nur zu $AA'P$ den vierten Parallelogrammpunkt p_1 und zu $p_1 PP'$ den vierten Parallelogrammpunkt P_1 zu finden und entsprechend für p_2 und P_2 zu verfahren; alsdann ist PP_1P_2 die relative Bahn; das umgekehrte Verfahren ist ganz entsprechend. Ist zweitens das System in Drehung um einen Punkt O, Figur 92, begriffen, ist $PP'P''$ wieder die absolute Bahn des Punktes P, und sind p' und p'' die Lagen, die P infolge der Drehung des Systems einnehmen würde zu den Zeiten, wo er sich auf seiner Bahn in P' bezw. P'' befindet, so ermittelt man die einer entgegengesetzt gleichen Winkeldrehung entsprechenden Punkte p_1 und p_2 und sucht die vierten Punkte der krummlinigen Parallelogramme $p_1 PP'$ u. s. w

auf; dann ist $PP_1 P_2$ die relative Bahn. Ist drittens die Bewegung des Systems eine Schraubung, so muß man die beiden vorhergehenden Konstruktionen in sachgemäßer Weise miteinander verbinden.

Spezielle Punktbewegungen.

Auf Grund des vorstehenden lassen sich nun die verschiedenen Bewegungen, die ein Massenpunkt ausführen kann, behandeln. Von den meisten dieser Bewegungen wird in ihrem physikalischen Zusammenhange weiter unten die Rede sein, so von der Fall- und Wurfbewegung, vom einfachen Pendel, von der Zentralbewegung, und von der Schwingungsbewegung. Hier sollen die Typen der Bewegung nur kurz in ihrem allgemeinen Wesen und hinsichtlich ihrer Äquivalenz erwähnt werden.

Von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung des Punktes ist nichts besonderes zu sagen; es darf daher gleich zu den beiden nächsteinfachen Fällen, der gleichförmigen Kreisbewegung einerseits und der ungleichförmigen geradlinigen Bewegung übergegangen werden, und von diesen läßt sich sofort einsehen, unter welchen Umständen sie miteinander äquivalent sind. Ist nämlich a der Radius des Kreises und v die gleichförmige Geschwindigkeit in ihm, also $\omega = v/a$ die Winkelgeschwindigkeit, und zerlegt man die Bewegung in zwei Komponenten nach aufeinander senkrechten Durchmessern, so findet man für jede von ihnen eine nach dem Sinus- bezw. Kosinusgesetz fortschreitende geradlinige Hin- und Herbewegung, die man „einfach harmonische Bewegung" nennt, und erhält somit die Sätze: 1. Die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung auf den Durchmesser ist eine harmonische Bewegung; 2. Die gleichförmige Kreisbewegung ist äquivalent mit zwei aufeinander senkrechten harmonischen Bewegungen in Kreisdurchmessern. Dabei ist der Kreisradius die Amplitude der harmonischen Bewegung, der Quotient von 2π durch die Winkelgeschwindigkeit ist die Periode der harmonischen Bewegung, und zwischen den beiden zueinander senkrechten harmonischen Bewegungen besteht eine Phasendifferenz von $\pi/2$, d. h. von einer halben Periode. Es gibt verschiedene Mechanismen, die, hierauf basierend, Kreisbewegung in annähernd oder exakt harmonische Bewegung umsetzen. — Was die Beschleunigung betrifft, so ist sie bei der gleichförmigen Kreisbewegung offenbar reine Zentripetalbeschleunigung und somit (vgl. p. 33) gleich v^2/a oder $\omega^2 a$. Daraus folgt weiter für die geradlinige Schwingung, daß bei ihr das Verhältnis der Beschleunigung zur Verrückung gleich ω^2, d. h. gleich $4\pi^2/T^2$ oder gleich $4\pi^2 n^2$ ist, wo T die Periode und n die Schwingungszahl bedeutet.

Dem Falle zweier zueinander senkrechter einfacher Schwingungen steht der zweier in derselben Linie stattfindenden gegenüber; hier bietet aber nur der Fall verschiedener Amplituden Interesse, während die Perioden noch als gleich angenommen werden mögen. Man hat dann zwei konzentrische Kreise von den Radien a und b, eine Phasendifferenz ε und als Resultante eine ebenfalls einfache Schwingung von der Amplitude

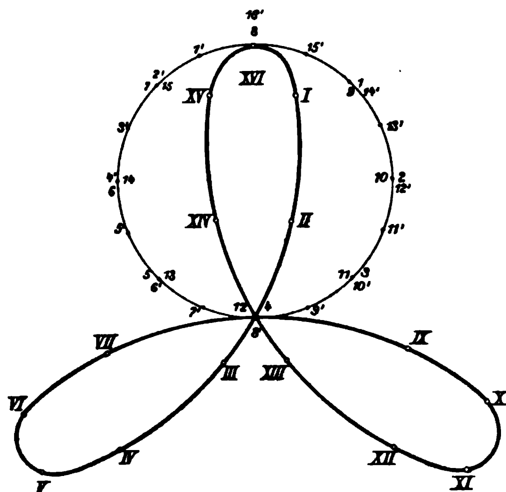
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varepsilon} \tag{1}$$

und der Phasendifferenz (gegen die erste Komponente)

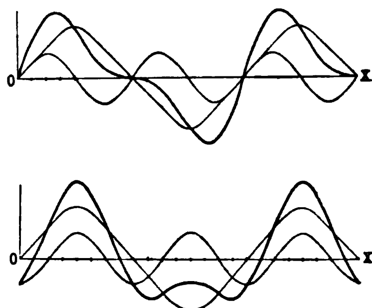
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b\sin\varepsilon}{a + b\cos\varepsilon} \tag{2}$$

Zwei entgegengesetzte gleichförmige Bewegungen auf konzentrischen Kreisen von verschiedenem Radius setzen sich zu zwei aufeinander senkrechten einfachen Schwingungen zusammen, die wieder eine Phasendifferenz von einer

viertel Periode haben, und von deren Amplituden die eine gleich der Summe, die andere gleich der Differenz der Radien ist; die weitere Zusammensetzung folgt weiter unten. — Sind jetzt die beiden Radien gleich, so bleibt nur die Summenschwingung als Resultante zweier entgegengesetzt gleicher Rotationen auf demselben Kreise übrig. — Ist nun die Geschwindigkeit und somit die Periode der beiden entgegengesetzten Kreisbewegungen verschieden, so tritt Asymmetrie ein, und man erhält statt der geradlinigen Schwingung eine Bewegung auf einer Rosette mit Schleifen, bei der die Zahl der Schleifen und die Zahl der zur Herbeiführung des Schlusses erforderlichen Umläufe in leicht ersichtlicher Weise durch die Verhältniszahlen der beiden Geschwindigkeiten bestimmt ist; in Figur 93 ist der Fall, daß die eine Geschwindigkeit die doppelte der anderen ist, dargestellt, es sind 16 Lagen dargestellt, und zwar für die eine Komponente durch deutsche, für die andere durch gestrichene deutsche, für die Resultante durch römische Ziffern.



Figur 93.



Figur 94.

Zusammengesetzte Schwingungen. Wenn man zwei geradlinige einfache Schwingungen, die in derselben Linie verlaufen, zusammensetzt, so erhält man eine Schwingung, bei der die Verrückung, Geschwindigkeit und Beschleunigung nicht mehr dem einfachen Sinus- oder Kosinusgesetz folgt, sondern zwei derartige Glieder enthält, von denen jedes einer der beiden Komponenten entspricht; zeichnet man das Verrückungsdiagramm der Komponenten und addiert zusammengehörige Ordinaten, so erhält man das Diagramm der resultierenden zusammengesetzten Schwingung; seine Gestalt hängt von den Perioden, Amplituden und der Phasendifferenz der beiden Komponenten ab. In den beigegebenen Figuren verhalten sich sowohl die Perioden wie die Amplituden der beiden Komponenten wie 1 : 2, die Phasendifferenz ist oben null, unten eine viertel Periode; der Verlauf der Resultante ist, wie man sieht, in beiden Fällen wesentlich verschieden. Dasselbe Verfahren kann man nun auf beliebig viele einfache Schwingungen und ihre Resultante anwenden, wobei der Fall besonders wichtig ist, daß die Schwingungszahlen der Komponenten sich wie die natürlichen Zahlen verhalten: harmonische Partialschwingungen. Von Fourier und Dirichlet ist nachgewiesen, daß man durch geeignete Wahl der Amplituden der einzelnen Partialschwingungen es erreichen kann, daß die Resultante jede beliebige Schwingungsform darstellt. Es sind diese zusammengesetzten harmonischen Schwingungen von besonderer Wichtigkeit in der Lehre von den Gezeiten, bei den elektrischen und namentlich bei den akustischen Schwingungen; in der Akustik wird näher auf sie eingegangen werden.

Zusammensetzung aufeinander senkrechter einfacher Schwingungen Daß zwei aufeinander senkrechte einfache Schwingungen von gleicher Periode und Amplitude eine gleichförmige Kreisbewegung liefern, ist schon angeführt worden; die Phasendifferenz mußte dabei eine viertel Periode sein. Ist sie null, so erhält man offenbar eine diagonale Gerade, die ebenfalls nach dem Sinusgesetz durchlaufen wird; sie verläuft bei gleichen Amplituden der Komponenten unter 45 Grad, bei Amplituden a und b unter dem Winkel arctang a/b gegen die zweite. Ist die Phasendifferenz bei verschiedenen Amplituden eine viertel Periode, so erhält man eine Ellipse mit den Richtungen der einfachen Schwingungen als Achsen. Bei jeder anderen Phasendifferenz bekommt man auch eine Ellipse, aber sie liegt jetzt schief gegen die Komponenten. Dagegen liefert die Kombination zweier einfacher Schwingungen von gleicher Periode, deren Richtungen schief zueinander sind, nur dann noch eine Ellipse, wenn die Phasendifferenz eine viertel Periode ($\pi/2$) ist; es läßt sich aber leicht zeigen, daß man eine beliebige Zahl einfacher Schwingungen, wenn sie nur gleiche Perioden haben, durch zwei Komponenten ersetzen kann, die eine Phasendifferenz von $\pi/2$ haben und somit wieder eine elliptische Schwingung liefern. — Wenn die Perioden zweier einfacher Schwingungen zwar nicht exakt, aber doch annähernd gleich sind, so erhält man als Resultante eine sehr ellipsenähnliche Kurve, die sich aber nicht völlig schließt, sondern, wenn die Komponenten ihre zweite Periode beginnen, in eine zweite, etwas gedrehte Ellipse übergeht u. s. w.; man kann das an Pendelapparaten (s. daselbst) gut beobachten; in der Natur bietet die Umdrehung der Apsiden der Planetenbahnen ein Beispiel. — Bei verschiedenen Amplituden, deren Verhältnis aber durch kleine Zahlen ausdrückbar ist, erhält man resultierende Bahnen, die das umschriebene, aus den beiden Amplituden gebildete Rechteck nicht, wie Kreis oder Ellipse, auf jeder Seite einmal, sondern so oft berühren, als die darauf senkrechte Amplitudenverhältniszahl angibt, also bei 1 : 2 das eine Seitenpaar einmal, das andere zweimal; bei 2 : 3 zwei bezw. dreimal u. s. w. Jedem Amplitudenverhältnis entspricht dabei, je nach der Phasendifferenz, eine ganze Serie von Bahnkurven, die z. B. bei dem Verhältnis 1 : 2 von einer achtähnlichen Figur bis zu einer Parabel variieren. Auch auf diese Figuren, die man gewöhnlich LISSAJOUSsche Figuren nennt, wird in der Akustik näher eingegangen werden.

Sinusbahn und elliptische Bahn. Zwischen der Sinuskurve und der Ellipse besteht noch eine andere sehr interessante kinematische Beziehung. Wenn nämlich ein Punkt, der eine einfache Schwingung ausführt, zu gleicher Zeit in einer darauf senkrechten Richtung gleichförmig fortschreitet, so beschreibt er eine Sinuskurve. Wenn er dagegen, während er die einfache Schwingung ausführt, sich in einem Kreise auf einer Zylinderfläche herumdreht, deren Achse mit der Schwingungsrichtung parallel ist, so beschreibt er eine Ellipse. Wie sich also die Gerade in der Ebene zu dem Kreise auf dem Zylinder verhält, so verhält sich die Sinuslinie in der Ebene zu der Ellipse auf dem Zylinder; denkt man sich die rechteckige Ebene aus Papier, zeichnet von Rand zu Rand eine Sinusschwingung und biegt das Rechteck zu einem Zylinder zusammen, so erhält man auf diesem eine Ellipse; zeichnet man umgekehrt auf einem Zylinder eine Ellipse und schneidet ihn zu einer Ebene auf, so verwandelt sich die Ellipse in eine Sinuslinie. Sind die Perioden der Schwingung und der Drehung auf der Zylinderfläche nicht gleich, sondern in anderem einfachen Zahlenverhältnis stehend, so erhält man andere LISSAJOUSsche Figuren. Man kann sich diese Verhältnisse veranschaulichen, indem man den Zylinder aus Glas wählt und die auf ihm verzeichneten Kurven perspektivisch betrachtet.

Spiralbahn und gedämpfte Schwingung. Wie der gleichförmigen Kreisbewegung die einfache Schwingung, so entspricht der Bewegung auf einer ebenen Spirale eine einfache Schwingung mit abnehmender Amplitude, eine sogenannte gedämpfte Schwingung. Die Spirale sei eine logarithmische oder gleich-

winklige, d. h. der Radiusvektor vom Pole nach einem Kurvenpunkte bilde mit der in diesem Punkte an die Kurve gelegten Tangente stets denselben Winkel; die Kurvengleichung ist dann einfach

$$(3) \qquad r = a^{\Theta} \quad ,$$

wo Θ der Winkel zwischen einem festen und dem variablen Radiusvektor ist; und für die beiden Komponenten der Beschleunigung, die tangentiale und die zentripetale, erhält man, wenn φ der konstante Tangentenwinkel ist und die Bewegung mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit $d\Theta/dt$ erfolgt:

$$(4) \qquad B_{\parallel} = r\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \quad , \qquad B_{\perp} = \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 \frac{r}{\sin\varphi} \quad .$$

Bestimmt man jetzt die Bewegung eines Punktes auf einer durch den Pol gehenden Geraden derart, daß er, diese Gerade als Abszissenachse gedacht, mit dem auf der Spirale bewegten Punkte immer die gleiche Ordinate hat, so erhält man eine einfache Schwingung, deren Amplitude aber keine konstante, sondern gleich dem jedesmaligen Werte von r ist; je nachdem man also die Spirale von außen nach innen oder von innen nach außen beschrieben denkt, erhält man — das ist der physikalisch bei weitem wichtigere Fall — eine gedämpfte oder eine wachsende Schwingung. Das Abnahmeverhältnis der Amplitude während einer halben Schwingung ist a^{π}; man nennt es das Dämpfungsverhältnis; sein Logarithmus, also die Größe $\pi \log a$, heißt das logarithmische Dekrement der Schwingung und ist der Bequemlichkeit halber die für die Rechnung meist benutzte Größe.

Punktschwingung in analytischer Behandlung. Die allgemeinste lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet, da das konstante Glied keine Bedeutung hat:

$$(5) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad ;$$

durch die Wahl von

$$x = e^{\lambda t}$$

als Lösungstype reduziert sie sich auf die gewöhnliche quadratische Gleichung:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad ,$$

deren Lösungen

$$(6) \qquad \lambda_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \quad , \qquad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

sind; sind also c und c' die beiden Integrationskonstanten, so ist

$$(7) \qquad x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

die allgemeine Lösung. Nur wenn $a^2 = 4b$ ist, also die beiden λ einander gleich werden, muß man zur Ergänzung einen algebraischen Faktor hinzunehmen und erhält die Sonderlösung:

$$(8) \qquad x = e^{\lambda t}(c + c't) \quad .$$

Die Hauptlösung ist von tatsächlich exponentiellem Charakter, falls $a^2 > 4b$ ist; im allgemeinen ist sie eine Kombination zweier exponentieller Bewegungen mit verschiedenen Exponenten; häufig aber darf man sich mit einer der beiden Konstanten c begnügen und erhält dann eine einfach abschwellende oder anschwellende Bewegung, je nachdem in dem Ausdruck für λ_1, also auch in der gegebenen Differentialgleichung b negativ oder positiv ist — im allgemeinen ist in der Natur der erstere Fall verwirklicht, weil die Beschleunigung, d. h. die Kraft, den Punkt in die normale Lage zurückzuführen bestrebt ist. Wenn dagegen

$a^2 > 4b$ ist, zerfallen die Funktionen mit komplexen Exponenten in Potenzen mit reellen Exponenten und, als zweiten Faktor, in Sinus- und Kosinusfunktionen mit reellen Winkeln; man erhält schließlich, wenn A und α jetzt die beiden Integrationskonstanten sind, und wenn sin und cos vereinigt werden:

(9) $$x = A e^{-\frac{a}{2}t} \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{4b - a^2} \cdot t - \alpha\right) \quad .$$

Für positives a ist dies eine gedämpfte Schwingung, dieser Fall ist in der Natur der normale, da das Glied mit a den Widerstand gegen die Bewegung darstellt. Ist dieser Widerstand gleich null, so erhält man die einfache Schwingung

(10) $$x = A \sin\left(\sqrt{b} \cdot t - \alpha\right)$$

mit konstanter Amplitude. Die Periode ist in diesem Spezialfalle

(11) $$T = \frac{2\pi}{\sqrt{b}} \quad ,$$

im Falle der Dämpfung aber

(12) $$T = \frac{2\pi}{\sqrt{b - a^2/4}} \quad ,$$

also größer; das Dämpfungsverhältnis ist

(13) $$D = e^{-\frac{a}{2}T}$$

und das logarithmische Dekrement:

(14) $$\delta = \frac{a}{2} T \quad .$$

Wenn $a^2 = 4b$ wird, bekommt man eine unendlich große Schwingungsdauer, die Bewegung wird aperiodisch, der Punkt nähert sich asymptotisch der Gleichgewichtslage; zur Vervollständigung der Lösung muß dann der bereits angegebene algebraische Faktor beigefügt werden, der jedoch physikalisch nur selten von Bedeutung ist.

Führt der Punkt mehrere einfache Schwingungen von verschiedenen Amplituden, Phasen und Perioden in derselben Richtung aus, so erhält man die FOURIERsche Reihe:

(15) $$x = \sum_1^p A_p \sin(2\pi p n t - \alpha_p)$$

oder ausgeschrieben:

$$x = A_1 \sin(2\pi n t - \alpha_1) + A_2 \sin(4\pi n t - \alpha_2) + \ldots$$

Führt der Punkt gleichzeitig in zwei zueinander senkrechten Richtungen einfache Schwingungen aus, so erhält man bei gleicher Periode, aber verschiedenen Amplituden und Phasen die Gleichungen:

(16) $$x = A \sin(2\pi n t - \alpha) \quad , \qquad y = B \sin(2\pi n t - \beta)$$

und als Lösung nach Elimination der Zeit die Bahnkurve

(17) $$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2}{AB}\cos(\alpha - \beta)\, x y + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2(\alpha - \beta)$$

d. h. eine Ellipse, die im allgemeinen schief und nur dann gemäß der Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

gerade liegt, wenn die Phasendifferenz eine viertel Periode ausmacht (s. oben). Bei verschiedenen Perioden erhält man in entsprechender Weise die anderen LISSAJOUSschen Figuren. Sind die Schwingungen gedämpft, so erhält man in jenem Falle eine elliptische Spirale.

Bewegung im Raume. Zieht man alle drei Dimensionen in Betracht, so wird die Mannigfaltigkeit der möglichen Bewegungen eines Punktes entsprechend größer. In besonderen Fällen kann die Resultante dreier aufeinander senkrechter geradliniger Bewegungen selbst geradlinig sein, z. B. bei drei einfachen Schwingungen von gleicher Periode und ohne Phasendifferenz; in anderen Spezialfällen wird sie wenigstens noch eben sein; im allgemeinen aber wird die resultierende Bahn eine Raumkurve sein. Auf Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden.

Bewegung auf vorgeschriebener Kurve oder Fläche. Von der allgemeinen Formulierung des Zwanges, auf einer gegebenen Kurve oder Fläche zu bleiben, ist schon in den beiden vorangegangenen Artikeln die Rede gewesen. Der Zwang ist hiernach eine Beschleunigung, die sich mit der der freien Bewegung zu der der erzwungenen Bewegung kombiniert. Außerdem muß, da im allgemeinen die freie und die erzwungene Bahn nicht dieselbe Anfangsrichtung haben werden, auch noch eine anfängliche Zwangsgeschwindigkeit eingeführt werden; nur in dem gedachten Spezialfalle fällt sie weg. Die Zwangsbeschleunigung ist im allgemeinen schief gegen die Kurve oder Fläche gerichtet; nur wenn man von der Reibung absieht, steht sie senkrecht auf ihnen. Für die folgenden Sätze ist von der Reibung abgesehen. 1. Ohne freie Beschleunigung bewegt sich ein Punkt auf vorgeschriebener Bahn gleichförmig, der Normalwiderstand fällt in die Schmiegungsebene und ist dem Krümmungsradius umgekehrt proportional. 2. Ist die freie Beschleunigung normal zur Bahn, so ist die Bewegung auch noch gleichförmig, aber die Richtung des Widerstands weicht von der des Krümmungsradius ab, außer wenn die Kurve eben ist und die freie Beschleunigung in diese Ebene fällt, in welchem Falle sich dann die beiden Beschleunigungen einfach addieren. 3. Ist die freie Beschleunigung tangential zur Bahn, so fällt die Zwangsbeschleunigung in die Richtung des Krümmungsradius, aber die Geschwindigkeit ist nicht mehr konstant. 4. Bei der Bewegung auf einer vorgeschriebenen Fläche läßt sich die freie Beschleunigung in drei Komponenten zerlegen, die erste längs der Tangente der Bahn, die zweite längs der Normalen der Fläche, die dritte längs der Schnittlinie der Tangentenebene der Fläche mit der Normalebene der Bahn; diese letzte ist gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit, dividiert durch den Radius der geodätischen Krümmung. Ist eine freie Beschleunigung nicht vorhanden, so bewegt sich der Punkt gleichförmig auf einer geodätischen Linie, und die Widerstandsbeschleunigung ist umgekehrt proportional dem Krümmungsradius des betreffenden Normalschnittes. Der erste Teil dieses Satzes gilt auch dann noch, wenn die freie Beschleunigung zwar vorhanden, aber stets normal zur Fläche ist.

Von den Beispielen der Zwangsbewegung eines Punktes auf einer Kurve oder Fläche werden die beiden wichtigsten, nämlich die Bewegung auf dem Kreise und auf der Kugelfläche, im Artikel „Pendel" behandelt werden; die Bewegung auf der Ebene und auf der Zykloide unter Wirkung der Schwere findet bei „Fall und Wurf" Erwähnung u. s. w. Sonst seien als Fälle von einem gewissen Interesse noch die Bewegung auf einer Spirale, sowie die Bewegung auf einer Zylinder- oder Kegelfläche erwähnt; jedoch ist hier kein Raum vorhanden, um darauf einzugehen.

Relative Bewegung. Auch hier können die wichtigsten Spezialfälle nur angedeutet werden. Von der relativen Translationsbewegung liefern das Schwimmproblem und das Treffproblem zwei typische Beispiele. Bei ersterem handelt es sich um Richtung φ und Geschwindigkeit v' der relativen Bewegung beim Durchschwimmen eines Stromes von der Geschwindigkeit u von einem Punkte A nach einem Punkte B, deren Verbindungslinie AB mit dem Strome

den Winkel α bildet; ist die absolute Geschwindigkeit v vorgeschrieben, so findet man v' als zweite Seite des Parallelogramms, dessen erste Seite u und dessen Diagonale, in der Linie AB, v ist, und zwar nach hinten ergänzt, φ und v' ergeben sich dabei aus dem Sinussatze; ist v nicht gegeben, so bleibt auch v' unbestimmt, und es ist z. B. diejenige Lösung zu ermitteln, bei der v' am kleinsten wird. Wenn u eine Funktion der Querkoordinate ist, wird das Problem infinitesimal, und die Bahn wird krummlinig. Bei dem Treffproblem handelt es sich um einen sich geradlinig bewegenden Punkt, auf den sich ein anderer geradlinig zu bewegt; es ist dessen Richtung und Geschwindigkeit so zu bestimmen, daß er den ersten trifft. Bewegt er sich in jedem Moment auf ihn zu, so erhält man andererseits eine bestimmte Kurve (Verfolgungs- oder Hundekurve).

Was die relative Drehungsbewegung betrifft, so ist hier das physikalisch weitaus wichtigste Problem das der Bewegung eines Punktes auf der Oberfläche der rotierenden Erde (von der gleichzeitigen Verschiebung der Erde in einer gegen die Drehungsachse schiefen Ebene darf aus ersichtlichen Gründen abgesehen werden). Dieses Problem ist von Bedeutung einerseits für die Abweichung fallender oder geworfener Körper und für die scheinbare Drehung der Schwingungsebene des Pendels, andererseits für die Bahn eines Teilchens der bewegten Lufthülle der Erde, d. h. für die Windbahnen. Indem auf die betreffenden Abschnitte des Handbuches sowie auf die Handbücher der Meteorologie verwiesen wird, kann hier nur einiges über die allgemeine Formulierung gesagt werden. — Von den Beschleunigungen, die man zur absoluten hinzufügen muß, um die — zur Beobachtung gelangende — relative zu erhalten, fallen einige weg, teils weil sie den bewegten Punkt in gleicher Weise wie das Bezugssystem betreffen, teils weil sie außerordentlich klein sind, letzteres namentlich dann, wenn die Ortsänderungen des Punkts klein sind gegen seinen Abstand von der Erdachse (in der Nähe der Pole wird das nicht mehr sehr annähernd der Fall sein). Da außerdem in der beobachteten Schwerebeschleunigung die Zentrifugalbeschleunigung schon enthalten ist (s. Artikel „Gravitation"), so kommt als einziges Zusatzglied die zusammengesetzte Zentrifugalbeschleunigung (s. oben) in Betracht. Ist die Bewegung des Punktes auf die Horizontalebene seines Ortes, Breite φ, beschränkt, so sind, wenn die Achsen nach Osten, Süden und Oben gelegt werden, die Komponenten der zusammengesetzten Zentrifugalbeschleunigung

$$(18)\quad -X_\omega = -2\,\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt}\ ,\quad -Y_\omega = 2\,\omega \sin\varphi \frac{dx}{dt}\ ,\quad -Z_\omega = 2\,\omega\cos\varphi\frac{dx}{dt}\ ,$$

wo ω die Drehungsgeschwindigkeit ist; zu der letzten Komponente kommt noch die freie Schwerebeschleunigung, vermindert um die Widerstandsbeschleunigung der Horizontalebene; durch Integration der so entstehenden Bewegungsgleichungen ergibt sich: die Geschwindigkeit v ist konstant, nämlich immer gleich der Anfangsgeschwindigkeit v_0, die Bahn aber ist nur unter dem Äquator gerade und in die Richtung von v_0 fallend; unter anderer Breite aber ist sie ein Kreis, dessen Gleichung, wenn α der Winkel von v_0 mit der x-Achse ist, lautet:

$$(19)\quad \left(y - \frac{v_0\cos\alpha}{2\,\omega\sin\varphi}\right)^2 + \left(x + \frac{v_0 \sin\alpha}{2\,\omega\sin\varphi}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{2\,\omega\sin\varphi}\right)^2\ ;$$

der Radius R dieses Kreises und somit auch die Winkelgeschwindigkeit ω' der Kreisbewegung ist von α unabhängig, also nur von v_0 und ω abhängig, nämlich — nebst der Umlaufszeit T:

$$(20)\quad R = \frac{v_0}{2\,\omega\sin\varphi}\ ,\qquad \omega' = 2\,\omega\sin\varphi\ ,\qquad T = \frac{2\,\pi}{2\,\omega\sin\varphi}\ .$$

Es ist z. B. unter rund 43^0 gerade $R = 10000\,v_0$ und die Umdrehungsdauer $2\pi\cdot 10000 = 62832$ Sekunden, unter 30^0 ist $R = 13698\,v_0$ und die Um-

drehungsdauer gerade ein Tag. Mit wachsender Breite werden diese Ergebnisse immer ungenauer, und für den Pol selbst muß man ganz anders formulieren, nämlich für die x- und y-Komponente außer der zusammengesetzten auch noch die einfache Zentrifugalbeschleunigung einsetzen, während die Vertikalkomponente null wird; man findet als Polarkoordinaten der Bahn

$$\Theta = \omega t \quad , \quad r = v_0 t \tag{21}$$

und somit als Bahn selbst

$$r = \frac{v_0}{\omega}\Theta \quad , \tag{22}$$

d. h. eine archimedische Spirale um den Pol. — Ist die Bewegung nicht auf die lokale Horizontalebene beschränkt, so tut man gut, die Achsen nach Osten, in den Radius des Breitenkreises und in die Richtung der Erdachse (nördlich) zu legen und muß dann die Anfangsgeschwindigkeit in die drei entsprechenden Komponenten $a\,b\,c$ zerlegen; man findet alsdann

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{g\cos\varphi}{4\,\omega^2}(2\,\omega t - \sin 2\,\omega t) + \frac{1}{2}\,\frac{a}{\omega}\sin 2\,\omega t - \frac{1}{2}\,\frac{b}{\omega}(1 - \cos 2\,\omega t) \;, \\ y &= \frac{1}{2}\,\frac{b}{\omega}\sin 2\,\omega t + \left(\frac{1}{2}\,\frac{a}{\omega} - \frac{g\cos\varphi}{4\,\omega^2}\right)(1 - \cos 2\,\omega t) \quad , \\ z &= ct - \frac{1}{2}g\sin\varphi\cdot t^2 \\ v_x &= a - 2\,\omega y \;, \quad v_y = b + 2\,\omega x - g\cos\varphi\cdot t \;, \quad v_z = c - g\sin\varphi\cdot t \;. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Die Anwendung hiervon auf die Abweichung bei Fall und Wurf findet man in diesem Artikel.

Bewegung starrer Systeme.

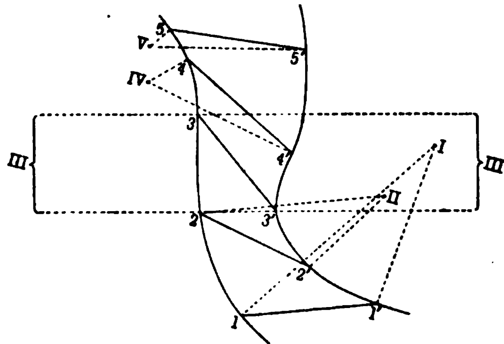
An die Kinematik des einzelnen Massenpunktes hätte sich nun die zweier oder mehrerer verbundener Punkte anzuschließen. Unter Übergehung dieser teils durch Kombination leicht zu behandelnder, teils im folgenden mitenthaltenen Fälle soll hier gleich zur Kinematik der starren Körper übergegangen werden. Der einfachste Fall, die reine Verschiebung, bietet hier kein neues Interesse dar, es möge daher sofort zu dem Falle der ebenen Bewegung übergegangen werden.

Ebene oder Parallelbewegung. Hierunter wird eine Bewegung des starren Systems verstanden, bei der die Bahnen aller Punkte einer gegebenen Ebene parallel sind; jede dieser Ebene parallele Körperebene bewegt sich infolgedessen nur in sich, jede auf ihr senkrechte Gerade bleibt senkrecht, so daß ihre sämtlichen Punkte gleiche Bewegung ausführen; und somit genügt es, die Bewegung in einer solchen Parallelebene zu verfolgen, da man aus ihr durch Ergänzung der Kurven zu Zylinderflächen die räumliche Konfiguration des Vorgangs ableiten kann.

In jedem Augenblicke ist die Bewegung eine Drehung um einen bestimmten Punkt, das Momentanzentrum (seine räumliche Ergänzung ist die Momentanachse), mit der Winkelgeschwindigkeit ω, also mit der Streckengeschwindigkeit ωr im Abstande r vom Momentanzentrum. Aber dieses Zentrum wandert stetig, es beschreibt eine Kurve innerhalb der festen gegebenen Ebene; und da in jedem Moment ein bestimmter Körperpunkt mit dem Zentrum zusammenfällt, aber in jedem Moment ein anderer, so erhält man eine zweite Kurve, nämlich den Inbegriff der mit dem Momentanzentrum zusammenfallenden Körperpunkte. Man nennt die beiden in Rede stehenden Kurven die Zentroden (die räumlichen Ergänzungen die Zentrodenzylinder) der ebenen Bewegung; und zwar die absolute Bahn des Momentanzentrums die Raumzentrode, die andere die Körper-

zentrode; man könnte auch von absoluter und relativer Zentrode sprechen. Auch wird das Zentrum häufig als Pol, die Zentroden als feste und bewegliche Polkurve bezeichnet.

Jeder Körperpunkt beschreibt bei der Bewegung eine bestimmte Kurve, und auf deren Normalen liegen die Punkte der Zentrode; betrachtet man also gleichzeitig die Bahnen zweier Körperpunkte oder, was dasselbe ist, die Lagen einer Linie im starren Körper, so liefern die in den Endpunkten einer Lage dieser Linie errichteten Normalen durch ihren Schnittpunkt den entsprechenden Ort des Momentanzentrums, und die Kombination aller dieser Orte ergibt die Zentrode. In Figur 95 ist dies veranschaulicht: 11′, 22′, 33′, 44′, 55′ sind Lagen der Linie, I, II, III, IV, V sind die entsprechenden Punkte der Zentrode; I und II liegen rechts, IV und V links, dazwischen verschwindet die Zentrode bei III in der Unendlichkeit, hier bewegen sich einen Augenblick lang die beiden Endpunkte der Linie, also alle Körperpunkte, parallel, die Bewegung ist eine reine Verschiebung. Überhaupt beachte man, daß durch die Bahn zweier Punkte die Bewegung des ganzen Körpers bestimmt ist, wie sich eben darin zeigt, daß die Zentrode durch sie festgelegt ist.



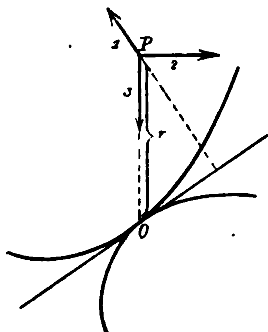
Figur 95.

Die Richtung, in der sich die Punkte einer Geraden bewegen, ist im allgemeinen schief gegen ihre eigene Richtung und für alle ihre Punkte verschieden; nur wenn die Gerade oder ihre Verlängerung durch das Momentanzentrum hindurchgeht, bewegen sich alle Punkte senkrecht zur Geraden, diese selbst führt also eine reine Drehung aus. In jedem anderen Falle ist die Bewegung der Geraden aus Drehung und Verschiebung zusammengesetzt; es gibt dann sogar unter Umständen einen Punkt, dessen Verschiebung in die Linie selbst fällt, und den man den Gleitpunkt der Geraden nennen kann; es ist der Fußpunkt des vom Momentanzentrum auf die Gerade gefällten Lotes. Man kann dann die Bewegung der Geraden auch auffassen als eine Drehung um den Gleitpunkt mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω, kombiniert mit einer Gleitung in ihrer eigenen Richtung mit der Streckengeschwindigkeit $r\omega$, wo r der Abstand des Gleitpunktes vom Momentanzentrum ist. Von anderem Standpunkte betrachtet, kann man ferner sagen: Die Tangenten einer Kurve gleiten in sich mit der Geschwindigkeit der betreffenden Punkte und drehen sich außerdem mit der betreffenden Winkelgeschwindigkeit; nur da, wo die Kurve die Zentrode berührt, findet reine Drehung statt.

Die ganze Bewegung des Körpers kann durch die Aussage beschrieben werden, daß die Körperzentrode auf der Raumzentrode rollt, ohne zu gleiten. In ihrem gemeinsamen Punkte — dem Momentanzentrum — bilden ihre Normalen eine einzige gerade Linie, und die Geschwindigkeit, mit der sich das Momentanzentrum auf der Raumzentrode fortbewegt, ist genau so groß, wie die, mit der sich der zusammenfallende Körperpunkt auf der Körperzentrode fortbewegt.. Wäre diese größer als jene, so würde die Körperzentrode auf der Raumzentrode nach vorn gleiten, im entgegengesetzten Falle nach hinten. Ein Beispiel für diese drei Fälle bieten die Räder und Schienen auf freier Fahrt, bei Einsetzen der Bremse (Verzögerung) und beim Abfahren (Beschleunigung).

Sehr merkwürdig sind die Beschleunigungsverhältnisse. Was zunächst

das Momentanzentrum betrifft oder vielmehr den mit ihm zusammenfallenden Körperpunkt, so ist, wie man leicht findet, dessen Beschleunigung das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit und aus der Streckengeschwindigkeit des zusammenfallenden Punktes auf der Körperzentrode, und zwar ist sie nach dem Krümmungszentrum der Körperzentrode gerichtet. Für jeden anderen Punkt setzt sich hingegen die Beschleunigung aus drei Komponenten zusammen, die in Figur 96 durch Pfeile angedeutet sind: aus der eben genannten Komponente 1, dem Werte nach gleich ωv, wo v die eben genannte Geschwindigkeit ist, der Komponente 2 in der Bewegungsrichtung gleich ωr und der Komponente 3, die zentripetal und gleich $\omega^2 r$ ist. Aus dieser letzteren kann man dann weiter die Krümmung der Bahn eines beliebigen Punktes ableiten, jedoch muß es an diesem Hinweis genügen.



Figur 96.

Endlich seien noch die Formeln für Zentrum und Zentroden angeführt. Sind a und b die Koordinaten, u und v die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes, so sind die Koordinaten des Momentanzentrums

$$x = a - \frac{v}{\omega} \quad , \qquad y = b + \frac{u}{\omega} \quad . \tag{24}$$

Hierin sind a, b, u, v, ω sämtlich Funktionen der Zeit; eliminiert man diese mit Hilfe der bekannten Funktionalausdrücke, so erhält man die Gleichung der Raumzentrode. Dagegen sind, wenn ξ, η im Körper feste Koordinaten des Momentanzentrums sind und Θ der Winkel zwischen der x- und der ξ-Achse ist, die Koordinaten irgend eines Punktes in dem neuen System:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi + (a - x)\cos\Theta + (b - y)\sin\Theta \quad , \\ \eta + (b - y)\cos\Theta - (a - x)\sin\Theta \quad , \end{array} \right. \tag{25}$$

oder auch

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi + \frac{v}{\omega}\cos\Theta - \frac{u}{\omega}\sin\Theta \quad , \\ \eta - \frac{u}{\omega}\cos\Theta - \frac{v}{\omega}\sin\Theta \quad . \end{array} \right. \tag{26}$$

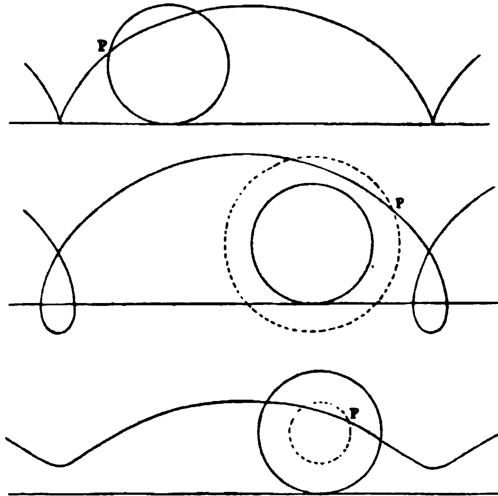
Wählt man nun den betrachteten Punkt selbst zum Anfangspunkte des im Körper festen Systems, so werden obige Ausdrücke null und folglich die Koordinaten des Momentanzentrums:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = - \frac{v}{\omega}\cos\Theta + \frac{u}{\omega}\sin\Theta \quad , \\ \eta = \frac{u}{\omega}\cos\Theta + \frac{v}{\omega}\sin\Theta \quad . \end{array} \right. \tag{27}$$

Wenn man nun hierin wiederum die Zeit eliminiert, so erhält man die Gleichung der Körperzentrode.

Als Ergebnis kann man schließlich die Lehre von der ebenen Bewegung in dem Satze zusammenfassen, bei dem nunmehr die ebenen Begriffe zu den entsprechenden räumlichen ergänzt werden müssen: Jede Bewegung eines Körpers parallel zu einer festen Ebene besteht darin, daß eine mit dem Körper fest verbundene Zylinderfläche auf einer anderen, im Raume festen ohne zu gleiten rollt; und zwar besteht sie in jedem Augenblick in einer Drehung um die gemeinsame Berührungslinie der beiden Zylinder.

Rouletten. Die bei der ebenen Bewegung eines Systems von irgend einem Punkte beschriebene absolute Bahn heißt Roulette oder Rollkurve. Je nach der Form der beiden aufeinander rollenden Zentroden erhält man verschiedene Rouletten; am wichtigsten sind diejenigen, bei denen diese Kurven gerade Linien oder Kreise sind. Der einfachste Fall ist der, daß ein Kreis auf einer Geraden rollt; dabei ist zu beachten, daß der sich bewegende Körper selbst der rollende Kreis sein kann, aber nicht zu sein braucht, da man auch bei einem anderen Körper, z. B. einem größeren oder kleineren Kreise oder bei einem Körper von ganz anderer Form durch eine geeignete Vorrichtung es erreichen kann, daß die Körperzentrode ein Kreis ist. Ein bestimmter Punkt der Körperzentrode — in dem gedachten einfachsten Falle, wo der Körper selbst der rollende Kreis ist, ist dies ein Punkt des Kreisrandes — beschreibt eine als Zykloide bekannte Kurve, bestehend aus Bögen, die Halbellipsen ähnlich sind und in Spitzen vom Winkel null aneinanderstoßen; dagegen beschreibt jeder andere Punkt eine sogenannte Trochoide, und zwar, wenn der Punkt außerhalb des Kreises liegt, eine Trochoide mit Schleifen, wenn er innerhalb liegt, eine Trochoide mit Abrundungen; je weiter draußen der Punkt liegt, desto größer werden die Schleifen, je weiter drinnen er liegt, desto sanfter die Wellungen, und der Kreismittelpunkt beschreibt eine der Raumzentrode parallele Gerade. In Figur 97 sind die drei Kurven nebst den Erzeugern und Zentroden dargestellt.



Figur 97.

Wenn auch die Raumzentrode ein Kreis ist, wenn also ein Kreis auf einem anderen rollt, so sind drei Fälle zu unterscheiden: liegen die Kreise außerhalb voneinander, so erhält man die Epizykloide bezw. die Epitrochoide; liegt die Körperzentrode innerhalb der Raumzentrode, so erhält man die Hypozykloide bezw. Hypotrochoide; liegt endlich die Raumzentrode innerhalb der Körperzentrode, so erhält man Perizykloide bezw. Peritrochoide, wobei indessen leicht einzusehen ist, daß eine Perizykloide immer zugleich auch eine Epizykloide ist, entstehend durch Rollen eines gewissen äußeren Kreises auf demselben festen Kreise.

Nimmt man die Raumzentrode zur Abszissenachse, den in der Spitze auf ihr senkrechten Kreisdurchmesser zur Ordinatenachse, und ist Θ der Winkel, den der vom Momentanzentrum nach dem Punkte gezogene Strahl mit der Abszissenachse bildet, so hat die Zykloide die Gleichungen:

$$x = a(2\,\Theta - \sin 2\,\Theta) \quad ; \qquad y = a(1 - \cos 2\,\Theta) \tag{28}$$

oder nach Elimination des Winkels die Gleichung:

$$x = a \arccos\frac{a-y}{a} \pm \sqrt{(2\,a - y)y} \quad ; \tag{29}$$

ferner ist die Beschleunigung in und senkrecht zur Bahn (ω Winkelgeschwindigkeit):

(30) $$B_{\parallel} = a\left(2\frac{d\omega}{dt}\sin\Theta + \omega^2\cos\Theta\right) \quad , \qquad B_{\perp} = a\,\omega^2\sin\Theta$$

und die Bahnkrümmung:

(31) $$\varrho = 4\,a\sin\Theta \quad ;$$

endlich ist die Bahn vom Anfangspunkte bis zum Punkte selbst:

(32) $$s = 4\,a(1 - \cos\Theta) \quad ,$$

also speziell für den ganzen Zykloidenbogen 8a.

Für die Trochoide wird, wenn der erzeugende Punkt den Abstand p vom Kreismittelpunkt hat:

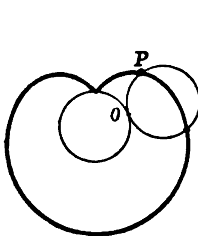
(33) $$x = 2\,a\,\Theta - p\sin 2\,\Theta \quad , \qquad y = a - p\cos 2\,\Theta \quad .$$

Für die Epi- bezw. Hypozykloide wird, wenn A der Radius des festen Kreises ist:

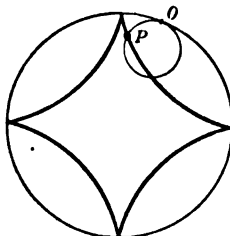
(34) $$\begin{cases} x = (A \pm a)\cos\left(\frac{a}{A}\,2\,\Theta\right) \mp a\cos\left(\frac{A \pm a}{A}\,2\,\Theta\right) \quad , \\ y = (A \pm a)\sin\left(\frac{a}{A}\,2\,\Theta\right) - a\sin\left(\frac{A \pm a}{A}\,2\,\Theta\right) \quad , \end{cases}$$

(35) $$\varrho = \frac{4\,a(A \pm a)}{A \pm 2\,a}\sin\Theta \quad .$$

Bei der Epi- bezw. Hypotrochoide tritt wieder p in die zweiten Glieder von x und y ein; die Beschleunigungskomponenten und die Krümmung haben hier kompliziertere Formeln. Besonders interessante Spezialfälle sind die, wo 1. bei der Epizykloide a unendlich wird, also eine Gerade sich von einem Kreise abrollt: Kreisevolvente; 2. bei der Epizykloide a gleich A ist: Kardioide (Figur 98a), die in der Optik eine wichtige Rolle spielt; 3. bei der Hypozykloide A gleich $4\,a$ ist (Figur 98b). In anderem Zusammenhange ist übrigens eine Schleifenroulette schon früher in Figur 93, p. 308 dargestellt worden.



Figur 98a.



Figur 98b.

Wenn die rollende Kurve eine Gerade ist, die feste aber beliebige Gestalt hat, so heißt die von irgend einem Punkte der Geraden beschriebene Kurve die Evolvente der festen und diese die Evolute der ersteren Kurve. Die Evolute ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte jeder der Evolventen oder auch die Einhüllende ihrer Normalen. Auf Grund dieser Beziehung kann man eine Bahnkurve zeichnen, wenn man die Krümmungen an den einzelnen Stellen kennt; so haben z. B. Lord KELVIN und PERRY Kapillarkurven konstruiert, und C. V. BOYS hat die Methode bedeutend vereinfacht durch Konstruktion eines Maßstabes mit reziproker Skala, der somit direkt die Krümmungen angibt.[1]

Unter den hypozykloidischen Bewegungen verdient eine wegen der besonders merkwürdigen, bei ihr stattfindenden Beziehungen noch eine kurze Betrachtung. Es ist der Fall, daß ein Kreis im Innern eines anderen von doppeltem Radius rollt. Statt der vier Bögen im Innern der Figur 98b werden hier begreiflicherweise nur zwei auftreten, und da sie notwendig symmetrisch zu den beiden Hälften des festen Kreises liegen müssen, wird man schon vermuten, was durch die nähere

[1] Man vgl. z. B. GRAY-AUERBACH, Lehrbuch der Physik, p. 102 f.

Betrachtung bestätigt wird, daß sie in einem Durchmesser des festen Kreises zusammenfallen; ein Peripheriepunkt bewegt sich also geradlinig, und zwar beschreiben die Endpunkte eines Durchmessers des rollenden Kreises zwei aufeinander senkrechte Durchmesser des festen Kreises. Dagegen beschreiben innere Punkte des rollenden Kreises elliptische Bahnen und speziell sein Mittelpunkt eine Kreisbahn.

Der eben angedeutete Fall kann als Beispiel dienen für die Anwendung der Lehren der Kinematik auf die Mechanismen, auf die, als der technischen Physik angehörig, hier im übrigen nicht eingegangen werden kann. Wie man nämlich ohne weiteres einsieht, kann der eben besprochene Fall zur Grundlage für die Aufgabe dienen, eine Kreisbewegung in eine elliptische einerseits oder in eine geradlinige andererseits überzuführen; das letztere bekanntlich eine der am häufigsten sich darbietenden Forderungen bei mechanischen Anordnungen, ersteres z. B. zu verwerten für die Konstruktion von Ellipsen auf mechanischem Wege. Sehr nahe verwandte Fälle betreffen die Einrichtungen von der Art der Kurbelstange, des WATTschen Parallelogramms u. a. m.

Sphärische Bewegung starrer Körper. Nächst der ebenen ist die sphärische Bewegung der Körper der einfachste Typus. Es ist das diejenige Bewegung, bei der jeder Punkt, wie dort auf eine bestimmte Ebene, so hier auf eine bestimmte Kugelfläche beschränkt bleibt, und bei der, wie dort alle diese Ebenen einander parallel, so hier alle diese Kugelflächen miteinander konzentrisch sind und bleiben. Die Bewegung ist also eine Drehung um einen bestimmten Punkt, den Mittelpunkt, jeder Punkt hat einen unveränderlichen Abstand von diesem, die Bewegungscharakteristika — Strecke, Geschwindigkeit, Beschleunigung u. s. w. — für Punkte eines Radius sind einfach den Abständen von dem Mittelpunkte proportional, und es genügt somit, wie dort die Bewegung in einer Ebene, so hier die Bewegung auf einer Kugelfläche zu betrachten; auf dieser aber ist hier wie dort die Bewegung des ganzen Systems vollständig bestimmt, wenn die Bewegung zweier Punkte festgelegt ist, wenn also drei Koordinaten auf der Kugelfläche als Funktionen der Zeit angegeben werden, zwei für den ersten und eine für den zweiten der gedachten beiden Punkte. Das Problem läuft somit dem der ebenen Bewegung ganz parallel, und es wird genügen, die wichtigsten Verhältnisse in folgendem Satze zusammenzufassen: Eine sphärische Figur kann aus einer in eine benachbarte Lage übergeführt werden durch eine Drehung um eine durch den Kugelmittelpunkt gehende Achse; eine endliche Lagenänderung besteht aus einer Folge von Drehungen um verschiedene Momentanachsen; man findet den Schnittpunkt einer solchen Momentanachse mit der Kugelfläche, indem man in zwei Punkten Bögen größter Kugelkreise senkrecht zu ihren Geschwindigkeiten zieht und ihren Schnittpunkt aufsucht. — Ferner: Jede sphärische Bewegung kann so aufgefaßt werden, daß eine mit dem System fest verbundene sphärische Kurve auf einer anderen festen sphärischen Kurve ohne zu gleiten rollt; die Verbindungslinie des Kugelmittelpunktes mit dem Berührungspunkte beider Kurven ist die Momentanachse. — Und endlich, wenn man die Gesamtheit der Momentanachsen ins Auge faßt, die, da sie alle durch den Mittelpunkt gehen, einen Kegel bilden: Die sphärische Bewegung eines Körpers läßt sich dahin auffassen, daß ein mit dem Körper fest verbundener Kegel, dessen Spitze in dem Mittelpunkte der sphärischen Bewegung liegt, auf einem im Raume festen Kegel mit derselben Spitze ohne zu gleiten rollt; die Berührungslinie beider Kegel ist die augenblickliche Drehungsachse. — Bei der sphärischen Bewegung spielen zwei Winkelgeschwindigkeiten die entscheidende Rolle, nämlich die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanachse und die Geschwindigkeit, mit der diese selbst ihre Richtung im Raume ändert; zwischen ihnen besteht, vermöge gewisser aus der Konfiguration sich ergebender Kurvenkrümmungen, eine einfache Beziehung. — Die beiden Kegel sind je nach den Umständen des Falles von verschiedenem Grade.

Wie bei der ebenen Bewegung eine Kurve von einer anderen sich abrollt, so wird ganz entsprechend hier eine Fläche von einer anderen abrollen; der einfachste Fall wird der sein, wo eine Kugel von einer Ebene, der nächste der sein, wo eine Kugel von einer anderen abrollt. Am wichtigsten wird indessen hier der Fall, wo ein Ellipsoid von einer Ebene abrollt, und zwar in der Weise, daß die momentane Winkelgeschwindigkeit dem Radiusvektor nach dem Berührungspunkte proportional ist, worin als Spezialfall das gleichförmige Abrollen der Kugel enthalten ist. Eine wichtige Rolle spielen hierbei die beiden Kurven, in denen die beiden Achsenkegel das Ellipsoid bezw. die Ebene durchdringen, und von denen bei der Bewegung die erstere auf der letzteren abrollt; sie heißen nach POINSOT Polhodie und Herpolhodie. Jedoch sei das weitere auf die dynamische Betrachtung verschoben, von der die bezüglichen Vorstellungen ursprünglich ausgegangen sind.

Auch auf der sphärischen Bewegung beruhen zahlreiche Mechanismen, so das sphärische Kurbelbetriebe und sein Spezialfall, das HOOKEsche Gelenk, ganz allgemein aber das von CARDANO erfundene Universalgelenk, dessen Kombination zu zweien dann wiederum die bekannte, vielfach angewandte CARDANIsche Aufhängung liefert.

Allgemeinste Bewegung des starren Körpers. Durch Kombination der beiden im vorstehenden betrachteten Bewegungstypen, der ebenen und der sphärischen Bewegung, erhält man die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers, die man sonach als Windungsbewegung oder als Schraubung bezeichnen kann. Sie besteht, wie schon aus den vorangeschickten Sätzen über Äquivalenz von Bewegungen folgt, immer aus einer Verschiebung in bestimmter Richtung und einer Drehung um eine bestimmte Achse. Dabei ist noch eine unendliche Mannigfaltigkeit von Zerlegungen möglich, und unter diesen ist eine solche, bei der die Verschiebung in der Achse der Drehung erfolgt. Solange die Bewegung unendlich klein ist, also von einer Lage zu einer benachbarten erfolgt, ist die Zusammensetzung ohne weiteres gegeben, und es erübrigt sich, etwas darüber zu sagen. Bei endlichen Bewegungen dagegen wird sich im allgemeinen sowohl die Richtung der Verschiebung als die Achse der Drehung ändern; man muß dann die für die beiden Teilbewegungen früher gefundenen Sätze und Anschauungen geeignet kombinieren und findet auf diese Weise folgendes: Die Schraubung eines starren Körpers besteht in dem gleichzeitigen Gleiten und Rollen einer bestimmten geradlinigen Fläche, die mit dem Körper fest verbunden ist, auf einer bestimmten im Raume festen geradlinigen Fläche, wobei die Berührungslinie die momentane Schraubenachse ist; sind die beiden Flächen Zylinderflächen, die nur aufeinander rollen, so ist die Bewegung eben; sind es Kegelflächen, so ist das Gleiten ebenfalls ausgeschlossen, und die Bewegung ist sphärisch. — Man kann nun den Vorgang noch bestimmter veranschaulichen, indem man sich gewisser Hilfsvorstellungen bedient; so kommt man u. a. zu folgenden Sätzen: Eine Schraubung besteht aus der durch die krummlinige Bahn irgend eines Körperpunktes bestimmten Verschiebung und einer Folge von Drehungen um Achsen, die durch die Punktlagen parallel den entsprechenden Schraubenachsen gelegt werden. — Die Schraubung läßt sich ansehen als das Rollen eines im Körper festen Kegels auf einem anderen Kegel, der in einem Hilfssystem fest ist, dessen Verschiebung im Raume durch die Bahn der Spitze des ersten Kegels bestimmt ist.

Zur Bestimmung der momentanen Schraubenachse genügt es, wenn man z. B. die Geschwindigkeiten von drei Punkten des Körpers nach Größe und Richtung kennt. Man trage sie von irgend einem Pole O aus als Vektoren auf, dann stellt das von O auf das Dreieck der Endpunkte der Vektoren gefällte Lot die Richtung der Schraubenachse dar. Um ihre wirkliche Lage zu finden, zerlege man die Geschwindigkeiten zweier Körperpunkte in die Gleit- und die Drehkomponente und lege durch die Punkte Ebenen senkrecht zu den Drehkomponenten;

ihre Schnittlinie ist die Achse. Schließlich braucht man nur noch durch den Abstand von dieser Achse zu dividieren, um auch die Winkelgeschwindigkeit zu erhalten. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, r der Abstand von der Achse, v_0 die Verschiebungsgeschwindigkeit und v die gesamte Geschwindigkeit, so gilt offenbar die Formel:

(36) $$v = \sqrt{v_0^2 + r^2 \omega^2} \quad ,$$

und für die Neigung der Bahn gegen die Achse die weitere:

(37) $$\psi = \operatorname{arctg}\left(r \frac{\omega}{v_0}\right) \quad .$$

Die Fortschreitung während einer Umdrehung ist die Ganghöhe der Schraubung; sie ist offenbar durch

(38) $$h = \frac{2 \pi v_0}{\omega}$$

bestimmt; indessen wird vielfach statt dessen die einfache Größe

(39) $$h' = \frac{v_0}{\omega}$$

in den Rechnungen benutzt.

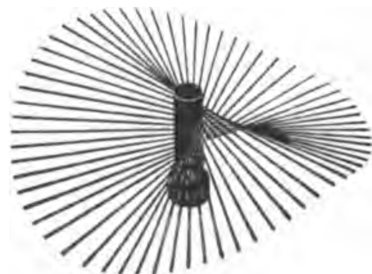
Die Zusammensetzung zweier Schraubungen um Achsen OA und OB, die sich in einem Punkte O senkrecht schneiden, geschieht folgendermaßen: Man bilde zunächst die Achse der resultierenden Winkelgeschwindigkeit, OP, die dadurch bestimmt ist, daß sie mit OA und OB in einer Ebene liegt und mit OA einen Winkel Θ bildet, dessen arctang das Verhältnis ω_2/ω_1 der beiden Winkelgeschwindigkeiten ist; die Winkelgeschwindigkeit um sie ist natürlich $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. Nunmehr ziehe man zu der neuen Achse OP eine Parallele $O'P'$ in der Höhe $\frac{1}{2}(h_1' - h_2') \sin 2\Theta$ über der Ebene, dies ist die Achse der resultierenden Schraubung, und die resultierende Ganghöhe ist:

(40) $$h' = h_1' \cos^2 \Theta + h_2' \sin^2 \Theta \quad .$$

Werden nun die Ganghöhen konstant erhalten, der Winkel Θ aber, d. h. das Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten gleichförmig verändert, so wird sich die resultierende Schraubenachse gleichzeitig herumdrehen und auf und ab schwingen, letzteres in der Weise, daß auf eine Umdrehung zwei einfache Schwingungen kommen. Der geometrische Ort ihrer Lagen ist eine Fläche, deren Gleichung, wenn die Koordinaten x und y in der Grundebene auf die Achsen OA und OB bezogen werden und z die dritte Koordinate des Punktes P' ist,

(41) $$2 z (x^2 + y^2) = (h_1' - h_2') x y$$

lautet und von ihrem Entdecker Plücker Achsenfläche, von Ball aber, der ihre Bedeutung für die Kinematik und Mechanik erkannte, Zylindroid genannt worden ist; die Figur 99 zeigt, entsprechend einem Ballschen Modelle, die aufeinander folgenden Lagen der die Fläche erzeugenden Achse $O'P'$ und gibt eine Vorstellung von ihrer Gestalt; nur müßte die Röhre unendlich dünn und lang sein, und die Linien müßten sich unbegrenzt fortsetzen.



Figur 99.

Setzt man $r\cos\Theta = \xi$, $r\sin\Theta = \eta$, und bedeutet c eine Konstante, so stellt die Gleichung

(42) $$h_1'\xi^2 + h_2'\eta^2 = c$$

einen Kegelschnitt dar, und die Ganghöhe einer resultierenden Schraubung um eine mit OX den Winkel Θ bildende Achse ist $h' = c/r^2$, d. h. umgekehrt proportional dem Quadrat des in der betreffenden Richtung verlaufenden Radiusvektors des obigen Kegelschnittes. Nun ist dieser eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem die beiden gegebenen Ganghöhen gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben; im letzteren Falle gibt es zwei Richtungen, nämlich die Asymptoten der Hyperbel, für die die Ganghöhe null, die Bewegung somit eine reine Drehung wird.

Auf die weiteren, überaus wichtigen Konsequenzen der Schraubentheorie sowie auf spezielle Fälle der allgemein-räumlichen Bewegung kann hier nicht eingegangen werden; es sei in dieser Hinsicht auf das Werk des wesentlichen Begründers der Theorie, ROBERT BALL, sowie auf die Handbücher der Kinematik verwiesen.

B. Dynamik starrer Körper.

Bisher ist die Lehre von der Bewegung rein geometrisch behandelt worden, d. h. es sind nur die Begriffe von Ort und Strecke sowie die mit Hilfe des Zeitbegriffs daraus abgeleiteten Begriffe von Geschwindigkeit und Beschleunigung benutzt worden. In der Dynamik, zu der wir uns nunmehr wenden, wird zu diesen Begriffen der neue Begriff der Kräfte hinzugefügt. Im Prinzip ist das freilich kein Schritt von irgend erheblicher Bedeutung, insofern die Kräfte nur Abstraktionen aus den bereits betrachteten Beschleunigungen sind. Tatsächlich gestalten sich aber die Dinge für die Untersuchung jetzt wesentlich anders, insofern, auf Grund von Erfahrungen, die Kräfte in der wirklichen Natur gewissermaßen realisiert werden und damit sich als Ursachen den Beschleunigungen gegenüberstellen. Es ist das schon bei früheren Anlässen des näheren ausgeführt und zugleich besprochen worden, inwieweit man in der Mechanik diese Methode ausbildet, also Kräfte einführt, und inwieweit man bei rein geometrischen Ursachen, also Bedingungen oder Zwangen stehen bleibt; gerade die Kombination beider Vorstellungs- und Verfahrungsweisen macht ja das Wesen der sogen. klassischen Mechanik aus, von der sich die modernen Darstellungen nach der einen oder anderen Seite mehr oder weniger entfernen. Im übrigen ist hinsichtlich des begrifflichen, prinzipiellen und methodischen Teiles der Aufgabe auf die Artikel „Grundbegriffe" und „Mechanik" zu verweisen.

Grundgleichungen der Dynamik. Freies System. Um diese zu erhalten, bedarf es für den einfachsten Fall eines (im klassischen, nicht im HERTZschen Sinne) völlig freien, nur Kräften, nicht aber Bedingungen unterworfenen Systems lediglich der Erinnerung an das Massenprinzip und das Kraftprinzip, d. h. an die in diesen Prinzipien enthaltenen Definitionen der Begriffe Masse und Kraft; man vergleiche hierzu namentlich p. 43 und p. 223. Handelt es sich zunächst nur um einen einzigen Massenpunkt (m), sind x, y, z dessen rechtwinklige Koordinaten, und sind X, Y, Z die Komponenten der Resultante sämtlicher auf den Punkt wirkenden Kräfte, so lauten die Bewegungsgleichungen einfach:

(43) $$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \quad , \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad , \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \quad .$$

Daß indessen diese Gleichungen noch nicht die vollständige Formulierung des Problems bilden, ist einleuchtend; denn sie bestimmen nur die Beschleunigungen,

nicht aber die Geschwindigkeiten und die Örter des Punktes, mit anderen Worten, sie lassen zwei Integrationskonstanten unbestimmt. Zur Ausfüllung dieser Lücke dienen die zeitlichen Bedingungen, und zwar je eine für die Geschwindigkeit und für den Ort, bezw. je drei für deren Komponente:

$$(44)\quad \left\{ \begin{array}{llll} \text{für } t = t_0: & \dfrac{dx}{dt} = u_0 \;, & \dfrac{dy}{dt} = v_0 \;, & \dfrac{dz}{dt} = w_0 \;, \\ \text{für } t = t_0: & x = x_0 \;, & y = y_0 \;, & z = z_0 \;. \end{array} \right.$$

Der Zeitpunkt t_0, für den diese Angaben vorliegen, wird häufig der Beginn der Bewegung ($t = 0$) sein. Handelt es sich um ein freies System von Punkten, so gelten sovielmal Differentialgleichungen und zeitliche Bedingungen von der obigen Form, als das System Punkte hat; sie lauten also, wenn i irgend einen Punkt andeutet:

$$(45)\quad \left\{ \begin{array}{l} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i \;, \quad m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i \;, \quad m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i \;, \\ \text{für } t = t_0 \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{dx_i}{dt} = (u_i)_0 \;, & \dfrac{dy_i}{dt} = (v_i)_0 \;, & \dfrac{dz_i}{dt} = (w_i)_0 \;, \\ x_i = (x_i)_0 \;, & y_i = (y_i)_0 \;, & z_i = (z_i)_0 \;. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Man kann diese Gleichungen aber in eine einzige zusammenfassen, indem man unter δx, δy, δz beliebige Verrückungen der Punkte versteht, die Gleichungen beziehungsweise mit ihnen multipliziert und dann addiert; man erhält dann die Gleichung:

$$(46)\quad \sum \left[\left(X - m\,\frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m\,\frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m\,\frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0 \;.$$

Aus ihr erhält man jederzeit wiederum rückwärts das ursprüngliche Gleichungssystem, indem man den Faktor jedes δ für sich gleich null setzt, was man darf, da die δ ganz beliebig sind, also z. B. alle bis auf eins gleich null gesetzt werden dürfen.

Unfreies System. Lagrangesche Gleichungen. Nicht so einfach verhält es sich, wenn das System ein unfreies, also gewissen Bedingungen unterworfen ist. Der Gang der Betrachtung ist dann ganz analog demjenigen, welcher in der Statik eingeschlagen worden ist (s. oben p. 269). Sind nämlich die Bedingungen, denen die Punkte unterworfen sind, in Form der expliziten Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ u. s. w. bis $f_k = 0$ gegeben, und sind λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_k$ u. s. w. Lagrangesche Multiplikatoren, so berücksichtigt man den den Punkten in bezug auf ihre Bewegungen auferlegten Zwang, indem man zu der Kraft X die Kräfte $\lambda_1\, \partial f_1 / \partial x$, $\lambda_2\, \partial f_2 / \partial x$ u. s. w. und entsprechende Kräfte zu den anderen Kraftkomponenten hinzufügt, so daß man für irgend einen Punkt folgendes Gleichungssystem erhält:

$$(47)\quad \left\{ \begin{array}{l} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots \;, \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y_i} + \ldots \;, \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z_i} + \ldots \;, \end{array} \right.$$

und ebenso für die anderen Punkte des Systems. Diese Gleichungen sind die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen in ihrer einfachsten Form.

Wenn bei dem Zwange, welchem die Bewegung unterworfen ist, die Reibung eine Rolle spielt, so nehmen die LAGRANGEschen Multiplikatoren und demgemäß auch die Bewegungsgleichungen eine verwickeltere Gestalt an; sie lauten, wenn nur eine Bedingung besteht, und wenn h der Reibungskoeffizient ist:

$$(48)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + h\dfrac{dx}{dt}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2}\right) \quad , \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + h\dfrac{dy}{dt}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2}\right) \quad , \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial z} + h\dfrac{dz}{dt}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2}\right) \quad . \end{cases}$$

D'Alembertsches Prinzip. In der Statik ist das Gleichgewicht eines unfreien Systems, außer durch Gleichungen, welche den Gleichungen (47) entsprechen und mit Hilfe der bewußten Spezialisierung aus ihnen hervorgehen, in noch einfacherer Weise durch eine einzige Gleichung, nämlich durch den analytischen Ausdruck des Prinzips der virtuellen Verrückungen charakterisiert worden. In ganz derselben Weise läßt sich auch die Bewegung eines unfreien Systems durch eine einzige Gleichung charakterisieren, und die Ableitung dieser Gleichung kann in genau analoger Weise wie dort erfolgen; der Abwechslung halber soll jedoch hier ein der Form nach etwas abweichender Weg eingeschlagen werden, welcher überdies weit unmittelbarer zum Ziele führt. Es sollen jetzt δx u. s. w. nicht mehr beliebige, sondern virtuelle Verrückungen sein, d. h. sie sollen mit den Bedingungsgleichungen in Einklang stehen. Es gelten dann die Gleichungen:

$$(49)\qquad \sum \frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x = 0 \quad , \quad \sum \frac{\partial f_2}{\partial x}\delta x = 0 \qquad \text{u. s. w.}$$

wo die Σ über alle Koordinaten und Punkte auszudehnen sind. Es möge bemerkt werden, daß in den Bedingungsgleichungen auch die Zeit vorkommen kann; es wird das z. B. der Fall sein, wenn ein Punkt sich ausschließlich in einer Schale bewegen soll, diese selbst aber im Raume nicht fest ist. In solchen Fällen ist dann in den Gleichungen (49) die Zeit als konstant zu betrachten. Multipliziert man nun die Gleichung (47) beziehungsweise mit δx, δy u. s. w. und addiert sie, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (49):

$$(50)\qquad \sum\left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z\right] = 0 \quad .$$

Diese Gleichung ist mit dem Gleichungssystem (47) ganz gleichbedeutend, wenn hinzugefügt wird, daß sie für alle virtuellen Verrückungen gelten solle, und man kann auch umgekehrt aus dieser Gleichung jenes System ableiten, d. h. zeigen, daß es Größen λ, μ u. s. w. gibt, welche die Gleichungen (47) erfüllen, wenn die Gleichung (50) für alle den Gleichungen (49) genügenden δ befriedigt wird.

Wie man sieht, stimmt die Gleichung (50), obgleich sie für ein unfreies System gilt, formell vollständig überein mit der für ein freies System gültigen Gleichung (46). Diese Gleichung oder auch die Tatsache dieser formellen Übereinstimmung kann man der modernen Auffassung gemäß als das D'ALEMBERTsche Prinzip bezeichnen. Es wird aber gut sein, die Ableitung und die Ausspruchsweise dieses Prinzips auch in derjenigen Form anzugeben, welche die historisch ursprüngliche ist.

Man denke sich die Punkte P, P', P'' ... durch die Kräfte R, R', R'' ..., sowie durch die Bedingungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ ... in ihren Bewegungen bestimmt.

Wären die Punkte frei, so müßte man, um dieselbe Bewegung zu erzielen, statt der Kräfte R Kräfte von anderer Größe und Richtung, Q, Q' ... auf sie wirken lassen; da hierdurch die Bewegungen gar nicht geändert werden, so bleiben auch die Bedingungsgleichungen gültig, und man kann sagen, daß man die Kräfte R ohne weiteres durch die Kräfte Q ersetzen darf. Denkt man sich nun statt der Kräfte Q die ihnen gleichen und entgegengesetzten Kräfte $-Q$ eingeführt, so kommt man zu dem Ergebnis, daß die Kräfte P und die Kräfte $-Q$ sich das Gleichgewicht halten. In Worten: Die bewegenden Kräfte eines Systems sind infolge der Bedingungen des Systems stets im Gleichgewicht mit den Kräften, welche gleich und entgegengesetzt denjenigen sind, welche die wirklichen Bewegungen des Systems hervorbringen würden, wenn dasselbe frei wäre. Nun sind letztere Kräfte formell auszudrücken durch $m\,d^2x/dt^2$ ..., erstere durch X ... Unter den Kräften $m\,d^2x/dt^2 - X$ ... ist also das System im Gleichgewicht. Man kann daher das System der virtuellen Verrückungen anwenden und erhält auf diese Weise die Gleichung (50).

Diese Betrachtung zeigt zugleich den Zusammenhang zwischen dem d'Alembertschen Prinzip und dem Prinzip der virtuellen Verrückungen, indem sie ersteres auf letzteres zurückführt. Man kann daher sagen: Das d'Alembertsche Prinzip ist die Verallgemeinerung des Prinzips der virtuellen Verrückungen auf Bewegungsvorgänge. In der Tat erhält man letzteres, wenn man in Gleichung (50) die Beschleunigung gleich null setzt. Neuerdings ist sogar vorgeschlagen worden, den Namen „Prinzip der virtuellen Verrückungen" allgemeiner zu gebrauchen, nämlich auch für die dynamische Gleichung.[1]

Schließlich kann man sich die Sache noch etwas anders vorstellen, indem man die, die Bedingungsgleichungen repräsentierenden Zusatzglieder als negative Kräfte L, M, N einführt und schreibt:

$$(51)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X - L\ ,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y - M\ ,\qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z - N\ .$$

Diese Kräfte heißen demgemäß die verlorenen Kräfte, sie erfüllen, wie man durch Einsetzen erkennt, die Gleichung:

$$(52)\qquad \sum(L\,\delta x + M\,\delta y + N\,\delta z) = 0\ ,$$

in Worten: Bei der unfreien Bewegung sind die verlorenen Kräfte untereinander im Gleichgewicht. Man kann daher das d'Alembertsche Prinzip auch als Prinzip der verlorenen Kräfte bezeichnen (vgl. p. 227).

Ist das System nicht starr, unterliegen seine Punkte vielmehr einseitigen, d. h. durch Ungleichungen dargestellten Bedingungen, so tritt entsprechend wie in der Statik (p. 272) die Fouriersche Modifikation ein, und es wird:

$$(53)\qquad \sum\left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z\right] \geqq 0\ .$$

Verallgemeinerte Lagrangesche Gleichungen. Bisher ist nur der einfachste Fall behandelt worden, daß die Bedingungen in Form endlicher Gleichungen gegeben sind, und zwar solcher, die die Zeit nicht enthalten, wie das bei unveränderlichen Verbindungen zwischen den Punkten der Fall sein wird. Die Veränderlichkeit mit der Zeit hat übrigens auf das d'Alembertsche Prinzip, bei sinngemäßer Anwendung, keinen Einfluß.

Sind nun aber die Bedingungen in der Form von k-Differentialgleichungen (nicht holonome Bedingungen nach Hertz):

$$(54)\qquad \sum(a_{ik}\,dx_i + b_{ik}\,dy_i + c_{ik}\,dz_i) = 0$$

[1] L. Boltzmann, Vorlesungen über Mechanik, p. 130.

(die Koeffizienten Funktionen von x, y, z), oder allgemeiner, bei zeitlicher Veränderlichkeit:

$$\sum (a_{ik} dx_i + b_{ik} dy_i + c_{ik} dz_i) + p\, dt = 0 \tag{55}$$

(die Koeffizienten jetzt Funktionen von x, y, z, t), so erhält man in entsprechender Weise die Bewegungsgleichungen in der Form:

$$\left\{ \begin{aligned} & m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \sum \lambda_k a_{ik} \quad , \qquad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \sum \lambda_k b_{ik} \quad , \\ & \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \sum \lambda_k c_{ik} \quad . \end{aligned} \right. \tag{56}$$

Einen weiteren Fortschritt bedeutet die Einführung der unabhängigen Koordinaten. Sind nämlich k Bedingungsgleichungen

$$f_1 = 0 \quad , \quad f_2 = 0 \quad , \ldots f_k = 0$$

explizite gegeben, während man doch bei n Punkten $3n$ Koordinaten hat, so kann man die letzteren — und zwar auf unendlich viele Arten — als Funktionen von $3n - k$ unabhängigen Parametern

$$q_1 \; , \quad q_2 \ldots , \quad q_r \quad , \qquad (r = 3n - k) \quad ,$$

wozu eventuell noch die Zeit kommt, auffassen; diese Parameter heißen nach THOMSON und TAIT die verallgemeinerten oder generalisierten Koordinaten; sonst werden sie auch vielfach als LAGRANGEsche Koordinaten bezeichnet. Entsprechend kann man weiter die verallgemeinerten Geschwindigkeiten nach den Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} \quad , \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} \quad , \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial z_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} \quad , \end{aligned} \right. \tag{57}$$

einführen und schließlich aus den Kraftkomponenten die neue, verallgemeinerte Kraft

$$Q_s = \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \tag{58}$$

bilden. Berücksichtigt man nun die an sich einleuchtende Beziehung:

$$\sum \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) = 0 \tag{59}$$

und die entsprechenden, so findet man als Bewegungsgleichungen zunächst

$$\sum m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) = Q_s \tag{60}$$

und schließlich in der neuen Form, wenn die Zeit keinen Einfluß auf die Bedingungen hat:

$$\sum a_{is} \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial a_{is}}{\partial q_r} + \frac{\partial a_{rs}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ir}}{\partial q_s} \right) \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_r}{dt} = Q_s \quad . \tag{61}$$

Kommt die Zeit vor, so wird die ausgeführte Gestalt der neuen Gleichungen

sehr verwickelt; man kann sie aber in sehr eleganter Form hinschreiben, wenn man die kinetische Energie (lebendige Kraft) U:

(62) $$U = \tfrac{1}{2}\sum m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]$$

einführt; man findet alsdann nämlich für die Bewegungsgleichungen die knappe Form:

(63) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \frac{dq}{ds}}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_s} = Q_s \quad .$$

Die Bewegungsprobleme sind damit auf zwei charakteristische Größen, U und das System der Q, zurückgeführt. Zugleich hat man hiermit eine Form, die bei Einführung neuer Variabler sich nicht ändert. Endlich kann man noch einen Schritt weiter gehen, indem man durch die Gleichungen

(64) $$\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{dq_s}{dt}\right)} = p_s \quad , \qquad Q_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s} \quad , \qquad U + V = E$$

die zweite Serie von Variabeln p_s, die potentielle Energie V[1] und die ganze Energie E einführt; man erhält dann die beiden Gleichungen:

(65) $$\frac{dq_s}{dt} = +\frac{\partial E}{\partial p_s} \quad , \qquad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q_s}$$

Diese merkwürdigen, in entgegengesetzter Reziprozitätsbeziehung zueinander stehenden Gleichungen heißen die kanonische Form der Bewegungsgleichungen; sie finden sich schon bei CAUCHY und sind dann u. A. von OSTROGRADSKY, HAMILTON und ROUTH diskutiert und behandelt worden.

Die obige Transformation setzt endliche Bedingungsgleichungen — holonome Systeme — voraus. Sind dagegen nur Variationsbedingungen in der Form

(66) $$\sum \alpha_{ki}\,\delta q_i = 0$$

gegeben, und zwar l solche Bedingungen, so behält man $k - l = s$ unabhängige Variationen übrig, und kann

(67) $$\left\{\begin{aligned} &\delta x_i = \sum a_{is}\,\delta q_s \quad , \qquad \delta y_i = \sum b_{is}\,\delta q_s \quad , \qquad \delta z_i = \sum c_{is}\,\delta q_s \quad , \\ &\sum (X_i a_{is} + Y_i b_{is} + Z_i c_{is}) = Q_s \quad , \\ &\sum m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{da_{is}}{dt} + \frac{dy_i}{dt}\frac{db_{is}}{dt} + \frac{dz_i}{dt}\frac{dc_{is}}{dt}\right) = R_s \end{aligned}\right.$$

setzen. Man erhält dann an Stelle von (63) die allgemeinere Bewegungsgleichung

(68) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \frac{dq_s}{dt}}\right) - R_s = Q_s \quad .$$

Diese allgemeinere Form ist u. a. bei Problemen rollender Bewegung zugrunde zu legen. In etwas anderer Form hat BOLTZMANN die Modifikation dargestellt, welche die LAGRANGEschen Gleichungen in nicht-holonomen generalisierten Koordinaten erfahren.

---

[1] Im folgenden ist V stets die Größe, deren Gefälle die Kraft liefert. In der klassischen Mechanik pflegte das Potential als die Größe definiert zu werden, deren Zuwachsgrad die Kraft liefert. Daher der Gegensatz in den Vorzeichen, den man im Vergleich mit vielen Werken finden wird.

Schließlich ist noch der besondere Fall zu erwähnen, wo es sich nicht um Kräfte, sondern um Impulse (p. 43) handelt, also, wenn τ eine kleine Zeit ist, um Größen, deren Komponenten

$$(69) \qquad \int_0^\tau X\,dt = \Xi \quad , \qquad \int_0^\tau Y\,dt = \mathrm{H} \quad ; \qquad \int_0^\tau Z\,dt = \mathrm{Z}$$

sind. Integriert man nun die das D'ALEMBERTsche Prinzip für Kräfte darstellende Gleichung (50) zwischen 0 und τ, so erhält man das D'ALEMBERTsche Prinzip für Impulse in der Form:

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum\left\{m\left[\frac{dx}{dt}-\left(\frac{dx}{dt}\right)_0\right]-\Xi\right\}\delta x+\sum\left\{m\left[\frac{dy}{dt}-\left(\frac{dy}{dt}\right)_0\right]-\mathrm{H}\right\}\delta y \\ &\qquad +\sum\left\{m\left[\frac{dz}{dt}-\left(\frac{dz}{dt}\right)_0\right]-\mathrm{Z}\right\}\delta z = 0 \quad . \end{aligned} \right.$$

Kleinster Zwang. Die Variationen der Koordinaten haben — und hierin liegt die Bedeutung des D'ALEMBERTschen Prinzips — die Eigenschaft, daß die Behandlung der LAGRANGEschen Gleichungen mit ihnen die Zusatzglieder herausfallen läßt. Sie sind aber nicht die einzigen Größen, die diese Eigenschaft haben; die Variationen der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen haben sie ebenfalls. Gehen wir gleich zu den letzteren über, so finden wir die Gleichung:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right. \\ &\qquad \left.+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right]=0 \quad . \end{aligned} \right.$$

Das ist aber die Bedingung dafür, daß die Größe

$$\sum\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)^2+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)^2+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)^2\Big]$$

ein Minimum ist (der entgegengesetzte Fall kommt hier nicht in Betracht). Diese Größe ist aber in der Hauptsache das Quadrat der Abweichung zwischen der wirklichen und derjenigen Bewegung, die eintreten würde, wenn das System frei wäre; diese Größe betrachtet GAUSS als Maß des Zwanges. Man gelangt so zu dem von ihm aufgestellten Prinzip des kleinsten Zwanges (p. 228) und sieht ein, daß es unter den der obigen Betrachtung zugrunde liegenden Voraussetzung mit dem D'ALEMBERTschen Prinzip äquivalent ist.

Hamiltonsches Prinzip. Das D'ALEMBERTsche Prinzip läßt sich noch auf eine andere Form bringen, welche ebenfalls formell weit einfacher ist und ebenfalls den Vorzug hat, daß in ihr nur Größen vorkommen, die vom Koordinatensystem nicht abhängen. Es ist

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x\right)=\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{dx}{dt}\,\frac{d\delta x}{dt} \quad ,$$

also

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x\right)-\frac{dx}{dt}\,\frac{d\delta x}{dt} \quad .$$

Nun ist aber

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{d\delta x}{dt}=\frac{dx}{dt}\,\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad ;$$

es wird also

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad ,$$

und somit der ganze positive Teil der Gleichung (50)

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)$$
$$- \delta\sum\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \quad .$$

Die in dem letzten Gliede dieser Gleichung vorkommende Summe ist die kinetische Energie des Systems (s. Art. „Grundbegriffe", p. 82), nämlich, wenn G die Geschwindigkeit ist, $U = \frac{1}{2}\sum m G^2$. Andererseits ist der negative Teil der Gleichung (50), d. h.

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

die von den Kräften bei den Verrückungen δz .... geleistete Arbeit (s. Artikel „Grundbegriffe", p. 75); sie möge δA genannt werden. Die Gleichung (50) erhält dann die Gestalt

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) = \delta U + \delta A \quad ,$$

oder, da die Klammergröße linkerseits das Produkt der Geschwindigkeit G mit der Verrückung Δ und dem Kosinus des Winkels ϑ zwischen beiden Richtungen ist:

(72) $$\frac{d}{dt}\sum m\, G\, \Delta\cos\vartheta = \delta U + \delta A \quad ,$$

eine Gleichung, die sich nicht mehr auf ein Koordinatensystem bezieht.

Multipliziert man die Gleichung (72) mit dt, integriert sie zwischen irgend zwei Grenzen t_0 und t_1 und wählt die virtuellen Verrückungen so, daß sie für die Grenzen verschwinden, so erhält man

(73) $$\int_{t_0}^{t_1} dt(\delta U + \delta A) = 0 \quad .$$

Dieser Satz, daß die Gleichung gelten muß für alle an den Grenzen verschwindende virtuelle Verrückungen der Punkte, heißt das HAMILTONsche Prinzip. Es ist formell der einfachste analytische Ausdruck der der Bewegung eines Systems zugrunde liegenden Beziehung. Wie es hier aus dem D'ALEMBERTschen Prinzip hergeleitet wurde, so ist auch das Umgekehrte möglich, und zwar durch eine Betrachtung, ähnlich derjenigen, durch welche das D'ALEMBERTsche Prinzip seinerseits in die LAGRANGEschen Gleichungen aufgelöst werden konnte. Das LAGRANGEsche System von Differentialgleichungen (47), das D'ALAMBERTsche Prinzip (50) und das HAMILTONsche Prinzip (73) sind also der Sache nach ganz gleichbedeutend, und nur der Form nach verschiedene Ausdrucksweisen der Fundamentalbeziehung für die Bewegung eines Systems.

Transformation der Bewegungsgleichungen. Zur Transformation der Bewegungsgleichungen von einem rechtwinkligen Koordinatensystem $x y z$ in irgend ein anderes, beliebiges Koordinatensystem p_1, p_2 .... eignet sich naturgemäß am meisten das HAMILTONsche Prinzip. A bezw. V wird alsdann eine lineare, homogene Funktion der δp, deren Koeffizienten von den p, dp/dt und t abhängen. Ebenso wird U eine homogene Funktion zweiten Grades von den dp/dt, deren Koeffizienten von den p abhängen, also δU eine homogene lineare Funktion

teils der δp, teils der $\delta dp/dt$ oder, was dasselbe ist, der $d\delta p/dt$. Sind also P_1 und P_2 Funktionen von p, dp/dt und t, so nimmt die rechte Seite der Gleichung (72) die Gestalt

$$\sum\left(P_1\,\delta p + P_2\frac{d\delta p}{dt}\right)$$

an. Nun bestehen, wie früher zwischen den $x\,y\,z$, so jetzt zwischen den p Bedingungsgleichungen, die δp, welche demgemäß nicht beliebig sind, lassen sich somit auf eine um die Zahl der Bedingungsgleichungen geringere Anzahl voneinander unabhängigen Verrückungen, die der einfacheren Schreibweise halber kurz mit δ bezeichnet werden mögen, zurückführen, und folglich die $d\delta p/dt$ auf lineare, homogene Funktionen der δ und $d\delta/dt$, deren Koeffizienten wieder p, dp/dt und t enthalten, so daß obiger Ausdruck, neu geordnet,

$$\sum\left(P_3\,\delta + P_4\frac{d\delta}{dt}\right)$$

wird. Das Hamiltonsche Prinzip nimmt also die Gestalt

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\sum\left(P_3\,\delta + P_4\frac{d\delta}{dt}\right) = 0 \quad ,$$

oder, mittels partieller Integration des zweiten Gliedes

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\sum\left(P_3 - \frac{dP_4}{dt}\right)\delta = 0 \quad ,$$

an. Da nun die δ, außer daß sie für die Grenzen verschwinden sollen, ganz beliebig sind, so muß unter der Summe der Faktor jedes δ für sich verschwinden, und diese Gleichungen, d. h. die Gleichungen

(74) $$\frac{dP_4}{dt} = P_3$$

sind die Differentialgleichungen der Bewegung in dem neuen Koordinatensystem.

Haben die Kräfte ein Potential V, so ist

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad , \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad , \qquad \delta A = -\,\delta V$$

Das Hamiltonsche Prinzip erhält also die Gestalt

(75) $$\delta\int_{t_0}^{t_1}(U - V)\,dt = 0 \quad .$$

Diese Gleichung ist die Verallgemeinerung einer früher für das Gleichgewicht aufgestellten (s. Artikel „Statik", p. 275). Man beachte übrigens, daß die Größen U und V nunmehr sowohl mit ihrer Summe (in der kanonischen Form der Bewegungsgleichungen [65]) als auch mit ihrer Differenz (im Hamiltonschen Prinzip) aufgetreten sind (vgl. auch weiter unten).

Die erläuterte Transformationsmethode führt beispielsweise für Polarkoordinaten $r\varphi\psi$ zu folgenden Bewegungsgleichungen, in denen erste Differentialquotienten nach der Zeit der Übersichtlichkeit halber durch Striche bezeichnet sind:

$$(76)\quad \begin{cases} m\left(\frac{dr'}{dt} - r\varphi'^2 - r\sin^2\varphi\cdot\psi'^2\right) = \frac{\partial P}{\partial r} \quad , \\ m\left(\frac{d(r^2\varphi')}{dt} - \frac{1}{2}r^2\sin^2\varphi\cdot\psi'^2\right) = \frac{\partial P}{\partial \varphi} \quad , \\ m\frac{d(r^2\sin^2\varphi\cdot\psi')}{dt} = \frac{\partial P}{\partial\psi} \quad . \end{cases}$$

Eine weitere Form des Satzes, in rechtwinkligen Koordinaten, erhält man, wenn man die kinetische Energie in ihre von den Koordinaten und von den Geschwindigkeiten abhängigen Bestandteile zerlegt

$$(77)\quad \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{dt}{d}\,\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x + \ldots\right\}\right]dt = 0$$

oder, wenn man das sogen. HAMILTONsche Integral oder die Prinzipalfunktion

$$(78)\quad H = \int_{t_0}^{t_1}(U - V)\,dt$$

einführt:

$$(79)\quad \delta H = 0 \quad .$$

Ist die Variation von V an sich null, so erhält man einfacher

$$(80)\quad \delta\int_{t_0}^{t_1} U\,dt = 0 \quad ,$$

und das ist das Prinzip der kleinsten Aktion (p. 228); dasselbe erscheint also hier als Spezialfall des HAMILTONschen. Andere spezielle Ausdrucksformen beziehen sich auf die Variation noch anderer, den Vorgang charakterisierender Größen. Bei allen diesen Ausspruchsweisen folgt aus dem Verschwinden der Variation zwar nicht in allen, aber doch in der großen Mehrzahl der physikalisch wichtigen Fälle die Minimumeigenschaft der Größe selbst. Dagegen ist die Frage nach dem Sinne des Variationsbegriffs selbst nicht so einfach, wie es früher angenommen wurde; und es hat sich, namentlich im Anschlusse an die Arbeiten von HELMHOLTZ, eine Diskussion entwickelt, die noch nicht völlig abgeschlossen zu sein scheint, obgleich besonders HÖLDER und HILBERT viel zur Klärung beigetragen haben. Es handelt sich dabei teils darum, ob die Variationen virtuell zu fassen sind und welche Bedeutung dabei die Zeitvariation hat, teils um den Unterschied zwischen holonomen und nichtholonomen Systemen.

Die weitere Ausbildung des Satzes von der kleinsten Wirkung, sowie, im Anschlusse hieran, der allgemeinen Sätze der Mechanik überhaupt, knüpft sich an den Begriff des kinetischen Potentials, wie er von H. v. HELMHOLTZ eingeführt worden ist. Es ist das die Größe

$$(81)\quad K = V - U \quad ,$$

also eine Größe, die, wie man sieht, für ruhende Systeme mit der potentiellen Energie bezw. mit dem gewöhnlichen Potential identisch wird, für bewegte Systeme aber immer kleiner ist, und zwar um den Betrag der kinetischen Energie. Mit

dem HAMILTONschen Integral hängt sie einfach in der Weise zusammen, wie eine Größe mit ihrem Zeitintegral, d. h. es ist:

$$(82) \qquad K = \frac{\partial H}{\partial t} , \qquad H = \int_{t_0}^{t_1} K \, dt \quad .$$

Man kann nun in die Ausdrücke für die verallgemeinerten Kräfte, in die LAGRANGEschen Gleichungen u. s. w. das kinetische Potential einführen und erhält dann die Möglichkeit, allgemeine Folgerungen in verhältnismäßig übersichtlicher Form zu gewinnen. Untersuchungen dieser Art verdankt man, außer HELMHOLTZ selbst, namentlich KOENIGSBERGER; dabei sind unter anderem auch die Probleme der verborgenen Bewegungen und, im Zusammenhang damit, die sogen. unvollständigen Probleme wesentlich gefördert worden. Es ist jedoch unmöglich, diese Entwickelungen auszugsweise wiederzugeben (vgl. auch weiter unten). Es sei aber wenigstens angeführt, daß es KOENIGSBERGER[1] auf diesem Wege gelungen ist, nachzuweisen, daß für den Fall eines kinetischen Potentials erster Ordnung mit sechs von Zeit und Ort abhängigen Variabeln das erweiterte HAMILTONsche Prinzip als Hauptgleichungen der Variation sechs Differentialgleichungen liefert, die bei geeigneter Deutung der Konstanten identisch werden mit den Maxwellschen Gleichungen in der Form, die sie für Isolatoren und für konstante Werte jener Konstanten annehmen, womit eine bedeutsame Brücke zwischen Elektromagnetismus und Mechanik geschlagen ist.

Der erste Energiesatz. In den bisherigen Entwickelungen kommen die beiden Größen: potentielle und kinetische Energie einerseits mit ihrer Summe, andererseits mit ihrer Differenz, also in den Verbindungen $U + V$ und $U - V$ vor; jenes ist die gesamte Energie des Systems, dieses ist der Überschuß der kinetischen über die potentielle Energie, oder, vom entgegengesetzten Vorzeichen abgesehen, das kinetische Potential. Ob man nun auf entschieden energetischem Standpunkte stehe oder nicht, jedenfalls wird man zugeben, daß in den Aussagen über jene beiden Größen, Summe und Differenz, aus denen sich die beiden Einzelgrößen rein rechnerisch ergeben, der wesentliche Teil dessen enthalten sein wird, was man über die Bewegung eines Systems, also über die allgemeinen Gesetze und Tendenzen mechanischer Prozesse überhaupt aussagen kann; mit anderen Worten, daß man im Verfolg dieser Betrachtungen die beiden Hauptsätze der Mechanik und — bei entsprechender Verallgemeinerung des Energiebegriffs (vgl. Artikel „Grundbegriffe", p. 83, sowie „Mechanik" p. 226) die beiden Hauptsätze der Physik überhaupt gewinnen wird.

Was zunächst die Summe betrifft, so ergibt sich für sie eine äußerst einfache Beziehung, wenn die Bewegungsgleichungen mit den Geschwindigkeitskomponenten multipliziert, dann addiert werden und zuletzt die dann auftretende kinetische Energie formal eingeführt wird. Dabei stellt sich freilich eine Komplikation durch das Zeitglied in den Bedingungsgleichungen (Koeffizient p bei der differentialen Form) ein. Sind aber die Bedingungen nicht explizite von der Zeit abhängig, so fällt diese Komplikation fort, man kann einmal integrieren und erhält die Gleichung:

$$(83) \qquad U_1 - U_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{t_0}^{t_1} dA \quad .$$

Dieselbe Gleichung hätte man auch aus dem D'ALEMBERTschen Prinzip erhalten, indem man die Variationen durch wirkliche Differentiale ersetzt und dann integriert hätte. Die Gleichung stellt den allgemeinen Satz von der kinetischen Energie dar — früher wurde er als Satz von der lebendigen Kraft bezeichnet —

[1] L. KOENIGSBERGER, Berl. Ber. 1906. p. 9.

und lautet in Worten: Die Zunahme der kinetischen Energie eines Systems ist gleich der von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit; und umgekehrt: Die Abnahme der kinetischen Energie ist gleich der von den inneren Kräften nach außen geleisteten Arbeit. Haben die Kräfte ein von der Zeit nicht explizite abhängiges Potential V, so kann man auch rechts eine Zustandsfunktion einführen und erhält:

(84) $$U_1 - U_0 = V_0 - V_1 + \text{const}$$

oder, wenn man bedenkt, daß hiernach U immer um ebensoviel zunimmt wie V abnimmt und umgekehrt:

(85) $$U + V = \text{const} \quad .$$

Das ist der besondere Satz von der Erhaltung der Energie; Kräfte, für die er gilt, bezw. die betreffenden Systeme heißen konservativ, wobei es sich freilich (vgl. Artikel „Grundbegriffe", sowie in späteren Artikeln und Bänden) weniger um eine Eigenschaft des Systems als um die vollständige Erfassung aller in ihm und auf es wirkenden Kräfte handelt. Man kann den Satz auch auf geschlossene oder Kreisprozesse anwenden, bei denen das System in die anfängliche Konfiguration, also zu demselben Werte des Potentials zurückkehrt; dann ist also auch die kinetische Energie wieder dieselbe wie anfangs; und in diesem Sinne kann man auch von der Erhaltung der kinetischen Energie sprechen; früher sagte man dafür Erhaltung der lebendigen Kraft. Anschaulicher wird der Satz, wenn man an Stelle des formalen Potentialbegriffs die potentielle Energie einführt; man kann dann den Satz in den Worten aussprechen: Bei einem konservativen System ergänzen sich die kinetische und die potentielle Energie zu einer konstanten Summe. Oder kürzer: Die Gesamtenergie ist konstant. Auf die Ausdehnung dieses Satzes auf die gesamte Physik einzugehen, ist hier nicht der Ort (vgl. Artikel „Grundbegriffe", sowie Band 3, „Wärmelehre").

Das Virial. Die potentielle Energie, die durch den Energiesatz mit der kinetischen in Beziehung gesetzt wird, fließt aus dem Arbeitsbegriff heraus, d. h. aus der Summe der Produkte der Kräfte mit den Verrückungen. Es ist nun ein interessanter Gedanke, statt dessen von vornherein die Summe der Produkte der Kräfte mit den augenblicklichen Koordinaten der Punkte, also gewissermaßen das Integral jener Größe zu betrachten, aber nicht, wie bei der potentiellen Energie, wirklich integriert, sondern einfach vom Standpunkte des jetzigen Zustands betrachtet. Man gelangt hierzu, wenn man die LAGRANGEschen Gleichungen mit x, y, z multipliziert, summiert und die Resultante, d. h. die Entfernung vom Anfangspunkte der Koordinaten, r, einführt. Für ein freies System (d. h. nach Ersetzung aller Bedingungen durch Kräfte) erhält man dann:

(86) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum m r \frac{dr}{dt} = U + \frac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz) \quad .$$

Das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung, negativ genommen, also die Größe

(87) $$W = -\frac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz)$$

heißt nach CLAUSIUS das Virial der Kräfte; es stellt, wegen des Faktors $\frac{1}{2}$, eine Art von Mittelwert dar, für alle Momente von einem Anfangsmoment, wo die Größe null ist, bei gleichförmiger Änderung bis zum jetzigen Moment, wo sie die Summe der Produkte aus Kräften und Lagen der Punkte ist. Auch beim Ausgehen von einem beliebigen Anfangszustand kann man dann leicht diesen Mittelwert bilden. Man kann dann die Gleichung in Worten aussprechen, indem man sagt: die Änderung der halben Summe der Produkte aus Massen und Beschleunigungen (im Vektorsinne, bezogen auf den Anfangspunkt) ist gleich dem

Überschuß der mittleren kinetischen Energie über das Virial der Kräfte. Wenn es sich um Bewegungen handelt, bei denen das System in immer neue Räume und Lagen kommt, hat der Satz keine besonders einfache Bedeutung. Handelt es sich aber um Bewegungen periodischer oder quasi-periodischer Natur, so wird die linke Seite im großen ganzen immer denselben Wert behalten, und man erhält das Resultat: die mittlere kinetische Energie ist gleich dem Virial der Kräfte.

Wie man sieht, wird der Virialbegriff von Bedeutung in der statistischen Mechanik (vgl. p. 217) und damit ganz besonders für die Lehre von der Wärme, worüber sich in Band 3 näheres findet.

Zweiter Energiesatz. Die Energie ist ein Integral der Bewegungsgleichungen, das will physikalisch besagen: zu den Größen, die bei den mit der Bewegung verknüpften Änderungen ungeändert bleiben, gehört die Energie. Damit ist zugleich gesagt, daß die Energie nicht geeignet ist, um die Bewegungsvorgänge positiv zu charakterisieren; man wird vielmehr die Untersuchung darüber, wann etwas geschieht, und wie es geschieht, an irgend einen anderen Begriff anknüpfen müssen, und es liegt nahe, hierbei an einen der beiden Teile der Energie oder auch an ihre Differenz zu denken; denn alle diese drei Größen werden sich bei der Bewegung ganz zweifellos fortwährend ändern. Das ist im großen ganzen der gemeinsame Sinn aller der Fundamentalsätze, welche sich die positive Charakterisierung der Bewegung zur Aufgabe setzen, also der Sätze von MAUPERTUIS, HAMILTON, GAUSS, HELMHOLTZ, JACOBI, HERTZ u. s. w. Freilich ist in den meisten von ihnen der die Bewegung charakterisierende Begriff nur versteckt enthalten; und es ist gerade einer der wesentlichsten Fortschritte bei der Entwickelung dieser Sätze gewesen, daß jener Begriff mehr und mehr herausgeschält wurde. Im einzelnen bestehen dabei natürlich große Unterschiede der Auffassung und der Formulierung; namentlich auch hinsichtlich des Umstands, ob und wieweit der Ausspruch abhängig oder unabhängig vom Erhaltungssatze ist.

Was allgemein über den Charakter eines Bewegungsvorgangs zu sagen ist, zerfällt in drei Teile: erstens ist der Eintritt von Bewegung im Gegensatz zum Fortbestande der Ruhe festzulegen; zweitens ist die wirklich eintretende Bewegung im Gegensatz zu der gerade entgegengesetzten zu charakterisieren; und drittens ist die wirkliche Bewegung aus den denkbaren, unendlich benachbarten herauszuheben. Was die genannten Sätze direkt leisten, ist lediglich der dritte Teil der Aufgabe; indirekt ist der zweite und schließlich auch der erste darin freilich enthalten, wenigstens wenn von dem Variationsausspruch des Satzes zu dem Minimumausspruch übergegangen wird. Im übrigen muß es genügen, eine der vielen Formen — die endgültige scheint noch nicht gefunden — anzuführen, in denen man den Eintritt einer wirklichen Bewegung charakterisieren kann: Bei der wirklichen Bewegung nimmt die potentielle Energie zu, aber doch so wenig, daß der Mittelwert des kinetischen Potentials, d. h. des Überschusses der potentiellen über die kinetische Energie für irgend eine Zeit ein Minimum ist gegenüber anderen denkbaren Bewegungen. Das Maximum entspricht der entgegengesetzten, durch die Einseitigkeit allen Naturgeschehens ausgeschlossenen Bewegung; das schon vorhandene Minimum der potentiellen Energie selbst entspricht dem Gleichgewicht. In bestimmten Fällen kann man diesen Satz auch in die Form einer präzisen Gleichung bringen, die dann den zweiten Hauptsatz darstellt; für monozyklische Systeme z. B. wird, wenn K wieder das kinetische Potential, A die Arbeit, E die Gesamtenergie und q die zyklische Variable ist:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dA}{E} = \log \frac{\partial K}{\partial \left(\frac{dq}{dt}\right)} \quad . \tag{88}$$

Auch mit Hilfe des Virialbegriffs, der gewissermaßen die Brücke vom ersten

zum zweiten Energiesatze bildet, und noch anderweitig kann man ähnliche Formulierungen gewinnen. Endlich kann man, wie es die Energetiker vorgeschlagen haben, die Gesamtenergie, statt in zwei Summanden, in zwei Faktoren zerlegen, von denen man dann den einen als Quantitätsfaktor, den anderen als Intensitätsfaktor bezeichnet; jener ist bei geeigneter Wahl die verallgemeinerte Entropie, dieser die Wirkungsfähigkeit der Energie, wofür man dann analog den Ausdruck Ektropie einführen kann. Es ist aber dieser Gedanke für rein mechanische Prozesse bisher nicht in eindeutiger und befriedigender Weise zur Ausführung gebracht worden.

Weitere Probleme. Mit den vorstehend skizzierten allgemeinen Formulierungen der Dynamik hängt noch eine Anzahl von besonderen Problemen zusammen, die in neuester Zeit namentlich von mathematischer Seite diskutiert worden sind; sie knüpfen teils an die obigen Formulierungen über infinitesimale Bedingungen und nichtholonome Systeme an und betreffen Anwendungen auf die Rollbewegungen, teils erörtern sie die Frage der quadratischen Integrale der Bewegungsgleichungen, d. h. die Frage, wie man die Größen U und V aufbauen müsse, um für die LAGRANGEschen Gleichungen eine bestimmte Anzahl quadratischer Integrale von angebbarer Form zu erhalten; teils endlich klären sie den Zusammenhang des Ernergiesatzes mit dem Virial und mit der Stabilität der Bewegung nach verschiedenen Richtungen auf, wobei sich gewisse Erweiterungen der Virialsätze ergeben. Auf alles dies kann hier nicht eingegangen werden, und es muß auf die am Schlusse des Artikels gemachten Literaturangaben verwiesen werden.

Weitere Integrale der Bewegungsgleichungen. Schwerpunktssatz. Für einen einzelnen Massenpunkt ist es nicht schwer, die Bewegungsgleichungen in einfachen Fällen ohne weiteres zu integrieren. Wirken keine Kräfte und ist der Punkt frei, so bewegt er sich, wie auch ohne Rechnung klar ist, gleichförmig und geradlinig; die Geschwindigkeit und die Bewegungsrichtung sind durch ihre gegebenen Anfangswerte bestimmt. Wenn auf den Punkt eine konstante Kraft wirkt, so führt er eine Bewegung aus, deren in die Kraftrichtung fallende Komponente gleichförmig beschleunigt ist; ob hierzu noch Komponenten in anderen Richtungen, und zwar mit konstanter Geschwindigkeit, hinzukommen, hängt davon ab, ob der gegebene Anfangswert der Geschwindigkeit in die Kraftrichtung fällt oder nicht. Unterliegt der Punkt außerdem noch einem Zwange, z. B. auf einer Ebene oder auf einem Kreise oder auf einer Kugel zu bleiben, so entstehen andere Bewegungsformen. Die physikalisch wichtigsten unter diesen Fällen werden in den folgenden Artikeln behandelt werden.

Handelt es sich um ein ganzes System von Punkten, so kann man, wie auch die Bewegung der Punkte im einzelnen erfolgen möge, etwas Gemeinsames und Allgemeines von ihr aussagen, indem man den Massenmittelpunkt (s. Art. „Statik", p. 236), der wieder kurz Schwerpunkt (p. 238) genannt werden möge, einführt. Summiert man nämlich die LAGRANGEschen Gleichungen über alle Punkte:

$$\sum m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum X_i + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad ,$$

$$\sum m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum Y_i + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \quad ,$$

$$\sum m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \sum Z_i + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \quad ,$$

und führt man die Schwerpunktskoordinaten x_0, y_0, z_0, sowie die Gesamtmasse M durch die Gleichungen

$$M = \sum m_i$$

$$M x_0 = \sum m_i x_i \quad , \qquad M y_0 = \sum m_i y_i \quad , \qquad M z_0 = \sum m_i z_i$$

ein, so erhält man:

$$
(89)\quad \left\{
\begin{aligned}
M\frac{d^2x_0}{dt^2} &= \sum X_i + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad ,\\
M\frac{d^2y_0}{dt^2} &= \sum Y_i + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \quad ,\\
M\frac{d^2z_0}{dt^2} &= \sum Z_i + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \quad .
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichungen enthalten den Satz von der Bewegung des Schwerpunktes: Der Schwerpunkt eines beliebigen Systems von Massen bewegt sich so, als ob in ihm alle Massen vereinigt wären und alle Kräfte, einschließlich der durch die Bedingungsgleichungen repräsentierten Zusatzkräfte, angriffen. Man kann hierauf offenbar eine dynamische Definition des Schwerpunktes gründen, als desjenigen Punktes, der sich in der festgestellten Weise bewegt. — Wenn die Bedingungsgleichungen nur die Differenzen je zweier Koordinaten einer Richtung, d. h. nur die relativen Koordinaten der Punkte gegeneinander enthalten, fallen die Zusatzglieder, wie man unmittelbar einsieht, weg, und man kann einfach

$$
(90)\qquad M\frac{d^2x_0}{dt^2} = \sum X_i \ , \qquad M\frac{d^2y_0}{dt^2} = \sum Y_i \ , \qquad M\frac{d^2z_0}{dt^2} = \sum Z_i
$$

setzen; in diesem Falle kommen also die Bedingungsgleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes nicht in Betracht. Dieselben Gleichungen gelten natürlich auch dann, wenn kein Zwang vorliegt. Wenn endlich keine äußeren Kräfte wirken, so erhält man, gleichviel, ob innere Potentialkräfte und Relativbedingungen vorliegen oder nicht:

$$
(91)\qquad M\frac{d^2x_0}{dt^2} = 0 \quad , \qquad M\frac{d^2y_0}{dt^2} = 0 \quad , \qquad M\frac{d^2z_0}{dt^2} = 0 \quad ,
$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig, bezw. er bleibt in Ruhe. Man nennt diesen Spezialfall den Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes. Er gilt z. B. beim Stoß elastischer Körper (die Schwerpunktsbewegung wird durch den Stoß nicht geändert), sowie bei den dem Sonnensystem angehörigen Weltkörpern, solange man eine etwaige Einwirkung der Fixsterne vernachlässigt. Denkt man sich ferner eine inhomogene Kugel (etwa zur Hälfte aus Blei, zur Hälfte aus Aluminium bestehend) gleichförmig fortrollend, so wird sie im freien Raume derartige Wellen beschreiben, daß ihr Schwerpunkt (der im Innern der Bleimasse liegt), in gerader Linie fortschreitet; während, wenn sie auf ebener Bahn fortrollt, der Schwerpunkt selbst eine Sinuslinie beschreibt, der Satz von der Erhaltung seiner Bewegung also ungültig wird; die Erklärung liegt in dem Zwange, und dieser äußert sich in dem wechselnden Drucke auf die Bahn.

Flächensatz. Dieser Satz spielt für drehende Bewegungen eine ähnliche Rolle wie der Schwerpunktssatz für fortschreitende; auch er stellt Integrale der Bewegungsgleichungen dar. Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit z_i, die dritte mit y_i, subtrahiert sie voneinander und summiert wieder über alle Punkte, so erhält man

$$
\sum m_i\left(y_i\frac{d^2z_i}{dt^2} - z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right) = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i)
$$
$$
+ \lambda_1 \sum\left(y_i\frac{\partial f_1}{\partial z_i} - z_i\frac{\partial f_1}{\partial y_i}\right) + \ldots + \lambda_k \sum\left(y_i\frac{\partial f_k}{\partial z_i} - z_i\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right) \quad .
$$

Auch hier gibt es Fälle, wo die Zusatzglieder gänzlich fortfallen, so daß die Gleichung nebst den beiden analogen die Form:

$$(92)\quad \begin{cases} \sum m_i\left(y_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)=\sum(y_iZ_i-z_iY_i) \quad , \\ \sum m_i\left(z_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-x_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)=\sum(z_iX_i-x_iZ_i) \quad , \\ \sum m_i\left(x_i\frac{d^2y_i}{dt^2}-y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)=\sum(x_iY_i-y_iX_i) \end{cases}$$

annimmt. Man kann hierin, um eine einfachere Anschauung zu erzielen, statt der rechtwinkligen Koordinaten die drei Drehungswinkel um die Achsen, φ, χ, ψ, sowie den Radiusvektor ϱ einführen und erhält dann Gleichungen von der Form:

$$(93)\quad \frac{d}{dt}\sum m_i\varrho_i^2\frac{d\varphi_i}{dt}=\sum(y_iZ_i-z_iY_i) \quad .$$

Diese Gleichungen bilden den analytischen Ausdruck der allgemeinen Flächensätze. Die Berechtigung dieses Namens sieht man ein, wenn man erwägt, daß die links stehende Größe $\varrho^2 d\varphi/dt$ das Doppelte der Projektion der vom Radiusvektor in der Zeiteinheit bestrichenen Fläche auf die yz-Ebene ist, und daß Entsprechendes für die beiden anderen Komponenten gilt. Findet die Drehung dauernd um eine und dieselbe Koordinatenachse statt, so genügt natürlich eine obiger Gleichungen, und jener Ausdruck ist dann das Doppelte der bestrichenen Fläche selbst. Andererseits sind die rechts stehenden Größen die Drehungsmomente der Kräfte in bezug auf die Achsen. Handelt es sich wieder um den besonderen Fall, daß die Kräfte ein Potential haben, und daß diese sowie die etwaigen Bedingungen nur relativen Charakters sind, hier also bei den Drehungen des Systems ungeändert bleiben — hierzu gehört natürlich auch der Fall, daß überhaupt keine Kräfte wirken —, so fallen die rechten Seiten weg, man kann integrieren und erhält:

$$(94)\quad \sum m_i\varrho_i^2\frac{d\varphi_i}{dt}=c_1 \quad , \qquad \sum m_i\varrho_i^2\frac{d\psi_i}{dt^2}=c_2 \quad , \qquad \sum m_i\varrho_i^2\frac{d\chi_i}{dt^2}=c_3$$

oder auch

$$(95)\quad \begin{cases} \sum m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt}-z_i\frac{dy_i}{dt}\right)=c_1 \quad , \qquad \sum m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt}-x_i\frac{dz_i}{dt}\right)=c_2 \quad , \\ \sum m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt}-y_i\frac{dx_i}{dt}\right)=c_3 \quad , \end{cases}$$

wo die c Konstanten sind. Das sind die Spezialsätze von der Erhaltung der Flächen: Die Summe der Produkte aus den Massen und den projizierten Bestreichungsflächen ist mit der Zeit proportional. Für einen einzelnen Massenpunkt ist hiernach der Bogen mit der Entfernung vom Zentrum umgekehrt proportional, für zwei und mehr Massen ergeben sich ebenfalls interessante Beziehungen. Für das Sonnensystem ist der Flächensatz in KEPLERs zweitem Gesetz (s. weiter unten, Artikel „Gravitation") enthalten.

Zur Vervollständigung des Satzes von der Erhaltung der Flächen dienen noch folgende Sätze, auf die weiter unten zum Teil noch zurückgekommen werden wird.

1. Der Flächensatz gilt nicht bloß für ein festes, sondern auch für ein durch den Schwerpunkt des Systems gelegtes, bewegliches Koordinatensystem.

2. Eine Drehung des Koordinatensystems hat nur zur Folge, daß die Konstanten c sich ändern.

3. Bei einer beliebigen Bewegung des Koordinatensystems gibt es doch eine gewisse Ebene, welche unverändert bleibt; es ist dies die für den Fall des Sonnensystems sogen. LAPLACEsche unveränderliche Ebene.

4. Wenn im Innern des Systems Veränderungen vorgehen, derart, daß nach denselben doch noch der Flächensatz besteht, so ist auch die LAPLACEsche Ebene unverändert geblieben; wenn dagegen von außen eine plötzliche Einwirkung auf das System erfolgt, so ändert sich die LAPLACEsche Ebene. Beobachtet man eine Änderung dieser Ebene, so kann man also hieraus einen Rückschluß auf eine stattgehabte Katastrophe ziehen.

5. Die LAPLACEsche Ebene hat die Eigenschaft, daß die Summe der Projektionen der Bewegungsflächen auf sie größer ist, als für irgend eine andere Ebene. Offenbar ist die Gleichung dieser Ebene

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0 \quad . \tag{96}$$

6. Wenn zwei Zentren der Bewegung vorhanden sind, und p_1, p_2 die Lote von ihnen auf die Tangente der Bahn, c_1, c_2 die Flächenkonstanten sind, so gilt die Proportion $p_1 : p_2 = c_1 : c_2$, entsprechend bei mehr Zentren, womit die Untersuchung auf geometrische Probleme zurückgeführt ist; man vergleiche hierzu eine Abhandlung von LEVY.

Typen konservativer Bewegungen. Wenn für ein holonomes System der Energiesatz gilt, so kann man sich die Frage vorlegen, welche Typen von Bewegungen man erhält, je nach der Existenz eines oder mehrerer der sechs für Bewegungsgröße und Flächen gültigen Integrale. Die Antwort ist, wie das u. A. BISCONCINI dargelegt hat, folgende: 1. Ein Integral: Punkt auf einer Geraden. — 2. Zwei Integrale in Involution: Punkt in der Ebene. — 3. Die drei Integrale der Bewegungsgrößen: Punkt im Raume. — 4. Zwei Integrale für die Bewegungsgrößen und Flächenintegral für die dritte Richtung: a) Punkt in der Ebene (besonderer Typus); b) Körper mit Schraubenbewegung (Achse stets mit sich parallel, ein Punkt in einer zur Achse normalen Ebene). — 5. Die drei Flächenintegrale: a) Punkt auf einer Kugel; b) Körper mit einem festen Punkte. — 6. Die drei Integrale der Bewegungsgröße und ein Flächenintegral: a) Punkt im Raume (besonderer Typus); b) Körper in inkompressibler Flüssigkeit, wenn beliebige Translationen und Rotationen um eine mit sich selbst stets parallel bleibende Achse möglich sind. — 7. Alle sechs Integrale: a) Punkt im Raume (änderer Typus); b) Körper in inkompressibler Flüssigkeit.

Zentripetalkraft, Tangentialkraft und Zentrifugalkraft. Jede drehende Bewegung kann man in zweierlei verschiedener Weise durch Zerlegung der Beschleunigungen, also der Kraftkomponenten, in Teilkomponenten, sich veranschaulichen. Ist nämlich v die Geschwindigkeit und α der Winkel, den die Tangente an die Bahnkurve mit der x-Achse bildet, ist ferner ϱ der Krümmungsradius und λ dessen Winkel mit der x-Achse, so ist $dx/dt = v\cos\alpha$, also

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(v\cos\alpha)}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + v\frac{d\cos\alpha}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{v^2}{\varrho}\cos\lambda \quad ,$$

und hieraus

$$X = m\frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{m v^2}{\varrho}\cos\lambda \quad . \tag{97}$$

Nach dieser Gleichung läßt sich X als aus zwei Kräften bestehend betrachten, und jede dieser Kräfte ist die nach der x-Richtung genommene Komponente einer gewissen Kraft. Es wird also auch die gesamte Kraft R in zwei Kräfte $m\,dv/dt$ und $m v^2/\varrho$ sich zerlegen lassen. Die erstere derselben ist nach der Tangente der Bahn gerichtet und heißt Tangentialkraft; die andere ist nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn gerichtet und heißt Zentripetal-

kraft. Die Tangentialkraft ist, wie man begreift, nichts anderes, als der Ausdruck des Beharrungsprinzips (s. Prinzip 5, p. 223) mit Rücksicht auf die ursprüngliche Bewegung des Punktes; diese gleichförmige Bewegung und die der Zentripetalkraft entsprechende Beschleunigung sind es eben, welche durch ihr Zusammenwirken die gekrümmte Bahn erzeugen; fällt die erstere weg, ist also der Körper ursprünglich in Ruhe gewesen, so geht die Kurve der Bahn in die gerade Linie nach dem Krümmungsmittelpunkte über; hört die Zentripetalkraft plötzlich auf, so geht die Kurve ebenfalls in eine gerade Linie, nämlich in die Tangente, über.

Man kann nun den Vorgang noch anders auffassen, indem man statt der Zentripetalkraft den Zwang sich vorstellt, vermöge dessen der Punkt auf der vorgeschriebenen Kurve sich bewegen muß, während er sonst einen geradlinigen Weg einschlagen würde. Dieser Zwang findet in der Zentrifugalkraft seinen Ausdruck. Nach dem Wechselwirkungsprinzip (s. Prinzip 9, p. 224) ist hiernach diese Zentrifugalkraft nicht nur der Zentripetalkraft entgegengesetzt gerichtet, sondern ihr auch an Größe gleich. Auch von einer direkten Betrachtung der Zentrifugalkraft ausgehend, sieht man leicht ein, daß sie, in Übereinstimmung mit obiger Formel, der lebendigen Kraft, also der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit des Punktes direkt und dem Krümmungsradius umgekehrt proportional ist. Bei gleichförmigen Kreisbewegungen kann man dies, indem man statt der Geschwindigkeit die Umlaufszeit einführt, auch so ausdrücken: Die Zentrifugalkraft ist der Masse des bewegten Körpers und dem Halbmesser der Kreisbahn direkt, dem Quadrat der Umlaufszeit umgekehrt proportional. Die durch die tägliche Umdrehung der Erde erzeugte Zentrifugalkraft ist hiernach an jedem Orte dem Halbmesser des Parallelkreises desselben proportional; im Äquator beträgt sie $^{1}/_{289}$ der Schwerkraft und ist dieser gerade entgegengerichtet, an den übrigen Orten ist sie nach Verhältnis kleiner und bildet mit der Schwerkraft einen stumpfen Winkel.

Experimentelles über die Zentrifugalkraft. Die Zentrifugalkraft, auch Schwungkraft genannt, läßt sich durch zahlreiche Beobachtungen und Experimente erkennen. Ist ein im Kreise bewegter Körper durch einen Faden mit dem festen Mittelpunkte verbunden, so ist der Faden, solange die Bewegung dauert, gespannt, und zwar selbst dann, wenn der Körper sich senkrecht über dem Mittelpunkte befindet. Ist der betreffende Körper ein mit der Öffnung nach innen gekehrtes, mit Wasser gefülltes Glas, so fließt das Wasser nicht aus, auch dann nicht, wenn das Glas über dem Mittelpunkte, also die Öffnung nach unten gekehrt ist. Wenn ein Eisenbahnzug eine Kurve durchfährt, so üben die Radkränze einen Druck auf die äußere Schiene aus, und der Oberbau der Wagen würde eine den Umsturz derselben herbeiführende Neigung nach außen erhalten, wenn durch Neigung der Schienenebene nach innen dies nicht ausgeglichen würde. Analoges findet beim Reiten in geschlossener Bahn statt.

Zahlreiche Experimente lassen sich mit der Zentrifugalmaschine oder Schwungmaschine demonstrieren. Dieselbe besteht, um eine möglichst rasche Rotation zu erzielen, aus zwei in einer Ebene liegenden, durch eine Schnur verbundenen Räder, von denen das kleinere mit Hilfe des fünf- bis zehnmal größeren, an dem eine Kurbel angebracht ist, in Umdrehungen versetzt wird. Die Achse des kleineren ist zum Aufstecken verschiedener Versuchsvorrichtungen eingerichtet. Einige der bezüglichen Versuche sind folgende:

1. Man setzt auf die Achse einen kleinen Holzrahmen, in dem ein wagerechter Metallstab angebracht ist; zwei durchbohrte Metallkugeln sind, durch ein Schnürchen verbunden, auf dem Stabe verschiebbar. Bei der Drehung der Maschine werden die beiden Kugeln, wenn sie sich auf verschiedenen Seiten der Achse befinden, auseinander fahren, sich gegenseitig hin und her ziehen und schließlich ein Gleichgewichtszustand sich herausbilden, bei dem die Entfernungen der Kugeln von der Achse sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten.

2. Innerhalb eines viereckigen Rahmens ist, mit dem Drehpunkte auf der unteren Leiste, in einiger Entfernung von der Achse der Maschine, ein Winkelhebel angebracht, dessen horizontaler Arm in einem auf die Achse gesteckten Plättchen, dessen vertikal nach oben gehender Arm in einer Metallkugel endet. Bei der Rotation wird letzterer nach außen, und folglich der horizontale Arm mit dem Plättchen nach oben getrieben. Man kann nun leicht feststellen, daß man, damit die Kugel seitlich nur eben an den Rahmen anschlage, bei der doppelten Umdrehungsgeschwindigkeit das Plättchen viermal so stark belasten muß, wie bei der einfachen.

3. Eine beiderseits verschlossene Röhre, welche eine Kugel enthält, wird mit dem einen Ende an die Achse befestigt, während das andere schräg nach oben steht; bei der Rotation wird die Kugel nach außen und oben getrieben. Man kann auf diese Weise Schwerkraft und Schwungkraft messend vergleichen.

4. Ist die Röhre bei sonst gleicher Anordnung, mit Quecksilber, Wasser und Luft gefüllt, so ordnen sich diese drei Stoffe bei der Rotation umgekehrt an, wie im Ruhezustand: das Quecksilber außen und oben, das Wasser in der Mitte, die Luft unten und innen.

5. Eine durchbohrte Kugel ist auf einem horizontalen Stabe verschiebbar, jedoch nur in der Weise, daß sie bei ihrer Verschiebung nach außen eine Spiralfeder zusammendrückt. Bei der Rotation wird sich ein Gleichgewichtszustand zwischen der Schwungkraft der Kugel und der elastischen Kraft der Feder herstellen, der zur vergleichenden Betrachtung beider benutzt werden kann.

6. Setzt man einen elastischen Metallreifen auf die Achse, so wird er bei der Rotation zu einer in vertikaler Richtung abgeplatteten Ellipse auseinander gezogen und veranschaulicht dadurch die Entstehung der Abplattung der Erde.

Die Zentrifugalkraft wird in zahlreichen Apparaten praktisch verwertet: bei den Zentrifugalregulatoren zur Regulierung des Ganges von Maschinen, bei der Zentrifugaltrockenmaschine oder Zentrifuge zum Trocknen, Reinigen, Gewinnen von Säften u. s. w.

Trägheitsmoment. Wenn man die allgemeine Flächengleichung auf einen einzelnen starren Körper anwendet, der aus den Massenelementen dm besteht, so kann man für die Drehung um eine bestimmte Achse ϱ als unabhängig von t und φ als unabhängig von ϱ ansehen, kann demgemäß umformen und erhält:

(98) $$\left(\sum m\varrho^2\right)\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\sum(yZ-zY)=D \quad ,$$

wo rechts D das Drehungsmoment bedeutet. Diese Gleichung ist ganz analog derjenigen (p. 43), die zwischen Beschleunigung, Masse und Kraft besteht; an die Stelle dieser Begriffe treten hier die neuen: Winkelbeschleunigung (vgl. p. 33), Trägheitsmoment (p. 249) und Drehungsmoment (p. 260). Man kann die Formel in den Worten aussprechen: Die Winkelbeschleunigung eines starren Körpers bei der Drehung um eine Achse ist der Quotient aus dem Drehungsmoment und dem Trägheitsmoment. Oder man kann umgekehrt auf diese Beziehung eine dynamische Definition des früher rein geometrisch-statisch definierten Trägheitsmoments gründen und sagen: Das Trägheitsmoment ist das Verhältnis des Drehungsmoments zur erzeugten Winkelbeschleunigung. In Formel (K Trägheitsmoment, β Winkelbeschleunigung):

(99) $$\beta=\frac{D}{K} \quad , \qquad K=\frac{D}{\beta} \quad .$$

Statt dessen kann man auch sagen: Das Trägheitsmoment ist diejenige Masse, die, in der Einheit des Abstandes von der Achse angebracht, dieselbe Winkelbeschleunigung erfährt wie der ganze Körper; wie alle Massen kann man schließlich auch alle Kräfte zu einem einzigen Moment in der Abstandseinheit vereinigen.

An die dynamische Definition des Trägheitsmoments knüpfen die experimentellen Methoden zu seiner Bestimmung an; Methoden, die in allen den Fällen einspringen, in denen die geometrische Berechnung (vgl. Artikel „Statik", p. 254) wegen zu komplizierter Gestalt des betreffenden Körpers oder aus anderen Gründen nicht durchführbar ist. Man geht dabei von dem aus der Definition des Trägheitsmoments und den obigen allgemeinen Betrachtungen über dasselbe sich ergebenden Satze aus, daß die Schwingungsdauer eines Körpers um seine Gleichgewichtslage, aus welcher er eine einmalige Ablenkung erfahren hat, der Quadratwurzel aus seinem Trägheitsmoment proportional ist. Läßt man also einen Körper, dessen Trägheitsmoment man kennt, unter ganz denselben Umständen schwingen, wie den Körper, dessen Trägheitsmoment man ermitteln will, und mißt man die Schwingungsdauer beider, so hat man die Aufgabe gelöst. Die erwähnte Gleichheit der Umstände läßt sich aber weit sicherer erreichen und die Voraussetzung, daß das Trägheitsmoment des Hilfskörpers bekannt sei, leichter erfüllen, wenn man diesen letzteren bei der Hilfsbeobachtung nicht an die Stelle des Hauptkörpers setzt, sondern zu diesem hinzufügt. Ist alsdann k das Trägheitsmoment des Hilfskörpers in bezug auf die Drehungsachse des Hauptkörpers, sind ferner t und t' die Schwingungsdauern des Hauptkörpers ohne und mit Hilfskörper, so verhält sich das gesuchte $K:K+k$ wie $t^2:t'^2$; es ist also

(100) $$K = k\frac{t^2}{t'^2 - t^2} \quad .$$

Benützt man als Hilfskörper zwei gleiche Zylinder, so findet man, wenn der Abstand der Achsen der beiden, an den Enden des Hauptkörpers angebrachten Zylinder gleich $2d$, ihr Radius gleich r und die Summe ihrer Gewichte gleich m ist, nach den obigen Formeln

$$k = m(d^2 + \tfrac{1}{2}r^2) \quad .$$

Von den beiden nächstliegenden Methoden, die Hilfszylinder an den Hauptkörper zu befestigen: Aufhängung an Fäden und Aufsteckung auf Stifte vermittelst entsprechender Bohrungen, ist die letztere entschieden vorzuziehen, weil die Zylinder in dem ersteren Falle, abgesehen davon, daß sie an der Drehung des Hauptkörpers teilnehmen, sich noch um ihre eigenen Achsen drehen, und weil nach neueren Untersuchungen hierdurch das Resultat in nicht unwesentlichem Grade fehlerhaft beeinflußt wird.

In neuerer Zeit sind mehrere besondere, zum Teil indirekte Methoden zur Bestimmung von Trägheitsmomenten angegeben worden; angeführt sei eine solche von Stoney, die sich auf das Trägheitsmoment von ebenen Flächenstücken um eine in ihrer Ebene gelegene Achse bezieht, und die z. B. auf den Querschnitt von Säulen u. s. w. Anwendung finden kann, ferner die für Unterrichtszwecke bestimmte, auf Pendelschwingungen beruhende Methode von Cramerarius. Auch ist hier der Ort, um auf die zahlreichen Apparate und Modelle hinzuweisen, die den Zweck haben, die Gesetze des Trägheitsmoments in möglichst klarer und mannigfacher Weise zu demonstrieren, und die von Hartl, Neesen, F. C. G. Müller u. A. in verschiedenen Formen gebaut worden sind; einige von ihnen dienen zugleich zur Illustration anderer mechanischer Erscheinungen, wie der Beharrung, des Schwerpunktsatzes, der Schwungkraft u. s. w.

C. Rotationsproblem.

Allgemeinste unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers. Das Problem der allgemeinsten Bewegung eines starren Körpers ist bereits im ersten Teile dieses Artikels andeutungsweise behandelt worden und zwar nach geometrisch-kinematischer Methode. Die weitere Ausführung ist nunmehr nachzu-

holen, wobei zunächst die kinematische Betrachtungsweise beibehalten, die geometrische Methode aber durch die analytische ersetzt werden soll. Dabei wird die Formulierung naturgemäß zunächst auf unendlich kleine Bewegungen beschränkt. Im wesentlichen rührt diese Theorie schon von EULER her, nach ihm werden auch die einzuführenden Größen und die aufzustellenden Gleichungen vielfach benannt; die hier folgende Fassung, die sich durch große Eleganz auszeichnet, verdankt man KIRCHHOFF.

xyz sei ein mit dem Körper fest verbundenes Koordinatensystem; dasselbe dient zur Angabe der Lage eines Punktes des Körpers in bezug auf diesen, und die Koordinaten des Punktes xyz eines Körpers sind daher mit der Zeit nicht veränderlich. Dagegen sei $\xi\eta\zeta$ ein im Raume festes Koordinatensystem, $\xi\eta\zeta$ sind dann die Koordinaten, welche der Punkt xyz des Körpers zur Zeit t hat, also mit t veränderlich. Es wird gut sein, die in der Physik sehr häufig anzuwendenden Formeln, welche die Beziehungen zwischen den beiden Koordinatensystemen enthalten, hier zusammenzustellen [man vergleiche auch die im Artikel „Grundbegriffe“, p. 13, angegebenen Formeln, besonders (3)]. Zunächst ist

$$(101)\quad \begin{cases} \xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \quad , \\ \eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \quad , \\ \zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \quad , \end{cases}$$

wo $\alpha\beta\gamma$ die Werte von $\xi\eta\zeta$ für den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, die neun übrigen Koeffizienten aber die Kosinus der Winkel zwischen den Achsen der xyz und der $\xi\eta\zeta$, alle zwölf Koeffizienten also mit der Zeit veränderlich sind. Ebenso ist umgekehrt wegen der geometrischen Bedeutung der Koeffizienten:

$$(102)\quad \begin{cases} x = \alpha_1(\xi - \alpha) + \beta_1(\eta - \beta) + \gamma_1(\zeta - \gamma) \quad , \\ y = \alpha_2(\xi - \alpha) + \beta_2(\eta - \beta) + \gamma_2(\zeta - \gamma) \quad , \\ z = \alpha_3(\xi - \alpha) + \beta_3(\eta - \beta) + \gamma_3(\zeta - \gamma) \quad . \end{cases}$$

Die geometrische Bedeutung der mit Indizes versehenen Koeffizienten führt für diese zu den Gleichungen:

$$(103)\quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \quad , & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \quad , \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \quad , & \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0 \quad , \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad , & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \quad , \end{cases}$$

und ferner

$$(104)\quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad , & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 \quad , \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \quad , & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0 \quad , \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad , & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 \quad . \end{cases}$$

Löst man ferner die Gleichungen (101) nach xyz auf, so erhält man Gleichungen, welche mit den Gleichungen (102) identisch sein müssen; hieraus folgen drei Gleichungen, in denen die Größe

$$\Delta = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \beta_1(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2) + \gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)$$

enthalten ist, und aus deren Quadrierung und Addierung sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (103) ergibt, daß $\Delta^2 = 1$ ist. Liegen die Koordinatensysteme so, daß sie durch geeignete Drehung des beweglichen zur kongruenten Deckung, auch dem Sinne der Achsen nach, gebracht werden können, so ist, wie leicht einzusehen, $\Delta = +1$, und die drei in Rede stehenden Gleichungen, sowie sechs

entsprechend gebildete, durch gleichzeitige cyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 und der Buchstaben x, y, z in den Gleichungen (101) entstehende werden dann:

$$(105)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2\ , & \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3\ , \quad \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\ , \\ \beta_1 = \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2\ , & \beta_2 = \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3\ , \quad \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1\ , \\ \gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\ , & \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3\ , \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\ . \end{cases}$$

Von den neun Größen mit Indizes sind offenbar nur drei willkürlich, die sechs übrigen lassen sich z. B. durch die Gleichungen (103) oder durch die Gleichungen (104) aus den drei ersten berechnen. Es muß also möglich sein, diese neun Größen auch durch irgend drei andere, voneinander unabhängige Größen φ, ψ, ϑ auszudrücken, und dies soll mittels der Gleichungen

$$(106)\quad \begin{cases} \alpha_3 = \cos\varphi\sin\vartheta\ , & \gamma_1 = \cos\psi\sin\vartheta\ , \\ \beta_3 = \sin\varphi\sin\vartheta\ , & \gamma_2 = \sin\psi\sin\vartheta\ , \\ \gamma_3 = \cos\vartheta & \end{cases}$$

geschehen. Die Größen φ, ψ, ϑ, die als „Eulersche Winkel" bezeichnet werden, sind Winkel von einfacher Bedeutung: ϑ ist der Winkel zwischen der z-Achse und der ζ-Achse, φ ist der Winkel, um welchen die $\xi\zeta$-Ebene gedreht werden muß, um der z-Achse parallel zu werden, ψ ist der Winkel, um welchen die xz-Ebene gedreht werden muß, um der ζ-Achse parallel zu werden; die in diesen Definitionen noch liegende Unbestimmtheit in bezug auf Vorzeichen und Quadrantenlage der Winkel läßt sich in jedem Falle durch einmalige Festsetzung und Rücksicht auf die notwendige Stetigkeit leicht beseitigen. Drückt man schließlich noch die vier übrigen Größen α_1, α_2, β_1, β_2 mit Hilfe der Gleichungen (105) durch die fünf obigen und somit durch $\varphi\psi\vartheta$ aus, so erhält man folgendes Schema:

$$(107)\quad \begin{cases} \alpha_1 = -\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\psi\ , \\ \beta_1 = -\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\psi\ , \\ \gamma_1 = \cos\psi\sin\vartheta\ , \\ \alpha_2 = -\cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta + \sin\varphi\cos\psi\ , \\ \beta_2 = -\sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta - \cos\varphi\cos\psi\ , \\ \gamma_2 = \sin\psi\sin\vartheta\ , \\ \alpha_3 = \cos\varphi\sin\vartheta\ , \\ \beta_3 = \sin\varphi\sin\vartheta\ , \\ \gamma_3 = \cos\vartheta\ . \end{cases}$$

Aus den obigen Formeln lassen sich leicht diejenigen für eine unendlich kleine Bewegung des Körpers ableiten. Bezeichnet man die Änderungen, welche die Größen dabei erfahren, durch vorgesetzte δ, so folgt zunächst aus den Gleichungen (101):

$$(108)\quad \begin{cases} \delta\xi = \delta\alpha + x\,\delta\alpha_1 + y\,\delta\alpha_2 + z\,\delta\alpha_3\ , \\ \delta\eta = \delta\beta + x\,\delta\beta_1 + y\,\delta\beta_2 + z\,\delta\beta_3\ , \\ \delta\zeta = \delta\gamma + x\,\delta\gamma_1 + y\,\delta\gamma_2 + z\,\delta\gamma_3\ . \end{cases}$$

Während die drei Größen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ beliebig sind, müssen die neun übrigen δ rechterseits mit Hilfe der Gleichungen (107) durch $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\vartheta$ ausgedrückt werden; der Symmetrie der Formeln halber sollen statt dessen die drei durch die Gleichungen

$$\pi' = \beta_1\,\delta\gamma_1 + \beta_2\,\delta\gamma_2 + \beta_3\,\delta\gamma_3 \quad ,$$
$$\chi' = \gamma_1\,\delta\alpha_1 + \gamma_2\,\delta\alpha_2 + \gamma_3\,\delta\alpha_3 \quad ,$$
$$\varrho' = \alpha_1\,\delta\beta_1 + \alpha_2\,\delta\beta_2 + \alpha_3\,\delta\beta_3$$

definierten, unendlich kleinen Größen $\pi'\chi'\varrho'$ eingeführt werden; es ergibt sich dann mit Rücksicht auf die Gleichungen (103) und die aus Gleichungen (104) durch Variation entstehenden Gleichungen:

$$\delta\alpha_1 = \gamma_1\chi' - \beta_1\varrho' \;, \quad \delta\beta_1 = \alpha_1\varrho' - \gamma_1\pi' \;, \quad \delta\gamma_1 = \beta_1\pi' - \alpha_1\chi' \;,$$
$$\delta\alpha_2 = \gamma_2\chi' - \beta_2\varrho' \;, \quad \delta\beta_2 = \alpha_2\varrho' - \gamma_2\pi' \;, \quad \delta\gamma_2 = \beta_2\pi' - \alpha_2\chi' \;,$$
$$\delta\alpha_3 = \gamma_3\chi' - \beta_3\varrho' \;, \quad \delta\beta_3 = \alpha_3\varrho' - \gamma_3\pi' \;, \quad \delta\gamma_3 = \beta_3\pi' - \alpha_3\chi' \;.$$

Die Gleichungen (108) werden hiernach mit Rücksicht auf die Gleichungen (101):

$$(109)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\xi &= \delta\alpha + (\zeta-\gamma)\chi' - (\eta-\beta)\varrho' \;,\\ \delta\eta &= \delta\beta + (\xi-\alpha)\varrho' - (\zeta-\gamma)\pi' \;,\\ \delta\zeta &= \delta\gamma + (\eta-\beta)\pi' - (\xi-\alpha)\chi' \;.\end{aligned}\right.$$

Man kann hiernach die untersuchte unendlich kleine Bewegung des Körpers betrachten als zusammengesetzt aus sechs Einzelbewegungen, nämlich aus denjenigen, welche der Körper ausführen würde, wenn einmal nur $\delta\alpha$, ein anderes Mal nur $\delta\beta$, 3. nur $\delta\gamma$, 4. nur π', 5. nur χ', 6. nur ϱ' von 0 verschieden wäre. Ist nur $\delta\gamma$ vorhanden, so erhält man:

$$\delta\xi = 0 \quad , \qquad \delta\eta = 0 \quad , \qquad \delta\zeta = \delta\gamma \quad ,$$

d. h. der Körper führt eine Bewegung aus, bei welcher alle seine Punkte in derselben, nämlich der ζ-Richtung sich parallel verschieben und alle seine Linien deshalb sich selbst parallel bleiben; man nennt dies eine Verschiebung des Körpers in der ζ-Richtung, und ihr Betrag ist $\delta\gamma$. Ebenso ist die durch $\delta\alpha$ bezw. durch $\delta\beta$ repräsentierte Einzelbewegung eine Verschiebung des Körpers in der ξ-Richtung um $\delta\alpha$ bezw. in der η-Richtung um $\delta\beta$. Finden alle drei Verschiebungen gleichzeitig statt, so erfährt der Körper eine Verschiebung, deren Richtung und Betrag durch die Resultante der Linien $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ angegeben wird.

Findet nur die durch ϱ repräsentierte Bewegung statt, so ist

$$\delta\xi = -(\eta-\beta)\varrho' \quad , \qquad \delta\eta = (\xi-\alpha)\varrho' \quad , \qquad \delta\zeta = 0 \quad ;$$

hierbei bleiben die Punkte der Linie $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$ an ihren Orten, diese Linie ist also eine Achse, und die Bewegung eine Drehung um sie. Der Drehungsbogen ist dabei

$$\varrho'\sqrt{(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2} \quad ,$$

folglich ist ϱ' der Drehungswinkel. In analoger Weise ist die durch π' bezw. χ' dargestellte Bewegung eine Drehung des Körpers um die Achse $\eta = \beta$, $\xi = \gamma$ um den Winkel π' bezw. um die Achse $\zeta = \gamma$, $\xi = \alpha$ um den Winkel χ'. Es ist einleuchtend, daß die drei Drehungsachsen den $\xi\eta\zeta$-Achsen bezw. parallel sind. Finden alle drei Drehungen gleichzeitig statt, so führt der Körper eine Drehung aus, bei welcher die Drehungsachse die Gleichungen

$$(110)\qquad \frac{\xi-\alpha}{\pi'} = \frac{\eta-\beta}{\chi'} = \frac{\zeta-\gamma}{\varrho'} \quad ,$$

und der Drehungswinkel die Größe

$$(111)\qquad \sqrt{\pi'^2 + \chi'^2 + \varrho'^2}$$

hat; die Richtung der Drehungsachse ist hiernach dadurch bestimmt, daß die Kosinus der Winkel, welche sie mit den $\xi\eta\gamma$-Achsen bildet, gleich

$$(112)\quad \frac{\pi'}{\sqrt{\pi'^2+\chi'^2+\varrho'^2}}\;,\qquad \frac{\chi'}{\sqrt{\pi'^2+\chi'^2+\varrho'^2}}\;,\qquad \frac{\varrho'}{\sqrt{\pi'^2+\chi'^2+\varrho'^2}}$$

sind, auch geht diese Achse durch den Punkt $\alpha\beta\gamma$.

Um schließlich noch zu veranschaulichen, in welchem Sinne eine Drehung als positiv bezeichnet werden soll, denke man sich, das Koordinatensystem sei derart, daß, wenn eine menschliche Figur so gestellt ist, daß die von den Füßen nach dem Kopfe gehende Linie der ζ-Achse parallel ist und die Figur in der Richtung der η-Achse hinsieht, die ξ-Achse nach ihrer Rechten gewendet ist. Eine positive Drehung der Figur soll dann eine solche sein, welche ihre rechte Seite nach vorn bringt. Dasselbe soll auch für die Drehung um irgend eine Achse gelten, falls diese Achse ebenfalls von den Füßen zur Achse der Figur ginge.

Jede unendlich kleine Verrückung eines starren Körpers läßt sich hiernach ansehen als zusammengesetzt aus einer Verschiebung in einer gewissen Richtung und einer Drehung um eine gewisse durch den Punkt $\alpha\beta\gamma$ gehende Achse; die erstere Teilbewegung läßt sich wiederum zerlegen in die drei Komponenten der Verschiebung, letztere in die drei Komponenten der Drehung nach den Koordinatenachsen.

Eine etwas andere Darstellung der Bewegung erhält man, wenn man in den Gleichungen (109) die Glieder rechterseits etwas anders anordnet und

$$\delta\alpha-\gamma\chi'+\beta\varrho'=\lambda'\;,\qquad \delta\beta-\alpha\varrho'+\gamma\pi'=\mu'\;,\qquad \delta\gamma-\beta\pi'+\alpha\lambda'=\nu'$$

setzt; man erhält dann

$$\delta\xi=\lambda'+\zeta\chi'-\eta\varrho'\;,\qquad \delta\eta=\mu'+\xi\varrho'-\zeta\pi'\;,\qquad \delta\zeta=\nu'+\eta\pi'-\xi\chi'\;,$$

oder, wenn man die ζ-Achse in die Achse der durch die beiden letzten Glieder rechterseits dieser Gleichungen dargestellten Drehung verlegt, wodurch $\lambda=0$, $\mu=0$, $\pi'=0$, $\chi'=0$ wird, die einfacheren Gleichungen

$$\delta\xi=-\eta\varrho'\;,\qquad \delta\eta-\xi\varrho'\;,\qquad \delta\zeta=\nu'\;.$$

Die allgemeinste unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers ist hiernach eine sogenannte Schraubenbewegung.

Es sei bemerkt, daß man die Bewegung, statt auf das Koordinatensystem der $\xi\eta\zeta$ auch auf das der xyz in seiner Anfangslage beziehen kann; man erhält dann die ähnlichen Formeln:

$$u'+zq'-yr'\;,\qquad v'+xr'-zp'\;,\qquad w'+yp'-xq'$$

für die Komponenten der Bewegung; $u'v'w'$ sind die Komponenten der Verschiebung, $p'q'r'$ die Komponenten der Drehung. Zwischen den sechs Größen $\lambda'\mu'\nu'\pi'\chi'\varrho'$ und den sechs Größen $u'v'w'p'q'r'$ bestehen gewisse Beziehungen, welche sich ohne Schwierigkeit ableiten lassen.

Bis jetzt war die Betrachtung rein kinematisch; es sind nunmehr die Formeln für die Komponenten der Kräfte und der Drehungsmomente derselben aufzustellen. Nennt man diese in bezug auf das im Körper feste Koordinatensystem X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, in bezug auf das im Raume feste Koordinatensystem Ξ, H, Z, M_ξ, M_η, M_ζ, und gibt man der Einfachheit halber den beiden Koordinatensystemen denselben Anfangspunkt, wodurch $\alpha=\beta=\gamma=0$ wird, so hat man

$$(113)\quad \begin{cases} \Xi=\alpha_1 X+\alpha_2 Y+\alpha_3 Z\;, & M_\xi=\alpha_1 M_x+\alpha_2 M_y+\alpha_3 M_z\;,\\ \mathrm{H}=\beta_1 X+\beta_2 Y+\beta_3 Z\;, & M_\eta=\beta_1 M_x+\beta_2 M_y+\beta_3 M_z\;,\\ \mathrm{Z}=\gamma_1 X+\gamma_2 Y+\gamma_3 Z\;, & M_\zeta=\gamma_1 M_x+\gamma_2 M_y+\gamma_3 M_z\;. \end{cases}$$

Denkt man sich $M_x M_y M_z$ als die Koordinaten eines Punktes und verbindet diesen mit dem Anfangspunkte der Koordinaten, so heißt das Drehungsmoment in bezug auf diese Achse das Hauptdrehungsmoment. Ist speziell nur eine einzige Kraft XYZ mit dem Angriffspunkte xyz vorhanden, so ist (s. oben)

$$(114) \qquad M_x = yZ - zY \quad , \qquad M_y = zX - xZ \quad , \qquad M_z = xY - yX \quad ,$$

die Achse des Hauptdrehungsmoments steht dann senkrecht auf der durch die Kraftrichtung und die Linie vom Anfangspunkte nach xyz gelegte Ebene, und das Hauptdrehungsmoment ist

$$(115) \qquad \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)(X^2+Y^2+Z^2) - (xX+yY+zZ)^2} \quad ,$$

oder auch gleich dem Produkt aus dem Anfangsabstande des Punktes xyz, der Größe der Kraft und dem Sinus des Winkels zwischen der Kraftrichtung und der Linie vom Anfangspunkte nach xyz.

Bewegungsgleichungen eines starren Körpers. Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der obigen Formeln eignet sich am besten die von dem HAMILTONschen Prinzip [Gleichung (73)] ausgehende Gleichung (75) (p. 330). Es kommen daselbst vor die Variation der kinetischen Energie δU und die Variation der potentiellen Energie V, d. h. die Arbeit der wirkenden Kräfte L. Die kinetische Energie ist eine Funktion der Komponenten der Verschiebungsgeschwindigkeit und der Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit, also von sechs Größen, welche man aus den bezüglichen oben untersuchten Verrückungen durch Division mit dt erhält; sie sollen mit den gleichen Buchstaben, aber unter Fortlassung der Striche, bezeichnet werden. Es ist dann

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial u}\delta u + \frac{\partial U}{\partial v}\delta v + \frac{\partial U}{\partial w}\delta w + \frac{\partial U}{\partial p}\delta p + \frac{\partial U}{\partial q}\delta q + \frac{\partial U}{\partial r}\delta r \quad .$$

Die Variationen der Geschwindigkeiten kann man nun, je nachdem man sie auf das System der xyz oder der $\xi\eta\zeta$ zurückführen will, entweder durch $u'\,v'\,w'\,q'\,p'\,r'$ oder durch $\lambda'\,\mu'\,\nu'\,\pi'\,\chi'\,\varrho'$ ausdrücken. Im ersten Falle findet man

$$\delta u = \frac{du'}{dt} + vr' - v'r + w'q - wq' \quad , \qquad \delta p = \frac{dp'}{dt} + qr' - q'r \quad ,$$

$$\delta v = \frac{dv'}{dt} + wp' - w'p + u'r - ur' \quad , \qquad \delta q = \frac{dq'}{dt} + rp' - r'p \quad ,$$

$$\delta w = \frac{dw'}{dt} + uq' - u'q + v'p - vp' \quad , \qquad \delta r = \frac{dr'}{dt} + pq' - p'q \quad ;$$

im anderen Falle:

$$\delta u = \alpha_1\frac{d\lambda'}{dt} + \beta_1\frac{d\mu'}{dt} + \gamma_1\frac{d\nu'}{dt} + (\gamma_1\beta - \beta_1\gamma)\frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha)\frac{d\chi'}{dt} + (\beta_1\alpha - \alpha_1\beta)\frac{d\varrho'}{dt} ,$$

$$\delta v = \alpha_2\frac{d\lambda'}{dt} + \beta_2\frac{d\mu'}{dt} + \gamma_2\frac{d\nu'}{dt} + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma)\frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha)\frac{d\chi'}{dt} + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta)\frac{d\varrho'}{dt} ,$$

$$\delta w = \alpha_3\frac{d\lambda'}{dt} + \beta_3\frac{d\mu'}{dt} + \gamma_3\frac{d\nu'}{dt} + (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma)\frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha)\frac{d\chi'}{dt} + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta)\frac{d\varrho'}{dt} ,$$

$$\delta p = \alpha_1\frac{d\pi'}{dt} + \beta_1\frac{d\chi'}{dt} + \gamma_1\frac{d\varrho'}{dt} \quad ,$$

$$\delta q = \alpha_2\frac{d\pi'}{dt} + \beta_2\frac{d\chi'}{dt} + \gamma_2\frac{d\varrho'}{dt} \quad ,$$

$$\delta r = \alpha_3\frac{d\pi'}{dt} + \beta_3\frac{d\chi'}{dt} + \gamma_3\frac{d\varrho'}{dt} \quad .$$

Andererseits ist die Arbeit im ersten Falle

$$L = X u' + Y v' + Z w' + M_x p' + M_y q' + M_z r' \quad ,$$

im anderen

$$L = \Xi \lambda' + \mathrm{H} \mu' + \mathrm{Z} \nu' + M_\xi \pi' + M_\eta \chi' + M_\zeta \varrho' \quad .$$

Bildet man nun die genannte Gleichung (74), so erhält man die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers entweder in der Form:

$$(116) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial u} &= r \frac{\partial U}{\partial v} - q \frac{\partial U}{\partial w} + X \quad , \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v} &= p \frac{\partial U}{\partial w} - r \frac{\partial U}{\partial u} + Y \quad , \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial w} &= q \frac{\partial U}{\partial u} - p \frac{\partial U}{\partial v} + Z \quad , \end{aligned} \right.$$

$$(117) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial p} &= w \frac{\partial U}{\partial v} - v \frac{\partial U}{\partial w} + r \frac{\partial U}{\partial q} - q \frac{\partial U}{\partial r} + M_x \quad , \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial q} &= u \frac{\partial U}{\partial w} - w \frac{\partial U}{\partial u} + p \frac{\partial U}{\partial r} - r \frac{\partial U}{\partial p} + M_y \quad , \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial r} &= v \frac{\partial U}{\partial u} - u \frac{\partial U}{\partial v} + q \frac{\partial U}{\partial p} - p \frac{\partial U}{\partial q} + M_z \quad , \end{aligned} \right.$$

oder in der Form:

$$(118) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Xi + \frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial U}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial U}{\partial w}\right) \quad , \\ &\mathrm{H} + \frac{d}{dt}\left(\beta_1 \frac{\partial U}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial U}{\partial v} + \beta_3 \frac{\partial U}{\partial w}\right) \quad , \\ &\mathrm{Z} + \frac{d}{dt}\left(\gamma_1 \frac{\partial U}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial w}\right) \quad . \end{aligned} \right.$$

$$(119) \quad \left\{ \begin{aligned} M_\xi = \frac{d}{dt}\Big[&(\gamma_1 \beta - \beta_1 \gamma)\frac{\partial U}{\partial u} + (\gamma_2 \beta - \beta_2 \gamma)\frac{\partial U}{\partial v} + (\gamma_3 \beta - \beta_3 \gamma)\frac{\partial K}{\partial w} \\ &+ \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial K}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial U}{\partial r}\Big] \quad , \\ M_\eta = \frac{d}{dt}\Big[&(\alpha_1 \gamma - \gamma_1 \alpha)\frac{\partial U}{\partial u} + (\alpha_2 \gamma - \gamma_2 \alpha)\frac{\partial U}{\partial v} + (\alpha_3 \gamma - \gamma_3 \alpha)\frac{\partial U}{\partial w} \\ &+ \beta_1 \frac{\partial U}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial U}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial U}{\partial r}\Big] \quad , \\ M_\zeta = \frac{d}{dt}\Big[&(\beta_1 \alpha - \alpha_1 \beta)\frac{\partial U}{\partial u} + (\beta_2 \alpha - \alpha_2 \beta)\frac{\partial U}{\partial v} + (\beta_3 \alpha - \alpha_3 \beta)\frac{\partial U}{\partial w} \\ &+ \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial r}\Big] \quad . \end{aligned} \right.$$

Jedes dieser beiden Gleichungssysteme (116/117) und (118/119) besitzt eigentümliche Vorzüge; wirken z. B. keine Kräfte, so enthalten jene keine anderen unbekannten Funktionen als $u\,v\,w\,p\,q\,r$, diese sind ohne weiteres integrabel. Ganz allgemein können sie als Ausspruch des Schwerpunktssatzes bezw. als Ausspruch des Flächensatzes angesehen werden.

Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Wenn ein Punkt des Körpers fest ist und zum Anfangspunkt beider Koordinatensysteme gemacht wird, so kommen die Größen $u\,v\,w\,u'\,v'\,w'\,\lambda'\,\mu'\,\nu'\,\alpha\,\beta\,\gamma$ und folglich die Gleichungssysteme (116) und (118) in Fortfall, die Gleichungen (117) und (119) vereinfachen sich und man erhält bei der ersten Darstellungsart:

$$(120)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial p} = r\dfrac{\partial U}{\partial q} - q\dfrac{\partial U}{\partial r} + M_x \quad , \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial q} = p\dfrac{\partial U}{\partial r} - r\dfrac{\partial U}{\partial p} + M_y \quad , \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial r} = q\dfrac{\partial U}{\partial p} - p\dfrac{\partial U}{\partial q} + M_z \quad , \end{cases}$$

bei der anderen:

$$(121)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\alpha_1\dfrac{\partial U}{\partial p} + \alpha_2\dfrac{\partial U}{\partial q} + \alpha_3\dfrac{\partial U}{\partial r}\right) = M_\xi \quad , \\ \dfrac{d}{dt}\left(\beta_1\dfrac{\partial U}{\partial p} + \beta_2\dfrac{\partial U}{\partial q} + \beta_3\dfrac{\partial U}{\partial r}\right) = M_\eta \quad , \\ \dfrac{d}{dt}\left(\gamma_1\dfrac{\partial U}{\partial p} + \gamma_2\dfrac{\partial U}{\partial q} + \gamma_3\dfrac{\partial U}{\partial r}\right) = M_\zeta \quad . \end{cases}$$

Die lebendige Kraft ist in diesem Falle das über alle Punkte des Körpers summierte halbe Produkt der Masse und des Quadrats der aus den Drehungsgeschwindigkeiten gebildeten Bewegungsausdrücke, d. h. es ist

$$2\,U = \int dm\,[(zq - yr)^2 + (xr - zp)^2 + (yp - xq)^2] \quad ,$$

oder in anderer Anordnung

$$2\,U = p^2\int dm\,(y^2 + z^2) + q^2\int dm\,(z^2 + x^2) + r^2\int dm\,(x^2 + y^2)$$
$$- 2\,qr\int yz\,dm - 2\,rp\int zx\,dm - 2\,pq\int xy\,dm \quad ,$$

dabei stellt die Linie vom Anfangspunkte nach dem Punkte $p\,q\,r$ der Richtung nach die Drehungsachse, der Größe nach die Drehungsgeschwindigkeit um diese Achse dar. Nun liegt, wie man sieht, der Punkt $p\,q\,r$ auf einer Fläche zweiten Grades; die Radienvektoren dieser Fläche stellen also die Drehungsgeschwindigkeiten dar, welche der Körper haben muß, wenn er bei der Drehung um sie die lebendige Kraft U haben soll. Eine Vereinfachung erzielt man, wenn man die $x\,y\,z$-Achsen in die Hauptachsen der Fläche legt; es wird dann:

$$2\,U = p^2\int dm\,(y^2 + z^2) + q^2\int dm\,(z^2 + x^2) + r^2\int dm\,(x^2 + y^2) \quad .$$

Man nennt dieses Ellipsoid (vgl. Art. „Statik", p. 252) das Trägheitsellipsoid, die Hauptachsen desselben die Hauptachsen des Körpers für den Anfangspunkt der $x\,y\,z$, sowie die offenbar durch die drei Integrale dargestellten Trägheitsmomente in bezug auf die Hauptachsen die Hauptträgheitsmomente des Körpers für den Anfangspunkt der $x\,y\,z$; sie sind, wie man unmittelbar einsieht, die reziproken Quadrate der Halbachsen des Trägheitsellipsoids. Das Trägheitsmoment in bezug auf eine beliebige Achse, K, drückt sich hiernach durch die Trägheitsmomente $P\,Q\,R$ mittels der Gleichung

$$(122)\qquad K = P\cos^2\alpha + Q\cos^2\beta + R\cos^2\gamma$$

aus, wo $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Richtungswinkel der betreffenden Achse sind.

Das Trägheitsellipsoid selbst bewegt sich natürlich gleichzeitig mit dem Körper, und zwar um seinen Mittelpunkt. Diese Bewegung besteht darin, daß es auf der durch den Endpunkt der augenblicklichen Drehungsachse gelegten Tangentialebene ohne Gleitung rollt, diese Tangentialebene ist demgemäß im Raume fest, sie ist der Richtung nach identisch mit der früher erwähnten LAPLACEschen Ebene und steht senkrecht auf der Hauptdrehungsachse, d. h. der dem Hauptdrehungsmoment [s. oben Gleichung (115)] entsprechenden Richtung. Der Ort der augenblicklichen Drehungsachsen im Körper ist, wie man ebenfalls leicht ableitet, ein Kegel zweiten Grades. Schließlich ist anzumerken, daß die kinetische Energie sich nunmehr in der Form

(123) $$U = \frac{1}{2}(Pp^2 + Qq^2 + Rr^2)$$

schreiben läßt.

Bewegung ohne Kräfte. In dem Falle, daß keine Kräfte wirken, lassen sich die Bewegungsgleichungen integrieren. Setzt man den Wert (123) in die Gleichung (120) ein, so erhält man

$$P\frac{dp}{dt} = (Q-R)qr \quad , \quad Q\frac{dq}{dt} = (R-P)rp \quad , \quad R\frac{dr}{dt} = (P-Q)pq \quad .$$

Die Integrale dieser Gleichungen lassen sich mit Hilfe abgekürzter Bezeichnungen in der einfachen Form hinschreiben:

$$p = a\cos\psi \quad , \quad q = b\sin\psi \quad , \quad r = c\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi} \quad .$$

Hierin ist ψ die Amplitude einer Größe u nach dem Modul $\varkappa$, d. h. es steht ψ mit u in der Beziehung

$$u = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} \quad ,$$

und u ist als Funktion der Zeit durch die Gleichung

$$u = \lambda t + \mu$$

definiert; ferner sind von den sechs Konstanten $a b c \varkappa \lambda \mu$ drei durch die Gleichungen

$$b^2 = a^2\frac{P(P-R)}{Q(Q-R)} \quad , \quad \lambda^2 = c^2\frac{(P-R)(Q-R)}{PQ} \quad , \quad \varkappa^2 = \frac{a^2}{c^2}\,\frac{P(P-Q)}{R(Q-R)}$$

bestimmt, die drei übrigen $a c \mu$ bestimmen sich aus den Anfangswerten $p_0\, q_0\, r_0$ von $p\, q\, r$ für $t = 0$, welche gegeben sein müssen, durch die Gleichungen

(124) $$\begin{cases} P(P-R)a^2 = P(P-R)p_0^2 + Q(Q-R)q_0^2 \quad , \\ R(P-R)c^2 = Q(P-Q)q_0^2 + R(P-R)r_0^2 \quad , \\ p_0 = a\cos\operatorname{amp}\mu \quad , \quad q_0 = b\sin\operatorname{amp}\mu \quad , \quad r_0 = c\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{amp}\mu} \quad . \end{cases}$$

Die Vorzeichen der Konstanten sind durch besondere Betrachtungen zu fixieren.

Zur Vervollständigung der Lösung müssen noch die Winkel $\varphi\,\psi\,\vartheta$ ermittelt werden, welche die Lage des Körpers im Raume jeden Augenblick bedingen.[1] Man brauchte zu diesem Zwecke nur die Gleichungen (106) nach φ, ψ, ϑ aufzulösen; für das Folgende ist es aber wichtig, für ϑ sogleich den endgültigen Wert abzuleiten. Hierzu dienen die auf das im Raume feste $\xi\eta\zeta$-System bezüglichen Gleichungen (121), in welchen für unseren Fall die rechten Seiten null sind. Integriert man dieselben mit Rücksicht auf (123), so erhält man

[1] Es ist wohl nicht notwendig zu bemerken, daß der Winkel ψ mit der soeben vorübergehend benutzten Hilfsgröße ψ nichts zu tun hat.

$$\alpha_1 Pp + \alpha_2 Qq + \alpha_3 Rr = A \quad , \qquad \beta_1 Pp + \beta_2 Qq + \beta_3 Rr = B \quad ,$$
$$\gamma_1 Pp + \gamma_2 Qq + \gamma_3 Rr = C \quad ,$$

wo ABC Konstanten sind; hieraus folgt, daß Pp, Qq, Rr, als rechtwinklige Koordinaten im xyz-System betrachtet, demselben Punkte angehören, wie ABC im $\xi\eta\zeta$-System, d. h. einem konstanten Punkte. Wählt man die Linie vom Anfangspunkte nach diesem Punkte zur ζ-Achse, so wird $A = 0$, $B = 0$, $C = \sqrt{P^2 a^2 + R^2 c^2}$. Die obigen Gleichungen geben dann, geeignet kombiniert:

$$\gamma_1 = \frac{Pp}{\sqrt{P^2 a^2 + R^2 c^2}} \quad , \qquad \gamma_2 = \frac{Qq}{\sqrt{P^2 a^2 + R^2 c^2}} \quad , \qquad \gamma_3 = \frac{Rr}{\sqrt{P^2 a^2 + R^2 c^2}} \quad ,$$

und hieraus findet man endlich

$$(125) \quad \begin{cases} \varphi = \arccos \gamma_3 \quad , \qquad \psi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad , \\ \vartheta = \displaystyle\int \sqrt{P^2 a^2 + R^2 c^2} \, \frac{P a^2 + R c^2 \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{amp}(\lambda t + \mu)}{P^2 a^2 + R^2 c^2 \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{amp}(\lambda t + \mu)} \, dt \quad ; \end{cases}$$

der letzte der drei bestimmenden Winkel ist hiernach ein elliptisches Integral dritter Gattung.

Setzt man p_0 und q_0, also auch a unendlich klein, so gelangt man zu dem Falle, daß im Anfang der Bewegung die Drehungsachse unendlich wenig von der z-Achse abweicht. Man findet dann

$$(126) \quad \begin{cases} p = a \cos(\lambda t + \mu) \, , \quad q = b \sin(\lambda t + \mu) \, , \quad r = c\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2(\lambda t + \mu)} \quad , \\ \sin^2 \vartheta = \dfrac{P a^2}{R c^2} \left(\dfrac{P}{R} + \dfrac{P - Q}{Q - R} \sin^2(\lambda t + \mu) \right) \quad , \\ \operatorname{tg} \psi = \dfrac{Q b}{P a} \operatorname{tg}(\lambda t + \mu) \quad , \qquad \varphi = \psi + c t + \text{const} \quad . \end{cases}$$

Die oben durchgeführte Konstantenbestimmung führt nun nur dann zu brauchbaren Werten derselben [s. oben Gleichung (124)], wenn festgesetzt wird, daß Q seiner Größe nach das mittlere von den drei Trägheitsmomenten PQR sei. Die eben gefundenen Formeln zeigen daher, daß die Achse des größten oder des kleinsten Hauptträgheitsmoments, wenn sie der Drehungsachse anfangs unendlich nahe war, dies immer bleibt. Die Annahme p_0 und r_0 unendlich klein führt dagegen zum entgegengesetzten Ergebnis, d. h. wenn der Körper um eine Achse sich dreht, welche seiner mittleren Hauptachse unendlich nahe ist, so entfernt sich jene von dieser im Laufe der Zeit mehr und mehr. Man überträgt die Ausdrücke stabil und labil häufig vom Gleichgewicht auf die Bewegung; im vorliegenden Falle kann man dann sagen: die Rotation um die größte sowohl als um die kleinste Hauptachse eines Körpers ist stabil, seine Rotation um die mittlere Hauptachse ist labil.

Für einen Rotationskörper wird $P = Q$, also $\varkappa = 0$, und man findet

$$(127) \quad p = \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \cos(\lambda t + \mu), \quad , \qquad q = \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \sin(\lambda t + \mu) \quad , \qquad r = r_0 \quad ,$$

also die letztere Drehungskomponente konstant; ebenso wird von den Winkeln ϑ konstant, φ und ψ lineare Funktionen der Zeit.

Bewegung unter der Wirkung von Kräften. Schwerer Körper. Wenn Kräfte wirken, wird die Behandlung begreiflicherweise wesentlich schwieriger, und es ist lange Zeit bei zwei Fällen verblieben, in denen die Lösung des Problems bekannt war. Der erste dieser Fälle ist der, wo die — nach Größe und Richtung als konstant angenommene — Kraft in dem festen Punkte des Körpers, seinem

Unterstützungspunkte, angreift; wenn die Kraft die Schwerkraft ist, was physikalisch natürlich am meisten interessiert, muß also der Unterstützungspunkt der Schwerpunkt sein. An den obigen Betrachtungen und Ergebnissen wird dann offenbar überhaupt nichts geändert. Auch läßt sich von diesem Falle ohne weiteres zu dem der Bewegung eines freien Körpers, dessen Drehung um den Schwerpunkt erfolgt, übergehen. Denn ob der Schwerpunkt fest oder frei ist, kann nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes keinen anderen Unterschied hervorrufen, als den, daß sich zu der Rotation noch eine fortschreitende Bewegung gesellt, derjenigen gleich, die der Schwerpunkt, wenn er ein einzelner Massenpunkt wäre, unter der Wirkung der Kräfte ausführen würde. Die Bewegung relativ zum Schwerpunkt ist also ungeändert, und auch die Hauptachsen, die in diesem Falle Hauptachsen der freien Drehung oder kurz freie Achsen heißen, spielen dieselbe Rolle wie zuvor.

Wenn der Angriffspunkt der Kräfte nicht in den festen Punkt fällt, kann man im allgemeinen nur zwei Integrale angeben, nämlich das der kinetischen Energie und das Flächenintegral in bezug auf die zur Kraftrichtung senkrechte, in dem Falle der Schwere also horizontale Ebene; und diese beiden Integrale reichen zur Lösung offenbar nicht aus. Man muß daher zur Spezialisierung greifen, und damit gelangen wir zu dem zweiten der beiden klassischen Fälle, dem eines Körpers vom Charakter eines Rotationskörpers, d. h. eines Körpers mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten, der sich um einen auf der dritten Achse gelegenen Punkt dreht. In diesem Falle bleibt das ohne Kräfte gefundene Resultat, daß die Rotationsgeschwindigkeit um die Hauptachse konstant ist, bestehen, dagegen werden die Winkel jetzt elliptische Funktionen der Zeit.

In neuerer Zeit sind nun zu den beiden klassischen Fällen weitere hinzugefügt worden, die allerdings vom praktisch-physikalischen Standpunkte keine größere Bedeutung haben, das ganze Problem jedoch so wesentlich klären, daß sie kurz erwähnt werden müssen. Der Fall, der von SOPHIE KOWALEWSKI entdeckt wurde, bezieht sich auf einen Rotationskörper, dessen Schwerpunkt auf einer der beiden gleichen Hauptträgheitsachsen liegt, während das dritte Hauptträgheitsmoment halb so groß ist wie jedes der beiden anderen. In diesem Falle gelingt es, zunächst wenigstens die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit und die Richtungskosinus zwischen den Achsen des Körpers und der Vertikalen auszudrücken, und zwar durch hyperelliptische Funktionen, deren beide Argumente dann lineare Funktionen der Zeit sind. Die Untersuchung ist dann von KÖTTER fortgesetzt worden, und es ist ihm mittels einer geeigneten Umformung gelungen, auch die übrigen Größen als hyperelliptische Funktionen und zwar naturgemäß mit konstanten Argumenten, darzustellen.

Einen vierten Fall, in dem das Problem der Rotation unter Umständen gelöst werden kann, hat HESS angegeben: der Schwerpunkt sei in einer Hauptträgheitsebene durch den Unterstützungspunkt gelegen, während das Trägheitsmoment um die Verbindungslinie von Schwerpunkt und Unterstützungspunkt die vierte geometrische Proportionale bildet zwischen den Trägheitsmomenten um die Hauptachsen der kritischen Hauptebene einerseits und der dritten Hauptachse andererseits; wenn dann noch die Achse des momentanen Kräftepaares stets senkrecht zur Figurachse bleibt, so reduzieren sich die drei EULERschen Gleichungen auf eine einzige Differentialgleichung, diese ist sofort integrierbar und führt zu elliptischen Funktionen, wenn die Achse des Kräftepaares horizontal liegt. Man ersieht schon aus diesen Andeutungen, daß es sich hier um eine singuläre Lösung handelt; zwei weitere anscheinende Lösungen, zu denen HESS dann noch durch eine Reduktion der Gleichungen gelangte, erweisen sich als unbrauchbar, da sie die ursprünglichen Gleichungen nicht mehr befriedigen.

Mit weiteren Fällen hat sich namentlich eine Reihe russischer Forscher beschäftigt, unter denen STEKLOW, BOBYLEW, KOLOSSOW, JOUKOWSKI und GOR-

JATSCHEW hervorzuheben sind; auf die betreffenden Voraussetzungen und die Formen der Lösungen kann aber nicht eingegangen werden.

Dagegen ist noch kurz auf die wichtigsten unter den allgemeinen oder speziellen, mit dem Problem im Zusammenhang stehenden Arbeiten hinzuweisen. So hat schon JACOBI den Satz gefunden, daß die Bewegung eines Umdrehungskörpers um einen festen Punkt seiner Figurachse identisch ist mit der relativen Bewegung zweier Körper von beliebiger Form, die sich um jenen festen Punkt als ihren Schwerpunkt drehen. Der Satz wurde später vielfach bewiesen, so von LOTTNER, PADOVA und HALPHEN sowie, auf elementarem Wege, von DARBOUX (synthetisch) und von HESS (analytisch). — Untersuchungen sehr allgemeiner Art, namentlich auch über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit weiterer Lösungen hat TEDONE veröffentlicht. — Eine Arbeit von PADOVA knüpft an eine Bemerkung der Frau KOWALEWSKI an, wonach bei passender Änderung des Potentials noch andere Integrale gefunden werden können; er zeigt, daß, wenn überhaupt ein durch die EULERschen Winkel ϑ und φ bestimmtes Potential existiert, dies nicht der Fall ist, und daß man nur, wenn ein Potential dieser Art nicht existiert, noch zwei weitere algebraische Integrale erhält. — STAUDE zeigt, daß, wenn man von allen Annahmen über Gestalt und Schwerpunktslage absieht, doch noch unendlich viele Lösungen existieren, die gleichförmige Rotationen um unveränderliche Achsen liefern; die geometrischen Verhältnisse derselben werden eingehend analysiert. — Eine Verallgemeinerung der Gleichungen ohne Kräfte hat DARBOUX gegeben, indem er

$$(128)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \alpha_1 q r \;, \quad \dfrac{dq}{dt} = \beta_1 r p \;, \quad \dfrac{dr}{dt} = \gamma_1 p q \;, \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

setzt; hierdurch wird es möglich, die POINSOTsche Vorstellung vom rollenden Trägheitsellipsoid auf alle Mittelpunktsflächen zweiten Grades zu übertragen. Die Untersuchung ist später von GOTTSCHALCK weitergeführt worden; es ergeben sich die sogen. konjugierten POINSOTschen Bewegungen, deren Integrale und mechanische Beziehungen erörtert werden. — Einen Fall von beliebiger Körpergestalt hat LIOUVILLE zwar nicht gelöst, aber so weit geführt, daß man sich in gewisser Weise eine Vorstellung von der Bewegung bilden kann. Durch einen besonderen Gedankengang hat SOMMERFELD die Bedingungen für das Zustandekommen des Falles von HESS ermittelt und übereinstimmend mit den früher von JOUKOWSKI ermittelten gefunden, wodurch zugleich ein Resultat von KOLOSSOW bestätigt wird; die Bedingung ist die, daß die Normalebene der Schwerpunktsachse das reziproke Trägheitsellipsoid in einem Kreise schneidet, oder daß der Schwerpunkt auf dem im Anfangspunkte errichteten Lote zu einer der Kreisschnittebenen des reziproken Trägheitsellipsoids liegt. — LEVI-CIVITÀ wendet seine allgemeinen Untersuchungen über die stationären Bewegungen und die Bedingungen der Stabilität auf den KOWALEWSKIschen Fall an und zeigt, wie sich für die einzelnen Komponenten dieser Bewegung der Charakter gestaltet. — Auch die allgemeinen Betrachtungen desselben Autors über die Transformation der lebendigen Kraft, die Existenz imaginärer Integrale und die Integrierbarkeit der Rotationsgleichungen durch Quadraturen auch bei Ungleichheit aller drei Trägheitsmomente sind von Interesse. — WANGERIN untersucht zwei Körper, deren erster um einen festen Punkt, deren zweiter um eine in ersterem feste Achse rotiert (der einfachere Fall, daß der erste Körper um eine feste Achse rotiert, war schon früher bearbeitet worden); ersetzt man den Einfluß des zweiten Körpers auf den ersten durch fiktive Kräfte, so gewinnt man zugleich neue Fälle des einfachen Rotationsproblems. — Von methodischer Bedeutung sind u. a. die Arbeiten von WASSMUTH und A. MAYER, letztere die symmetrische Lösung des Problems (zum Teil im Anschluß an DARBOUX) betreffend. — Besondere, namentlich für die Astronomie wichtige Fälle behandelt

GYLDÉN, darunter auch den, wo der Körper von einem äußeren Punkte angezogen wird. — Andere Arbeiten sind die von R. MAYR über Körper von kinetischer Symmetrie, von SCHOUTEN, VOLTERRA, SIACCI, FRANTZ und FINGER; jedoch muß es an diesem Hinweise genügen.

Soweit die Untersuchungen das besondere Kreiselproblem betreffen, vergleiche man auch den Artikel „Kreiselbewegung".

Experimentell ist das Rotationsproblem ebenfalls vielfach studiert worden; es erscheint aber angezeigt, diese Versuche im Zusammenhang im Artikel „Kreiselbewegung" anzuführen.

Spezialprobleme. Die physikalisch wichtigsten Spezialprobleme der Dynamik fallen unter den Inbegriff eines der vier nächsten Artikel, auf die deshalb verwiesen sei. Von den sonstigen Spezialproblemen haben manche entweder nur mathematisches oder nur technisches Interesse und müssen daher hier übergangen werden. Von physikalisch bedeutsamen Problemen seien hier diejenigen genannt, die sich auf die absolute oder relative Bewegung von Punkten oder Körpern auf bestimmten Bahnen, in bestimmten Ebenen oder unter sonst irgendwie gegebenen Bedingungen beziehen; Untersuchungen, die in mancher Hinsicht rein kinematischen Charakters sind, durch die Einführung der Kräfte dann aber dynamischen Sinn erhalten. So sei auf eine Reihe von Arbeiten von F. ROTH hingewiesen, welche die Bahn eines Punktes auf einer rotierenden Scheibe betreffen, und zwar zunächst die Trägheitsbahn, dann auch die bei der Wirkung bestimmter Kräfte auftretende, schließlich auch unter Berücksichtigung der Reibung. Es ergibt sich im einfachsten Falle die Kreisevolvente, allgemein gewisse Typen von logarithmischen Spiralen oder Doppelspiralen. Die naheliegende Anwendung der Untersuchung bezieht sich auf die Bewegung eines Teilchens auf der rotierenden Erdoberfläche (man vergleiche die Arbeiten von SPRUNG), sowie auf Probleme der Maschinentechnik. — Die Bewegung eines ganzen Körpers auf einer Ebene, gleitend oder rollend, hat u. A. M. RICHTER behandelt. — Die Bewegung von Punkten auf Rotationsflächen konnte früher nur für spezielle Fälle verfolgt werden; erst durch Arbeiten von WEIERSTRASS und STAUDE ist das Thema der allgemeinen Untersuchung zugänglich geworden, die u. A. von R. FRANTZ, KOBB, STAECKEL und SALKOWSKI durchgeführt worden ist.

Bewegung eines Fadens oder einer Kette. Das Problem des Fadens oder der Kette gehört streng genommen in die Lehre von der Elastizität; in derselben Weise, wie das Gleichgewicht in der Statik (p. 293), kann aber die Bewegung der Kette in der gewöhnlichen Dynamik behandelt werden. Die Bedingung der Unausdehnbarkeit — nur Biegsamkeit soll vorhanden sein — beschränkt die nach dem D'ALEMBERTschen Prinzip vorzunehmende Variation der Geschwindigkeit längs der Kette und liefert in erster Annäherung die Bedingung

$$(129) \qquad \frac{dx}{ds}\,\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{ds} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{ds} + \frac{dz}{ds}\,\frac{d\left(\frac{dz}{dt}\right)}{ds} \cdots = 0 \quad ,$$

die man die Kontinuitätsgleichung der Kette (vgl. weiter unten) nennen kann. Hierzu kommen, wenn wieder wie in der Statik (p. 295) ϱ das Gewicht der Längeneinheit und S die Spannung bedeutet, die Bewegungsgleichungen:

$$(130) \qquad \begin{cases} \varrho\,\dfrac{du}{dt} = \dfrac{d}{ds}\left(S\,\dfrac{dx}{ds}\right) + \varrho X \quad , \\[2ex] \varrho\,\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{ds}\left(S\,\dfrac{dy}{ds}\right) + \varrho Y \quad , \\[2ex] \varrho\,\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d}{ds}\left(S\,\dfrac{dz}{ds}\right) + \varrho Z \quad ; \end{cases}$$

hieraus kann man die Koordinaten eines Kettenelements und die Spannung S als Funktionen der Zeit und des Bogens s ermitteln.

Für ebene Bewegungen nehmen diese Gleichungen, wenn man bewegliche Achsen tangential und normal zum Kettenelement einführt, die Winkelgeschwindigkeit mit ω, den Krümmungsradius mit r, die Längskraft mit L und die Normalkraft nach dem Krümmungsmittelpunkt hin mit N bezeichnet, die Form an:

$$(131) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{ds} - \dfrac{v}{r} = 0 \quad , & \dfrac{dv}{ds} + \dfrac{u}{r} = \omega \quad , \\ \varrho\left(\dfrac{du}{dt} - \omega v\right) = \varrho L + \dfrac{dS}{ds} \quad , & \varrho\left(\dfrac{dv}{dt} + \omega u\right) = \varrho N + \dfrac{S}{r} \quad . \end{cases}$$

Wendet man dies auf eine gleichförmige und sich gleichförmig ohne Änderung der Gestalt und Lage im Raume bewegende Kette an, so daß die Größen v, du/dt und dv/dt null werden und $u = \omega r$ wird, so erhält man:

$$(132) \qquad \varrho L + \frac{dS}{ds} = 0 \quad , \qquad -\varrho N + \frac{S - \sigma u^2}{r} = 0 \quad ;$$

die Kurve, in der sich die Kette bewegt, ist also mit ihrer Gleichgewichtskurve identisch, dagegen ist ihre Spannung:

$$(133) \qquad S = \varrho(rN + u^2) \quad ,$$

sie übertrifft also ihren Gleichgewichtswert um das Produkt aus Liniendichte und Quadrat der Geschwindigkeit. Eine sehr auffällige Folge hiervon ist die scheinbare Starrheit einer rasch bewegten Kette gegenüber äußeren Einwirkungen; letztere kommen eben im Vergleich mit der sehr groß gewordenen Spannung kaum in Betracht. Hängt man z. B. eine Kette über eine vertikale Rolle, so daß sie weit herunterhängt, läßt sie sich rasch drehen und gibt ihr durch einen Hammerschlag an einer Stelle einen Knick, so bleibt dieser Knick immer an derselben Raumstelle und verschwindet nur sehr allmählich unter dem Einfluß der Schwere. Ist sie nur wenig länger als der Rollenumfang und wird sie geschickt von der Rolle heruntergeschlagen, so fährt sie auf dem Tische fort, sich mit fast unveränderter Gestalt rollend zu drehen.

Man kann dann weiter eine Reihe von Bewegungstypen leicht behandeln, so die Fortpflanzung eines Knicks in einer sich unter der Spannung S fortbewegenden Röhre:

$$(134) \qquad u = \sqrt{\frac{S}{\varrho}} \quad ;$$

die scheinbare Starrheit eines Schlauches beim Hindurchfließen von Wasser, die unter der Wirkung der Schwerkraft herabfallende Kette, die Bewegung auf einer rauhen Fläche u. s. w. Näheres hierüber findet man u. a. in dem Werke von THOMSON und TAIT sowie in dem Lehrbuche der Physik von ANDREW GRAY (deutsche Ausgabe, p. 361 ff.); auch ist auf eine Reihe von Abhandlungen von FLOQUET hinzuweisen, in denen auch die räumliche Bewegung (dritte Achse nach der Binormale) behandelt wird, wobei sich sehr interessante Bewegungstypen herausstellen.

Didaktisches zur Dynamik. Von jeher sind die Bemühungen, die allgemeinen Gesetze der Dynamik in einer für den höheren und mittleren Unterricht geeigneten Form darzustellen und durch ihre Anwendung auf bestimmte Fälle zu veranschaulichen, eifrigst betrieben worden; gerade in neuester Zeit sind diese Bemühungen wieder stark in Aufnahme gekommen. So hat man versucht, das

D'ALEMBERTsche Prinzip, die LAGRANGEschen Gleichungen und sogar das HAMILTONsche Prinzip elementar begreiflich zu machen, was natürlich immer nur bis zu einem gewissen Grade gelingen kann und strengeren Anforderungen meist starke Angriffspunkte bietet. An dieser Stelle kann auf die betreffenden Arbeiten nicht eingegangen werden (vgl. Literatur).

Auswahl aus der Literatur.

A. Zur Kinematik.

Die ältere Literatur, die hier nicht angeführt werden kann, findet man in den theoretischen und technischen Handbüchern sowie in den historischen Monographien. Von der neueren Literatur kann auch nur weniges herausgegriffen werden.

a) Lehrbücher: H. RESAL, Traité de cinématique pure. Paris 1862. — THOMSON und TAIT, Handb. d. theoret. Physik **1.** — W. SCHELL, Theorie der Bewegung und der Kräfte **1.** Leipzig 1870; 2. Aufl. 1879. — F. REULAUX, Theoret. Kinematik **1.** Braunschweig 1875. — F. GRASHOF, Theoret. Maschinenlehre **2.** Berlin 1883. — J. PETERSEN, Kinematik. Kopenhagen 1884. — A. SCHOENFLIES, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig 1886. — L. BURMESTER, Lehrb. d. Kinematik. Leipzig 1888. — A. MANNHEIM, Principes et développements de géométrie cinématique. Paris 1894. — G. KOENIGS, Leçons de cinématique. Paris 1897. — H. POINCARÉ, Cinématique et mécanismes. Paris 1899. — A. SCHOENFLIES (mit Zusatz von M. GRÜBLER), Kinematik, in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften **4.** 1.

b) Theoretische Abhandlungen: S. ARONHOLD (Grundzüge), Verh. Ver. z. Bef. d. Gewerbefleißes **51.** 29. 1872. — J. SCHADWILL (Gliedervierseit), ibid. **55.** 378. 1876. — M. GRÜBLER (Kinematische Ketten), ibid. **64.** 179. 1885. — A. SEYDLER (Hauptarten der Bewegung), Verh. böhm. Ges. d. Wiss. 1885. p. 139. 525. 600; 1886. p. 618. — PH. GILBERT (Beschleunigungen bei Rotation), C. R. **107.** 830. 946. 1888; **108.** 92. 1889; (Beschleunigungen beliebiger Ordnung), Journ. de Math. (4) **4.** 465. 1888. — R. MEHMKE (ebene Bewegung), Ztschr. f. Math. u. Phys. **35.** 1. 65. 1890. — K. v. SZILY (Punktbewegung), Ung. Ber. **7.** 220. 1888—89. — R. MÜLLER (ebenes System), Ztschr. f. Math. u. Phys. **37.** 129. 1892. — J. FINGER (Momente), Wien. Ber. **101.** (IIa) 1649. 1892; (Ebenes Gelenkviereck), ibid. **42.** 427. 1897. — RODENBERG (ebene Bewegung), Ztschr. f. Math. u. Phys. **37.** 218. 1892. — A. HÜBNER (Bewegungsachsen gestützter Körper), Mitt. math. Ges. Hamb. **3.** 107. 1893. — A. CAYLEY (Ebene, insbesondere Dreistabbewegung), Trans. Cambr. phil. Soc. **15.** 391. 1894. — A. COTTON (elliptische Schwingungen), Journ. de Phys. (3) **4.** 416. 1895. — F. WITTENBAUER (Kinematische Kette), Ztschr. f. Math. u. Phys. **40.** 279. 1895 (daselbst auch Angabe der vorangegangenen Abhandlungen). — P. SOMOW (Schraubengeschwindigkeiten), Ztschr. f. Math. u. Phys. **42.** 133. 1897. — R. S. BALL (Schraubentheorie), zahlreiche Abhandlungen in den Trans. Irish Soc. zuletzt **31.** 99. 145. 1897—98. — K. HEUN (Kinematik des Punktes und der Geraden mit Hilfe der Vektorenrechnung), Progr. 1. Realschule Berlin 1898. — J. LÜROTH (Bewegung starrer Körper nach der Ausdehnungslehre), Ztschr. f. Math. u. Phys. **43.** 243. 1898. — E. COTTON (Hauptträgheitsschrauben), Ann. de l'Ecole norm. (3) **17.** 9. 1900. — P. SOMOW (Gelenkmechanismen), Ztschr. f. Math. u. Phys. **46.** 199. 1901. — G. KOENIGS (Allgemeine Theorie der Mechanismen, Ketten u. s. w.), C. R. **133.** 342. 483. 533. 621. 1901. — R. DE SAUSSURE (Bewegung mit zwei und drei Freiheitsgraden), C. R. **133.** 1193. 1283. 1901; (Geometrische Theorie der Bewegung), Arch. de Genève (4) **13.** 425. 618; **14.** 14. 1902. — G. KOENIGS (Verband zweier Körper), C. R. **135.** 343. 1902. — H. PADÉ (Herpolhodie), Nouv. Ann. de math. (4) **3.** 289. 1903.

c) Versuche und Modelle: J. BERGMANN (Vibratorium), Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **1.** 199. 1888. — G. DARBOUX u. G. KOENIGS (Mechanische Apparate), C. R. **109.** 49. 1889. — A. SOMMERFELD (Integriermaschine für FOURIERsche Reihen), Schr. d. phys.-ökon. Ges. Königsb. **32.** 26. 1891. — A. CAYLEY (Apparat zum Kurvenzeichnen), s. o. — L. LECORNU (Bewegung verbundener Punkte), C. R. **118.** 398. 1894. — M. DEPREZ (dasselbe), ibid. p. 451. — W. DYCK, Katalog math.- u. math.-phys. Modelle u. s. w. München 1892. — J. VAN DAM (Zus. von Rotationen), Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **7.** 178. 1894. — G. U. YULE (harm. Analyse), Phil. Mag. (5) **39.** 367. 1895. — W. C. L. v. SCHALK (Zus. von Kreisbewegungen), Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **8.** 350. 1895. — A. MICHELSON u. STRATTON (harm. Analyse), Amer. Journ. (4) **5.** 1. 1898. — J. N. LECOMTE (YULES Analysator), Phys. Review **7.** 27. 1898. — G. KOENIGS (homographischer Zirkel), C. R. **131.** 1179. 1900.

Auf die Lehre von den Schwingungen und die bezüglichen Apparate und Modelle wird in der Akustik näher eingegangen werden.

B. Zur Dynamik.

Die Lehrbücher und älteren Monographien sowie die Arbeiten über die Prinzipienfragen sind schon im Artikel „Mechanik" zusammengestellt worden. Hier soll noch eine kleine Auswahl neuerer Arbeiten über die Dynamik im besonderen gegeben werden.

1. Grundlegende Theorie: L. Boltzmann (Prinzip von Hamilton), Crelles Journ. **73.** 111. 1871. — A. Voss (Differentialgleichungen der Mechanik), Math. Ann. **25.** 258. 1884. — J. König (neue Interpretation der Grundgleichungen; Aufstellung zweier auf die Beschleunigungsarbeit bezüglicher Sätze), Ung. Ber. **5.** 131. 1887. — H. Lamb (Reziproke Theoreme, im Anschluß an Helmholtz, auf Grund der Hamiltonschen charakteristischen Funktion), Proc. Lond. Math. Soc. **19.** 144. 1888. — E. Budde (Dynamisch-kinematische Betrachtungen über Dynamen, konjugierte Kräfte, Komitien, Limitanten u. s. w.), Verh. phys. Ges. 1889. p. 77. — P. Stäckel (Analytische Äquivalenz dynamischer Probleme), Crelles Journ. **107.** 319. 1891. — G. Koenigs (Gleichungen der geodätischen Bewegung), Bull. soc. phil. Par. (8) **5.** 28. 1892. — P. Appell (Lagrangesche Gleichungen mit Reibung), C. R. **114.** 331. 1892. — R. Liouville (Transformation), C. R. **114.** 1171. 1892. — P. Painlevé (Transformation), C. R. **114.** 901. 1104. 1892. — A. B. Bassett (Gleichungen bei gemischter Form der lebendigen Kraft), Nature **46.** 516. 1892. — A. Korn (Bewegung kontinuierlicher Massensysteme) Hab.-Schr. München 1895. — P. Appell (d'Alembertsches Prinzip für Impulse), Journ. de Math. **12.** 5. 1896. — J. W. Gibbs (Fundamentalformeln der Dynamik), Amer. Journ. of math. **2.** 49. 1897. — C. Neumann (Beiträge zur analytischen Mechanik), Leipz. Ber. **51.** 371. 1899; **54.** 333. 1902. — A. Mayer (Bewegungsgleichungen u. s. w.), Leipz. Ber. **51.** 224. 245. 1899. — E. Zermelo (Eindeutigkeit der Minimumbedingung bei Ungleichungen), Gött. Nachr. 1899. p. 306. — Issaly (Allgemeinheit und geometrische Bedeutung der Gleichungen), N. Ann. de math. (4) **1.** 548. 1901. — K. Heun (d'Alembertsches Prinzip), Arch. d. Math. (3) **2.** 57. 298. 1901—02. — H. Poincaré (Infinitesimale Transformation in Gleichungen, die sowohl die Lagrangeschen als die Eulerschen enthalten), C. R. **132.** 369. 1901. — G. Bisconcini (Klassifikation der dynamischen Probleme), Nuov. Cim. (5) **1.** 253. 1901. — H. Karstens (Asymptotische Lösungen), Inaug.-Diss. Berlin 1901. — E. T. Whittacker (Lösung von Problemen durch trigonometrische Reihen), Proc. math. soc. **34.** 206. 1902. — W. Fr. Meyer (Lagrangesche Gleichungen und Flächentheorie), Boltzmann-Festschr. p. 386. 1904. — G. Morera (Lagrangesche Gleichungen), Atti di Torino **38.** 57. 1903. — G. Fubini (Gruppentheoretisches über die Bewegungsgleichungen), Rend. Acc. Linc. **12.** (I) 502; (II) 60. 1903. — G. Morera (Hamilton), Atti di Torino **39.** 262. 1904. — R. Lehmann-Filhès (Verwendung unvollständiger Integrale der Hamiltonschen Gleichung), Astr. Nachr. **165.** 209. 1904. — F. Lindemann (d'Alembertsches Prinzip), Münch. Ber. **34.** 77. 1904. — L. Koenigsberger (Aus der Variation der mehrfachen Integrale entspringende Gleichungen der Mechanik), Berl. Ber. 1905. p. 250. — L. Maurer (Gleichungen der Mechanik), Gött. Nachr. 1905. p. 91.

2. Infinitesimale Bedingungen, nicht-holonome System, lebendige Kraft der Beschleunigungen, Rollbewegungen und ähnliches: A. Voss, Math. Ann. **25.** 258. 1884. — E. Crescini (Rollen einer Kugel auf einer Ebene), Atti Acc. Linc. (4) **5.** 204. 1889. — P. Molenbrock (Rollen ohne Gleiten), N. Arch. v. wiskunde **17.** 130. 1890. — A. Vierkandt, Mon.-Hefte Math. Phys. **3.** 31. 1892. — E. Lindelöf, Acta soc. fenn. **21.** 1894. — J. Hadamard, Mém. de Bord. (4) **5.** 1895. — P. Appell, Scientia Nr. 4 (Paris 1899); C. R. **129.** 317. 423. 459. 1899; Crelles Journ. **121.** 310. 1900; Journ. de math. (5) **6.** 5. 1900; **7.** 5. 1901. — A. de St.-Germain, C. R. **130.** 1174. 1900. — van Schouten, N. Arch. (2) **5.** 86. 1901. — G. A. Maggi, Rend. Acc. Linc. (5) **10.** 287. 1901. (Ältere Literatur von Ostrogradski, Liouville, Volterra u. A., siehe in den angeführten Arbeiten). — L. Boltzmann (Lagrangesche Gleichungen für nicht-holonome generalisierte Koordinaten), Wien. Ber. **111.** 1603. 1902; Phys. Ztschr. 1903. p. 281.

3. Quadratische Integrale der Gleichungen: P. Stäckel, C. R. **121.** 489. 1895; Ann. di math. (2) **25.** 55. 1897. — P. Painlevé, C. R. **124.** 221. 1897. — di Pirro, Rend. Circ. mat. Palermo **9.** 169. 1895; **10.** 241. 1896. — Ferner Abhandlungen von Liouville, Levi-Cività u. A.

4. Energie und Virial: R. Clausius (Virial), Pogg. Ann. **141.** 124. 1870; Jubelbd. 411. 1874. — G. Bohlin (Direkte Ableitung des Stabilitätskriteriums aus dem Prinzip der lebendigen Kraft, geometrische Darstellung), Acta math. **10.** 109. 1887. — L. Boltzmann (Lebendige Kraft monozyklischer Systeme, Beweis eines Helmholtzschen Satzes), Gött. Nachr. 1887. p. 209. — P. Donnini (Beziehung zwischen potentieller und kinetischer Energie für ein System gravitierender Punkte, Erweiterung der Virialsätze). — N. Pirogow (Virial), Journ. russ. Ges. **2.** 117. 1890. — P. Stäckel (Lebendige Kraft und andere quadratische Integrale, vgl. oben unter c), C. R. **115.** 485. 1893. — V. Volterra (Strömung mechanischer Energie), Atti di Torino **34.** 238. 1899. — Lord Rayleigh (Ein dem Virialsatz analoges Theorem), Phil. Mag. (5) **50.** 210. 1900. — L. Koenigsberger (Energieprinzip für beliebige Variable und kinetische Potentiale), Berl. Ber. 1904. p. 1342. — T. Levi-Cività (Energiekriterium und

stationäre Bewegung holonomer Systeme, in Verfolg älterer Arbeiten von ROUTH und POINCARÉ, siehe dasselbe), Rend. Acc. Linc. (5) **10.** 137. 338. 429. 461. 1901.

5. Rotationsproblem. Von den grundlegenden älteren Schriften sind die Werke über Mechanik von EULER (des Begründers der Lehre), LAGRANGE, LEGENDRE, JACOBI sowie, was die geometrische Grundlegung betrifft, das klassische Buch VON POINSOT, Théorie nouv. de la rotation des corps, Paris 1834, hervorzuheben; von älteren Abhandlungen: MACCULLAGH, Proc. Irish Acad. **2** und **3.** 1840—47; Trans. Irish Acad. **22.** 1855. — LOTTNER, CRELLES Journ. **50.** 1856. — A. CLEBSCH, ibid. **57.** 73. 1860. — SCHLAEFLI, Progr. Berner Hochsch. 1867. — SEMMLER, Inaug.-Diss. Göttingen 1874. — Eine zusammenfassende Darstellung gibt neuerdings GRASSMANN in Ztschr. f. Math. u. Phys. **48.** 329. 1903.

Von neueren Originalabhandlungen seien, in chronologischer Folge, angeführt: SÖDERBLOM, N. Acta Ups. (3) **12.** 1884. — HALPHÉN, C. R. **100.** 1065. 1885. — G. DARBOUX, C. R. **100.** 1555. 1885. — PALADINI, Rend. Acc. Linc. (4) **4.** 187. — W. HESS (JACOBIsches Theorem), Ztschr. f. Math. u. Phys. **33.** 292. 1888. — SOPHIE KOWALEWSKI, Acta math. **12.** 177. 1889. — W. HESS (Neuer Fall), Progr. Lyceum Bamberg 1889. — A. WANGERIN, Univ.-Progr. Halle 1889. — R. FRANTZ, Inaug.-Diss. Rostock 1889. — W. HESS, Math. Ann. **37.** 153. 1890. — J. FINGER, Wien. Sitzber. **101.** (IIa) 1105. 1892; **101.** (IIa) 1649. 1892. — H. GYLDÉN, C. R. **116.** 942. 1893; Öfv. Vet. Förh. **50.** 63. 1893; C. R. **116.** 1028. 1893. — FR. KÖTTER, Acta math. **17.** 209. 1893. — E. PADOVA, Atti Ist. Veneto (7) **4.** 757. 1893; Rend. Acc. Linc. (5) **3.** 1. Sem. p. 161. 1894; **4.** 2. Sem. p. 198. 1895. — A. GOTTSCHALCK, Inaug.-Diss. Münster 1893. — O. STAUDE, CRELLES Journ. **113.** 318. 1894. — R. LIOUVILLE, C. R. **120.** 903. 1895. — O. TEDONE, Nuov. Cim. (4) **1.** 220. 269. 353. 1895. — V. VOLTERRA, Atti di Torino **30.** 200. 1895. — F. SIACCI, Atti di Napoli (2) **6.** 1893. — T. LEVI-CIVITÀ, Rend. Acc. Linc. (5) **5.** 2. Sem. p. 3. 122. 1896; **10.** 1. Sem. p. 338. 429. 461. 1901. — G. KOLOSSOW, Gött. Nachr. 1898. p. 80; Math. Ann. **56.** 265. 1902. — A. SOMMERFELD, Gött. Nachr. 1898. p. 83. — D. N. GORJATSCHEW, Arb. phys. Sektion Natf. Ges. Moskau **10.** 1899. — W. A. STEKLOW, ibid. **10.** 1899. — P. DUHEM, C. R. **132.** 1021. 1901. — C. BARUS, Science **13.** 914. 1901. — A. WASSMUTH, Wien. Anz. 1902. p. 189. — A. MAYER, Leipz. Ber. **54.** 53. 1902. — R. MAYR, Ztschr. f. Math. u. Phys. **47.** 479. 1902. — L. LECORNU, Bull. soc. math. **30.** 71. 1902. — G. SCHOUTEN, Nieuw Arch. (2) **5.** 86. 1901. — Die besondere Literatur für das Kreiselproblem, einschließlich des großen Werkes von KLEIN und SOMMERFELD sehe man im Artikel „Kreiselbewegung".

6. Zur Lehre vom Trägheitsmoment (vgl. auch im Artikel „Statik"). BELING, Inaug.-Diss. Breslau 1881. — R. KREICHGAUER, WIED. Ann. **25.** 273. 1885. — F. RICHARZ, Verh. phys. Ges. 1885. p. 76. — G. STONEY, Proc. Dubl. soc. **5.** 335. 1887. — F. C. G. MÜLLER, Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **8.** 194. 1895; **14.** 71. 1901. — J. CRAMERARIUS, ibid. **5.** 286. 1892.

7. Spezialprobleme. G. LERY (Flächensatz bei mehreren Zentren), N. Ann. de math. (4) **2.** 97. 1902. — P. PAINLEVÉ (Flächensatz), C. R. **139.** 1170. — S. FUCHS (Apparat für den Flächensatz), Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **15.** 218. 1902. — F. ROTH (Trägheitskurve, vgl. auch die Abhandlungen von SPRUNG in demselben Bande), Ztschr. f. Meteorologie **16.** 283. 1881; Rep. d. Phys. **22.** 354. 1886; **23.** 1. 457. 553. 1887; **24.** 65. 648. 1888. — M. RICHTER (Körper auf horizontaler Ebene), Inaug.-Diss. Leipzig 1887. — O. STAUDE, Acta math. 1888. — R. FRANTZ (Punkt auf Rotationsflächen), Progr. Magd. 1891. — KOBB, Acta math. **10.** 89. 1887. — P. STAECKEL, Math. Ann. **41.** 571. 1893. — E. SALKOWSKI, Inaug.-Diss. Jena 1904. — G. FLOQUET (Bewegung eines Fadens), C. R. **108.** 661. 1889; **115.** 499. 1892; **130.** 1745; **131.** 27. 1900.

8. Didaktisches: Die Literatur ist teils in den Lehrbüchern, besonders den elementaren verarbeitet, teils findet sie sich in zahlreichen kleinen Mitteilungen in den Zeitschriften für mathematischen, physikalischen und chemischen Unterricht. Es muß genügen, hier auf diese Arbeiten, unter denen die von KÖPPING, LISSER und BENEKE, WATT, PSCHEIDL, POSKE, HARTL, REICHEL, HOLLEFREUND, MACH, V. OBERMAYER (die beiden letzten im Rep. d. Phys.) genannt seien, hinzuweisen.

Fall und Wurf.

Von F. AUERBACH.

Übersicht. Unter dem Namen der allgemeinen Gravitation faßt man die Gesamtheit derjenigen Erscheinungen zusammen, für welche die Masse der Körper die maßgebende Größe ist, seien es nun irdische oder himmlische Erscheinungen, seien es Ruhe- oder Bewegungserscheinungen. Eine Gliederung dieses großen Gebiets erscheint dabei zweckmäßig, und so werden in dem vorliegenden Artikel diejenigen Bewegungsvorgänge behandelt, die sich unter dem Einfluß der irdischen Schwere an der Erdoberfläche abspielen. Man könnte diese Bewegungen allgemein als Fall bezeichnen; gewöhnlich unterscheidet man jedoch zwischen zwei Klassen von Vorgängen, bei deren ersterer lediglich die Schwerkraft wirkt, während bei der anderen noch ein Anfangsimpuls mitwirkt; jene bezeichnet man als Fall-, diese als Wurferscheinungen. Andererseits kann die Bewegung im Sinne der Betrachtungen in den vorangegangenen Artikeln entweder frei sein oder irgend einem Zwange unterliegen, so daß man die weitere Unterscheidung zwischen freiem und unfreiem Falle machen kann; dabei kann der Zwang in der Beschränkung der Bewegung auf eine bestimmte Kurve oder Fläche oder in irgend welchen anderen Bedingungen bestehen, und es kann dieser Zwang physikalisch in sehr verschiedener Weise realisiert sein. Ein hierher gehöriger Fall ist seiner besonderen Bedeutung halber aus dem vorliegenden Artikel ausgeschieden worden und wird im nächsten für sich behandelt: das Pendel. Schließlich ist noch eine Reihe von besonderen Fragen, die mit Fall und Wurf im Zusammenhange stehen, kurz zu erledigen, wie der Luftwiderstand, der Einfluß der Erddrehung u. a. m.

Richtung des freien Falles. Bei der Untersuchung einer Bewegung handelt es sich vor allem um zweierlei: um ihre Richtung und ihre Geschwindigkeit. Wir untersuchen zunächst also die Richtung des freien Falles. Sie ist, wie die Erfahrung lehrt, im allgemeinen und im großen ganzen übereinstimmend mit der Richtung des Lotes, d. h. mit der vertikalen Richtung. Beim Lot ist diese Richtung durch ein Nebeneinander, beim freien Falle durch ein Nacheinander von Punkten dargestellt. Außer direkt durch das Lot kann man diese Richtung auch ermitteln, indem man auf einer freien Wasserfläche, welche horizontal ist, eine Senkrechte errichtet. Es frägt sich nun, wie sich die Lotrichtung, also auch die Fallrichtung, zur Figur der Erde verhält. Wäre die Erde eine genaue Kugel, so würde das Lot, wie schon aus Gründen der Symmetrie einleuchtet, an jedem Orte genau mit dem Erdradius zusammenfallen. Die Erde ist aber in Wahrheit ein, wenn auch nur wenig von der Kugelgestalt abweichendes Sphäroid (s. Art. „Gravitation"), und infolgedessen stimmt die Lotrichtung und folglich auch die

Richtung des freien Falles nur an den Polen und am Äquator mit der Richtung des Erdradius überein, weicht aber an allen anderen Orten ein wenig von ihr ab, und zwar verhältnismäßig am meisten in den mittleren Breiten. Eine andere Abweichung der Lot- und Fallrichtung von der Richtung des Erdradius läßt sich auf die Wirkung der aus der Drehung der Erde um ihre Achse resultierenden Zentrifugalkraft (s. Art. „Dynamik") zurückführen. An jedem Punkte der Erde nämlich, ausgenommen an den Polen, wo keine Rotation stattfindet, und am Äquator, wo die Zentrifugalkraft der Schwere gerade entgegengerichtet ist, bilden beide Kraftrichtungen einen Winkel miteinander, der den Breitenwinkel des Ortes zu 180^0 ergänzt; und somit setzen sie sich zu einer Resultante zusammen, die dem Lot und dem fallenden Körper eine von der auf der freien Wasserfläche errichteten Vertikalen etwas abweichende Richtung erteilt; die Anschauung lehrt, daß diese Abweichung auf der nördlichen Halbkugel nach Süden zu, auf der südlichen nach Norden zu stattfinden muß. Für die Physik hat diese Erscheinung jedoch keine aktuelle Bedeutung. Endlich ist noch eine dritte hierhergehörige Richtungsabweichung von Lot und Fall zu beachten: diejenige, welche eine Folge lokaler Unregelmäßigkeiten der Erde ist; an Orten z. B., wo sich einerseits eine weite Ebene, andererseits aber ein massiver Berg befindet, weicht das Lot und die Fallrichtung nach der Seite des letzteren um einen durch feine Messungen zu ermittelnden Betrag von der Richtung, die ohnedies stattfinden würde, ab (s. Art. „Gravitation").

Die bisher angeführten Richtungsabweichungen waren dem Lote und dem freien Falle gemeinsam, so daß man nach wie vor sagen darf: die Richtung des freien Falles ist lotrecht. Dagegen ist nunmehr eine Abweichung zu besprechen, die nur die Richtung des freien Falles betrifft, die also zur Folge hat, daß die Körper nicht lotrecht zur Erde fallen. Diese Abweichung rührt daher, daß der fallende Körper aus der Höhe, aus welcher er herabfällt, eine größere Rotationsgeschwindigkeit um die Erdachse mitbringt, als die Erdoberfläche selbst besitzt; dieser Überschuß an horizontaler Geschwindigkeit wird ihn also gegenüber dem Lote ostwärts vorauseilen lassen. Um wieviel, ergibt folgende elementare Betrachtung. Ein an der Erdoberfläche befindlicher Punkt hat infolge der mit der Winkelgeschwindigkeit ω erfolgenden Drehung der Erde die Geschwindigkeit

$$u_0 = \omega R \cos\varphi$$

(R Erdradius, φ Breite des betreffenden Ortes), ein in der Höhe h über der Oberfläche befindlicher Punkt dagegen die Geschwindigkeit

$$u = \omega (R + h) \cos\varphi \quad .$$

Ein von der Höhe h auf die Oberfläche herabfallender Punkt befindet sich nun, wie aus den Fallgesetzen (s. unten) folgt, durchschnittlich in der Höhe $\frac{2}{3} h$; seine Voraneilung in der Sekunde beträgt also

$$u - u_0 = \frac{2}{3} \cdot \omega h \cos\varphi \quad ,$$

und folglich während der ganzen Fallzeit ($t = \sqrt{2h/g}$, s. unten)

$$A = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos\varphi \quad . \tag{1}$$

Für die strenge Theorie kommen die Gleichungen der relativen Bewegungen in Betracht. In ihrer exakten Form sind sie ziemlich kompliziert; in erster Annäherung lauten sie jedoch, wenn x nach Süden, y nach Osten und z nach unten gerechnet wird, einfach:

$$
(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt}\omega\sin\varphi = 0 \quad , \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dz}{dt}\omega\cos\varphi + 2\dfrac{dx}{dt}\omega\sin\varphi = 0 \quad , \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt}\omega\cos\varphi = g \end{cases}
$$

oder einmal integriert, mit naheliegender Wahl der Konstanten:

$$
(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2\,\omega\sin\varphi\cdot y \quad , \\ \dfrac{dy}{dt} = 2\,\omega\cos\varphi\cdot h - 2\,\omega\sin\varphi\cdot x + 2\,\omega\cos\varphi\cdot z \quad , \\ \dfrac{dz}{dt} = g\,t - 2\,\omega\cos\varphi\cdot y \quad . \end{cases}
$$

Hieraus ergibt sich für die Erdoberfläche selbst:

$$
(4)\quad y = \tfrac{1}{3}\,\omega\cos\varphi\cdot g\,t^3
$$

und mit Benutzung des Fallgesetzes (s. unten) so groß wie oben schon angegeben; gleichzeitig findet sich x als — bei dieser Annäherung — unendlich klein.

Man kann, wie das u. A. Schellbach[1] und Grillières[2] getan haben, das Problem auch in der Weise erfassen, daß man die absolute Bahn des frei fallenden Körpers als eine elliptische Planetenbahn ansieht, wobei dann der Schnittpunkt der Ellipse mit der Erdoberfläche den Aufschlagpunkt ergibt.

Als Ergebnis der Theorie kann man den Satz hinstellen, daß beim freien Falle eine östliche Abweichung stattfinden muß, die von der Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, und außerdem eine südliche, die erst von dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit[3] der Erddrehung abhängig ist; erstere muß sich bequem beobachten lassen, letztere liegt jenseits der Beobachtungsgrenzen, es sei denn, daß man ganz außergewöhnlich große Höhen anwendet und die Fehlerquellen sehr vollkommen ausschließt.[4]

Was nun die östliche Vorauseilung des fallenden Körpers betrifft, so ist diese wiederholt gemessen worden. Die erste Konstatierung erfolgte schon durch Hooke, dann folgten Versuche von Guglielmini (1792), die ersten messenden Beobachtungen sind von Benzenberg[5] angestellt, denen dann die zahlreichen und sorgfältigen von Reich[6] folgten. Bei diesen betrug die Fallhöhe 158,54 m, die Abweichung hätte nach der Theorie 27,5 mm betragen sollen, sie betrug im Mittel aus den Versuchen 28,4 mm; die Übereinstimmung ist also sehr befriedigend. Später sind dann die Messungen ziemlich oft wiederholt worden, z. B. in neuester Zeit mit Benutzung des Eiffelturmes.

Nicht so einfach liegen die Verhältnisse in betreff der südlichen Abweichung. Eine solche hatte schon Reich, wenn auch nicht mit Sicherheit konstatiert, auch andere Beobachter wollen sie gefunden haben; es steht aber jetzt

---

[1] K. Schellbach, Neue Elemente der Mechanik, p. 270. Berlin 1860. — [2] L. Grillières, Paris 1893. — [3] Man vergleiche namentlich die neuesten Abhandlungen über diese Frage: de Sparre, C. R. **140.** 33. 1905 und Bull. soc. math. **33.** 65 und 146. 1905, sowie die Diskussion zwischen dem Autor und M. Fouché, im Anschluß daran. Eine etwas andere Auffassung entwickelt A. Denizot, Ann. (4) **18.** 319. 1905; hier wird die südliche Abweichung direkt mit der scheinbaren Drehung der Bewegungsebene in Verbindung gebracht. — [4] Ganz allgemein ist der „freie Fall aus einem Punkte der Erdoberfläche" u. A. von R. Hoppe behandelt worden: Arch. der Math. u. Phys. **64.** 96. 1879. — [5] Benzenberg, Versuche über die Gesetze des Falles u. s. w. Dortmund 1804. — [6] E. Reich, Fallversuche. Freiberg 1831.

fest, daß diese Abweichungen auf Fehlerquellen beruhen, und daß, wie die Theorie es verlangt, eine beobachtbare südliche Abweichung nicht existiert.[1]

Fallbeschleunigung. Wenn die Theorie, wonach die Erscheinung des freien Falles die Wirkung einer dauernden Kraft, der Schwerkraft ist, zutrifft, muß die Bewegung vom gleichförmig beschleunigten Charakter, d. h. die Beschleunigung eine während des Falles konstant bleibende Größe sein. Allerdings führt die Gesamtheit der Gravitationserscheinungen zu der Annahme, daß die Schwerkraft mit der wachsenden Entfernung vom Erdmittelpunkte abnehme; innerhalb des für Fallversuche in Betracht kommenden Bereichs ist aber die Verschiedenheit jener Entfernungen zu klein, um eine Rolle zu spielen; die höchsten Bauwerke machen noch nicht $^1/_{10000}$ und selbst die größten Ballonhöhen nicht viel mehr als $^1/_{1000}$ des Erdradius aus; doppelt so groß, wegen des quadratischen Gesetzes, würde also nur die Änderung der Schwere während des Falles sein, und bei den üblichen Höhen ist sie noch viel kleiner. Immerhin wird man sagen müssen, daß die Bewegung beim freien Falle durch derartig große Höhen vom gleichförmig beschleunigten Charakter im Sinne einer beschleunigt beschleunigten Bewegung abweicht.

Andererseits ist zu beachten, daß der Charakter des freien Falles als einer Bewegung relativ zur rotierenden Erde nicht nur eine Fallabweichung zur Folge hat, sondern auch das Gesetz der Beschleunigung beeinflußt.[2] Eliminiert man nämlich aus der letzten der Gleichungen (2) dy/dt mit Hilfe der zweiten der Gleichungen (3), so erhält man, wenn man x und h gegen z vernachlässigt:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - 4\,\omega^2 \cos^2 \varphi \cdot z \quad , \tag{5}$$

also eine während des Falles abnehmende Beschleunigung, wobei es sich allerdings wegen ω^2 um einen praktisch verschwindenden Betrag handelt.

Dagegen kommen die Unterschiede in dem Mittelpunktabstand, wie sie je nach der Lage über dem Meeresspiegel, sowie je nach der geographischen Breite stattfinden, also für den Vergleich von Fallversuchen an verschiedenen Orten, sehr wohl in Betracht, die mittlere Beschleunigung wird merklich verschieden sein. Indem hierfür auf den Art. „Allgemeine Gravitation" verwiesen wird, sei für jetzt nur angeführt, daß die Beschleunigung beim freien Falle in runder Zahl

$$g = 981\ \mathrm{cm/sec^2} \tag{6}$$

beträgt.

Durch die Angabe dieser Zahl als einer schlechthin gültigen ist bereits ausgedrückt, daß die Fallbeschleunigung für alle Körper gleich groß ist. Es ist das nach unserer Auffassung — vgl. Art. „Grundbegriffe", p. 37 — eine Folge des Umstandes, daß für den freien Fall nicht, wie für den Druck auf die Wagschale, nur die aktive Masse der Körper, ihr Gewicht in Betracht kommt, sondern in ganz gleichem Maße auch ihre passive Masse, so daß sich diese beiden Größen, deren eine im Zähler, deren andere im Nenner steht, herausheben; deshalb ist das statische Gewicht der Körper verschieden, ihre dynamische Fallbeschleunigung aber die gleiche. Um auch diese verschieden zu machen, müßte man irgendwie eine Trennung ihres aktiven Gewichts von ihrer passiven Masse vornehmen, um beiden verschiedene Werte geben zu können, was in der Tat durchführbar ist (s. weiter unten).

Aus der Gleichheit der Beschleunigung folgt nun sofort, daß auch die Geschwindigkeit in entsprechenden Momenten immer dieselbe und schließlich, daß die Fallzeit durch eine gegebene Höhe dieselbe ist. Man sagt daher: alle

---

[1] Man vgl. besonders E. H. HALL, Phys. Review **17.** 179 u. 245. 1903. — [2] C. MALTÉZOS, N. ann. math. (4) **2.** 197. 1902.

Körper fallen gleich schnell. Bei zwei Körpern von gleicher Gestalt, aber sehr verschiedenem Gewicht, z. B. bei zwei gleich großen Kugeln aus Blei und Holz, kann man das ohne weiteres nachweisen. Zu gleicher Zeit von demselben Niveau herabfallend, erreichen sie zu gleicher Zeit den Boden; es gibt eine Reihe von Vorrichtungen, mittels deren sich das ganz exakt beobachten läßt. Haben die beiden Körper verschiedene Gestalt, ist insbesondere das Verhältnis der Oberfläche zum Volumen bei beiden sehr verschieden, so fallen sie allerdings verschieden schnell, und es wird z. B. eine Metallkugel sehr viel früher unten anlangen, als ein Papierscheibchen oder eine kleine Vogelfeder. Daß das aber lediglich eine Wirkung des Luftwiderstands (s. weiter unten) ist, beweist die Verlegung des Experiments in den luftleeren oder auch nur stark luftverdünnten Raum. Zu diesem Zwecke sind mehrere besondere Apparate gebaut worden, unter denen der von PULUJ[1] angeführt sei; die beiden Körper werden hier am oberen Ende der ausgepumpten Röhre durch die Anziehung eines Elektromagneten festgehalten (die Feder bezw. das Papierblättchen ist zu diesem Zwecke mit einem ganz kleinen Eisennädelchen ausgerüstet), und beim Öffnen des den Elektromagneten bedienenden Stromes fallen beide Körper herunter. — Übrigens hat schon ARIAGA um 1650 einen einfachen Versuch, der hierher gehört, angegeben: man legt das Papierscheibchen einfach auf eine gleich große Münze, dann fallen sie miteinander herunter — ein Versuch, der freilich nicht völlig beweisend ist, da der Luftdruck auf die in Berühung befindlichen Körper mitspielt.

Fallgesetze. Aus dem Charakter der gleichförmig beschleunigten Bewegung folgen unmittelbar die Formeln:

$$v = gt \quad , \qquad t = \frac{v}{g} \quad , \tag{7}$$

wo v die Geschwindigkeit zur Zeit t ist; ferner, wenn man erwägt, daß die mittlere Geschwindigkeit während des Zeitraumes t glsich $\frac{1}{2}(0 + gt)$ ist, für den in der Zeit t durchfallenen Raum h die Formel:

$$h = \frac{0 + gt}{2} t \quad , \qquad \text{also} \quad h = \frac{1}{2} g t^2 \quad . \tag{8}$$

Man hat also die Sätze:

1. Die Fallgeschwindigkeit ist der Fallzeit proportional.

2. Die Fallhöhe ist dem Quadrat der Fallzeit proportional.

3. Die Fallhöhe ist halb so groß, wie die Strecke, welche mit der erreichten Geschwindigkeit in derselben Zeit gleichförmig zurückgelegt werden würde.

Die beiden ersten Gesetze kann man, mit einer leicht zu machenden Ergänzung, auch folgendermaßen formulieren: 1. Die am Ende der einzelnen Sekunden erlangten Geschwindigkeiten verhalten sich wie die ganzen Zahlen. 2. Die in den einzelnen Sekunden, jede für sich genommen, durchfallenen Strecken verhalten sich wie die ungeraden Zahlen. 3. Die nach Ablauf der einzelnen Sekunden im ganzen durchfallenen Höhen verhalten sich wie die Quadrate der ganzen Zahlen.[2]

Von den drei Größen Geschwindigkeit, Fallzeit und Fallhöhe lassen sich mit Hilfe der obigen und der folgenden Formeln:

$$t = \frac{v}{g} \quad , \qquad h = \frac{v^2}{2g} \quad , \tag{9}$$

---

[1] J. PULUJ, WIED. Ann. **33.** 575. 1888. — [2] Die Fallgesetze sind zuerst von GALILEI gefunden worden.

(10) $$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad , \qquad v = \sqrt{2gh}$$

stets zwei aus der dritten berechnen.

Die Atwoodsche Fallmaschine. Bei dem Versuch, die eben theoretisch entwickelten Fallgesetze experimentell zu prüfen, ist man in der Zeit, in welcher man diesen Versuch zuerst machte, auf die Schwierigkeit gestoßen, daß der freie Fall viel zu rasch erfolgt, als daß man die einzelnen Zeitabschnitte in irgendwie genauer Weise miteinander vergleichen oder gar absolut messen könnte. Unter den Gedanken, durch welche man dieser Schwierigkeit begegnet ist, darf als einer der glücklichsten derjenige bezeichnet werden, welcher in der ATWOODschen Fallmaschine[1] verwirklicht ist, und durch den man zugleich in die schon oben als bedeutungsvoll erwähnte Möglichkeit versetzt wurde, Kraft und Last (Gewicht und Masse) unabhängig voneinander zu variieren. Die Beschleunigung beim freien Falle ist doch nur deshalb eine so große, weil jedes Gewicht nur gerade seine eigene Masse in Bewegung zu setzen braucht. Kann man es durch irgend eine Vorrichtung erreichen, daß ein kleines Gewicht, also eine kleine Kraft, eine große Masse in Bewegung setzen muß, um selbst fallen zu können, so muß die Beschleunigung und zwar im Verhältnis des bewegenden Gewichts zur bewegten Masse, kleiner ausfallen. Eine solche Vorrichtung ist ein über eine feste Rolle geschlungenes und an beiden Enden belastetes Seil (s. Art. „Einfache Maschinen"). Hängt an jedem Ende ein Gewicht P, so ist Gleichgewicht vorhanden; fügt man aber auf der einen Seite ein kleines Übergewicht p hinzu, so ist das Gleichgewicht gestört, das Gewicht p ist bestrebt, seine eigene Masse abwärts zu ziehen und muß, um dies ausführen zu können, die Masse der Gewichte $2P$ mitnehmen. Die bewegende Kraft ist also p, die bewegte Masse diejenige, welche dem Gewicht $2P + p$ entspricht, also nach dem Obigen die Masse $(2P + p)/g$, oder genauer, weil noch das Gewicht π der Schnur hinzukommt, die Reibung ϱ an der Rolle aber entgegenwirkt, die Masse $(2P + p + \pi - \varrho)/g$. Folglich ist die Beschleunigung

(11) $$g' = \frac{p}{\frac{1}{g}(2P + p + \pi - \varrho)} = g\frac{p}{2P + p + \pi - \varrho} \quad .$$

Durch geeignete Wahl des Größenverhältnisses von P und p kann man also offenbar eine beliebig kleine Beschleunigung erzielen.

In der Form, welche ihr gegenwärtig gegeben zu werden pflegt, besteht die ATWOODsche Fallmaschine (Figur 100) aus einer 2—3 m hohen vertikalen Säule, welche auf ihrem Gipfel die möglichst leichte und bewegliche, auf Friktionsrädchen ruhende Rolle mit der Schnur und den beiden gleichen Gewichten P trägt. In einiger Entfernung von der Hauptsäule verläuft ebenfalls vertikal eine zweite mit Maßeinteilung versehene, an welcher sich zwei Holzbrettchen verschieben lassen, ein durchlochtes, zum Durchlassen des fallenden Gewichts bestimmtes, und ein massives, auf welches dasselbe aufschlägt. An der Hauptsäule ist unmittelbar unter der Rolle ebenfalls ein seitliches Brettchen befestigt, auf welchem zu Anfang des Versuchs das Gewicht ruht, und welches von einem an der Hauptsäule angebrachten Sekundenpendel durch den ersten Sekundenschlag desselben umgeklappt wird. Als Übergewichte benutzt man teils geschlitzte Metallringe, teils ebensolche mit zwei seitlichen Ansätzen, welche sie verhindern, das durchlochte Brettchen zu passieren. Besonders geeignete Maße sind je 97 g für die Gewichte (mit Schnur und Reibungskorrektion) und je 2 g für die Übergewichte; legt man dann nämlich ein Übergewicht auf, so ist die Beschleunigung nach obiger Formel (3)

[1] ATWOOD, A treatise on the rect. motion etc. Cambr. 1874.

gerade 10 cm, die Fallhöhe in der ersten Sekunde 5 cm. Man kann dies zunächst verifizieren, indem man das massive Brettchen 5 cm unterhalb der Klappe aufstellt; das Gewicht, das beim ersten Sekundenschlage seinen Fall begann, schlägt dann beim zweiten Sekundenschlage auf das Brettchen auf; bei der Feinheit des Ohres in der zeitlichen Differenzierung von Schallen ist hierbei eine verhältnismäßig große Genauigkeit erreichbar. Stellt man nun statt des massiven das durchlochte Brettchen bei 5 cm ein und benutzt ein Übergewicht mit Ansätzen, so geht der Fallkörper am Ende der ersten Sekunde durch das Brettchen hindurch, läßt das Übergewicht auf demselben liegen, geht nun nach dem Beharrungsprinzip mit konstanter Geschwindigkeit weiter und legt, wie man durch Einstellen des massiven Brettchens auf 15 oder 25 u. s. w. findet, nunmehr in jeder Sekunde 10 cm zurück. Benutzt man endlich, unter Beibehaltung der Einstellung des durchlochten Brettchens auf 5 ein Übergewicht ohne Ansätze, so daß die Beschleunigung andauert, so muß man das massive Brettchen auf $4 \times 5 = 20$ oder auf $9 \times 5 = 45$ u. s. w. einstellen, damit der Fallkörper am Ende der zweiten, dritten u. s. w. Sekunde aufschlage. Durch diese und ähnliche Versuche lassen sich die verschiedenen für den freien Fall gültigen Gesetze und Beziehungen bestätigen und, durch umgekehrte Anwendung der Formel (3) mittels Messung von g' die Größe g (wenn auch nicht sehr genau) bestimmen. Will man sich von dem Einfluß der nicht gut genau bestimmbaren Reibung ϱ freimachen, so beobachtet man die bei Anwendung zweier verschieden schwerer Übergewichte p_1 und p_2 stattfindenden Beschleunigungen g_1 und g_2. Man hat dann



Figur 100.

$$p_1 g = (2P + \pi - \varrho + p_1) g_1 \quad ,$$
$$p_2 g = (2P + \pi - \varrho + p_2) g_2$$

und folglich durch Elimination von $2P + \pi - \varrho$

$$g = \frac{(p_2 - p_1) g_1 g_2}{p_2 g_1 - p_1 g_2} \quad . \tag{12}$$

Die ATWOODsche Fallmaschine ist in neuerer Zeit vielfach modifiziert und verbessert worden, so von STROUMBO, BÉQUIÉ, HÖFLER, SCHREBER, MALAGOLI, BAKER u. A.[1] So wird das Pendel zuweilen mit Zifferblatt und Sekundenzeiger versehen oder es wird fortgelassen und durch einen Metronomen ersetzt; die einfache Schnur wird durch eine endlose ersetzt, wodurch zwar mehr störende Masse hineinkommt, aber andere Vorteile erzielt werden; insbesondere aber wird

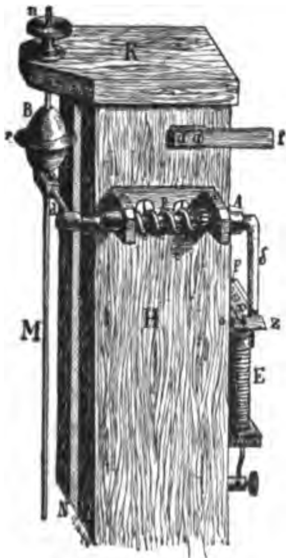
---

[1] STROUMBO, Mondes **53.** 72. 1880. BÉQUIÉ, Journ. de phys. (3) **2.** 323. 1883. A. HÖFLER, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **7.** 234. 1894. K. SCHREBER, ibid. **10.** 175; Ztschr. f. Instrumentenk. **17.** 204. 1897. R. MALAGOLI, Mem. Soc. Spettroscopisti ital. **28.** 174. 199. 1899. W. C. BAKER, Phys. Review. **11.** 105. 1900.

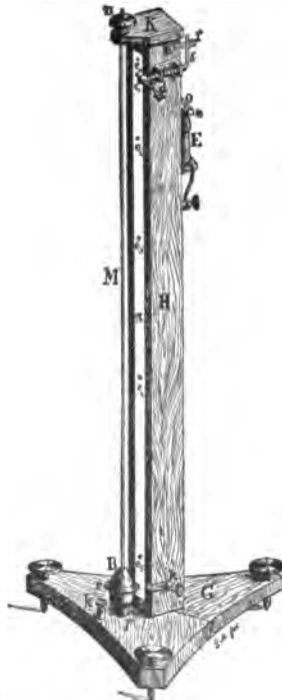
das bei anderen Fallapparaten (s. unten) benutzte Prinzip des Aufschreibens auf die ATWOODsche Maschine übertragen, wofür SCHREBER eine sehr brauchbare Konstruktion angegeben hat (elektromagnetische Erregung, die Induktionsfunken wirken auf einen Streifen Jodstärkepapier). Immerhin darf die Genauigkeit der Messungen nach MALAGOLI, der auch eine sehr lehrreiche Geschichte und Theorie des Apparats gibt, nicht höher als 2 % angesetzt werden; weitergehende Angaben scheinen auf Irrtum zu beruhen. — Überhaupt ist, wenigstens für didaktische Zwecke, die Fallmaschine mit Vorsicht zu verwenden, wie denn z. B. GRIMSEHL und BAHRDT[1] zur Demonstration der Gesetze des freien Falles das wirklich freie Fallen mit Recht vorziehen, wobei man nach Angabe des letzteren die ATWOODsche Maschine immerhin sekundär benutzen kann, um die Fallbeobachtungen etwas exakter zu gestalten.

Neuere Fallmaschinen. Die ATWOODsche Fallmaschine rührt, wie bemerkt, aus einer Zeit her, wo man kleine Zeiträume noch nicht messen und rasch aufeinander folgende Zeitpunkte noch nicht exakt fixieren konnte. Gegenwärtig hingegen ist man in beiden Hinsichten schon sehr weit gediehen[2], und so ist eine große Anzahl von Fallmaschinen neuerdings konstruiert worden, welche, sonst auf sehr verschiedenartigen Gedanken beruhend, doch dies der ATWOODschen gegenüber gemeinsam haben, daß die Beschleunigung wirklich g ist. Es muß hier genügen, einen dieser Apparate hervorzuheben und einige andere kurz zu erwähnen.

Die Fallmaschine von MÖNNICH[3] (Figur 101 und 102) beruht auf der elektrolytischen Markierung der von dem Fallkörper nach gleichen Zeitabschnitten erreichten Orte. Der Fallkörper B ist zentral durchbohrt und fällt an einem senkrechten Drahte M reibungslos herab; er trägt einen äquatorialen, scharf aus-



Figur 101.



Figur 102.

laufenden Gürtel r. Etwa 2 mm seitlich entfernt verläuft die Hauptsäule H, in diese

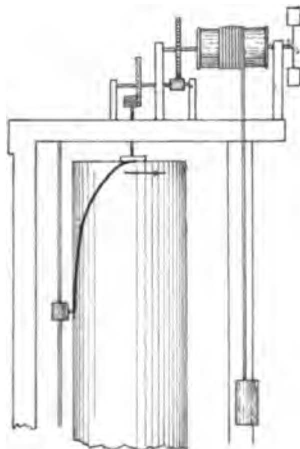
[1] E. GRIMSEHL, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **16.** 90. 1903. W. BAHRDT, ibid. **16.** 325. 1903. — [2] Man denke insbesondere an die Chronoskope von WHEATSTONE, HIPP u. A., s. Artikel „Messung von Raum- und Zeitgrößen", p. 118. — [3] MÖNNICH, Rep. d. Phys. **21.** 31. 1885.

ist eine Metallskala eingelassen, und auf diese wird bei Beginn des Versuchs ein angefeuchteter weißer Papierstreifen geklebt und mit gekochtem Jodkaliumstärkekleister bestrichen. Das durch einen Hebelarm d gestützte Fallgewicht wird durch den Schluß eines elektrischen Stromes ausgelöst, in demselben Moment wird dieser Strom aber auch schon wieder unterbrochen, und der dadurch in einem sekundären Stromkreise erzeugte Induktionsstrom erzeugt einen Funken, der, von dem scharfen Rande des Fallkörpers auf den Papierstreifen überspringend, den Beginn des Falles durch einen schwarzen Fleck e_0 markiert. Während dann der Körper fällt, springen dann in gleichen Zeitintervallen von sehr kleiner Größe, etwa 0,1 s, weitere derartige Funken, e_1, e_2 u. s. w. über. Es ist nun einleuchtend, daß man auf diese Weise die Fallgesetze unmittelbar für das Auge demonstrieren, und daß man ferner, wenn man die Größe des kleinen Intervalls genau bestimmt (wozu sich das BEETZsche Vibrationschronoskop vorzüglich eignet) den Wert von g bestimmen kann und zwar, wie MÖNNICHs Versuche ergaben, bis auf wenige Tausendstel des Wertes genau. Als Stromunterbrecher dient eine (auf der Figur 102 nicht mit angegebene) mit der Hand in Rotation versetzte Scheibe, deren Platinansatz bei jeder Umdrehung einmal mit dem Platinstift der Achse in leitende Berührung kommt, und deren Drehgeschwindigkeit man für die nur eine halbe bis eine Sekunde betragende Versuchsdauer als konstant betrachten darf. Die Auslösung des Gewichts endlich wird durch einen Elektromagneten E vermittelt.

Bei anderen Fallapparaten, wie bei denjenigen von LABORDE, STÉVART[1], LIPPICH, v. BABO, LEBOURG[2], LAVAUT DE LESTRADE[3], KRASS[4], ENGELBERT[5] (Lapsometer), GIESELER[6], WOLFF[7], EDELMANN[8] (Entladung eines Kondensators), KOTTENBACH[9] u.s.w. werden die Schwingungen einer Stimmgabel oder eines anderen elastischen Körpers entweder auf einem fallenden Körper oder durch einen fallenden Körper mittels einer Schreibspitze und einer berußten Fläche verzeichnet; aus der abnehmenden Länge dieser Schwingungen (s. Figur 103, welche sich auf den ersteren Fall bezieht), läßt sich dann alles schließen. Bei noch anderen Apparaten wird das fruchtbare Prinzip der Auflösung der Zeit in eine horizontale Raumlinie in der Weise benutzt, daß die vertikale Fallbewegung und eine gleichzeitige horizontale Rotation zu einer graphisch als Kurve sich darstellenden Bewegung vereinigt werden. Bei dem MORINschen Apparat[10] (Figur 104) wird dies dadurch erreicht, daß der an dem fallenden Körper angebrachte Stift auf einem gleichförmig rotierenden Papierzylinder seine Bahne verzeichnet; diese Bahn bewährt sich beim Aufrollen des Papiers als Parabel, entsprechend der durch Quadrierung der ersten der Gleichungen (10) sich ergebenden Gleichung $t^2 = (2h)/g$. Bei dem Apparat von ROUSSEAU[11] ist



Figur 103.



Figur 104.

[1] STÉVART, Cat. de l'Expos. de Brux. 1880. p. 15. — [2] LEBOURG, Journ. de Phys. **7.** 44. 1878. — [3] LAVAUT DE LESTRADE, Mondes **45.** 501. 1878. — [4] KRASS, Ztschr. f. Instrumentenk. **4.** 347. 1884. — [5] ENGELBERT, Mond. **50.** 354. 1879. — [6] E. GIESELER, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **17.** 267. 1904. — [7] R. WOLFF, ibid. **17.** 286. 1904. — [8] TH. EDELMANN, Phys. Ztschr. **5.** 461. 1904. — [9] R. KOTTENBACH, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **18.** 79. 1905. — [10] MORIN, s. JAMIN, Cours de physique **1.** 46. 1858. — [11] ROUSSEAU, Cat. de l'Expos. de Brux. 1880. p. 16.

es der durch einen mit Papier beklebten Zylinder gebildete Fallkörper selbst, welchem durch zwei oben an ihm befestigte, auf zwei festliegende Kurven sich stützende Arme beim Fall zugleich eine rotierende Bewegung mitgeteilt wird, während ein fester Stift oder Pinsel die Kurve verzeichnet. Endlich sei noch der Fallaparat von PAQUET[1] erwähnt, bei dem ein Gewicht frei fällt, nach einer bestimmten Zeit ein anderes mitreißt und schließlich beide zugleich angehalten werden. Das Verhältnis der Fallhöhen beider Gewichte läßt sich ablesen und hieraus eine Reihe von Schlüssen ziehen.

Fall und Gewicht. Aus dem Energie- oder dem Wechselwirkungsprinzip folgt in gleicher Weise, daß sich das Gewicht eines Körpers ändern muß, wenn er sich mit Beschleunigung bewegt; und zwar ist das Gewicht, wenn es im Ruhezustand mg ist, bei einer nach unten gerichteten Beschleunigung g' gleich $m(g-g')$, entsprechend bei einer nach oben gerichteten gleich $m(g+g')$. Als Spezialfall ergibt sich hieraus das scheinbare Paradoxon, daß ein Körper während seines freien Falles gar kein Gewicht hat. Dagegen ist eine gleichförmige Auf- oder Abbewegung auf das Gewicht natürlich ohne Einfluß. Zur Demonstration dieser Verhältnisse hat POGGENDORFF[2] einen als Fallmaschine bezeichneten Apparat gebaut, der eine Kombination einer ATWOODschen Fallmaschine mit einer Art von Wage, die an die Stelle der Rolle tritt, darstellt.

Übrigens kann man die in Rede stehenden Beziehungen wenigstens qualitativ auch ohne Apparate studieren, indem man, selbst auf der Wagschale stehend, den Körper aufrichtet oder senkt; man sieht dann, — bei Ausschluß von Fehlerquellen naheliegender Art — daß die Stellung selbst oder ihre gleichförmige Änderung nicht von Einfluß auf das Gewicht ist, wohl aber der plötzliche Ruck, d. h. der zweite Differentialquotient.

Im Anschluß hieran sei noch ein ebenfalls als Fallmaschine bezeichneter Apparat erwähnt, der neuerdings von CHABOT[3] angegeben wurde, und mittels dessen man die entsprechenden Verhältnisse bei beschleunigter Drehbewegung, insbesondere die Erzeuzung von Systemrotation infolge von beschleunigter Rotation seiner Teile, demonstrieren kann.

Schiefe Ebene. Ein anderes Mittel, um durch Verringerung der Beschleunigung die Fallgesetze beobachten zu können, ist die Ersetzung des freien Falles durch den unfreien auf einer schiefen Ebene. Auf diesem Wege sind die Fallgesetze überhaupt zuerst, und zwar von GALILEI, ermittelt worden. Nach dem im Artikel „Einfache Maschinen" Angegebenen ist es einleuchtend, daß, wenn w der Steigungswinkel der schiefen Ebene ist, die Beschleunigung beim Fall auf ihr nur $g \sin w$ beträgt, für $w = 36'$ z. B. nur 0,1 m, so daß die Fallstrecken in den ersten Sekunden bezw. 5, 15, 25 u. s. w. Zentimeter sind. Zu derartigen Versuchen eignet sich am besten eine lange, innen polierte „Fallrinne" mit Maßeinteilung, wie sie schon GALILEI zu seinen Versuchen benutzte. Ist h die Höhe, l die Länge der schiefen Ebene und g' die Beschleunigung beim Fall auf ihr, so hat man, analog der zweiten der Gleichungen (10), die Gleichung $v' = \sqrt{2g'l}$; nun ist aber g' im Verhältnis von $\sin w$ kleiner als g, andererseits l im Verhältnis von $1 : \sin w$ größer als h; man findet also:

$$v' = \sqrt{2gh} \quad , \tag{13}$$

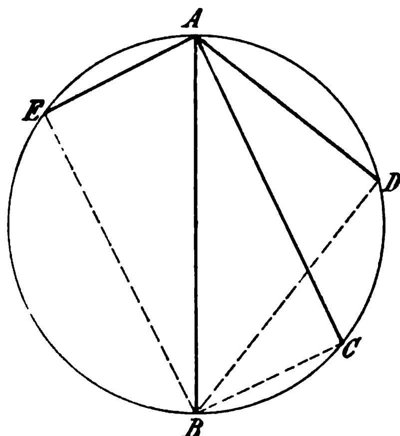
d. h. ebenso groß wie v in der zweiten Gleichung (10); in Worten: *ein auf einer schiefen Ebene herabgefallener Körper besitzt dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er durch die Höhe der schiefen Ebene frei herabgefallen wäre.*[4]

---

[1] PAQUET, Journ. de Phys. (2) **2.** 226. 1883. — [2] J. C. POGGENDORFF, Berl. Mon.-Ber. 1853. p. 627; POGG. Ann. **92.** 179. 1854. — [3] J. T. CHABOT, Phys. Ztschr. **3.** 489. 1902. — [4] Auch dieser Satz rührt schon von GALILEI her.

Auch den Fall auf der schiefen Ebene kann man nach der graphischen Methode studieren, in sehr einfacher Weise z. B., indem man als Fallkörper ein Kügelchen aus weicher Kreide benutzt, das, wenn man die Tafel gleichzeitig fortzieht, eine Parabel zeichnet.

Zieht man (Figur 105) von dem höchsten Punkte A eines Kreisumfanges den vertikalen Durchmesser AB und eine Anzahl Sehnen AC, AD, AE, so ist, da die Dreiecke ACB, ADB, AEB rechtwinklig und die Winkel ABC, ABD, ABE gleich den Neigungswinkeln der betreffenden schiefen Ebenen sind, jede derselben in demselben Verhältnis kürzer als der vertikale Durchmesser, in welchem die Beschleunigung durch die Schwere auf ihr kleiner ist als auf jenem Durchmesser. Diese beiden Einflüsse gleichen sich also aus, und es ergibt sich: Die Fallzeit auf allen von A ausgehenden Linien AB, AC, AD u. s. w. ist die gleiche. Ebenso würden, wenn man sich die Figur auf den Kopf gestellt denkt, die zu gleicher Zeit in B, C u. s. w. losgelassenen Fallkörper zu gleicher Zeit in A eintreffen.[1]



Figur 105.

Auch zu beliebiger Zeit befinden sich die zu gleicher Zeit von A losgelassenen Kugeln auf einem durch A gehenden Kreise. Um diese Sätze zu demonstrieren, hat HAMMERL[2] ein kreisförmiges Brett mit entsprechenden Fallrinnen und mechanischer oder elektromagnetischer Auslösung versehen; man stellt es entweder vertikal auf oder, um die Bewegung besser verfolgen zu können, nur wenig geneigt, wodurch sich an dem Charakter der Erscheinung offenbar nichts ändert.

Noch bequemer und umfassender kann man mit der schiefen Doppelebene, d. h. mit zwei, von links und von rechts kommenden, oben zusammenstoßenden schiefen Ebenen experimentieren. Verbindet man dann die beiden auf ihnen befindlichen Körper durch ein Seil, so hat man einen Apparat vor sich, der sich zur einfachen schiefen Ebene verhält wie der ATWOODsche Fallapparat zum freien Fall.

Mit Hilfe einer zusammengesetzten Fallrinne, wie sie W. KÖNIG[3] empfohlen hat, kann man, wenn man das letzte Stück horizontal nimmt, auch den Übergang der beschleunigten in die gleichförmige Bewegung demonstrieren.

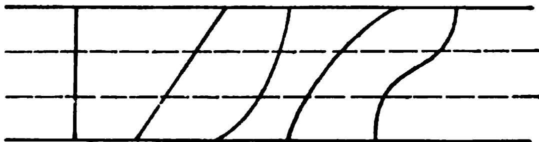
Auch der Fall auf der schiefen Ebene wird natürlich durch die Erddrehung beeinflußt. Die betreffenden Gleichungen hat TIMPE[4] auf Grund der Lehre von der relativen Bewegung entwickelt; es wird genügen, hier das Wichtigste anzuführen: Ohne Einfluß ist die Erddrehung, wenn der Fall am Äquator stattfindet, für alle Ebenen, die die Horizontalebene in der Süd-Nord-Richtung schneiden; unter beliebiger Breite für die südnördliche Vertikalebene sowie für diejenige Ost-West-Ebene, deren Neigung gleich der Breite des Ortes ist. Der Satz, daß die Endgeschwindigkeit von der Form der Fallkurve unabhängig ist, gilt auch hier noch; dagegen gelten einige andere Sätze nicht mehr allgemein, sondern nur noch für bestimmte Lagen der schiefen Ebene. — Man vergleiche hierzu auch eine Abhandlung von CHESSIN[5], in der das Herabrollen einer Kugel mit Rücksicht

---

[1] Ebenfalls von GALILEI gefunden. — [2] H. HAMMERL, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **2.** 225. 1889. — [3] W. KÖNIG, ibid. **7.** 4. 1893. — [4] W. TIMPE, Inaug.-Diss. Halle 1889. — [5] A. S. CHESSIN, Bull. Am. math. soc. (2) **1.** 302. 1896.

auf die Erddrehung untersucht und u. a. gefunden wird, daß im einfachsten Falle der Mittelpunkt eine semikubische Parabel beschreibt.

Fall auf Kurven. Jede Kurve läßt sich ansehen als zusammengesetzt aus lauter kurzen, schiefen Ebenen von verschiedener Neigung. Man kann folglich einen für die schiefe Ebene erhaltenen Satz erweitern und folgendermaßen aussprechen: Gleichviel auf welchem Wege ein Körper von einer Höhenschicht nach einer anderen herabfällt, gleichviel von welchem Punkte der ersten Höhenschicht er ausgeht und in welchem der zweiten er eintrifft, die Geschwindigkeit, welche er in irgend einer Höhenschicht erreicht hat, also insbesondere auch die Geschwindigkeit, mit der er in der untersten Schicht anlangt, ist stets die gleiche. Es kann auch der Fall sein, daß die Kurve, auf welcher der Punkt fällt, nur anfangs abwärts, später aber aufwärts verläuft. Der Punkt wird alsdann infolge des Beharrungsvermögens auch diesen Zweig der Kurve mindestens teilweise noch durchlaufen, und zwar in Erweiterung des obigen Satzes, in der Weise, daß er nach Erreichung derselben Höhenschicht wieder die Geschwindigkeit besitzt, wie beim Herabfallen, also auch gerade die Höhe erreicht, von welcher er fallen gelassen wurde. Im übrigen sei hierfür auf den Abschnitt über Wurfbewegung verwiesen, mit der dieser Fall das Wesentliche gemeinsam hat.



Figur 106.

Brachistochrone. Von besonderem Interesse ist die Frage, auf welchem Wege ein Körper von einem von zwei gegebenen Punkten A zu dem anderen, tiefer und seitlich gelegenen B in der kürzesten Zeit durch den Fall gelangen wird. Dieses Problem rührt ursprünglich von Galilei her, wurde von Joh. Bernouilli in präziser Form gestellt und ist zuerst von Leibnitz gelöst worden.[1] Zunächst ist klar, daß die gesuchte Kurve in der durch die beiden Punkte gelegten Vertikalebene verlaufen wird. Verliefe sie nämlich nicht in dieser und denkt man sich gleichzeitig auf ihr und auf ihrer auf die Vertikalebene gemachten Projektion zwei Körper gleichzeitig fallend, so haben beide nach obigem Satze in gleichen Höhenschichten die gleichen Geschwindigkeiten; der auf der Projektionskurve fallende hat aber den kürzeren Weg und kommt foglich eher unten an. Legt man nun den Nullpunkt des Koordinatensystems in den tiefsten Punkt, während der höhere um h höher liegt, richtet man die z-Achse vertikal nach unten, die x-Achse horizontal, so hat man für irgend eine Höhenschicht z nach der zweiten Gleichung (2c) die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g(h-z)} = \frac{ds}{dt} \quad ,$$

wo ds das Bogenelement, dt das Zeitelement ist; folglich ist die Fallzeit

$$T = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}} = \int_0^h \sqrt{\frac{1+x'^2}{2g(h-z)}}\, dz \quad .$$

Dieses T soll nun ein Minimum werden. Die Variationsrechnung lehrt, daß dies erreicht wird, wenn der Differentialquotient der Funktion unter dem Integralzeichen nach x' einer Konstanten c gleichgesetzt wird. Man erhält somit

[1] In den Acta eruditorum 1696. — Joh. Bernouilli selbst löste das Problem durch geistvolle Analogie mit dem Gange eines Lichtstrahles auf dem kürzesten Wege; s. E. Mach, Die Mechanik, p. 401.

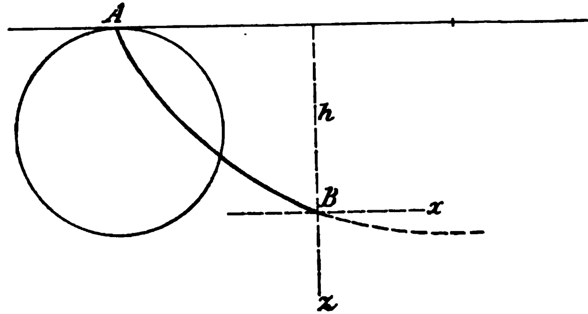
$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2g(h-z)}}=c\ ,\quad \text{also}\quad x'=\sqrt{\frac{2c^2g(h-z)}{1-2c^2g(h-z)}}\ ,$$

und schließlich, wenn für $z = h$ $x = x_1$ sein soll:

$$(14)\quad x=\pm\frac{1}{c\sqrt{2g}}\sqrt{(h-z)-2c^2g(h-z)^2}\pm\frac{1}{4c^2g}\arccos\left[1-4c^2g(h-z)\right]+x_1\ ;$$

durch die Bedingung $z = 0$ für $x = 0$ bestimmt sich c. Diese Gleichung stellt eine Zykloide dar, welche (vgl. p. 317, erste der Figuren 97, dort findet das Rollen auf der Oberseite statt) durch einen auf der unteren Seite einer horizontalen Geraden rollenden Kreis von einem Peripheriepunkte desselben erzeugt wird; die komplizierte Form der Gleichung erklärt sich dadurch, daß der Nullpunkt zwar der tiefste Punkt des vom Körper durchlaufenen Zykloidenbogens, aber kein ausgezeichneter Punkt der Zykloide als solcher ist; aus der Figur 107 ist dies ohne weiteres ersichtlich.[1]

Man sieht hiernach, daß die gerade Linie zwar räumlich die kürzeste Verbindung zwischen den beiden gegebenen Punkten ist, nicht aber der zeitlich



Figur 107.

kürzeste Fallweg; schon ein zwischen den Punkten gezogener Kreisbogen, nach oben konkav, ist ein kürzerer, der kürzeste von allen aber der oben gefundene Zykloidenbogen. Man kann diese Verhältnisse leicht an einem Apparat demonstrieren, der auf einem Stativ drei dicht nebeneinander anfangende und endende Rinnen trägt, eine von geradliniger, die zweite von kreisbogenförmiger, die dritte von zykloidischer Gestalt; von drei oben gleichzeitig ausgelösten Kugeln kommt dann erstere zuletzt, letztere zuerst unten an; zu weiteren Versuchen sind die Rinnen gewöhnlich gemeinschaftlich um eine horizontale Achse drehbar.

Tautochrone. Ein dem obigen verwandtes Problem betrifft die Ermittelung einer Kurve von der Eigenschaft, daß ein Körper, um bis zu ihrem tiefsten Punkte auf ihr selbst zu fallen, stets dieselbe Zeit braucht, gleichviel von welchem ihrer Punkte er ausgeht; die bezügliche Kurve heißt Tautochrone. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liege wie vorhin im tiefsten Punkte der Bahn des fallenden Körpers; im Gegensatz zum vorigen Problem ist dies aber hier zugleich der tiefste, also ein ausgezeichneter Punkt der Kurve. Wieder sei z vertikal, x horizontal, h die Fallhöhe und der Bogen $s = \varphi(z)$, so daß die Funktion φ zu bestimmen ist. Dann ist die Fallzeit

[1] Weiteres über dieses und verwandte Probleme siehe HATON DE LA GOUPILLIÈRE, C. R. **84.** 72. 83. 143 und ausführlicher Mém. Inst. **22.** 1. 1884. — In neuester Zeit hat der Verfasser seine bezüglichen Studien fortgesetzt: C. R. **135.** 614. 657. 1902.

$$T = \int_0^h \frac{\varphi'(z)\,dx}{\sqrt{2g(h-z)}} = \int_0^h \frac{\sqrt{h}\,\varphi'(hu)\,du}{\sqrt{2g(1-u)}} \quad ,$$

wo $z = hu$ substituiert worden ist. Damit dies von h unabhängig sei, muß, unter k eine Konstante verstanden,

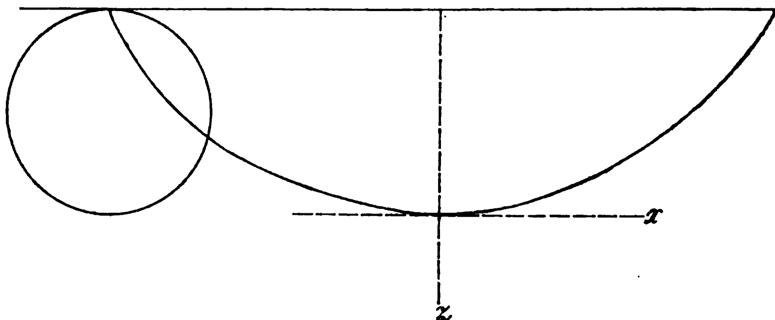
$$\varphi'(hu) = \frac{k}{\sqrt{uh}} \quad , \qquad \text{also} \qquad \varphi'(z) = \frac{k}{\sqrt{z}}$$

sein. Nun wird der Reihe nach

$$s = 2k\sqrt{z} \quad , \qquad \frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{k^2 - z}{z}} \quad ,$$

(15) $$x = \pm\sqrt{k^2 z - z^2} \pm \frac{k^2}{2} \arccos \frac{k^2 - 2z}{k^2} \quad .$$

Dies ist wiederum die Gleichung einer Zykloide, entstanden durch Rollen eines Kreises (und zwar vom Radius $\frac{1}{2}k^2$) auf der unteren Seite einer horizontalen Geraden. Die Gleichung ist einfacher als die vorige, weil sie auf den tiefsten Punkt der Zykloide als den Nullpunkt bezogen ist. Wenn der fallende Körper



Figur 108.

im tiefsten Punkte der Zykloide nicht aufgehalten wird, so bewegt er sich auf der anderen Seite nach oben weiter, fällt dann wieder herunter und führt somit Schwingungen aus; die Dauer dieser Schwingungen ist hiernach von der Amplitude völlig unabhängig (siehe auch Zykloidenpendel im Artikel „Pendel"). Das vorliegende Problem ist zuerst von HUYGENS[1] behandelt worden.[2]

Das allgemeine Problem der Bewegung eines Punktes auf einer beliebig gestalteten Fläche unter Wirkung der Schwere ist von zahlreichen Seiten der mathematischen Behandlung, die besonderes Interesse bietet, unterzogen worden; da indessen die physikalische Bedeutung der Ergebnisse nur eine beschränkte ist, wird ein kurzer Hinweis genügen. Im allgemeinen sind die Gleichungen sehr kompliziert; verhältnismäßig einfach werden sie für Rotationsflächen, deren Figurachse vertikal ist; aber auch hier ist die Lösung meist eine höhere Transzendente, und nur für wenige Fälle ergeben sich elliptische Integrale. Es sind dies, wie durch die Arbeiten von KOBB, KOEBKE, STÄCKEL, SALKOWSKI[3] u. A. erwiesen worden ist, die Kugel, das Paraboloid, der Kegel sowie

[1] CHR. HUYGENS, Horologium oscillatorium. Paris 1673. — [2] Näheres hierüber und über verwandte Probleme siehe OHRTMANN. Berlin 1872 (Progr.) — AMODEO, Monographie der tautochronen Kurven. Avellino 1883. — BIELER, Inaug.-Diss. Marburg 1884. — [3] KOBB, Acta math. 10. 89. 1887. — E. KOEBKE, Inaug.-Diss. Halle 1892. — P. STÄCKEL, Math. Ann. 41. 571. 1893. — E. SALKOWSKI, Inaug.-Diss. Jena 1904.

vier weitere Rotationsflächen von höherem Grade. — Wenn kein Anfangsimpuls vorhanden ist, bewegt sich der Punkt natürlich in der Linie größter Böschung, und zwischen der Änderung der Beschleunigung und der Krümmung der Böschungslinie besteht ein leicht ersichtlicher Zusammenhang.

Wurfbewegung. Vertikaler Wurf. Erteilt man dem Körper, indem man ihn fallen läßt, gleichzeitig einen Impuls in der Richtung vertikal nach unten, so bleibt zwar die Beschleunigung unverändert gleich g; die Geschwindigkeit zur Zeit t ist aber nicht mehr gt, es kommt vielmehr dazu noch die dem Impuls entsprechende Geschwindigkeit w, so daß sich im ganzen ergibt:

$$v = w + gt \quad , \tag{16}$$

und folglich die zur Zeit t zurückgelegte Strecke

$$h = wt + \tfrac{1}{2}gt^2 \quad . \tag{17}$$

Wirft man den Körper mit derselben Geschwindigkeit w vertikal aufwärts, so ist

$$v = w - gt \quad , \qquad h = wt - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad . \tag{18}$$

Diese Bewegung ist dann nicht mehr eine gleichförmig beschleunigte, sondern eine gleichförmig verzögerte, die Geschwindigkeit nimmt mehr und mehr ab, und für

$$t = \frac{T}{2} = \frac{w}{g} \quad , \qquad h = H = \frac{w^2}{2g} \tag{19}$$

ist sie gleich null, der Körper fällt nun abwärts und erreicht nach der ersten Gleichung (10), wo für h der obige Wert H zu setzen ist, nach nochmaligem Verlauf der Zeit $\frac{1}{2}T$ wieder den Ausgangspunkt; auch hat er beim Herabfallen in jedem Punkte die Geschwindigkeit, welche er in demselben Punkte beim Aufstieg hatte, kommt also insbesondere am Ausgangspunkte wieder mit der Geschwindigkeit w an. H kann man die Wurfhöhe, T die Wurfdauer nennen. Von besonderem Interesse ist noch der in der letzten Gleichung enthaltene Satz: Die Wurfhöhe ist dem Quadrate der Wurfgeschwindigkeit proportional, sowie die Umkehrung dieser Gleichung:

$$w = \sqrt{2gH} \quad ,$$

welche angibt, welche Anfangsgeschwindigkeit man einem in die Höhe zu werfenden Körper erteilen muß, wenn man wünscht, daß er eine gegebene Höhe erreiche.

Schiefer Wurf. Erteilt man einem Körper, ehe man ihn frei fallen läßt, eine Geschwindigkeit w in irgend einer Richtung, welche mit der horizontalen den Winkel α, den sogen. Elevationswinkel bildet (positiv, wenn nach oben, negativ, wenn nach unten gerichtet), so beschreibt der Körper eine Kurve. Um diese zu ermitteln, hat man zunächst zu erwägen, daß sie in der Vertikalebene liegen wird, welche durch die Richtung von w gelegt ist, und sodann die Bewegungsgleichungen (x horizontal, z vertikal nach unten)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad , \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = g \tag{20}$$

zu integrieren, und dabei zu beachten, daß die horizontale Komponente der Anfangsgeschwindigkeit $w\cos\alpha$, die vertikale $w\sin\alpha$ ist. Man findet dann, wenn man den Ausgangspunkt zum Nullpunkt macht,

$$x = w\cos\alpha\cdot t \quad , \qquad z = \frac{g}{2}t^2 - w\sin\alpha\cdot t \quad , \tag{21}$$

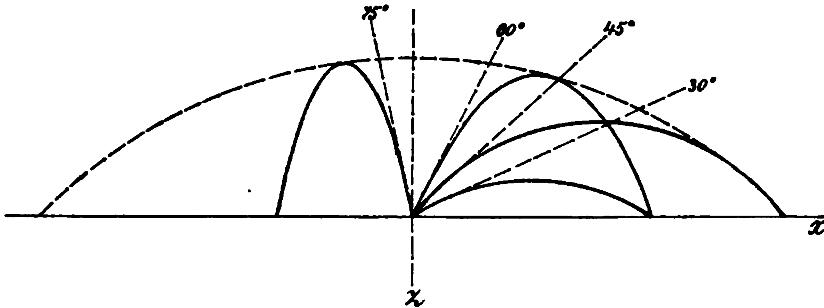
und durch Elimination von t:

(22)
$$z = \frac{g x^2}{2 w^2 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tang} \alpha \quad .$$

Die Bahn ist also ein Stück einer Parabel, deren Achse vertikal steht. Ist α negativ, so ist nur ein Stück des absteigenden Zweiges vorhanden; ist dagegen α positiv, so steigt der Körper zunächst bis zu

(23)
$$t = \frac{T}{2} = \frac{w \sin \alpha}{g} \;, \quad x = \frac{W}{2} = \frac{w^2 \sin 2\alpha}{2g} \;, \quad -z = H = \frac{w^2 \sin^2 \alpha}{2g} \;,$$

und erreicht dann, nachdem nochmals diese Zeit verstrichen und nochmals die horizontale Entfernung x durchmessen ist, wieder das Ausgangsniveau. W ist also, wenn der Ausgangspunkt am Erdboden sich befindet, die Wurfweite, H die Wurfhöhe, T die Wurfdauer; (liegt der Ausgangspunkt über dem Erdboden, so fällt der Körper noch weiter, und W und T haben dann entsprechend größere



Figur 109.

Werte); der höchste Punkt der Bahn liegt räumlich und zeitlich gerade in der Mitte der Bahn. Die Wurfhöhe sowohl wie die Wurfweite ist proportional dem Quadrat der Anfangsgeschwindigkeit. Will man bei gegebenem Impuls eine möglichst große Wurfweite erzielen, so muß man $\sin 2\alpha$ möglichst groß, also $\alpha = 45^0$ (Figur 109) machen; es wird dann

(24)
$$W_{\max} = \frac{w^2}{g} \quad ;$$

die Wurfweite ist also in diesem Falle doppelt so groß wie die Wurfhöhe senkrecht nach oben bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit. Allgemein muß man, um die Wurfweite W zu erzielen,

(25)
$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{g W}{w^2}$$

wählen. Allgemeiner ist die Frage, wie man α wählen müsse, um den Punkt x, z zu treffen; die Antwort liegt in der Gleichung

(26)
$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{g} \left(\frac{w^2}{x} \pm \frac{1}{g x} \sqrt{w^4 - 2 g z w^2 - g^2 x^2} \right) \quad .$$

Punkte, welche außerhalb der einhüllenden Kurve (ebenfalls eine Parabel) liegen, kann man überhaupt nicht, die Punkte dieser Parabel selbst nur auf eine Weise, jeden innerhalb gelegenen aber, wie schon die Figur vermuten ließ, auf zwei verschiedene Weisen treffen; und liegt insbesondere der Zielpunkt mit dem Ausgangspunkte in gleichem Niveau, so sind die beiden Elevationswinkel, mit

welchen man denselben Punkt trifft, komplementär.[1] In der Physik wird der Schuß mit kleinerem Elevationswinkel Flachwurf, derjenige mit größerem Steilwurf genannt, in der Ballistik sagt man dafür auch Kernschuß und Bombenschuß. Je größer w, desto größer ist auch das Gebiet der erreichbaren Punkte. Weiteres über Ballistik sehe man unten.

Man kann das elementare Wurfproblem noch in mancherlei anderer Weise theoretisch behandeln; nur zwei derartige Betrachtungen seien hier angeführt. Stellt man nach HABART[2] in homogenen Koordinaten die Gleichung der Wurfparabel bei gleicher Anfangsrichtung, aber verschiedener Anfangsgeschwindigkeit dar, so gelangt man zu folgenden Sätzen: Die Scheitel aller Parabeln liegen auf einer Geraden, deren Richtungskonstante halb so groß, wie die der Elevation ist; die Brennpunkte liegen auf einer Geraden, die senkrecht auf einer zweiten Geraden steht, deren Winkel mit der Horizontalen doppelt so groß ist wie der Elevationswinkel u. s. w.

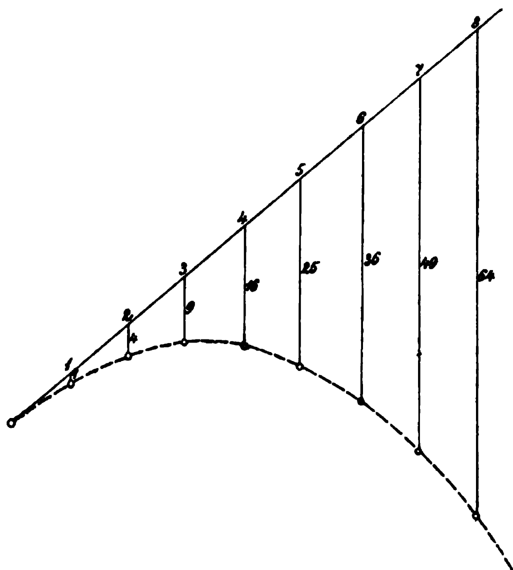
In neuester Zeit hat LAMPE[3] die Betrachtung in dem Sinne verallgemeinert, daß er den Wurf als eine elliptische Bewegung analog der Planetenbewegung auffaßte und den parabolischen Wurf dann als Spezialfall erhielt. Der zweite Brennpunkt der Wurfellipse liegt in einer vom Elevationswinkel unabhängigen Entfernung vom Ausgangspunkte; für verschiedene α, aber gleiche w ist ihr Ort eine Kugelfläche und die Länge der großen Achse der Ellipse die gleiche; für variable w und konstante α ist der Ort eine Gerade. Die einhüllende Kurve, die man auch als „Sicherheitskurve" bezeichnen kann, ist hier ebenfalls eine Ellipse, ihre Brennpunkte sind Erdmittelpunkt und Ausgangspunkt, die große Halbachse ist, wenn R der Erdradius und r gleich w^2/g ist, gleich $R(2R+r)/(2R-r)$; bei r klein gegen R kommt man auf die Parabel zurück.

Zur experimentellen Prüfung der Wurfgesetze wendet man am zweckmäßigten kleine Metallkugeln an. Da aber auch hier die Bewegung eine zu rasche ist, als daß man sie ohne weiteres studieren könnte, so greift man zu dem einfachen Hilfsmittel, die Bahn entweder graphisch zu fixieren oder, wie beim Falle, an die Stelle des freien Wurefs den Wurf auf der schiefen Ebene zu setzen. Zu ersterem Zwecke bedient man sich bei Versuchen in größerem Maßstabe einer Reihe von mit Papier bespannten Rahmen, welche fest aufgestellt sind und von der Kugel der Reihe nach durchlocht werden. Handelt es sich einfach um die Bestätigung der parabolischen Gestalt der Bahn, so benutzt man einen Apparat, der aus einer Anzahl eine Parabel bildenden Ringen besteht: eine mit geeigneter Anfangsgeschwindigkeit in geeigneter Richtung geworfene Kugel fällt dann durch sämtliche Ringe hindurch. Man kann in diesem Apparate auch in sehr einfacher Weise die Entstehung der Wurflinie demonstrieren, indem man vom Anfangspunkte des Wurfes aus in der Anfangsrichtung desselben eine Stange ausgehen und von dieser in gleichen Abständen Ringe an Fäden herabhängen läßt; die Längen dieser Fäden verhalten sich dann, ganz wie die Theorie es verlangt, wie $1:4:9:16$ u. s. w. Überdies ist die Stange um den Anfangspunkt drehbar, man kann also auch zeigen, daß bei Änderung der Anfangsrichtung die Bahnkurve sich ändert (mit Beibehaltung ihres parabolischen Charakters), daß die Wurfweite bei 45^0 am größten ist u. s. w. (s. Figur 110). Zu den Versuchen auf der schiefen Ebene dient am besten eine schwarze Holz- oder Schiefertafel, der man in einer ihrer beiden Richtungen eine geringe Neigung gibt; die zu benutzende Kugel taucht man vorher z. B. in Schlemmkreide, so daß sie, wenn man ihr verschieden große und verschieden gerichtete Anfangsgeschwindigkeiten erteilt und sie dann herabrollen läßt, verschiedene Parabeln beschreibt. Die bei

---

[1] Auch das Wurfproblem ist, wenigstens teilweise, schon von GALILEI behandelt worden. — [2] K. HABART, Progr. Realsch. Elbogen 1891—92. — [3] E. LAMPE, BOLTZMANN Festschrift 1904. p. 215.

allen diesen Versuchen vorkommenden Anfangsgeschwindigkeiten erzielt man am besten dadurch, daß man die Kugel in einer entsprechend geneigten Rinne von einer passend zu wählenden Höhe herabfallen läßt. Andererseits dienen verschiedene einfache Vorrichtungen zur Messung der in irgend einem Punkte erreichten Geschwindigkeit (für die Zwecke der Ballistik z. B. das ballistische Pendel). Übrigens kann man diese Verhältnisse auch an der Gestalt ausgespritzter oder aus fließender Wasserstrahlen beobachten.



Figur 110.

Auf die zahlreichen Formen, in denen Wurfmodelle und Wurfmaschinen konstruiert worden sind, und die teils der Demonstration einzelner Sätze, teils als Universalapparate dienen sollen, kann hier nicht eingegangen werden; es sei aber auf einige Mitteilungen, in denen solche Apparate beschrieben sind, hingewiesen: HAGENBACH, HARTL, HÖFLER, WEINHOLD, LÖWY, WULF.[1]

Geschoßabweichung infolge der Erdrotation. Um diese zu finden, braucht man nur die obigen Gleichungen (2) in geeigneter Weise anzuwenden. Es sei w die Anfangsgeschwindigkeit, α der Elevationswinkel, β der Winkel der Schuß- mit der Südrichtung, so daß anfänglich:

$$\frac{dx}{dt} = w \cos\alpha \cos\beta \quad , \quad \frac{dy}{dt}\, w \cos\alpha \sin\beta \quad , \quad \frac{dz}{dt}\, w \sin\alpha$$

ist. Man setze das in die genannten Gleichungen ein und integriere mit geeigneten Vernachlässigungen; dann erhält man:

$$(27) \quad \begin{cases} x = w\,t \cos\alpha \cos\beta + w\,t^2\,\omega \sin\varphi \cos\alpha \sin\beta \quad , \\ y = w\,t \cos\alpha \sin\beta - w\,t^2\,\omega\,(\cos\varphi \sin\alpha + \sin\varphi \cos\alpha \cos\beta) + \frac{1}{3} g\,t^3\,\omega \cos\varphi \quad , \\ z = \frac{1}{2} g\,t^2 - w\,t \sin\alpha - w\,t^2\,\omega \cos\varphi \cos\alpha \sin\beta \quad . \end{cases}$$

In diesen Ausdrücken stellen die Glieder mit ω die gesuchte Abweichung δx, δy, δz dar, und zwar in den beiden ersten Gleichungen die südliche (oder nördliche) und die östliche (oder westliche), während die letzte eine Abweichung in der vertikalen Fallweise liefert. Besonders einfach werden die beiden ersten Ausdrücke für Wurf in rein südlicher Richtung:

$$(28) \qquad \delta x = 0 \quad , \quad \delta y = \frac{1}{3} g\,t^3\,\omega \cos\varphi - w\,t^2\,\omega \sin(\varphi + \alpha) \quad ,$$

sowie für solchen in rein östlicher Richtung:

$$(29) \quad \delta x = w\,t^2\,\omega \sin\varphi \cos\alpha \quad , \quad \delta y = \frac{1}{3} g\,t^3\,\omega \cos\varphi - w\,t^2\,\omega \cos\varphi \sin\alpha \quad .$$

[1] A. HAGENBACH, Rep. d. Phys. **3**. 441. — H. HARTL, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **2**. 81. 1888. — A. HÖFLER, ibid. **8**. 62. 1896. — A. WEINHOLD, Ph. Dem. p. 71. — TH. WULF, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **18**. 216. 1905.

Unter den in der modernen Ballistik nicht ungewöhnlichen Verhältnissen kann die in Rede stehende Geschoßabweichung merkliche Werte annehmen, z. B. für $w = 750$ m, $\alpha = 4^0$, $\varphi = 52^0$, $\beta = 0$, auf den ganzen Flugbereich (etwa 8 km) nahezu 5 m; sie wird aber durch eine andere Abweichung meist überdeckt und durch den Luftwiderstand wesentlich modifiziert (s. weiter unten).

Von einem verwandten Problem, der Ablenkung der Windbahnen durch die Erdrotation, wird an anderer Stelle gehandelt werden.

Einfluß der Körpergestalt. Das bisher über Fall und Wurf Gesagte gilt streng genommen nur unter zwei Voraussetzungen. Die eine derselben ist die, daß der gefallene oder geworfene Körper kugelförmig und sehr klein, also vom Charakter eines materiellen Punktes sei. Ist dies nicht der Fall, so gelten die erhaltenen Resultate nur für den Schwerpunkt des Körpers, während die Bewegung der übrigen Punkte desselben eine kompliziertere ist und je nach den Umständen sehr verschieden ausfallen kann. Läßt man z. B. eine nicht homogene Kugel so los, daß ihr schwererer Teil oben liegt, so wird sie sich während des Falles überschlagen; auf der schiefen Ebene wird ein Würfel hinahgletten, dagegen eine Kugel hinabrollen. In der Ballistik erteilt man den Geschossen absichtlich durch spiralförmige Konstruktion des Laufes eine rotierende Bewegung, weil sie hierdurch (s. Artikel „Kreiselbewegung") unabhängiger von äußeren Einflüssen werden. Wie abweichend die Bewegung einzelner Punkte eines fallenden Körpers von derjenigen seines Schwerpunktes sein kann, zeigt am besten die Tatsache, daß, während letzterer vertikal fällt, erstere schräg oder gar vertikal aufsteigen können. An der oben gedachten nicht homogenen Kugel läßt sich dies, wenn die Geschwindigkeit des Umschlagens beträchtlich ist, leicht einsehen.

Am frappantesten vielleicht ist die Erscheinung bei einem unter dem Namen des „hinauflaufenden Doppelkegels" altbekannten Apparat, der aus zwei vertikalen, einen Winkel von etwa 30—40⁰ bildenden, vom Scheitel nach den Enden sich gleichmäßig erhöhenden Holzwänden besteht; legt man nun einen hölzernen Doppelkegel nahe dem Scheitel symmetrisch auf, so daß seine Achse horizontal liegt, so rollen die Berührungspunkte an den Wänden hinauf, weil damit gleichzeitig der Schwerpunkt Gelegenheit erhält, sich abwärts zu bewegen.

In exakter Weise ist das Problem u. A. von RESAL und MANNHEIM[1] behandelt worden, und zwar von jenem Mathematiker auf analytischem, von diesem auf kinematischem Wege. Für einen symmetrischen Doppelkegel beschreibt der Mittelpunkt des Grundkreises eine Gerade, die parallel ist mit der Schnittlinie der Tangentialebenen an die Kegel in denjenigen Erzeugungslinien, deren Punkte auf den Schienen aufliegen. Die Bewegung des Doppelkegels selbst kann dargestellt werden durch das Abrollen eines Zylinders mit horizontalen Erzeugenden und einer logarithmischen Spirale als Profil, längs der Ebene jener beiden Kegelerzeugenden. Der geometrische Ort für einen der Berührungspunkte endlich ist relativ zum Halbkegel eine Loxodrome, relativ zum Zylinder eine Helix. Ähnliche Resultate lassen sich für andere Formen der Schienen (Schraubenlinien), sowie für andere Formen des rollenden Körpers ableiten; für eine Kugel z. B. ist die Bahn des Mittelpunktes eine Ellipse, der gedachte Zylinder hat in diesem Falle eine Epizykloide als Querschnitt.

Daß bei einem Körper sogar die Fallgesetze andere werden können, als bei einem materiellen Punkte, zeigt das Beispiel einer Kette, welche teils auf einer glatten, horizontalen Unterlage ruht, teils aber auf einer an diese sich anschließenden schiefen Ebene (oder auch frei) herabhängt. Hier ist das Verhältnis der Kraft zur Masse ein variables, und man findet, daß die erlangte Geschwindigkeit nicht der Zeit oder dem Quadrate der Fallhöhe, sondern der Wurzel aus der Zeit oder der Fallhöhe selbst proportional ist.

---

[1] H. RESAL, C. R. 111. 547. 1890. — A. MANNHEIM, ibid. 111. 634. 817. 1890.

Rollen und Gleiten auf der schiefen Ebene. Der Fall eines Körpers auf der schiefen Ebene erheischt noch eine besondere Betrachtung mit Rücksicht auf den Unterschied, den es macht, ob der Körper bloß gleitet oder bloß rollt oder gleichzeitig gleitet und rollt — es wird offenbar von der Gestalt des Körpers und von der Reibung zwischen beiden Oberflächen abhängen, welcher dieser Fälle eintritt und wie sich das Verhältnis von gleiten und rollen im letzten Falle gestaltet; von der Reibung (s. weiter unten) soll jedoch zunächst abgesehen und nur die Körperform in Betracht gezogen werden, wobei dann z. B. ein Würfel nur gleiten, eine Kugel nur rollen wird.

Der rollende Körper hat, im Vergleich mit dem gleitenden, außer der verschiebenden auch eine drehende Bewegung auszuführen, und zwar um eine horizontale Achse; hat der Körper um diese Achse Symmetrie der Gestalt und ist der bezügliche Radius r, ist ferner der entsprechende Trägheitsradius (vgl. p. 250 u. 257) k — beim Zylinder um die Achse, bei der Kugel um einen Durchmesser —, so ergibt die einfache Anwendung der kinematischen Prinzipien oder der analytischen Gleichungen das Resultat für Geschwindigkeit und Strecke:

$$(30) \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{r^2}{r^2 + k^2} g \cdot \sin\alpha \cdot t \quad , \qquad s = \frac{1}{2} \frac{r^2}{r^2 + k^2} g \sin\alpha \cdot t^2 \quad ,$$

d. h. die Bewegung ist im Verhältnis von $r^2 : r^2 + k^2$ geschwächt; dasselbe Ergebnis würde man auch aus dem Energieprinzip ableiten können. Für die Kugel ist das Verlangsamungsverhältnis 5 : 7, für den Zylinder 2 : 3, also etwas, aber nicht viel, stärker.[1]

Die Anwendung dieser Formel auf den Vergleich der Kugel mit der Hohlkugel führt zur Lösung eines altberühmten Problems, nämlich zur Erklärung der Erscheinung, daß zwei äußerlich ganz gleiche, nämlich gleich große, gleich schwere und an der Oberfläche gleich beschaffene Kugeln dennoch eine schiefe Ebene in sehr verschiedener Zeit hinabrollen: die eine ist massiv und aus versilbertem Aluminium, die andere eine dünne Hohlkugel aus Silber, oder jene aus vergoldetem Kupfer, diese aus Gold; das Trägheitsmoment und damit der Trägheitsradius ist natürlich bei der Hohlkugel viel größer und deshalb die Fallgeschwindigkeit viel kleiner als bei der gleich schweren und großen massiven Kugel; für vergoldetes Kupfer einerseits und Gold andererseits erhält man z. B. als Verhältnis der Hohlkugelradien 1 : 0,81 und als Verhältnis der Zeiten 1 : 1,38; für Aluminium und Silber wird es ähnlich, für Aluminium und Gold sogar 1 : 1,59.

Eigenbewegungen beim schiefen Wurf. Von besonderer Bedeutung sind die Eigenbewegungen der Geschosse für die gesamte Ballistik; die Verhältnisse liegen aber hier so verwickelt, und ihr Studium ist von so spezifisch technischem Charakter, daß hier ein kurzer Hinweis genügen muß. Die Ursachen der Eigenbewegungen der Geschosse sind in der Hauptsache ihre von der kugeligen abweichende Gestalt, die gezogene Form des Geschütz- oder Gewehrrohres, die Vibration, die dieses Rohr beim Schusse erfährt und die Asymmetrie in den Gestalts- und dynamischen Verhältnissen des Geschützes bezw. Gewehres. Alles das erzeugt eine Eigenbewegung des Geschosses, die sich aus Drehung und Pendelung zusammensetzt; und diese wiederum beeinflußt Richtung und Geschwindigkeit des Fluges, sowie das Verhältnis der Geschoßlage zur Flugbahn;

[1] Umgekehrt kann man den Vergleich zwischen der theoretischen Fallzeit und der wirklichen beim Rollen zur Bestimmung des Trägheitsmoments, wenn auch nur für Schulzwecke, benutzen, vgl. A. KURZ, Rep. d. Phys. **26.** 175. 1890. Ferner: A. KURZ, ibid. **27.** 344. 1891. A. v. OBERMAYER, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **13.** 264. 1900, wo das Herabrollen von Zylindern, Scheiben und Ringen mittels eines Pendels nach der Methode der Koinzidenzen verfolgt wird. — Über eigentümliche Erscheinungen, die beim Rollen einer Spule auf einer schiefen Ebene auftreten, und über den darauf beruhenden KRESSschen Apparat, vgl. V. v. NIESIOLOWSKI-GAWIN, Ann. d. Phys. **5.** 479. 1901.

insbesondere ergibt sich eine seitliche Abweichung im Sinne der Drehungsrichtung, sowie eine Änderung der Wurfhöhe und Wurfweite; im übrigen müssen die Untersuchungen mit denen über den Luftwiderstand kombiniert werden, um brauchbare Resultate zu liefern.

Fall im widerstehenden Mittel. Die zweite, bei den bisherigen Betrachtungen gemachte Voraussetzung ist die, daß die Bewegung im leeren Raume erfolge. Erfolgt sie in einem trägen Medium, so wird sich dessen Einfluß geltend machen, und zwar nicht in sehr erheblichem Maße, solange der fallende Körper spezifisch schwer im Vergleich zu dem Medium ist; er wird aber sehr beträchtlich werden können, wenn diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist, also wenn entweder der in Luft fallende Körper sehr leicht ist, oder wenn ein schwerer Körper in einem ebenfalls schweren Medium, z. B. Wasser, sich bewegt. In solchen Fällen muß der Einfluß unter Umständen schon für rohe Zwecke, für feinere aber in jedem Falle in Rechnung gezogen werden. Die Ursache der Abweichung ist eine dreifache, nämlich eine statische, insofern in Luft nur solche Körper, welche spezifisch schwerer als Luft sind, herabfallen, andere aber in ihr schweben oder gar aufsteigen (s. „Hydrostatik" und „Aerostatik"), eine dynamische, insofern der Körper einen Teil der ihn umgebenden Luft mit in Bewegung setzen muß, und eine dritte, welche auf der Reibung beruht; und diese drei Einflüsse setzen sich meist in sehr verwickelter Weise zusammen. Da die bezüglichen Untersuchungen teils der Hydrodynamik (s. Artikel „Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten"), teils der Reibung (s. d.) angehören, können hier nur einige Angaben gemacht werden. Handelt es sich um einen Körper vom Charakter eines materiellen Punktes, so kommt von den beiden letzten nur der dynamische Einfluß in Betracht. Setzt man denselben, den sogen. Luftwiderstand, dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, also gleich kv^2, so findet man für den freien Fall:

$$(31)\quad v = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{e^{+\sqrt{gk}\cdot t} - e^{-\sqrt{gk}\cdot t}}{e^{+\sqrt{gk}\cdot t} + e^{-\sqrt{gk}\cdot t}}\,,\qquad z = \frac{1}{k}\log\frac{e^{+\sqrt{gk}\cdot t} + e^{-\sqrt{gk}\cdot t}}{2}\,.$$

Die Geschwindigkeit wächst also zwar auch hier, aber nicht gleichmäßig, sondern allmählich immer langsamer bis zum Maximalwert $\sqrt{g/k}$, die Beschleunigung wird also immer kleiner und zuletzt null. In der Wirklichkeit kann diese Gleichförmigkeit der Bewegung schon nach verhältnismäßig kurzer Zeit eintreten, wie man dies für kleine Geschwindigkeiten am Staub und Schnee, für große am Regen und Hagel wahrnehmen kann.

Beim Wurf senkrecht nach unten gelten die obigen Formeln auch noch, wenn man zu t jedesmal eine und zu z außerdem eine andere Konstante hinzufügt; diese beiden Konstanten drücken sich durch gk und die Wurfgeschwindigkeit w aus. Dagegen gelten für den Wurf senkrecht nach oben andere Formeln, nämlich:

$$(32)\quad v = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\mathrm{tang}\,[\sqrt{gk}(t+c)]\,,\qquad z = -\frac{1}{k}\log\cos\,[\sqrt{gk}(t+c)] + C\,,$$

wo die beiden Konstanten c und C

$$c = -\frac{1}{\sqrt{gk}}\,\mathrm{arc\,tang}\sqrt{\frac{k}{g}}\,w\,,\qquad C = \frac{1}{2k}\log\left(1+\frac{k}{g}w^2\right)$$

sind. Die Steighöhe H und die Geschwindigkeit bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt w' finden sich

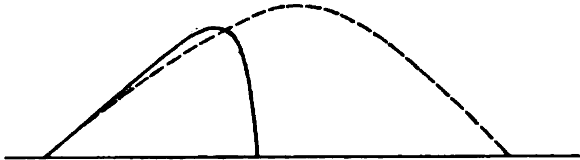
$$(33)\qquad H = \frac{1}{2k}\log\left(1 + k\frac{w^2}{g}\right)\,,\qquad w' = w\sqrt{\frac{g}{g+kw^2}}\,.$$

Die erreichte Höhe ist also, wie Reihenentwickelung im Vergleich mit Gleichung (6) zeigt, kleiner als ohne Luftwiderstand, die Rückkehrgeschwindigkeit kleiner als die Anfangsgeschwindigkeit.

Für schiefen Wurf endlich erhält man die Koordinaten eines Bahnpunktes durch den ihm entsprechenden Neigungswinkel α in folgender Form ausgedrückt:

$$dx = \frac{d\alpha}{k\left[\sin\alpha + \cos^2\alpha \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - c\cos^2\alpha\right]}, \tag{34}$$

wo c eine von der Anfangsgeschwindigkeit und dem Elevationswinkel abhängige Konstante ist; da ferner $dz = \operatorname{tg}\alpha\, dx$ ist, so kann man die Kurve konstruieren. Sie erweist sich (Figur 111) als von der Parabel abweichend und besteht, wenn die Anfangsgeschwindigkeit schräg nach oben gerichtet ist, nicht aus zwei symmetrischen Zweigen, sondern neigt mit dem zweiten früher und steiler zu Boden. Auch diese Kurve weicht jedoch von der tatsächlichen „ballistischen Kurve" noch bedeutend ab, und es ist auch das erklärlich, da, wie sich gezeigt hat, das quadratische Widerstandsgesetz nur für kleine Geschwindigkeiten annähernd richtig ist, für größere aber eine kubische oder verwickelte Funktion gewählt werden muß,



Figur 111.

um die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschwindigkeit darzustellen. Dazu kommt weiter, daß die Erscheinung überhaupt nicht so einfach ist; insbesondere wird die Luft durch den Schuß, wie namentlich die photographische Aufnahme von fliegenden Geschossen durch Mach und Salcher, Labouret, Boys und Andere gezeigt hat, in eine Wellenbewegung, „Kopfwelle", versetzt, wozu noch die Reibung an dem Mantel und die Wirbelbildung im Rücken des Geschosses kommen. Die Theorie findet also hier außerordentlich komplizierte Verhältnisse vor, und für die Praxis wird man sich darauf beschränken müssen, auf Grund von Versuchen empirische Gesetze festzustellen. Die Methodik für derartige Versuche, insbesondere zur Messung von Geschoßgeschwindigkeiten und zur Registrierung ihrer Bahnen ist neuerdings sehr gut durchgebildet worden, und man hat verschiedene wichtige Ergebnisse erzielt, namentlich auch in bezug auf das Problem der zur Herabminderung des Luftwiderstandes günstigsten Geschoßform; Geschosse dieser Art, zugespitzte Langgeschosse, erfordern ihrerseits wiederum gezogenes Rohr, um ihnen eine Drehung und darum Achsenrichtung zu erteilen, und hierdurch stellt sich wieder die schon oben erwähnte seitliche Abweichung ein, die man zurzeit genügend genau als Funktion der beteiligten Faktoren kennt. Das Weitere sehe man in den Lehrbüchern und Handbüchern der Ballistik, namentlich in den wissenschaftlich hervorragenden Darstellungen von Cranz[1], sowie in der Spezialliteratur, aus der unten eine neuere Auswahl[2]

---

[1] C. Cranz, Kompendium d. theor. äußeren Ballistik. Leipzig 1886. — C. Cranz, Artikel „Ballistik" in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften 4. Leipzig 1903. Daselbst auch eine sehr reichhaltige Literaturzusammenstellung. — [2] Das ballistische Problem ist zuerst von Johann Bernouilli (Acta eruditorum 1719) behandelt worden, später von Legendre, Poisson, Jacobi, Nell, Austerlitz, Didion, Otto u. v. A. — Spezialarbeiten aus neuester Zeit: F. August, Crelles Journ. **103**. 1. 1888. — F. Kötter, Verh. phys. Ges. Berlin 1888, p. 27. — E. Mach u. P. Salcher, Wien. Sitz.-Ber. (2) **95**. 764. 1887; **97**. 41. 1889. — A. Dähne,

folgt; auch wird in dem Artikel „Aeromechanik" noch auf diese Fragen zurückzukommen sein.

Während bei Körpern von massiven Formen der aerodynamische Widerstand den wesentlichen Anteil an der Wirkung hat, kommt nun bei Körpern, bei denen eine oder zwei Dimensionen wenig ausgebildet sind, und die darum im Vergleich zu ihrem Volumen der Luft eine große Oberfläche darbieten, noch die Reibung als ganz wesentlich in Betracht. Dieser Fall tritt z. B. ein bei scheiben- oder blattförmigen Körpern, bei Federbällen u. s. w. Wenn sich die Reibung außerdem noch mit den Einflüssen einer unregelmäßigen Körperform kombiniert, wie das z. B. bei dem unter dem Namen Bumarang bekannten Wurfgeschoß der Fall ist, so wird die Bewegung sehr kompliziert, insbesondere kann hier die Bahn in so hohem Maße vom ebenen Charakter abweichen, daß der Körper auf dem Wege einer Raumkurve zum Ausgangspunkt zurückgelangt. Es existiert zu diesen Fragen eine ziemlich ausgedehnte wissenschaftliche Literatur, auf die eventuell in der Aerodynamik noch hinzuweisen sein wird.

Fall auf schiefer Ebene mit Reibung. Eine andere Art von Widerstand gegen die Schwerebewegung findet beim Fall auf Kurven und Flächen, z. B. bei der schiefen Ebene infolge der Reibung zwischen dem Körper und der Unterlage statt. Durch diese Reibung wird erstens das Grundgesetz des Falles modifiziert, es werden ferner die oben angegebenen Formeln für gleiten und rollen beeinflußt, und es wird endlich, was vielleicht die Hauptsache ist, die Grenze zwischen dem Eintreten von gleiten oder rollen verschoben. Es muß daher bei derartigen Betrachtungen beachtet werden, daß, wenn f den Reibungskoeffizienten und α den Grenzneigungswinkel bedeutet, die Gleichung

(35) $$\operatorname{tang} \alpha = f$$

nur für Körper gilt, die überhaupt nicht rollen können, daß für solche, die es können, dagegen obige Gleichung durch die neue

(36) $$\operatorname{tang} \alpha = f \cdot \frac{r^2}{r^2 + k^2}$$

(vgl. oben p. 377) zu ersetzen ist. Im übrigen sei auf die beiden, das Thema behandelnden Arbeiten von HANDL und HOLZMÜLLER[1] hingewiesen.

Brechung der Fallbewegung. Versuche über den Einfluß der Reibung auf die Fallbewegung sind in mehrfacher Hinsicht lehrreich; es sei folgender Versuch herausgehoben. Als Versuchsfeld dient ein mit schwacher Neigung aufgestelltes großes Holzbrett, das in einzelnen Teilen durch Herausnahme von

---

N. Th. d. Flugbahn von Geschossen u. s. w. Berlin 1888. — C. V. BOYS, Journ. Photogr. Soc. of Gr.-Brit. N. S. **16.** 199. 1892. — E. VALLIER, C. R. **115.** 648. 1892. — F. NEESEN, Arch. f. d. Artill.- u. Ing.-Off. **56.** 476. 1892. — M. DE SPARRE, C. R. **114.** 1172. 1892; Mém. de l'Art. Paris 1892. — E. MACH, Wien. Sitz.-Ber. **101.** 977. 1892. — A. v. OBERMAYER, ibid. (2) **106.** 345. 365. 1897; Mitt. über Gegens. d. Art.- u. Geniewesens 1899. p. 869. — A. C. CREHORE u. G. O. SQUIER, Journ. od the Unit. States Artill. **5.** 325. 1896. — C. CRANZ u. K. R. KOCH, Abh. Bayr. Akad. II. Kl. **19.** 747. 1899. — R. EMDEN, WIED. Ann. **69.** 454. 1899. — P. VIEILLE, C. R. **130.** 235. 1900. — M. DE SPARRE, Bull. soc. math. **29. 30.** 1901. — E. LAMPE, Verh. D. phys. Ges. **3.** 119. 1901. — F. SCIACCI, C. R. **132.** 1175; **133.** 381. 1901. — N. ZABOUDSKI, Corr. int. di scienze milit. **1. 2.** 1900—01. — A. KNESER, Arch. d. Math. (3) **2.** 267. 1901. — E. LAMPE, Verh. D. phys. Ges. **3.** 151. 1901. — E. OEKINGHAUS, Wien. Ber. **109.** (2a) 1159. 1900. — F. NEESEN, Verh. d. phys. Ges. **4.** 380. 1902; **5.** 110. 1903. — Kriegstechn. Ztschr. **6.** 1903. — L. LECORNU, Bull. soc. math. **30.** 202. 1902. — P. APPELL, Arch. de math. (3) **5.** 177. 1903. — F. BASHFORD, A histor. sketch u. s. w. Cambr. Univ. Press 1903. — A. INDRA, Neue ball. Th. Pola 1863; verschiedene Publ. Wien, zuletzt 1901. — M. DE SPARRE, Arch. f. Math. u. s. w. Kop. **1.** 281. 1904. — C. RAMSAUER, Inaug.-Diss. Kiel 1903 (Ricochetschuß).

[1] A. HANDL, Ztschr. f. das Realschulwesen **14.** 274. 1889. — G. HOLZMÜLLER, ibid. **14.** 654. 1889.

Fournieren mit Samtoberfläche versehen werden kann. Rollt eine Kugel herab und geht sie dabei von Holz auf Samt über, so wird ihr Fall verlangsamt, in der Richtung aber nicht beeinflußt. Benutzt man aber als Fallkörper ein System zweier durch ihre gemeinsame Achse verbundener Rädchen, so bleibt beim Übergang von Holz auf Samt die Fallrichtung nur in dem Spezialfalle ungeändert, daß die Inzidenz senkrecht erfolgt; in jedem anderen Falle findet eine Brechung der Fallbahn statt; und man kann eine ganze Serie von Versuchen anstellen, die den entsprechenden optischen analog sind (Prisma, Linse u. s. w.).

Fall auf Kurven. Der Fall auf Kurven oder gekrümmten Flächen wird durch die Reibung ebenfalls beeinflußt; so behält z. B. die Zykloide nach Newton den Charakter als Tautochrone nur dann bei, wenn der Widerstand der Geschwindigkeit, nicht aber, wenn er ihrem Quadrat proportional ist. Man vergleiche hierzu auch eine Abhandlung von Haton de la Goupillière.[1]

Wenn übrigens die Kurve, auf der der Fall erfolgte, eine beträchtliche Krümmung besitzt, so kommt außer dem Widerstand auch die Zentrifugalkraft wesentlich zur Mitwirkung; bei quadratischem Widerstandsgesetz hat man dann die beiden Gleichungen:

$$(37) \qquad m\frac{dv}{dt} = -mg\frac{dz}{ds}kv^2 \quad , \qquad m\frac{v^2}{\varrho} = -mg\varrho\frac{d^2z}{ds^2} + R_n \quad ,$$

wo ϱ der Krümmungradius und R_n die „normale Reaktion“ der Kurve ist. Bourlet hat diese Gleichungen aufgestellt, integriert und auf das neuerdings wieder in Aufnahme gekommene Schleifenfahren (looping the loop) angewendet).[2]

---

[1] Haton de la Goupillière, Mém. Inst. **22.** 1. 1884. — [2] C. Bourlet, Nouv. Ann. de math. (4) **3.** 175. 1903.

Pendel.

Von F. AUERBACH.

Übersicht. Der Begriff Pendel in seiner allgemeinsten Bedeutung umfaßt diejenigen Apparate, bei welchen ein Körper um einen festen Punkt oder eine feste Achse beweglich ist. Beim einfachen oder mathematischen Pendel besteht dieser Körper lediglich aus einem materiellen Punkte, welcher der Schwere unterworfen ist, und aus einem gewichtslosen Faden, welcher die Verbindung des schweren mit dem festen Punkte herstellt. Dieser Faden wird in den meisten Fällen als undehnbahr und unbiegsam angenommen, so daß er eine gerade Linie von konstanter Länge darstellt, und alsdann kommt seine Bedeutung darauf hinaus, daß der schwere Punkt dem Zwange unterworfen ist, trotz der Wirkung der Schwere auf einer Kugelfläche zu bleiben. Dieses Pendel heißt deshalb sphärisches oder, in Rücksicht auf den geometrischen Ort des Fadens, konisches Pendel. Ein besonderer Fall desselben ist das ebene oder Kreispendel. Demgegenüber setzt z. B. das Zykloidenpendel einen zwar immer noch undehnbaren, aber biegsamen Faden voraus. Die Art der Bewegung, welche der schwere Punkt eines sphärischen Pendels ausführen kann, ist sehr mannigfaltig; sie geht z. B. beim Zentrifugalpendel in einer horizontalen Kreislinie vor sich. Dagegen handelt es sich beim ebenen Pendel nur um zwei, durch einen Übergangsfall getrennte Bewegungsarten: um Schwingungen oder Rotationen; erstere hat man gewöhnlich im Auge, wenn man vom Pendel im engeren Sinne des Wortes spricht. Das gewöhnliche ebene Pendel schwingt um eine horizontale Achse, also in der Vertikalebene; man kann nun die Achse und damit die Schwingungsebene auch schief legen und kommt so, wenn die Achse nahezu vertikal, die Schwingungsebene nahezu horizontal liegt, zu dem in gewisser Hinsicht wichtigen Falle des Horizontalpendels. In der Wirklichkeit kommt niemals ein mathematisches Pendel, sondern stets ein physisches Pendel in Betracht. Die Theorie desselben ist natürlich viel verwickelter, führt aber gerade in bezug auf eine der wichtigsten Fragen durch Vergleichung mit dem mathematischen Pendel zu praktisch verwertbaren Ergebnissen. Den Pendeln mit unifilarer stehen die mit bifilarer Aufhängung, deren Theorie eine selbständige ist, gegenüber. Von besonderem Interesse sind schließlich noch zwei Einflüsse: der des Luftwiderstandes und derjenige der Erddrehung.[1]

---

[1] Man vgl. C. WOLF, Coll. de mém. rel. au pendule (1889—91) und Bibliographie du pendule (1889).

A. Einfaches Pendel.

Theorie. Die z-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems sei vertikal nach unten gerichtet, t sei die Zeit und l die Fadenlänge; der Zwang ist alsdann durch die Gleichung

(1) $$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

ausgedrückt, und folglich lauten die Bewegungsgleichungen, wenn $\frac{1}{2}\lambda$ der unbestimmte Multiplikator ist (s. Artikel „Dynamik“, p. 323),

(2) $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda x \quad , \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\lambda\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda y \quad , \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = g + \frac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial z} = g + \lambda z \quad . \end{cases}$$

Aus (1) folgt die Gleichung

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \quad ,$$

und aus dieser und (2):

(3) $$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (2gz + C)\,dt^2$$

(C eine willkürliche Konstante); andererseits erhält man aus (2) allein

(4) $$x\,dy - y\,dx = c\,dt$$

(c eine zweite willkürliche Konstante). Die Gleichungen (3) und (4) stellen offenbar für den vorliegenden Fall die Sätze von der lebendigen Kraft und von den Flächen (p. 332 u. 336) dar; sie nehmen, wenn man mittels der Gleichungen

(5) $$x = l\sin\vartheta\cos\varphi \quad , \quad y = l\sin\vartheta\sin\varphi \quad , \quad z = l\cos\vartheta$$

Polarkoordinaten einführt, die folgende Gestalt an:

(6) $$l^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) = (2gl\cos\vartheta + C)\,dt^2 \quad , \quad l^2\sin^2 d\varphi = c\,dt \quad .$$

Für $c = 0$ wird $\varphi = \text{const}$, nach (5) geht also die Bewegung in einer vertikalen Kreislinie vor sich, und man hat es mit einem ebenen Pendel zu tun.

Ebenes Pendel. Durch Streichung von $d\varphi$ in (6) erhält man:

(7) $$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}\cos\vartheta + \frac{C}{l^2} \quad .$$

Es möge hier gleich noch die daraus folgende Gleichung

(7a) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta$$

Platz finden. C/l^2 in (7) ist offenbar das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, also C das der Streckengeschwindigkeit für $\vartheta = \pi/2$, d. h. bei horizontaler Fadenlage.

Da in (7) $\cos\vartheta$ bald positiv bald negativ ist, so hängt es von dem Werte von C ab, ob durch diese Gleichung Rotationen oder Schwingungen dargestellt werden; für $C > 2gl$ ist das erstere der Fall, d. h. der schwere Punkt rotiert fortwährend in derselben Richtung um den festen Punkt, für $C < 2gl$ das letztere, d. h. der schwere Punkt pendelt zwischen zwei extremen Lagen links und rechts fortwährend hin und her. In physikalischer Fassung: Das Pendel rotiert, wenn der Pendelkörper bei horizontaler Fadenlage eine größere, es schwingt, wenn er eine kleinere „Fallhöhe“ als l hat. Im ersten Falle erhält man, wenn man

$$C + 2gl = v_0^2 \quad , \quad \frac{4gl}{v_0^2} = k^2 \quad , \quad \sin\frac{\vartheta}{2} = u$$

setzt, die Lösung in der Form:

(8) $$u = \sin \operatorname{am}\left(k, \frac{v_0 t}{2 l}\right)$$

und die Rotationsdauer

(9) $$T = \frac{2 l \pi}{v_0^2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4 g l}{v_0^2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{(4 g l)^2}{v_0^4} + \ldots\right] .$$

v_0 ist die Geschwindigkeit im tiefsten Bahnpunkte, im höchsten ist sie $\sqrt{v_0^2 - 4 g l}$, im äußersten Punkte rechts oder links $\sqrt{v_0^2 - 2 g l}$; sie ist also unten am größten, oben am kleinsten. Man kann diese Bewegung folglich hervorrufen, indem man dem schweren Punkte, ehe man ihn in irgend einer Stellung losläßt, durch einen Impuls die dieser Stellung entsprechende Geschwindigkeit erteilt.

In dem Grenzfalle, wo $C = 2 g l$ ist, ergiebt sich

(10) $$u = \frac{e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}}{e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}} .$$

Die Geschwindigkeit im höchsten Bahnpunkte ist hier gleich null, und man kann mithin den Fall verwirklichen, indem man den (an einem festen Stäbchen befestigen) schweren Punkt in seiner höchsten Stellung ohne Impuls losläßt. Er fällt dann infolge des labilen Gleichgewichts auf der einen Kreishälfte herunter und steigt auf der anderen wieder herauf, und zwar, wie (10) lehrt, derart, daß die Geschwindigkeit mehr und mehr abnimmt und der höchste Punkt erst nach unendlich langer Zeit wieder erreicht wird. Mit der durch die allgemeine Theorie des Falles geforderten Symmetrie des Vorgangs stimmt dieses Ergebnis überein, insofern auch der Beginn der Bewegung aus dem labilen Gleichgewichtszustande heraus im Prinzip eine unendlich lange Zeit beansprucht.

Schwingungen des ebenen Pendels. Am wichtigsten ist der noch übrig bleibende dritte Fall, nämlich der, in welchem entweder $C < 2 g l$ oder C negativ, aber $> - 2 g l$ ist, also C zwischen $- 2 g l$ und $+ 2 g l$ liegt. In diesem Falle gibt es nach (7) auf jeder Seite einen Wert von ϑ, für den die Geschwindigkeit null wird, der schwere Punkt also umkehrt; es finden also Schwingungen statt. Der Maximalwert ϑ_0 von ϑ (oder bei experimentellen Betrachtungen zuweilen das Doppelte desselben) heißt dann die Amplitude oder Weite der Schwingungen; und indem man für sie die der Gleichung (7) entsprechende Gleichung bildet und von jener abzieht, erhält man

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2 \frac{g}{l} (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) ,$$

welche vor (7) den Vorzug hat, daß die Konstante ϑ_0 von einfacherer und wichtigerer Bedeutung ist, als die bisherige Konstante C. Setzt man nun

$$\sin \frac{\vartheta_0}{2} = k , \qquad \sin \frac{\vartheta}{2} = k u ,$$

so findet man

$$u = \sin \operatorname{am}\left(k, t \sqrt{\frac{g}{l}}\right) ,$$

also

(11) $$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \frac{\vartheta_0}{2} \sin \operatorname{am}\left(\sin \frac{\vartheta_0}{2}, t \sqrt{\frac{g}{l}}\right) ,$$

und die ganze Schwingungsdauer (von $\vartheta = + \vartheta_0$ bis $\vartheta = - \vartheta_0$ und wieder zurück bis $\vartheta = + \vartheta_0$)

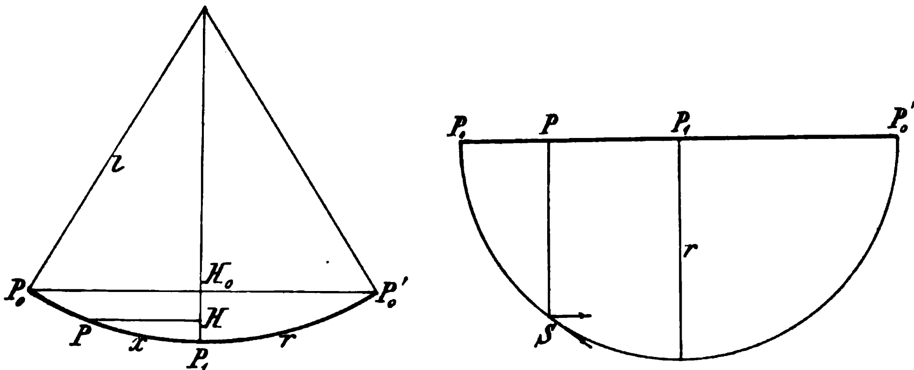
(12) $$2\,T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\vartheta_0}{2} + \ldots\right] .$$

Ist die Amplitude so klein, daß man den Bogen für den Sinus setzen kann, so wird

(12a) $$2\,T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\vartheta_0^{\,2}}{16}\right) ,$$

und für ganz kleine Amplituden

(12b) $$2\,T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



Figur 112.

Dieses letztere Resultat kann man, auch unabhängig von der allgemeinen Theorie, ganz elementar ableiten. Befindet sich der schwere Punkt (Figur 112) auf seiner Bahn von P_0 nach P_1 in P, so hat er, da er die Höhe

$$H_0 H = H_0 P_1 - H P_1 = \frac{P_0 P_1^{\,2} - P P_1^{\,2}}{2\,l}$$

durchfallen hat, die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} (P_0 P_1^{\,2} - P P_1^{\,2})} .$$

An Stelle der Sehnen $P_0 P$ und $P P_1$ kann man bei sehr kleinen Winkeln die Bögen r und x setzen; es wird also

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} (r^2 - x^2)} .$$

Hieraus könnte man T berechnen, wenn v konstant wäre; ein Kunstgriff (vgl. den Artikel „Kinematik") gestattet jenes zu ermitteln, obgleich dieses nicht konstant ist. Ist nämlich $P_0 P_0'$ der in eine Gerade entwickelte Schwingungsbogen, und läßt man einen Punkt statt dessen den Halbkreis $P_0 S P_0'$ mit der konstanten Geschwindigkeit $r\sqrt{g/l}$ beschreiben, so ist die x-Komponente seiner Geschwindigkeit, also auch die Zeit, in welcher er nach P_0' gelangt, überein-

stimmend mit den entsprechenden Größen für den ersten Punkt. Für den zweiten ist aber die Zeit

$$\frac{\pi r}{r\sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad ;$$

folglich ist dies auch die Dauer einer einfachen Schwingung des Pendels.

Es sei hier eine Bemerkung eingeschaltet. Wenn man unter Periode einer schwingenden Bewegung diejenige Zeit versteht, nach deren Verlauf Ort und Geschwindigkeit wieder ihre Anfangswerte angenommen haben, so muß man zweifellos $2T$ als Periode oder Schwingungsdauer (ganze Schwingungsdauer) des Pendels bezeichnen. Es hat sich aber in diesem Falle der Gebrauch eingebürgert — und er wird sich, namentlich mit Rücksicht auf den Begriff des „Sekundenpendels" (s. weiter unten), nicht mehr abändern lassen — T als charakteristische Größe zu benutzen und sie die Dauer der einfachen Schwingung oder schlechthin die Schwingungsdauer des Pendels zu nennen.

Pendelbeobachtungen; Meßmethoden. Um die Erscheinungen am einfachen Pendel experimentell zu studieren, sind eine Reihe von Methoden ausgearbeitet worden, die sich namentlich auf die exakte Messung der Schwingungsdauer, der Amplitude, der Phase beziehen. Hierüber ist schon im Artikel „Dynamik" einiges angeführt worden; es ist das jetzt im speziellen Hinblick auf Messungen an Pendeln zu ergänzen. Die wichtigsten hier in Betracht kommenden Methoden sind die der Koinzidenzen und die der elektrischen Registrierung.

Methode der Koinzidenzen. Bei dieser, von BORDA[1] herrührenden und seitdem in den verschiedensten Richtungen ausgebildeten Methode vergleicht man die gesuchte Schwingungsdauer des Pendels P mit der des Sekundenpendels S einer genau regulierten astronomischen Uhr, indem man beide gleichzeitig durch ein Fernrohr beobachtet, das so aufgestellt ist, daß beide Pendelbilder im Ruhezustande durch den im Gesichtsfelde vertikal ausgespannten Spinnfaden hindurchgehen. Nimmt man an, daß P schneller schwingt als S, setzt man beide Pendel in Gang, wartet man ab, bis beide Pendel gleichzeitig und in gleichem Sinne durch den Faden gehen und beginnt nun zu beobachten, so wird man P dem S vorauseilen sehen. Der einfachste Fall, welcher eintreten kann, ist nun der, daß die Vorauseilung gerade in dem Moment eine Schwingung beträgt, in welchem S wieder einmal, z. B. zum $n$ten Male, durch den Faden geht; P geht dann ebenfalls hindurch, aber im entgegengesetzten Sinne und man kann schon aus dem Vergleich dieser beiden ersten Koinzidenzen die Schwingungsdauer $T = n/(n+1)$ berechnen; besser ist es jedoch, die dritte Koinzidenz, welche wieder eine gleichsinnige ist, abzuwarten und, wenn zwischen der ersten und dritten n_1 Sekunden vergangen sind, mit der Formel $T = n_1/(n_1 + 2)$ zu rechnen. Natürlich kann man dies zur Erhöhung der Genauigkeit fortsetzen und, wenn man für n_1 verschiedene Werte findet, das Mittel aus ihnen nehmen. Der bisher geschilderte einfache Fall tritt aber, wie man sieht, nur ein, wenn sich die Schwingungsdauern der beiden Pendel wie zwei ganze aufeinander folgende Zahlen $n : n + 1$ oder allgemeiner wie $n : n + \nu$, wo ν eine ganze Zahl ist, verhalten. Schon komplizierter wird die Beobachtung, wenn sich dieses Verhältnis nicht einfacher als in der Form $n + \frac{1}{2} : n + \frac{3}{2}$ oder $2n + 1 : 2n + 3$ darstellen läßt. Die zweite Koinzidenz, d. h. die erste gegensinnige, entgeht dann der Beobachtung gewissermaßen, weil sie nicht in den Faden fällt; nach n Sekunden geht P noch etwas später, nach $n + 1$ Sekunden aber schon um ebensoviel früher durch den

[1] BORDA, in: Base du syst. métr. Par. 1810. T. 3. p. 337, und in BIOT et ARAGO: Recueil d'obs. etc. exéc. par ordre du Bureau des Long. Par. 1821.

Faden; wartet man weiter, bis $2n + 1$ Sekunden vergangen sind, so erhält man wieder eine gleichsinnige Koinzidenz, deren Sinn jedoch dem der ersten entgegengesetzt ist; und man muß noch die vierte (wieder gegensinnige, unbeobachtbare) und die fünfte Konizidenz abwarten, um wieder genau die Erscheinung wie zu Anfang vor sich zu haben. Je nachdem man bloß die Sekunden n bis zur dritten oder, was besser ist, die Sekunden n_1 bis zur fünften Koinzidenz zählt, hat man

$$T = \frac{n}{n+2} \qquad \text{oder} \qquad T = \frac{n_1}{n_1 + 4} \quad .$$

Verhalten sich endlich ganz allgemein die beiden Schwingungsdauern, in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt, wie $a:b$, so muß man längere Zeit warten, bis eine Koinzidenz genau im Faden stattfindet. Ist dies die $p$te Koinzidenz, und sind n Sekunden vergangen, so ist

$$T = \frac{n}{n+p} \quad .$$

Eilt in allen diesen Fällen P nicht voraus, sondern bleibt es zurück, so hat man nur nötig, in allen obigen Formeln an Stelle der Summe die entsprechende Differenz zu setzen. Besonders empfindlich ist diese Methode und am häufigsten angewandt wird sie daher in dem Falle, wo die Schwingungsdauer von P nahezu gleich 1, 2, 3 u. s. w. Sekunden ist. Man vergleicht dann 1, 2, 3 u. s. w. Schwingungen des Sekundenpendels mit einer des anderen, hat es fast immer mit dem ersten der obigen Fälle zu tun und bekommt für n große Zahlen, so daß man mit aller Ruhe und Genauigkeit beobachten kann und genügend Zeit findet, um die zur Reduktion auf kleine Schwingungen erforderliche Messung der Amplitude vorzunehmen.

Die Methode der Koinzidenzen, welche man sehr treffend mit der Benutzung des Nonius bei Längenmessungen verglichen hat, ist von Bessel[1] wesentlich verbessert worden, hauptsächlich dadurch, daß nunmehr das Pendel nicht in dem Uhrkasten dicht vor dem Sekundenpendel aufgehängt wurde, wobei sich beide Pendel durch Mitschwingung beeinflussen, sondern das eine getrennt und unabhängig von dem anderen. Um trotzdem beide im Fernrohr beobachten zu können, braucht man nur zwischen beiden eine Linse derartig aufzustellen, daß das Bild des entfernteren in die Schwingungsebene des näheren gebracht wird.

In neuerer Zeit ist die Methode in technischer Hinsicht in verschiedener Weise sehr vervollkommnet worden, und es sind hier namentlich die schweizer Registriermethode sowie die Methoden von Vogel und Lippmann[2] zu nennen. Die letztere, die gegenwärtig sehr verbreitet ist, besteht in einer Art von stroboskopischem Verfahren, indem an jedem Pendel senkrecht zu seiner Schwingungsrichtung ein kleiner Spiegel angebracht ist. Von einem leuchtenden Horizontalspalt gehen die Strahlen auf den ersten Spiegel, nach der Reflexion und Sammlung durch eine Linse fallen sie auf einen zweiten Horizontalspalt, werden an dem zweiten Spiegel reflektiert und in einem Fernrohr mit vertikaler Skala beobachtet; bei geeigneter Schwingungsrichtung der beiden Pendel ist dann das Ergebnis folgendes: Sind die beiden Perioden gleich, so sieht man in dem Moment, wo das erste Pendel seine Ruhelage passiert, abwechselnd zwei helle Linien, die eine über, die andere symmetrisch unter der Skalenmitte — entsprechend der zufälligen und stets gleich bleibenden Phasendifferenz der Pendel. Sind aber die Perioden etwas verschieden, so ändert sich die Stelle, wo die Linien erscheinen,

[1] C. W. Bessel, Unters. über die Länge des einfachen Sek.-Pendels. Berlin 1828. — [2] Über die schweizer Methode vgl. Bruhns, Astr.-geodät. Arbeiten. 1870. — H. C. Vogel, Rep. d. Phys. **17**. 337. 1881. — G. Lippmann, Journ. de phys. (2) **6**. 266. 1887; C. R. **124**. 125. 1897. — Vgl. ferner G. Bigourdan, C. R. **124**. 279. 1897.

allmählich, und in dem Moment, wo beide Pendel gleichzeitig durch die Ruhelagen hindurchgehen, fallen sie in der Skalenmitte zusammen. Die Berechnung ist einleuchtend. Man kann auch statt des Dauerlichtes Funken einer Flasche anwenden und einzelne Momente photographisch festhalten.

Mit dem letztgenannten Verfahren nähert man sich bereits der anderen Methode, der elektrischen Registrierung, die ebenfalls in verschiedenen Formen ausgebildet ist und sich schließlich mit der Koinzidenzenmethode zu einem sehr vollkommenen Verfahren kombinieren läßt. Eine sehr einfache Form der Methode ist die folgende: Das zu untersuchende Pendel trägt ein feines, berußtes Papierblatt; letzteres trennt zwei gegenüber stehende Spitzen voneinander, zwischen denen mit Hilfe einer genau regulierten Uhr, eines primären und eines sekundären Stromkreises in konstanten Zeitintervallen Funken überspringen. Diese markieren auf dem berußten Papier, wenn das Pendel schwingt, weiße Punkte, deren man durch Verstellen der Spitzen nach oben oder unten mehrere Reihen erhalten kann. Die Ableitung der Schwingungsdauer aus den Abständen der Punkte voneinander ist leicht zu machen. Die der Methode anhaftende Ungenauigkeit wegen des nicht gleichförmigen Ganges des Pendels ist bei Beschränkung auf kleine Amplituden für viele Zwecke nicht ins Gewicht fallend.

Bei exakteren Versuchen und solchen in größerem Maßstabe wird man sich indessen zur Registrierung eines Chronoskops oder Chronographen bedienen, dessen Eichung man dann entweder mit einem der beiden nur zu vergleichenden Pendel, das man mit elektrischem Kontakt versieht, oder in anderer Weise vornimmt.

Pendelgesetze. Die oben entwickelte Theorie führt zu einer Reihe von Ergebnissen, welche man nach den angegebenen Methoden leicht durch die Erfahrung prüfen und bestätigen kann. Das erste dieser Gesetze lautet: Die Schwingungsdauer des ebenen Pendels ist von der Amplitude nur in sehr geringem Grade und bei kleinen Amplituden überhaupt nicht abhängig. Um sich hiervon experimentell zu überzeugen, benutzt man ein aus einem Faden und einer Metallkugel bestehendes Pendel, versetzt dasselbe mit beträchtlicher Amplitude in Schwingungen und beobachtet die Dauer der ersten hundert, der zweiten hundert u. s. w. Schwingungen und zugleich die infolge des Luftwiderstands langsam abnehmenden Amplituden. Man findet dann für die Schwingungsdauer Zahlen, welche anfangs wenig und später, sobald die Amplitude nur noch einige Grad beträgt, gar nicht mehr abnehmen. Man bezeichnet diese Erscheinung als den Isochronismus kleiner Schwingungen.

Bei Berücksichtigung der höheren Glieder ist T nicht mehr unabhängig von ϑ; es lassen sich dann aber mit Hilfe der elliptischen Integrale merkwürdige Beziehungen zwischen den, verschiedenen ϑ entsprechenden T aufstellen.[1]

Ein zweites Gesetz ist schon in Gleichung (12) enthalten, gilt also für beliebige Amplituden und lautet: Die Schwingungsdauern verschieden langer einfacher Pendel verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen. In der Tat, wenn man sich mehrere, dem Charakter des mathematischen möglichst nahe kommende Pendel herstellt, deren Längen sich wie $1:4:9$ u. s. w. verhalten, so findet man Schwingungsdauern, welche sich wie $1:2:3$ u. s. w. verhalten.

Dasjenige Pendel, dessen Schwingungsdauer genau eine Sekunde beträgt, heißt Sekundenpendel, und die Messung der Länge L, welche es an einem bestimmten Orte haben muß, ist eine der wichtigsten Grundlagen exakter Zeitmessung geworden. Näherungsweise kann man dieselbe mittels der aus (12b) folgenden Formel $L = g/\pi^2$ mit Benutzung eines irgendwie gewonnenen Wertes von g, genauer durch Beobachtungen an möglichst einfachen Pendeln nach der Proportion $L:l = 1:t^2$, also nach der Formel $L = l/t^2$ bestimmen; zur exakten

[1] Vgl. A. G. GREENHILL, N. ann. de math. (4) **4**. 97. 1904.

Messung ist es aber notwendig, die Abweichungen des benutzten Pendels vom Charakter eines einfachen, sowie andere Einflüsse zu berücksichtigen (s. unten). Im Mittel ist

$$L = 99{,}353 \text{ cm} \quad .$$

Drittens zeigen die Formeln, daß die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels der Quadratwurzel aus der Beschleunigung durch die Schwere umgekehrt proportional ist. Auch dieses Gesetz wird durch die Erfahrung bestätigt. Bringt man, was RICHER[1] schon 1671 tat, ein Pendel unter einen niederen Breitengrad, oder steigt man mit ihm in ansehnliche Höhen, so nimmt die Schwingungsdauer zu. Aber auch an einem und demselben Orte kann man einem Pendel verschiedene Schwingungsdauern erteilen, indem man es durch geeignete starre Verbindungen, wie sie bei dem Apparat von MACH[2] (Figur 113) verwirklicht sind, zwingt, in einer schiefen Ebene zu schwingen, so daß die wirkende Beschleunigung nur noch $g' = g \cos \varphi$ (φ Neigung der Ebene gegen die Vertikale) ist; für $\varphi = 90^0$ ist $T = \infty$. Dieser Apparat ist das Analogon der schiefen Ebene für das Pendel. Zu gleichem Zwecke kann übrigens schon ein Metronom dienen, den man auf eine schiefe Unterlage setzt.[3] Von besonderer Wichtigkeit wird die durch das dritte Gesetz ausgesprochene Beziehung in ihrer Umkehrung



Figur 113.

$$(13) \qquad g = \frac{l\pi^2}{T^2} \quad ,$$

in welcher sie zeigt, daß man durch Messung von l und Beobachtung von T die Größe g ermitteln kann. Betrachtet man wiederum ein aus einem dünnen Faden und einer Bleikugel bestehendes Pendel als ein einfaches, so kann man l angenähert messen und somit g annäherungsweise bestimmen; in bezug auf die exakte Bestimmung muß auch hier auf das Folgende (Artikel „Gravitation") verwiesen werden.

Das vierte Gesetz drückt die Tatsache aus, daß in der Formel (12b) weder die Masse noch die chemische Beschaffenheit des Pendelkörpers enthalten ist und lautet: Die Schwingungszeit ist von der Beschaffenheit des Pendelkörpers unabhängig. Versuche bestätigen dies in vollstem Maße.

Ein fünftes Gesetz bezieht sich auf die Amplitude der Schwingungen und sagt aus: Diese Amplitude ist konstant. In der Tat kann man im leeren Raume ein Pendel sehr lange in Schwingungen erhalten; die Reibung am Aufhängepunkte läßt sie aber doch mit der Zeit abnehmen und schließlich erlöschen. Das, was an dieser Konstanz das Wesentliche ist, ist freilich nicht die Konstanz des Amplitudenwinkels als solchen, sondern die Konstanz der Höhe, bis zu welcher der Pendelkörper jedesmal emporsteigt, (s. Artikel „Fall und Wurf"). Man kann dies am deutlichsten an dem schon von GALILEI angegebenen Nagelpendel (Figur 114) sehen. Wo man auch den Nagel einschlägt, das Pendel geht

---

[1] RICHER, Observ. astron. et phys. etc. Paris 1879. — [2] E. MACH, Beibl. 6. 57. 1882. — [3] M. KÖNIG, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. 7. 84. 1893.

stets bis zum Niveau EE; kann es dies wie im Falle der Nagelstellung d nicht mehr, so schlingt sich der Faden um den Nagel herum.

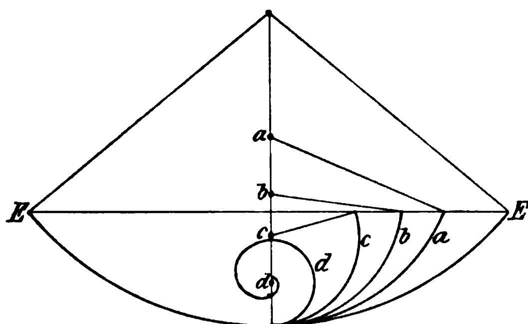
Das letzte und in gewisser Hinsicht wichtigste der Pendelgesetze bezieht sich nicht auf die Schwingungsdauer, sondern auf den Verlauf einer Schwingung im einzelnen, d. h. auf die Art und Weise, wie sich Ort und Geschwindigkeit des schweren Punktes mit der Zeit ändern. Diese Art und Weise ist, wie die Gleichung (11) erkennen läßt, im allgemeinen eine ziemlich verwickelte; für kleine Schwingungen aber findet man durch Vernachlässigung den Winkel

$$(14) \qquad \vartheta = \vartheta_0 \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

und die Winkelgeschwindigkeit

$$(15) \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = v = v_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} \quad ,$$

wobei der Anfangspunkt der Zeit und die tiefste Stellung des Pendelkörpers als einander entsprechend gewählt wurden. Wie man sieht, sind Ort und Geschwindigkeit des Pendelkörpers einfache Sinus- bezw. Cosinusfunktionen der Zeit. Derartige Pendelschwingungen heißen daher auch Sinusschwingungen. Zur experimentellen Beobachtung dieser Verhältnisse dient das graphische Pendel, welches, unbeschadet seiner verschiedenartigen Ausführung in den Einzelheiten, im Prinzip darauf beruht, daß eine an dem Pendelkörper angebrachte Schreibvorrichtung die Bewegung desselben auf einer horizontalen Platte verzeichnet, welche in einer zur Pendelebene senkrechten Richtung sich gleichmäßig fortbewegt. Diese Richtung stellt alsdann die zur räumlichen Abzisse gewordene Zeit dar, während die Ordinate die Elongationen des Pendels aus der Gleichgewichtslage angibt. Zu Demonstrationszwecken genügt es schon, als Schreibmaterial Sand zu benutzen, den man aus einem den Pendelkörper bildenden Trichter auslaufen läßt. Man erhält auf diese Weise Kurven, welche sich nicht nur als Sinuskurven erweisen, sondern auch die einschlägigen quantitativen Verhältnisse in Ruhe zu studieren erlauben. Ein derartiges, für exakte Versuche geeignetes graphisches Pendel haben unter anderen Czermak und Hiecke[1] konstruiert.



Figur 114.

Wenn ein Punkt gleichzeitig zwei (oder gar mehrere) verschiedene Pendelschwingungen in derselben Ebene ausführt, wird hingegen seine resultierende Bewegung keine Sinusschwingung mehr sein. Diesen Fall kann man direkt nicht ganz leicht realisieren, weil sich die beiden Schwingungen (s. weiter unten) beeinflussen. Dagegen kann man in sehr einfacher Weise indirekt die Resultante zweier Pendelschwingungen aufzeichnen, indem man mit dem einen Pendel den Schreiber, mit dem anderen, das in einer parallelen Ebene schwingt, das Zeichenbrett verbindet; je nach dem Perioden- und Phasenverhältnis erhält man verschiedene Kurven; einen derartigen Apparat mit elektromagnetischer Auslösung hat neuerdings Righi[2] angegeben.

[1] P. Czermak u. Hiecke, Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. 1885. p. 217. — [2] A. Righi, Rend. Accad. Bologna 1898.

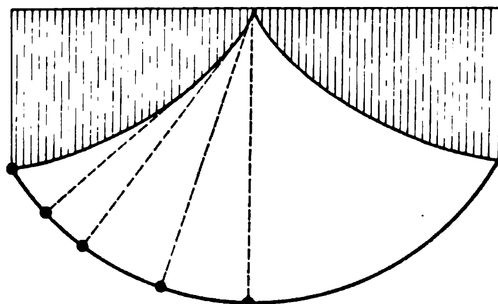
Pendel von veränderlicher Länge. Natürlich hört die Pendelschwingung auch dann auf, vom Sinuscharakter zu sein, wenn man die maßgebenden Faktoren während der Schwingung verändert, wenn man z. B. vermittels irgend einer Vorrichtung dafür sorgt, daß die Länge des Pendels sich im Tempo der Periode stetig ändert, also z. B. im tiefsten Punkte am größten oder am kleinsten ist. In solchen Fällen wird dann unter Umständen auch die Symmetrie der Schwingungen aufgehoben. Hierher gehört der bekannte Fall des Schaukelns mit (zum Zweck der Steigerung der Amplitude), Senkung des Körpers beim Abstieg, Hebung beim Aufstieg; das Pendel ist dann (s. weiter unten) gewissermaßen beim Abstieg länger, beim Aufstieg kürzer, und nach dem Flächensatz wird das durch größere Amplitude ausgeglichen werden.[1]

Allgemein ist das Problem des Pendels von veränderlicher Länge namentlich von LECORNU, GYLDÉN und G. v. GROFE[2] behandelt worden. LECORNU geht von der Gleichung

$$l\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\frac{dl}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + g\sin\vartheta = 0 \tag{16}$$

aus und macht dann die Annahme, daß die Pendellänge gleichförmig mit der Zeit wachse, $l = a + bt$; unter gewissen Vernachlässigungen läßt sich dann die Gleichung integrieren; wie sich zeigt, wird mit wachsender Zeit die Periode immer größer, aber zugleich die Amplitude immer kleiner.

Zykloidenpendel. Solange man den Pendelfaden als unbiegsam annimmt, beschreibt der Pendelkörper (bei ebenen Schwingungen) Kreisbögen. Wenn aber der Faden biegsam ist, und wenn man ihm ein Hindernis in den Weg stellt, z. B. eine krumme Linie, so wird er sich an diese anlehnen, und die Bahn des Körpers wird kein Kreisbogen mehr sein. Hierauf und auf der Eigenschaft der Zykloide, daß ihre Evolute selbst wieder eine Zykloide ist (vgl. Artikel „Kinematik", p. 317), beruht das Zykloidenpendel (Figur 115). Sowohl die beiderseitigen Anlehnungskurven, als auch die Bahnkurve sind hier Zykloiden. Da nun diese (s. Artikel „Fall und Wurf") die Tautochrone ist, so folgt, daß die Schwingungsdauer des Zykloidenpendels von der Amplitude nicht nur, wie beim Kreispendel, näherungsweise, sondern völlig unabhängig ist.[3]


Figur 115.

Isochrones Pendel von Philips. Übrigens kann man durch geeignete Zusatzmechanismen auch das starre Kreispendel zu isochronen Schwingungen zwingen; ein Beispiel hierfür ist folgendes. Man verbindet einen Punkt der Pendelstange mit einem Punkte einer stählernen Federlamelle, die am Ende festgeklemmt ist und nun gebogen wird. Bei geeigneter Wahl der maßgebenden Größen kann man dann auf Grund der leicht zu entwickelnden Theorie den Isochronismus der Schwingungen leicht herstellen; durch Versuche läßt sich das dann bestätigen.[4]

Fadenpendel. Ein Pendel, bei dem die Verbindung des Körpers mit dem Aufhängepunkte durch einen Faden dargestellt wird, wird infolge der Biegsamkeit

[1] Vgl. hierzu G. PEANO, Rend. Circ. nat. Palermo **10.** 36. 1896. — [2] L. LECORNU, C. R. **118.** 132. 1894. — H. GYLDÉN, Öfversigt Kgl. Vet. Akad. Förh. **52.** 507. 1895. — G. VOM GROFE, Sitz.-Ber. Dorp. Naturf.-Ges. 1896. p. 176. — [3] CH. HUYGENS, Horologium oscillatorium. Paris 1673. — [4] PHILIPS, C. R. **112.** 178. 1891. — WOLF, ibid. **112.** 181.

und Dehnbarkeit des Fadens eine von der theoretischen abweichende Bewegung ausführen. In ersterer Hinsicht ist zu beachten, daß die Spannung des Fadens infolge des Zusammenwirkens von Schwerkraft und Zentrifugalkraft in dem Falle ihr Ende erreichen wird, wo diese beiden Kräfte entgegengesetzt gleich werden, was bei Amplituden über 90^0 und kleinen Geschwindigkeiten eintreten kann. Der Faden wird sich dann biegen, und der Pendelkörper wird frei fallen bezw. die seiner augenblicklichen Geschwindigkeit entsprechende Wurfbahn beschreiben; sobald diese wieder zur Spannung des Fadens führt, setzt wieder die Pendelbewegung ein u. s. w. Man vergleiche hierzu u. A. die Darstellung bei BOLTZMANN sowie die Arbeiten von NOUVEL und KURZ.[1] Auch die Dehnung des Fadens wird einen Einfluß auf die Bewegung haben, indem sie die Länge in periodischer Weise variieren macht, wobei das Maximum wegen des stärksten Zusammenwirkens von Schwere und Zentrifugalkraft in den tiefsten Punkt fällt, wo auch die Geschwindigkeit am größten ist; die Änderung des Bewegungscharakters wird also in dem Sinne erfolgen, daß die Schwankungen der Geschwindigkeit verringert werden, und daß die Bewegung in ihrem Geschwindigkeitscharakter unsymmetrisch wird. Man kann diese Verhältnisse studieren, indem man den Pendelkörper an einem Kautschukfaden oder an einer Spiralfeder aufhängt, muß dann aber die Störungen durch Nachwirkungs- und Schwingungserscheinungen eliminieren. — Da übrigens wachsende Schwerkraft die Periode eines Pendels direkt verkürzt, indirekt aber, wegen der Dehnung des Fadens, verlängert, kann man auf die Idee kommen, ein elastisches Pendel herzustellen, das mit der Ortsänderung seine Periode nicht verändert.[2]

Sphärisches Pendel. Hierbei hat man von den beiden Gleichungen (6) auszugehen. Durch Elimination von φ erhält man zunächst

$$(17)\qquad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}\cos\vartheta + \frac{C}{l^2} - \frac{c^2}{l^4\sin^2\vartheta} \quad ,$$

also

$$(18)\qquad t = l^2\int\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{l^2\sin^2\vartheta\,(C + 2gl\cos\vartheta) - c^2}}$$

und dann weiter

$$(19)\qquad \varphi = c\int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{2\,l^2\sin^2\vartheta\,(C + 2gl\cos\vartheta) - c^2}} \quad .$$

Indem man hierin statt ϑ wiederum $z = l\cos\vartheta$ einführt, erhält man

$$(20)\qquad t = -l\int\frac{dz}{\sqrt{2(l^2 - z^2)(C + 2gz) - c^2}} \quad ,$$

$$(21)\qquad \varphi = -cl\int\frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{2(l^2 - z^2)(C + 2gz) - c^2}} \quad ;$$

Die Lösung wird also durch elliptische Integrale dargestellt.

Um die Natur der hierdurch dargestellten Bewegungen zu verfolgen, ist es von Wichtigkeit, die höchste und die tiefste Stellung, welche der schwere Punkt einnimmt, zu ermitteln, d. h. die Werte von z, für welche $dz/dt = 0$ ist; man findet dieselben aus der Gleichung

$$(22)\qquad 2(l^2 - z^2)(C + 2gz) - c^2 = 0 \quad .$$

Durch Diskussion dieser Gleichung, welche drei Wurzeln (eine davon ohne physikalische Bedeutung) besitzt, gelangt man zu folgendem Ergebnis: Der tiefste

[1] L. BOLTZMANN, Vorl. über d. Pr. d. Mech. **1.** 148. 1897. — NOUVEL, Progr. Gymn. Köthen 1886. — A. KURZ, Rep. d. Phys. **26.** 380. 1890. — [2] F. W. PFAFF, Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. **15.** 49. 1894.

Punkt der Bahn liegt stets auf der unteren Kugelhälfte. Für $C < 0$ liegt auch der höchste Punkt in der unteren Hälfte der Kugel; für $C = 0$ liegt er in ihrem Äquator, und für $C > 0$ liegt er auf ihrer oberen Hälfte. Aus der elliptischen Integralform von t in Gleichung (20) folgt ferner, daß die Bahn periodisch durch die ermittelten höchsten und tiefsten Punkte geht. Wendet man dann auf die Bewegung des schweren Punktes die Bezeichnung Schwingungen an, nennt man von den drei Wurzeln der Gleichung (22) diejenigen beiden, welche dem höchsten und tiefsten Bahnpunkte entsprechen, z_0 und z_1, die dritte z_2 und setzt man

$$u = \varphi \frac{\sqrt{z_2 - z_0}}{\sqrt{z_2 - z_1}} \quad , \qquad k^2 = \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_1} (\leq 1) \quad ,$$

so findet man die Schwingungsdauer

$$(23) \qquad T = \frac{4\, l \sqrt{2}}{\sqrt{g}\sqrt{(z_2 - z_1)}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - \varphi^2)(1 - k^2 \varphi^2)}}$$

$$(24) \qquad = \frac{2\, l \pi \sqrt{2}}{\sqrt{g(z_2 - z_1)}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right] \quad .$$

Um die Bewegung vollständig zu charakterisieren, ist nun noch das Verhalten von φ zu verfolgen. Ohne weiteres lehrt die Gleichung (21), daß, wenn z zu demselben Werte zurückkehrt, φ um eine konstante, von c abhängige Größe sich geändert hat.

In etwas anderer, für manche Zwecke, namentlich für die Durchführung von Annäherungen bequemeren Gestalt erhält man die Formeln, wenn man ϑ beibehält und die Konstanten C und c mit Hilfe der Anfangswerte von ϑ und $d\vartheta / dt$, φ und $d\varphi / dt$ eliminiert. Man nehme z. B. für $t = 0$ an, daß in bezug auf ϑ Umkehr, in bezug auf φ Durchgang durch die Mittellage stattfinde, setze also:

$$\vartheta = \vartheta_0 \quad , \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad ; \qquad \text{dagegen} \quad \varphi = 0 \quad , \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 \quad ;$$

dann nehmen die beiden Grundgleichungen die Form:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & l \left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \sin^2\vartheta_0 \cdot \omega_0^2 \right] = 2g(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) \\ & \frac{d\varphi}{dt} \sin^2\vartheta = \omega_0 \sin^2\vartheta_0 \end{aligned} \right.$$

an, und durch Elimination wird:

$$(26) \qquad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta} \left[\frac{2g}{l} \sin^2\vartheta - \omega_0^2 \sin^2\vartheta_0 (\cos\vartheta + \cos\vartheta_0) \right] \quad .$$

Es verschwindet also $d\vartheta / dt$, außer für $t = 0$, d. h. $\vartheta = \vartheta_0$, auch noch für einen anderen Wert $\vartheta = \vartheta_1$, während ein dritter $\vartheta = \vartheta_2$ als imaginär tatsächlich nicht in Betracht kommt, in den Formeln aber mit seinem reellen cos weitergeführt werden darf (die drei ϑ entsprechen den obigen drei z). Es wird nunmehr:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} dt &= \pm \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_2)}} \\ d\varphi &= \pm \omega_0 \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{\sin^2\vartheta_0 \, d\vartheta}{\sin\vartheta \sqrt{(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_2)}} \end{aligned} \right. ,$$

wo das positive oder negative Zeichen gilt, je nachdem $\vartheta_0 < \vartheta_1$ oder $\vartheta_0 > \vartheta_1$ ist; der eine dieser Werte ist die Maximal-, der andere die Minimalamplitude.

Vernachlässigt man in bezug auf ϑ_0 und ϑ_1 Glieder vierter Ordnung (es wird dann $\cos\vartheta_2 = -1$), so erhält man:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} + \sin^2\frac{\vartheta_1}{2}\right)\right] \quad , \tag{28}$$

(für das ebene Pendel wird die Minimalamplitude null, die Formel also mit der auf die ersten beiden Glieder abgekürzten Formel [12] identisch).

$$\left\{\begin{aligned} t + t_0 = \mp \frac{1}{16}\sqrt{\frac{l}{g}}\Big[&(10 - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)\arcsin\left(\frac{2\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0}\right) \\ &- \sqrt{(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)^2 - (2\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1)^2}\Big] \quad , \end{aligned}\right. \tag{29}$$

$$\left\{\begin{aligned} \varphi + \varphi_0 = \mp \frac{\sin\vartheta_0\sin\vartheta_1}{2\sqrt{2(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta_1)}}\Big[&\frac{-2}{\sqrt{(1-\cos\vartheta_0)(1-\cos\vartheta_1)}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(1-\cos\vartheta_0)(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)}{(1-\cos\vartheta_1)(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}} \\ &+ \tfrac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0}\right)\Big] \quad . \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Schließlich ergibt sich, daß, wenn ϑ einen ganzen Umlauf vollendet, φ sich nicht um 2π, sondern um

$$2\pi\left(1 + \frac{3}{2}\sin\frac{\vartheta_0}{2}\sin\frac{\vartheta_1}{2}\right) \tag{31}$$

ändert, also um mehr als 2π (PUISEUXscher Satz).

Das Schlußergebnis ist hiernach folgendes: Das sphärische Pendel beschreibt eine Serie ungeschlossener, im allgemeinen komplizierter Kurven, deren tiefster Punkt stets auf der unteren Halbkugel liegt; bei gewissen Vernachlässigungen, die für kleine Amplituden zulässig sind, können die Kurven mit einer Serie von ellipsenähnlichen Kurven verglichen werden, deren große Achse sich gleichförmig in der Bewegungsrichtung dreht, und zwar desto schneller, je höher, bei gleicher Lage des höchsten Bahnpunktes, der tiefste Bahnpunkt liegt; die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung ist angenähert:

$$\psi' = \frac{\frac{3}{4}\pi\vartheta_0\vartheta_1}{2T_0} \quad , \tag{32}$$

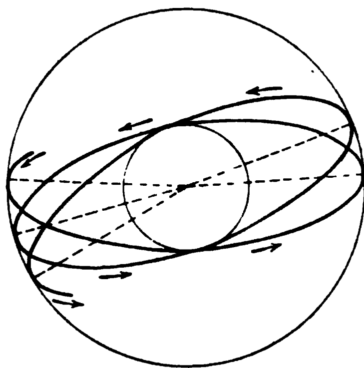
wo T_0 die auf unendlich kleine Schwingungen reduzierte einfache Schwingungsdauer ist. Die der Mechanik von VOIGT entnommene Figur 116 gibt eine Vorstellung von dem Typus der Bewegung.

Auf die allgemeinen theoretischen Untersuchungen, durch die das Problem des sphärischen Pendels gefördert worden ist, und unter deren Autoren namentlich EULER, LEGENDRE, PUISEUX, HERMITE, RESAL zu nennen sind, kann hier nicht eingegangen werden. Auch die neuesten Arbeiten von KOBB, DE SPARRE, HALPHEN, DE ST. GERMAIN, KLUYVER, GREENHILL und KRAGH[1] können nur erwähnt werden. Es sei aber folgendes bemerkt, weil es zeigt, wie stark die Bahn, ohne Vernachlässigungen, von der Ellipsenform abweicht: die Horizontalprojektion der Pendelkurve kann Inflexionspunkte haben, und zwar an den Stellen, wo die

[1] G. KOBB, C. R. **108**. 559. 1889. — DE SPARRE, Ann. soc. scient. Brux. **15**. 1891. — A. DE ST.-GERMAIN, Bull. soc. math. (2) **20**. 114. 1896; **22**. 95. 1898. — J. C. KLUYVER, Arch. néerl. (2) **6**. 162 1901. — A. G. GREENHILL, Nouv. ann. de math. (4) **2**. 241. 1902. — O. KRAGH, Inaug.-Diss. Kopenhagen 1902.

Spannung des Pendelfadens null wird — ein Fall, der natürlich nur eintritt, wenn die Maximalamplitude größer als $\pi/2$ ist.

Schließlich sei erwähnt, daß man die Bewegung des sphärischen Pendels vielfach experimentell verfolgt hat, wie das z. B. Czermak und Hiecke mittels ihres graphischen Pendels (p. 390) getan haben; hierbei ist die Theorie, soweit die Genauigkeit der Versuche reicht, voll bestätigt worden. Auf die störende Einwirkung der in Rede stehenden Drehung auf die Beobachtung der Drehung beim Foucaultschen Pendel wird noch zurückgekommen werden.


Figur 116.

Wenn Maximum und Minimum von z bezw. ϑ zusammenfallen, so ist überhaupt z bezw. ϑ konstant; die Bahn des Pendelkörpers liegt also in einer horizontalen Ebene und kann folglich, da sie außerdem der Kugeloberfläche angehört, nur ein Kreis sein. Nach dem Flächenprinzip, d. h. nach der Gleichung (4) ist dabei die Geschwindigkeit eine konstante, wie das auch schon aus dem Grundsatze des unzureichenden Grundes wegen der peripheren Symmetrie der Erscheinung folgt. Man nennt ein derartiges Pendel konisches oder Zentrifugalpendel. Es bietet einerseits theoretisches Interesse dar, sofern es eine Fallbewegung ohne Fall und ohne Beschleunigung ergibt, andererseits praktisches, insofern es in verschiedenen Formen, z. B. als Regulator, bei Terzenuhren u. s. w. Anwendung findet. Die konstante Geschwindigkeit und die Umlaufszeit ergeben sich, wenn α die konstante Neigung des Fadens gegen die Vertikale bedeutet.

$$(33) \qquad v = \sqrt{g\,l \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha} \quad ,$$

$$(34) \qquad 2\,T = 2\pi \sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{z}{g}} \quad ;$$

Die Periode ist also gleich der auf kleine Amplituden reduzierten eines ebenen Pendels von der Länge der Höhe des Aufhängepunktes über der Kreisebene.

Zusammensetzung zueinander senkrechter Pendelschwingungen. Das sphärische Pendel kann offenbar aus zwei ebenen, zueinander senkrechten kombiniert werden; es stellt dann einen besonderen Fall einer derartigen Kombination dar, nämlich den, wo die beiden Pendel gleiche Länge und damit gleiche Periode haben.[1] Zur Beobachtung und Fixierung der Kombination zweier aufeinander senkrechter Pendelschwingungen von beliebigen Perioden hat man verschiedene Apparate konstruiert, von denen hier nur zwei angeführt werden mögen. Bei dem einen, in England unter dem Namen Blackburne-Pendel bekannten, aber auch in Deutschland seit langer Zeit verbreiteten Apparat ragen von den beiden oberen Ecken eines Galgens zwei Fäden derart schräg herunter, daß sie sich in einer gewissen Höhe in einer Schlinge vereinigen und von da an entweder in der Mittellinie des Galgens gemeinsam herunterführen oder aber noch besser in einer zur Galgenebene senkrechten Ebene wieder auseinandergehen; am unteren Ende tragen sie ein Brett mit einem Trichter oder auch mit einem passend angebrachten Schreibstift. Das ganze Pendel kann nur senkrecht zur Galgenebene, das von der Schlinge nach unten sich erstreckende entweder in beliebiger oder nur in der

---

[1] Eine allgemeine Untersuchung über isoperiodische Systeme mit mehreren Freiheitsgraden hat Lord Rayleigh angestellt: Phil. Mag. (5) **46**. 567. 1898.

Galgenebene schwingen, so daß man die Zusammensetzung zueinander senkrechter Schwingungen in der Hand hat; durch Verschiebung der Schlinge kann man das Längenverhältnis der beiden Pendel in weiten Grenzen ändern. Der Schreibstift oder aus dem Trichter ausfließender Sand liefert auf einer Papierfläche die verschiedenen LISSAJOUSschen Figuren. Der Sand ist weniger behindert, der Stift schreibt feiner; zur Vereinigung beider Vorzüge kann man sich auch eines THOMSONschen Hebelschreibers mit elektrischem Antrieb bedienen. — Bei dem anderen Apparate sind die beiden Pendel, abgesehen von ihrer Anordnung an demselben Galgen, voneinander unabhängig, das eine besteht aus einem an Fäden hängenden Brett mit Stift oder Trichter, das andere aus einem großen, an Fäden hängenden Brett mit der Schreibfläche; bei zueinander senkrechter Bewegung beider Pendel erfolgt auch hier die Aufzeichnung der Kurven, und man ist in der Wahl des Periodenverhältnisses unabhängiger als bei der Schlinge. Auch dieser Apparat ist sehr verbreitet; neuere Konstruktionen haben u. A. RIGHI[1] und LECARME[2] angegeben, von denen die RIGHIsche sich durch elektrische Auslösungen für Beginn und Beschluß der Aufzeichnung, für Variierungen der Phasen u. s. w. auszeichnet.

B. Zusammengesetztes Pendel.

Physisches oder zusammengesetztes Pendel. Das mathematische Pendel, dem die bisherigen Betrachtungen gewidmet waren, ist nur eine Abstraktion von der Wirklichkeit. Tatsächlich kann man ein Pendel dieser abstrakten Gestalt nur mehr oder weniger nähern, muß es aber aus anderen Gründen häufig sogar völlig abweichend von ihm konstruieren. Es besteht dann, wenn man sich auf ebene Schwingungen beschränkt, aus einem irgendwie gestalteten Körper, der um eine horizontale Achse drehbar ist. Die Theorie dieses Apparats, den man physisches oder zusammengesetztes Pendel nennt, ist natürlich komplizierter als die des mathematischen; sie läßt sich aber, wenigstens was die Hauptpunkte betrifft, mit Leichtigkeit auf diese zurückführen. Man braucht nämlich nur zu fragen, welche Länge ein einfaches Pendel haben muß, um bei gleicher Amplitude die gleiche Schwingungsdauer zu besitzen wie das vorliegende zusammengesetzte Pendel. Man könnte für den Augenblick meinen, diese Frage dahin beantworten zu sollen, daß die betreffende Länge der Abstand des Schwerpunktes vom Drehpunkte sei. Es ist aber daran zu erinnern, daß der Schwerpunkt (siehe Artikel „Dynamik") einen Körper nur bei fortschreitenden Bewegungen vertritt, daß dagegen bei drehenden, also auch schwingenden Bewegungen an seine Stelle ein anderer tritt, dessen Lage sich mit Hilfe des Trägheitsmoments des Körpers (p. 340) leicht angeben läßt. Sein Abstand l von der Drehachse verhält sich zum Trägheitsmoment K, wie sich der Abstand s des Schwerpunktes von der Drehachse zum Trägheitsmoment $m s^2$ der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Körpermasse m verhält; in Formel

$$l : K = s : m s^2 \quad .$$

Es ergibt sich also

(35) $$l = \frac{K}{m s} \quad ,$$

oder, wenn u der Trägheitsradius um eine durch den Schwerpunkt gelegte Achse, also

(36) $$K = m(s^2 + u^2)$$

[1] A. RIGHI, Rend. Accad. Bologna 1894. — [2] J. und L. LECARME, C. R. **123.** 44. 1896; **124.** 356. 1897.

ist:

(37) $$l = \frac{s^2 + u^2}{s} \quad ;$$

hieraus ergibt sich dann die Schwingungsdauer zu

(38) $$T = \pi \sqrt{\frac{K}{g m s}} = \pi \sqrt{\frac{s^2 + u^2}{g s}} \quad .$$

Die Größe l heißt die Länge des dem physischen Pendel korrespondierenden mathematischen Pendels oder auch kürzer die reduzierte Länge des physischen Pendels; der Endpunkt der durch l dargestellten Strecke (allgemein Trägheitsmittelpunkt) wird Schwingungsmittelpunkt (oder kurz Schwingungspunkt) genannt.[1] Auch auf verschiedenen anderen Wegen, z. B. aus dem Energiesatze[2], kann man die Formel für l ableiten.

Beispiele für die Reduktion des physischen Pendels. 1. Der Faden sei so leicht, daß seine Masse vernachlässigt werden kann. Dagegen unterscheide sich das Pendel von einem einfachen dadurch, daß an dem Faden kein schwerer Punkt, sondern eine ausgedehnte homogene Kugel hängt. Das Trägheitsmoment der Kugel um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse ist (siehe Artikel „Dynamik“, p. 257, Gleichung [114]) $\frac{2}{5} m r^2$, wo m und r Masse und Radius der Kugel sind; also dasjenige um die Drehungsachse des Pendels $m(s^2 + \frac{2}{5} r^2)$, wo s der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Drehachse ist. Es wird also (f Fadenlänge):

(39) $$l = s + \frac{2}{5} \frac{r^2}{s} = f + r + \frac{2}{5} \frac{r^2}{f + r} \quad .$$

2. Hängt an dem wiederum zu vernachlässigenden Faden von der Länge f ein homogener Kreiszylinder von der Länge c, dem Radius r und der Masse m, so ist

$$s = f + \tfrac{1}{2} c \quad , \qquad K = m\left[\left(f + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right]$$

und folglich

(40) $$l = \frac{\left(f + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{12} + \frac{r^2}{4}}{f + \frac{c}{2}} \quad .$$

Besteht das Pendel unter Fortfall des Fadens überhaupt nur aus dem gedachten Zylinder, so hat man

(41) $$l = \frac{4 c^2 + 3 r^2}{6 c}$$

und wenn r zu vernachlässigen ist („Pendelstange“)

$$l = \tfrac{2}{3} c \quad .$$

[1] Die Frage des Schwingungspunktes ist von MERSENNE angeregt, von DESCARTES behandelt, aber erst von HUYGENS gelöst worden. Für die Lehre vom physischen Pendel ist dann grundlegend geworden die Abhandlung von F. W. BESSEL, Unters. über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Berl. Ak. Abh. 1826 (OSTWALDs Klassiker 7.) Eine eingehende historische Darlegung über die Entwickelung der Frage findet sich bei M. ZWERGER, Der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel. München 1889. — [2] Elementar z. B. bei A. WEILENMANN, Rep. d. Phys. **25.** 562. 1889.

Wenn endlich der Zylinder noch mit der Länge d über die Schneide hinausreicht, (was sich mittels einer beiderseits hervorragenden Schneide und einer diese hervorragenden Enden stützenden Unterlage erreichen läßt), so wird

$$(42) \qquad l = \frac{\frac{r^2}{4} + \frac{(c+d)^2}{12} + \frac{(c-d)^2}{4}}{\frac{c-d}{2}}$$

und bei vernachlässigtem r

$$(43) \qquad l = \tfrac{2}{3}\,\frac{c^2 - c\,d + d^2}{c - d} \quad .$$

3. Durch Kombination der Fälle 1 und 2 gelangt man zu dem besonders wichtigen Falle eines Pendels, welches aus einer Stange (oder einem Faden, Draht oder Stab) und einer am Ende derselben angebrachten Kugel besteht. Ist m wieder die Masse der Kugel und r ihr Radius, m_1 und r_1 die entsprechenden Größen für die Stange, deren Länge unterhalb der Drehachse c, oberhalb d, so ist

$$(44) \qquad l = \frac{(c+r)^2 + \frac{2}{5}r^2 + \frac{m_1}{m}\left[\frac{(c+d)^2}{12} + \frac{(c-d)^2}{4} + \frac{r_1^2}{4}\right]}{(c+r) + \frac{m_1}{m}\,\frac{c-d}{2}} \quad .$$

Hängt kein Stück über, so wird einfacher

$$(45) \qquad l = \frac{(c+r)^2 + \frac{2}{5}r^2 + \frac{m_1}{m}\left[\frac{c^2}{3} + \frac{r_1^2}{4}\right]}{c + r + \frac{m_1}{m}\,\frac{c}{2}} \quad .$$

Bei dünnen Fäden oder Drähten kann man hierin meistens r_1 vernachlässigen; kann man auch m_1 gegen m vernachlässigen, so kommt man auf die Formel (39) zurück; wenn endlich auch $\frac{2}{5}r^2$ gegen $(c+r)^2$ vernachlässigt werden darf, so heißt dies: Das Pendel darf innerhalb der gewünschten Genauigkeitsgrenzen als ein einfaches betrachtet werden. Beträgt r beispielsweise $5\,^0/_0$ von $c + r$,, so erreicht man bei Vernachlässigung von r im Zähler eine Genauigkeit von $1:1000$, bei $r = 1\,^0/_0$ eine solche von $1:25000$. Nicht selten kommt es auch vor, daß zwar bei der gewünschten Genauigkeit weder $\frac{2}{5}r^2$ gegen $(c+r)^2$ noch auch m_1 gegen m vernachlässigt werden darf, wohl aber beides gleichzeitig, weil hierdurch Zähler und Nenner des Ausdrucks für l annähernd in gleichem Maße verkleinert werden.

4. Ist an irgend einer Stelle des gewichtslosen Pendelfadens, etwa im Abstande s von der Drehachse, eine Masse m und am Ende des Fadens, im Abstande s_1, eine gleiche Masse konzentriert, so ist

$$(46) \qquad l = \frac{m s^2 + m s_1^2}{2m\left(\frac{s + s_1}{2}\right)} = \frac{s^2 + s_1^2}{s + s_1} \quad ;$$

liegt z. B. m in der Mitte des Fadens, so ist $l = \frac{5}{3}s = \frac{5}{6}s_1$. Sind die Massen m und m_1 verschieden, so wird

$$(47) \qquad l = \frac{m s^2 + m_1 s_1^2}{(m + m_1)\left[s + (s_1 - s)\frac{m_1}{m + m_1}\right]} = \frac{m s^2 + m_1 s_1^2}{m s + m_1 s_1} \quad .$$

Sind die Massen m und m_1 ausgedehnte Körper z. B. Kugeln, so hat man die Formeln des ersten Beispiels mit dieser zu verbinden.

Differentialpendel. Mit diesem Namen kann man ein Pendel bezeichnen, welches wie das in dem letzten Beispiel betrachtete aus zwei getrennten Massen besteht, bei dem diese aber auf entgegengesetzten Seiten der Drehachse sich befinden. Die Bedeutung dieses Apparats wird am deutlichsten, wenn man ihn mit der ATWOODschen Fallmaschine und mit der doppelten schiefen Ebene in Parallele stellt. Bei allen drei Apparaten hat man es mit zwei getrennten Massen zu tun; sind die Momente derselben gleich, so besteht Gleichgewicht, und zwar indifferentes; ist die eine Masse größer, so tritt Bewegung ein, aber mit einer in demselben Verhältnis geringeren Beschleunigung g', in dem das Übergewicht p kleiner ist, als die gesamte Masse $2P+p$. Der Unterschied der drei Apparate liegt nur darin, daß der eine diesen Satz für den vertikalen Fall, der zweite für den Fall auf der schiefen Ebene, der dritte für den Fall auf der Kreislinie demonstriert. Man hat hiernach zu erwarten, daß, da die Schwingungsdauer dieses Pendels (für gleiche Abstände l' der beiden Gewichte)

(48) $$T = \pi\sqrt{\frac{l'}{g'}} = \pi\sqrt{\frac{(2P+p)}{pg}l'} \quad ,$$

also sehr groß sein muß, auch die ihm korrespondierende Länge sehr groß ausfallen wird. In der Tat erhält man aus (47), wenn man das Zeichen von s_1 umkehrt, zunächst

$$l = \frac{ms^2 + m_1 s_1^2}{ms - m_1 s_1} \quad ,$$

und wenn man hierin $s = s_1 = l'$, $m = P + p$, $m_1 = P$ setzt:

(49) $$l = \frac{2P+p}{p}l' \quad ,$$

in Übereinstimmung mit (48). Man kann sich auf diese Weise Pendel herstellen, welche trotz kleiner Dimensionen eine sehr große Schwingungsdauer haben. Macht man z. B. eine leichte Holzstange jederseits 1 m lang, steckt auf die Enden Bleikugeln von je 1 Pfund und auf die eine derselben ein Übergewicht von 10 g, so erhält man eine Schwingungsdauer von fast 10 Sekunden, zu deren Erzielung man eines einfachen Pendels von fast 100 m bedurft hätte. Ferner kann man den Apparat analog wie die beiden anderen benutzen, um das Gesetz zu demonstrieren, daß die Schwingungsdauer umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der beschleunigenden Kraft ist; wendet man z. B. bei dem obigen Apparat ($2P = 1$ kg) der Reihe nach Übergewichte von $^1/_3$, $^1/_8$, $^1/_{15}$, $^1/_{24}$ kg an, so erhält man Schwingungsdauern, die sich innerhalb der Grenzen der Versuchsgenauigkeit wie $2:3:4:5$ verhalten.

Govisches Pendel.[1] Man bringe an einem leichten starren Stabe ein Laufgewicht an und bestimme die Schwingungsdauer, außer wenn das Gewicht am Ende sich befindet, auch noch bei drei anderen Abständen $b_1\, b_2\, b_3$ desselben von der Achse. Das Resultat sei $T\,T_1\,T_2\,T_3$; dann ist

(50) $$l = \frac{b_1 b_3(b_3-b_1)(T^2-T_2^2) - b_1 b_2(b_2-b_1)(T^2-T_3^2) - b_2 b_3(b_3-b_2)(T^2-T_1^2)}{b_1 b_3(T_1^2-T_3^2)(T^2-T_2^2) - b_1 b_2(T_1^2-T_2^2)(T^2-T_3^2) - b_2 b_3(T_2^2-T_3^2)(T^2-T_1^2)} .$$

Reversionspendel. Wenn man nach dem Gesagten die Länge eines physischen Pendels theoretisch berechnen könnte, so muß man doch dreierlei bedenken: 1. Daß diese Berechnung zahlreiche Messungen und Wägungen involviert,

[1] GOVI, C. R. **91.** 105. 1880.

2. daß sie desto komplizierter wird, je zusammengesetzter die Gestalt des Pendels ist und 3. daß die Berechnung die Homogenität jedes einzelnen der Teile des Pendels voraussetzt; diese Voraussetzung trifft aber fast nie völlig zu. Diese Mängel bezeichnen zugleich die Vorzüge des BOHNENBERGERschen Reversionspendels. Dasselbe besteht aus einer Stange, welche außer dem Pendelkörper zwei als Drehachsen dienende Schneiden, davon die eine verschiebbar, trägt; die Schärfen der beiden Schneiden sind einander zugekehrt. Im allgemeinen wird die Schwingungsdauer und folglich auch die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels eine andere sein, je nachdem das Reversionspendel um die eine oder die andere Achse schwingt, nämlich, wenn m die Masse des Pendels, k sein Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Schwerpunkt parallel zu den Schneiden gelegte Achse ist und s_1 und s_2 die Entfernungen des Schwerpunktes von den Schneiden sind:

(51) $$l_1 = \frac{m s_1^2 + k}{m s_1} \quad , \qquad l_2 = \frac{m s_2^2 + k}{m s_2} \quad .$$

Damit diese Ausdrücke gleich seien, muß die eine der beiden Größen $s_1\, s_2$ zu der anderen in der Beziehung

$$s_2 = \frac{k}{m s_1}$$

stehen, und es wird dann nach der ersten der obigen Gleichungen

(52) $$l = s_1 + s_2 \quad .$$

Ist also das Pendel so gearbeitet, daß der Schwerpunkt in der Ebene der beiden Schneiden liegt, so ergibt sich der Satz: die korrespondierende Länge eines auf beiden Schneiden isochron schwingenden Reversionspendels ist gleich dem Abstande seiner beiden Schneiden; für die Schwingungen um jede von beiden ist die andere der Schwingungspunkt. Durch eine einzige Längenmessung kann man also auf diese Weise l finden, ohne sonst etwas über die Verteilung der Massen ermitteln zu müssen. Sind die beiden Schwingungsdauern des Reversionspendels verschieden, so gibt es natürlich ebenfalls ein einfaches Pendel von der Länge $s_1 + s_2$, und seine Schwingungsdauer ist

(53) $$T = \sqrt{\frac{s_1 T_1^2 - s_2 T_2^2}{s_1 - s_2}} \quad ;$$

ist der Unterschied der beiden Schwingungsdauern nur gering und setzt man dann $T_1^2 - T_1^2 = \delta$, so findet man

(54) $$T = T_2 + \frac{s_1}{2(s_1 - s_2)} \cdot \frac{\delta}{T_2} \quad ;$$

auf diese Weise kann man sich helfen, wenn es aus Mangel an Zeit oder aus anderen Gründen nicht gelingt, die beiden Schwingungsdauern gleich zu machen. (Man beachte, daß T nicht etwa, wie man vielleicht vermutet hätte, zwischen T_1 und T_2 liegt, sondern größer als beide ist.) Man kann aber noch anders verfahren, nämlich l_1 und l_2 berechnen, ohne Gleichheit vorauszusetzen; man findet dann bei geeigneter Schreibweise

$$l_1 = (s_1 + s_2) \frac{T_1^2}{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2} + \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} \frac{T_1^2 - T_2^2}{2}} \quad ,$$

$$l_2 = (s_1 + s_2) \frac{T_2^2}{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2} + \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} \frac{T_1^2 - T_2^2}{2}} \quad .$$

Diese Ausdrücke haben den Vorteil, daß die vom Schwerpunkte abhängige Größe $s_1 - s_2$ nur in einem Korrektionsgliede, im übrigen aber nur der leicht zu messende Schneidenabstand $s_1 + s_2$ vorkommt.[1]

Das Reversionspendel ist vielfach modifiziert und vervollkommnet worden, namentlich zum Zwecke der Herstellung genauer äußerer Symmetrie, ohne daß doch der Schwerpunkt in die Mitte zwischen den Schneiden — was sich durch Anwendung zweier äußerlich gleicher zylindrischer Gewichte erreichen läßt, von denen das eine massiv, das andere hohl ist. Diese, von BESSEL herrührende Konstruktion hat dann DEFFORGES noch dahin verändert, daß er die Gewichte in das Innere des Pendelmantels verlegte.[2]

Ein Analogon des Reversionspendels ist das FINGERsche Pendel.[3] Dasselbe hat nur eine Schneide, aber zwei Massen m_1 und m_2 in den Abständen x_1 und x_2 von der Achse. Diese lassen sich miteinander vertauschen. Bleibt hierbei T konstant, so ist wieder

(55) $$l = x_1 + x_2 \quad .$$

Zu dem Falle einer gewichtslosen Stange mit zwei Massen vergleiche man ferner eine Arbeit von BAISCH.[4]

Allgemeines Problem der verschiedenen Aufhängepunkte. Das Reversionspendel stellt offenbar einen sehr speziellen Fall des allgemeinen Problems dar, die Perioden und ihre Beziehungen zueinander anzugeben, die ein Körper liefert, wenn er, an verschiedenen Punkten aufgehängt, als physisches Pendel benutzt wird; und insbesondere diejenigen Aufhängepunkte zu ermitteln, für welche die Perioden gleich werden. Mit dieser letzteren Aufgabe haben sich u. A. BÖKLEN und RUOSS[5] beschäftigt. Nach BÖKLEN liegen alle Aufhängepunkte für isochrone Schwingungen auf oder zwischen den beiden Mänteln einer Fläche, die, wenn a, b, c die Hauptträgheitsradien durch den Schwerpunkt sind und zur Abkürzung

$$x^2 + y^2 + z^2 = s^2$$

gesetzt wird, lautet:

(56) $$\frac{x^2}{a^2 - ls + s^2} + \frac{y^2}{b^2 - ls + s^2} + \frac{z^2}{c^2 - ls + s^2} = 0 \quad ;$$

es ist das offenbar eine Fläche, die aus einer Wellengeschwindigkeitsfläche durch Verlängerung ihrer Radien um die halbe Länge des isochronen einfachen Pendels l erhalten wird. Liegt der Aufhängepunkt auf einem der beiden Mäntel, so gibt es nur eine, liegt er zwischen ihnen, so gibt es zwei Schwingungsachsen; durch die vier Punkte endlich, in denen beide Mäntel zusammenstoßen, gehen unendlich viele Schwingungsachsen. Auf einer durch den Schwerpunkt gehenden beliebigen Geraden gibt es beiderseits vier Punkte mit einer, einen Bereich von Punkten mit zwei und einen Bereich ohne isochrone Schwingungsachse. Eine besondere Stellung nehmen aber diejenigen beiden Geraden durch den Schwerpunkt ein, die in die Asymptoten der Fokalhyperbel des reziproken Ellipsoids (p. 253) fallen, die also in den Ebenen des größten und des kleinsten Trägheitsmoments liegen: auf jeder von ihnen liegen vier Punkte mit unendlich vielen Schwingungsachsen, so daß es für jeden Körper im ganzen acht solcher Aufhängepunkte gibt, die einer bestimmten Länge l des isochronen einfachen Pendels entsprechen.

---

[1] Das Reversionspendel ist von BOHNENBERGER (Astronomie, Tüb. 1811) und von KATER (Phil. Trans. Roy. Soc. 1818, p. 13) angegeben worden; als Vorläufer der Erfindung ist PRONY anzusehen (C. R. **107.** 1657. 1888). — [2] F. W. BESSEL, Astr. Nachr. **30.** 1. 1849. — CH. DEFFORGES, Mém. du dépot gén. de la guerre **15.** 1894. — [3] FINGER, Ber. d. Wien. Ak. (2) **84.** 170. 1881. — [4] BAISCH, Progr. Realanst. Heilbronn 1895/96. — [5] O. BÖKLEN, CRELLES Journ. **93.** 177. 1882; Ztschr. f. Math. u. Phys. **28.** 304. 1883. — H. RUOSS, CRELLES Journ. **112.** 53. 1893.

In etwas anderer Weise geht RUOSS vor: er greift zu jedem Schwerpunktsstrahle die auf ihm senkrechte Gruppe von Schwingungsachsen heraus und findet als die Regelfläche, deren Erzeugende einem Schwerpunktsstrahle angehören, so daß sie als Drehachsen isochrone Schwingungen liefern, die Fläche vierter Ordnung:

$$z(z-l)(x^2-y^2)+(\alpha x^2+\beta y^2)=0 \quad . \tag{57}$$

Es gibt aber unter den Schwerpunktsstrahlen solche ohne reelle Drehachsen; sie liegen für gegebenes l im Innern eines gewissen Kegels. Endlich sind die Achsen der kürzesten Periode eines Körpers Mantellinien eines Kreiszylinders, der um die größte Achse des Zentralellipsoids mit ihrer reziproken Länge als Radius beschrieben wird.

BÖKLEN hat zur Prüfung der Theorie ein rechtwinkliges Parallepipedon aus Messing von den Kantenlängen $\mathfrak{a}=1$, $\mathfrak{b}=6$, $\mathfrak{c}=12$ cm an einem geeigneten Apparate schwingen lassen; hängt man es an einem Drahte auf, dessen Richtung einer der beiden Wurzeln der Asymptotengleichung

$$\frac{z^2}{x^2}+\frac{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{a}^2}=0 \quad . \tag{58}$$

entspricht, so werden, wie es sein muß, die Schwingungen für alle durch einen Punkt des Drahtes gehende Achsen isochron; die Länge des isochronen einfachen Pendels ist 10 cm, die Zahl der Schwingungen 189 in der Minute.

Demonstrationspendel. Zur Demonstration der verschiedenen Gesetze und Mannigfaltigkeiten physischer Pendel ist eine große Zahl von veränderlichen und zusammenlegbaren Apparaten gebaut worden, aus der hier nur die von OBERBECK, HAMMERL und GRIMSEHL[1] beispielsweise herausgegriffen werden können. Das Pendel von OBERBECK besteht aus einem horizontalen Messingzylinder, in den vier Drähte kreuzförmig eingesetzt sind; der Zylinder geht in Spitzen, auf den Drähten sind vier Gewichte verschieb- und festklemmbar. Man sieht leicht ein, daß und in welcher Weise man hiermit den Einfluß von Drehungs- und Trägheitsmoment gesondert studieren und die verschiedenen Gleichgewichtsformen erläutern kann. — HAMMERL setzt ein physisches Pendel aus einer Anzahl einfacher zusammen und zeigt, daß man von diesen eines wieder wegnehmen kann, ohne die Periode zu ändern; dieses ist dann offenbar das korrespondierende einfache Pendel. — Das GRIMSEHLsche Pendel ist eigentlich mehr zur Vergleichung von Trägheitsmomenten bestimmt, kann dann aber bei geeigneter Konstruktion das Reversionspendel vertreten. Es besteht aus einer leichten Stange, an der zwei einander zugekehrte Stahlschienen sitzen; die obere dient als Aufhängung, die untere bildet das Lager für eine um ihren Schwerpunkt leicht drehbare Scheibe; wenn sich nun bei den Pendelschwingungen die Scheibe dreht, kommt nur ihre Masse, wenn sie dagegen festgeklemmt ist, auch ihr Trägheitsmoment in Frage; durch ein Reguliergewicht kann man schließlich erreichen, daß der Schneidenabstand genau gleich der reduzierten Länge ist.

Schwingungen rollender Körper. Die Frage, wie sich ein Körper bewegt, wenn er auf einer Fläche, insbesondere auf einer horizontalen Ebene derart rollt, daß er nach bestimmter Drehung wieder umkehrt und nun Schwingungen ausführt, ist von Mathematikern vielfach untersucht worden, namentlich für Kugel und Zylinder; es müssen dabei natürlich bestimmte Beziehungen für die Gestalts- und Massenverteilungsverhältnisse bestehen. Unter Umständen werden dabei

[1] A. OBERBECK, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **1**. 253. 1888. — H. HAMMERL, ibid. **3**. 8. 1890. — E. GRIMSEHL, Verh. D. phys. Ges. 1904, p. 283. — Man vgl. ferner F. C. G. MÜLLER, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **1**. 205; **2**. 227. 1889.

sogar tautochrone Schwingungen auftreten, beim Zylinder z. B. unter Bedingungen, die, infolge einer gestellten Preisaufgabe, von SCHUH untersucht worden sind; es wird die Schwerpunktskurve und die Umrißkurve ermittelt; einen Spezialfall hat übrigens schon HUYGENS gelöst.[1]

C. Spezielle Probleme.

Fehlerquellen. Bei einigermaßen genauen Pendelbeobachtungen ist eine Reihe von Fehlerquellen zu berücksichtigen oder zu beseitigen, die das Ergebnis in merklicher Weise beeinträchtigen können. Es gehören hierher, außer dem Einfluß der Amplitude selbst (s. oben), namentlich der Einfluß der Aufhängung, der Elastizität, der Temperatur und der umgebenden Luft, sowie endlich die Mitschwingung des Stativs. Diese Punkte müssen der Reihe nach kurz betrachtet werden. In bezug auf ausführlichere Darstellung muß auf die geodätischen und astronomischen Zeitschriften und Werke, sowie auf die bezüglichen Monographien verwiesen werden; unter letzteren seien, außer der von BESSEL (s. oben), noch die von PRESTON und HELMERT[2], welch letztere sehr reiches Material in organischer Anordnung enthält, angeführt; spezielle Abhandlungen folgen später.

Einfluß der Aufhängung. Die Aufhängung eines Pendels kann und muß sehr verschiedenartig sein, je nachdem es sich um geringere oder größere Präzision handelt, je nachdem das Pendel ebene oder räumliche Schwingungen ausführen soll und je nachdem der Pendelkörper an einem Faden oder an einer Stange befestigt ist. Fäden und Drähte kann man einklemmen oder einschrauben, für gewöhnliche Zwecke auch anknüpfen, ferner kann man sie von kleinen Zylindern sich abwickeln lassen; bei Stangenpendeln, sowie überhaupt bei allen genaueren Versuchen muß man, wie bei genauen Wagen, Schneiden und Lager anwenden, für die Stahl oder Achat geeignete Materialien sind; bei ganz genauen Untersuchungen ist sogar ein zusammengesetztes System von Schneiden erforderlich, und man kann hierbei mit großem Vorteil die Idee des kardanischen Ringes mit verwenden, wodurch man ein sogen. GAUSSisches Pendel erhält (s. w. unten). Bei allen Schneidenpendeln ist die Schneide die Drehachse. Sie soll es wenigstens sein, ist es aber nicht genau, weil sie niemals eine mathematische Linie, sondern stets ein schmaler Teil einer Zylinderfläche von sehr kleinem Halbmesser r ist. LAPLACE und BESSEL zeigten, daß hierdurch die beobachtete Pendellänge l' zu groß ausfällt; die wahre l ist, wenn s der Schwerpunktsabstand ist:

$$l = l'\left(1 - \frac{r}{s}\right) \quad ; \tag{59}$$

der Fehler ist also nicht so ganz unbedeutend, da er direkt proportional mit r ist; er beträgt z. B. für $r = 0{,}1$ mm und $s = 0{,}5$ m immerhin 0,0002 des Wertes. Da man aber r nur schwer bestimmen kann, tut man besser seinen Einfluß zu eliminieren, wofür BESSEL verschiedene Methoden angegeben hat. Benutzt man z. B. zwei Pendel, die aus derselben Kugel, derselben Schneide, aber verschieden langen Drähten gebildet sind, so kann man aus den Schwingungsdauern und dem Längenunterschied der Drähte die korrespondierenden Längen berechnen, unabhängig von der Schärfe der Schneide (und zugleich unabhängig von der Homogenität der Kugel).[3]

Hierzu kommen dann weiter die Einflüsse des Druckes, des Rollens und Gleitens der Schneide auf der Unterlage. Diese Einflüsse sind sehr schwer streng

[1] F. SCHUH, Nieuw Archief (2) 5. 277. 1901. — [2] E. D. PRESTON, Bull. phil. Soc. Washington 9. 115. 1893. — F. R. HELMERT, Beiträge zur Theorie des Reversionspendels, Veröff. Kgl. Preuss. Geod. Inst. Leipzig 1898. — [3] Vgl. F. W. BESSEL, a. a. O., sowie F. NEUMANN, Einl. i. d. theor. Physik. Leipzig 1883. p. 78.

und allgemein zu ermitteln, man muß sich mit partiellen und angenäherten Lösungen begnügen. Das Rollen ist schon von Euler behandelt worden, und Denizot hat neuerdings daran angeknüpft, wobei er von unendlich kleinen zu endlichen Amplituden überging. Über die mit der Amplitude veränderlichen Störungen hat Wilsing Untersuchungen angestellt und gefunden, daß sie proportional mit der Amplitude wachsen und eine Vergrößerung der Periode bewirken, sowie, daß sie dem Kubus der Periode direkt, dem Trägheitsmoment des Pendels umgekehrt proportional sind. — Das Gleiten der Schneide hat u. A. Defforges eingehend studiert; es zeigte sich bei einem Pendel durch Bildung einer Furche von 10 μ Breite und 0,5 μ Tiefe an und konnte mittels zweier Glasplatten nach der Interferenzmethode gemessen werden. Die Formel für die Schwingungsdauer unter Berücksichtigung des Gleitens läßt sich leicht aufstellen und daraus die Korrektion ableiten; sie erweist sich als direkt dem Gewicht, umgekehrt der Länge proportional. Derselbe Autor hat dann auch den Fall behandelt, daß die Schneide zum Teil rollt, zum Teil gleitet. — Schließlich sei noch auf eine Mitteilung von Hasemann über eine neue Pendelaufhängung hingewiesen.[1]

Über das Gaussische Pendel ist, da es nach verschiedenen Richtungen Interesse bietet, noch einiges anzugeben. Es hat die Dimensionen eines Sekundenpendels, starre Stange mit Linse und eine Cardanische Aufhängung von besonderer Einrichtung. Es ruht nämlich ein Ring mit zwei in einer Geraden liegenden Schneiden auf dem festen Stativ, während andererseits das Pendel an dem Ringe ebenfalls mit einer Schneide hängt, deren Richtung aber zu der der beiden anderen senkrecht ist; das Pendel kann also beliebig schwingen. Die Theorie des Apparats ist namentlich von Kammerlingh-Onnes, Lorentzen, Samter und Bräuer[2] sehr eingehend durchgebildet worden; auch sind, besonders von Kammerlingh-Onnes, vervollkommnete Formen angegeben worden.

Einfluß der Elastizität. Bei feinen Messungen muß auch die Elastizität des Pendels berücksichtigt werden, und zwar sowohl seine Dehnung, als auch seine Biegung; erstere ist relativ leicht zu erledigen, nicht aber letztere. Die strenge Theorie ist hier kaum durchführbar; indessen hat Helmert (a. a. O.) gezeigt, wie man zu befriedigenden und durch die Beobachtung bestätigten Formeln gelangt, wenn man die Annahme einer neutralen Faserschicht macht, zu der der Querschnitt des Pendelkörpers überall senkrecht bleibt, ohne seine Form zu ändern. — Auf Grund ähnlicher Erwägungen hat bald darauf Almansi die Bewegung eines deformierbaren Reversionspendels studiert, dessen Stange aus einem Hohlzylinder gebildet und jenseits der Schneiden mit zylindrischen Massen beschwert ist. Der Unterschied der Schwingungsdauern dieses Pendels und des entsprechenden starren wird durch eine Korrektionsgröße dargestellt.[3]

Einfluß der Temperatur. Infolge der thermischen Ausdehnung ändert sich die Länge und somit die Schwingungsdauer eines Pendels mit der Temperatur, und zwar in einem sehr stark in Betracht kommenden Maße. Man muß sich daher eine Korrektionstabelle für den ganzen anzuwendenden Temperaturbereich verschaffen, und zwar entweder theoretisch auf Grund des Ausdehnungskoeffizienten des Materials, oder empirisch durch systematische Beobachtung bei ausgewählten

[1] L. Euler, N. Acta Ac. Petr. **6.** 1788. — A. Denizot, Verh. D. phys. Ges. **3.** 213. 1901. — J. Wilsing, Astr. Nachr. **120.** 161. 1888. — Defforges, Journ. de phys. (2) **7.** 239. 347. 455. 1888; (3) **2.** 193. 1893; Vh. perm. Gradm.-Komm. 1891. p. 154. — Vgl. auch G. Lorenzoni, Atti Ist. Vers. (7) **5.** 9. 1894. — A. Hasemann. Ztschr. f. Instrumentenk. **13.** 314. 1893. — [2] C. F. Gauss, Briefe zwischen A. v. Humboldt u. C. F. Gauss. Leipzig 1877. p. 66. — H. Kammerlingh-Onnes, Inaug.-Diss. Grin. 1879; N. Arch. v. Wiskunde **5.** 58. 135. 1879; **6.** 173. 1880. — G. Lorentzen, Astr. Nachr. **114.** 241. 1886. — H. Samter, Theor. d. Gaussischen Pendels u. s. w. Berlin 1886. — T. Bräuer, Inaug.-Diss. Hannover 1888. — [3] Den Einfluß der Elastizität haben zuerst Peirce und F. Kühnen erkannt. — Wegen Helmert s. oben. — E. Almansi, Nouv. Cim. (4) **9.** 260. 1898; (4) **10.** 85. 305. 1899.

Temperaturen; letzteres ist aus leicht ersichtlichen Gründen vorzuziehen. Dabei sind zeitliche, namentlich rasche Temperaturschwankungen zu vermeiden, da man sonst nicht sicher ist, inwieweit das Pendel die vom Thermometer angegebene Temperatur besitzt.[1]

Zur Beseitigung des Temperatureinflusses dient das Kompensationspendel in seinen verschiedenen Formen, von denen namentlich zwei sich hervorragend bewährt haben. Bei dem einen, dem Rostpendel, besteht das Gestänge aus einem System von Stangen aus verschiedenen Metallen, die so angeordnet sind, daß sich einige von ihnen nach unten, andere nach oben ausdehnen, im ganzen aber gerade ein Ausgleich erfolgt; oder auch derart, daß infolge der verschiedenen Ausdehnung der verschiedenen Metalle eine Durchbiegung und damit eine gerade ausgleichende Hebung des Gestänges erfolgt. Ein kompensiertes Doppelpendel ist von NIPPOLDT[2] angegeben worden; die beiden Arme sind aus verschiedenen Metallen, die Linsen, die sie tragen, stehen in geeignetem Massenverhältnis; die Justierung erfolgt durch Variation des Linsenabstandes. Bei dem Kompensationspendel von HOSER[3] besteht die Stange aus einem Stahlstab, einem diesen umgebenden Aluminiumrohr und einem dieses wiederum umgebenden Stahlrohr; hierdurch wird volle Kompensation und gute Temperaturausgleichung erzielt. — Die andere der gedachten Konstruktionen ist das Quecksilberpendel. Hier besteht entweder der Pendelkörper aus einem Gefäß, das teilweise mit Quecksilber gefüllt ist, oder die Stange selbst ist hohl und bis zur Hälfte oder bis zu zwei Drittel mit Quecksilber gefüllt; durch die Hebung des Quecksilbers wird die Senkung der festen Teile ausgeglichen. Zur Justierung kann man entweder, wie bei dem Grahampendel, Quecksilber zu- oder ausgießen; oder, wie bei den Apparaten von RIEFLER[4] unter der Linse einige Scheibchen anbringen, von denen man einige zufügt oder abnimmt. Neuerdings hat allerdings RIEFLER[5] auch Kompensationspendel nach dem ersten Prinzip gebaut und zu sehr hoher Vollkommenheit gebracht.

Schließlich käme auch noch ein etwaiger Temperaturgradient in der vertikalen Ausdehnung des Pendels in Frage; er läßt sich aber, bis auf einen fast immer zu vernachlässigenden Fehler, durch Bildung des Mittelwertes der Temperatur eliminieren.

Einfluß der umgebenden Luft. Dieser Einfluß kommt für alle feineren Beobachtungen in sehr beträchtlichem Maße zur Geltung, und zwar sowohl hinsichtlich der Periode als auch hinsichtlich der Amplitude der Schwingungen. In ersterer Hinsicht ist zu betonen, daß es sich hier um einen dreifachen Einfluß handelt, einen aerostatischen, einen aërodynamischen und einen von der Reibung herrührenden. Um den aerostatischen Einfluß zu berücksichtigen, muß man nach dem archimedischen Prinzip die verdrängte Luftmasse m' und deren Schwerpunktsabstand s' von der Drehachse in Rechnung ziehen, also das Produkt ms durch $ms - m's'$ ersetzen. Durch den aerodynamischen Einfluß andererseits wird das Trägheitsmoment K um eine Größe $\varepsilon K'$ erhöht, wo z. B. $K' = m's'^2$ gesetzt werden kann und der Faktor ε alsdann für jede Form des Pendelkörpers empirisch zu bestimmen ist; nach BESSEL (a. a. O., wo auch die Einzelheiten nachzusehen sind) kann man hierzu zwei Pendel von gleicher Gestalt und fast gleicher Periode, aber verschiedener Masse benutzen. Schließlich wird also die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels:

---

[1] Man hat zu diesem Zwecke sogar besondere Thermometer gebaut bezw. sie in die Pendelkörper eingebaut. — Wegen thermischer Nachwirkungen vgl. man eine Abhandlung von J. WILSING, Ztschr. f. Instrumentenk. **17.** 109. 1897. — [2] W. A. NIPPOLDT, ibid. **9.** 197. 1889. — [3] V. HOSER, Zentr.-Ztgt. f. Optik u. Mechanik **18.** 61. 1897. — [4] S. RIEFLER, Zentr.-Ztg. f. Optik u. Mechanik **13.** 238; Ztschr. f. Instrumentenk. **13.** 88. 1893. — [5] S. RIEFLER, Das Nickelstahlkompensationspendel. München 1902. (D.R.P.)

(60) $$l = \frac{K + \varepsilon m' s'^2}{ms - m's'} \quad .$$

Berücksichtigt man dann drittens noch die Reibung, und zwar sowohl die äußere des Pendels an der Luft als auch die innere der letzteren, so gelangt man zu sehr verwickelten Formeln, von denen hier die vielfach bewährte von O. E. MEYER[1] angeführt sei; sie bezieht sich auf eine Kugel vom Radius a und Trägheitsmoment K als Pendelkörper, hängend an einem Faden von der Länge b und der Masse n, der seinerseits die Luftmasse n' verdrängt; c endlich ist eine von der Reibung abhängige Konstante:

(61) $$l = \frac{(m + c\,m')(b + a)^2 + K + \frac{1}{3} n\, b^2}{(m - m')(b + a) + \frac{1}{2}(n - n')\, b} \quad .$$

Bei Vernachlässigung der äußeren Reibung wird die Konstante c:

(62) $$c = \frac{1}{2} + \frac{9}{4a} \sqrt{\frac{2\eta}{\pi\varrho} T} \quad ,$$

wo ϱ die Dichte, η die innere Reibung des Mediums und T die Periode ist. O. E. MEYER hat übrigens auch gezeigt, daß die Kompressibilität der Luft, an die man ebenfalls denken wird, vernachlässigt werden darf. Im übrigen sei auf spätere Artikel verwiesen (Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten, Aerodynamik und Reibung).

Man kann die obigen Formeln prüfen, indem man ein und dasselbe Pendel in verschiedenen Medien, speziell Gasen, oder in Luft von allmählich gesteigerter Verdünnung schwingen läßt. Bei gewöhnlichen Pendeln schwächt man den Luftwiderstand dadurch ab, daß man den Pendelkörpern die Gestalt flacher Linsen gibt, die die Luft gewissermaßen durchschneiden. Beim Reversionspendel kann man ihn gänzlich eliminieren, wenn man, wie schon erwähnt, die Linsen nach Form, Größe und Masse geeignet auswählt; es verschwindet dann sowohl die aerostatische als auch die aerodynamische Korrektion, und es wird wie früher $l = s_1 + s_2$. Man vergleiche hierüber auch eine Arbeit von NIPPOLDT.[2]

Ganz wesentlich ist bekanntlich der Einfluß des Mediums auf die Amplitude. Die Grundgleichung muß nämlich mit Rücksicht auf ihn durch ein Glied ergänzt werden, das von der Geschwindigkeit abhängt und, wie sich gezeigt hat, für die meisten Fälle mit hinreichender Genauigkeit dieser Geschwindigkeit direkt proportional gesetzt werden darf, so daß man die neue Gleichung für kleine Bögen:

(63) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\frac{\varkappa}{T}\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{g}{l}\vartheta = 0$$

und als ihre Lösung eine Schwingung erhält, deren Amplitude nach dem Gesetz

(64) $$A = A_0 \cdot e^{-\varkappa \frac{t}{T}}$$

mit der Zeit abnimmt. Man nennt $\varkappa$ das Dämpfungsverhältnis ($e^{\varkappa}$ ist das Verhältnis einer Amplitude zur nächstfolgenden), und seinen Logarithmus, der für die Rechnung bequemer ist, das logarithmische Dekrement. Die Amplituden nehmen also in geometrischer, ihre Logarithmen in arithmetischer Progression ab, das Dämpfungsverhältnis bezw. das logarithmische Dekrement ist konstant. Im übrigen hängt das Dämpfungsverhältnis natürlich in hohem Maße von den Massen

---

[1] O. E. MEYER, CRELLES Journ. **73.** 31. 1871; **75.** 336. 1872; POGG. Ann. **142.** 481. 1871. Aus der theoretischen Literatur seien ferner herausgehoben: G. G. STOKES, Cambr. Phil. Trans. **9.** (II) 8. 1856; Math. a. phys. Papers **3.** 1. 1901. — J. BOUSSINESQ, C. R. **100.** 935. 974. 1885. — [2] W. NIPPOLDT, a. a. O.

und Trägheitsmomenten des Pendels und des Mediums, von dessen Dichte und innerer Reibung ab u. s. w. Man vergleiche hierüber namentlich den Artikel „Reibung". Wenn sich die Konstanz des logarithmischen Dekrements nicht bewährt, muß man versuchen, noch ein Glied mit dem Quadrat der Geschwindigkeit hinzuzufügen, wodurch sich aber die Verhältnisse erheblich komplizieren. Nur sei erwähnt, daß, wie DÉCOMBE[1] nachgewiesen hat, die Schwingungen von kleiner Amplitude auch bei beliebigem Widerstandsgesetz isochron bleiben. Schließlich ist zu beachten, daß zu dem Luftwiderstand noch die Reibung an der Aufhängung hinzukommt; sie wirkt im großen ganzen in ähnlichem Sinne, läßt sich aber exakt schwer in Rechnung ziehen.

Auch den hier in Rede stehenden Einfluß kann man durch sukzessive Auspumpung des Schwingungsraumes experimentell studieren. In einem gut luftleeren Raume kann man es schließlich, wenn man auch noch eine Aufhängung von möglichst geringer Reibung wählt, dahin bringen, daß ein Pendel tagelang, ja wochenlang seine Schwingungen fortsetzt.[2] Dahingegen muß man, um im Luftraume die Pendelschwingungen dauernd zu erhalten, für einen geeigneten Kraftersatz Sorge tragen. Die hierzu bei Uhren benutzten Methoden sind bekannt und gehören nicht hierher; bei wissenschaftlichen Untersuchungen spielt der elektrische Kraftersatz[3] die wichtigste Rolle, wie man denn z. B. zwischen zwei Trockensäulen aus Gold- und Silberpapier ein Pendel infolge der elektrischen Impulse schon jahrelang in Gang erhalten hat — ein früher beliebtes Beispiel für das vermeintliche perpetuum mobile; auch magnetischer Kraftersatz ist angewandt worden.

Mitschwingen. Ein in mehreren Hinsichten interessantes und wichtiges Problem ist das des Mitschwingens eines Pendels mit einer anderen Schwingung, welche selbst auch wieder von einem Pendel herrühren kann, aber auch irgendwie anders erzeugt wird. Die hauptsächlichsten hierher gehörigen Erscheinungen sind folgende.

Es ist bekannt, daß man ein Pendel dadurch in Schwingungen versetzen kann, daß man den Aufhängepunkt selbst in periodische Bewegung bringt; zur einfachen Demonstration kann man hierzu einfach den Aufhängepunkt in die Hand nehmen und hin und her bewegen. Dabei zeigt sich sofort, daß nur dann, wenn die Periode des Aufhängepunkts mit der Eigenperiode des Pendels übereinstimmt, die Pendelschwingungen kräftig werden, während sich sonst die Bewegung des Pendelkörpers auf die selbstverständliche Reaktionsbewegung beschränkt; in gewissen Zwischenfällen, wo zwischen der Periode des Aufhängepunktes und der des Pendels ein einfaches Zahlenverhältnis besteht, kommen nur unter gewissen, die Phasenverhältnisse betreffenden Bedingungen noch Pendelschwingungen und auch dann nicht so kräftige wie im Hauptfalle zustande. In der Tat lehrt die Theorie, daß die Verhältnisse im allgemeinen sehr verwickelt sind; es sei u. A. auf die Arbeit von RONKAR[4] hingewiesen. Immerhin kann man nach diesem Verfahren eine Reihe von Resonanz- und Interferenzerscheinungen studieren, die den betreffenden akustischen ganz analog sind. — Ein ähnliches Problem behandelt auch BURGATTI[5], ferner erinnere man sich an das schon erwähnte EULERsche Problem, wo die Schneide als rollend angesehen wird. Endlich hat BARUS[6] den interessanten Fall einer Taschenuhr studiert, die, geeignet aufgehängt, durch ihre Unruhe in Pendelungen versetzt

[1] L. DÉCOMBE, C. R. **133.** 147. 1901. — [2] BOTTOMLEY, Phil. Mag. **23.** 72. 1887. — [3] Wegen eines neueren derartigen Pendels vgl. C. FÉRY, C. R. **130.** 1248. 1900. — Ferner sei hingewiesen auf Abhandlungen von LIPPMANN, C. R. **122.** 104. 1896; Journ. de phys. (5) **5.** 429. 1896; C. R. **127.** 15. 1898. — A. GUILLET, ibid. **127.** 94. 1898. — F. v. HEFNER-ALTENECK, Berl. Ber. 1903. p. 842. — [4] E. RONKAR, Bull. Acad. Belg. (3) **14.** 296. 1887. — [5] P. BURGATTI, Rend. Accad. Linc. (5) **9.** (2) 295. 1900. — [6] C. BARUS, Phil. Mag. **50.** 595. 1900.

wird (bis zu 18° Amplitude), wobei sich sehr merkwürdige Illustrationen teils zur Lehre von der Resonanz, teils für die Bewegung eines Systems mit zwei Freiheitsgraden ergeben (so kann z. B. die Uhr in gleicher Phase mit der Unruhe oder in entgegengesetzter pendeln, in jenem Falle ist die Periode lang, in diesem kurz u. s. w.).

Hieran schließt sich ein Problem an, das zwar hauptsächlich in mathematischer Hinsicht durchgearbeitet worden ist, aber wenigstens Erwähnung verdient: das Problem eines Pendels, das an einem anderen hängt. Die Theorie ist u. A. von RESAL bis zur Formulierung der Gleichungen geführt worden; die allgemeine Integration ist jedoch kaum möglich. Experimentell hat sich z. B. DE JONQUIÈRES[1] mit den Erscheinungen beschäftigt; es muß aber an diesem Hinweise genügen.

Von besonderem Interesse ist das Mitschwingen eines Pendels mit einem anderen, mit dem es irgend einen Zusammenhang hat, z. B. durch eine elastische Schnur oder auch nur durch die Gemeinsamkeit des Stativs. Apparate zu derartigen Versuchen haben u. A. ISENKRAHE, OBERBECK, HOLTZ, DE LA RIVE und KLEMENČIČ[2] angegeben; die Hauptergebnisse der Versuche sind folgende: Ein regelrechtes Mitschwingen erfolgt bei einfachen Pendelschwingungen nur bei gleicher Periode, bei zusammengesetzten auch bei gewissen ganzzahligen Periodenverhältnissen, je nach dem Charakter der zusammengesetzten Schwingung. Der Verlauf der Erscheinung ist im allgemeinen der, daß das erregende Pendel das ruhende in Schwingungen versetzt und daß, während letztere zunehmen, erstere abnehmen, unter Umständen auch null werden können, darauf kann sich das Spiel im umgekehrten Sinne wiederholen u. s. w.; es ist nicht schwer, mehrere derartige Übertragungen zu beobachten, wobei dann die Periode der Übertragung von dem Grade des Zusammenhangs der beiden Pendel abhängt. Ferner wird die Periode der Pendelschwingungen selbst gegenüber ihrem freien Werte ein wenig herabgedrückt. Endlich kann sich unter Umständen, bei allmählich sich ausgleichenden Maximis und Minimis der Amplituden, ein Endzustand herausbilden, bei dem die Pendel synchron wie ihr Schwerpunkt schwingen, d. h. wie ein starres System mit konstanter Fadenspannung.

In neuerer Zeit sind derartige Versuche wieder in größerem Maßstabe aufgenommen worden im Hinblick auf die für alle feineren Anwendungen des Pendels wichtige Frage des Mitschwingens des Stativs, des Pfeilers und des Untergrundes des Pendels und des Einflusses, den dieses Mitschwingen auf das Pendel selbst ausübt. Man hat hierfür verschiedene statische und dynamische Methoden angewandt, von denen das sogenannte Wippverfahren — taktmäßige Ausübung von Stößen, gemessen durch ein Dynamometer — das vorzüglichste war, bis es eben durch das noch überlegene Verfahren der Anwendung eines zweiten Pendels in den Hintergrund gedrängt wurde. Von der bezüglichen Literatur seien die Abhandlungen von LORENZONI, SCHUMANN und FURTWÄNGLER[3] angeführt, in denen man reiches Material über alle einschlägigen Fragen findet. Jedenfalls kennt man jetzt die betreffenden Fehler und ihre Korrektion genau genug, um nicht mehr große Umstände auf die absolute Beseitigung des Mitschwingens, der Erschütterungen u. s. w. verwenden zu müssen, was für Pendelbeobachtungen auf Reisen sehr wichtig ist.

---

[1] DE JONQUIÈRES, C. R. **105.** 23. 1887. — [2] C. ISENKRAHE, Rep. de Phys. **16.** 99. 1880. — A. OBERBECK, WIED. Ann. **34.** 1041. — W. HOLTZ, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **1.** 164. 1888. — L. DE LA RIVE, C. R. **118.** 401. 1894. — J. KLEMENČIČ, Phys. Ztschr. **1.** 47. 1899. — [3] G. LORENZONI, Relazione s. esp. nel R. osserv. di Padova ecc. Roma 1888. — R. SCHUMANN, Ztschr. f. Math. u. Phys. **44.** 102. 1899. — Auszug in: Ztschr. f. Instrumentenk. **17.** 7. 1897. — PH. FURTWÄNGLER, Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1902. p. 245. — Man vergleiche auch des Letztgenannten Artikel „Mechanik physikalischer Apparate" in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften **4.** 1. Leipzig 1904; daselbst ist auch noch weitere Literatur zusammengestellt.

Auch die Theorie des Mitschwingens zweier Pendel[1] ist eingehend entwickelt worden; es genüge hier einige Hauptformeln anzuführen. Die Differentialgleichungen lauten offenbar:

(65)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} + 2\varkappa_1\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{g}{l_1}\vartheta_1 &= -\frac{2c_2}{T_1}\frac{d^2\vartheta_2}{dt^2} \\ \frac{d^2\vartheta_2}{dt^2} + 2\varkappa_2\frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{g}{l_2}\vartheta_2 &= -\frac{2c_1}{T_2}\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} \end{aligned}\right. ,$$

wobei die Schwingungen als klein und in gemeinsamer Ebene stattfindend angenommen sind; c_1 und c_2 sind die Vergrößerungen der Perioden durch das Mitschwingen des Gestells. Statt dieser Glieder kann man, wie das OBERBECK getan hat, auch ein Glied für die direkte Wechselwirkung zwischen den Pendeln einführen. Von besonderem Interesse ist das Amplitudenverhältnis v; ist das getriebene Pendel anfangs in Ruhe und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{T_1 + T_2}{2} = T \quad , \quad \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{2} = \delta \quad , \quad \frac{(T_2 - T_1)\pi}{2T^2} = D \quad ,$$

$$\frac{\pi c_1}{T^2} = \mu_1 \quad , \quad \frac{\pi c_2}{T^2} = \mu_2 \quad , \quad D^2 + \mu_1\mu_2 = E^2 \quad ,$$

so findet man für nur einseitige Wirkung (ohne Rückwirkung):

(66)
$$v^2 = e^{-2\delta t}\frac{\mu_1^2(\cos\text{hyp}\, 2\delta t - \cos 2Dt)}{2(\delta^2 + D^2)} \quad ,$$

speziell für die erste Zeit:

(67)
$$v = \mu_1 t = \frac{\pi c_1}{T^2} t \quad ,$$

dagegen für gleiche Dämpfung beider Pendel:

(68)
$$v^2 = \frac{\mu_1^2 \sin Et}{E^2\cos^2 Et + D^2\sin^2 Et}$$

und für konstantes Amplitudenverhältnis, wie das in gewissen Fällen schließlich eintritt[2]:

(69)
$$v^2 = \frac{\mu_1^2}{4}\cdot\frac{1}{\delta^2 + D^2} \quad .$$

Will man auch noch die Phasendifferenz p einführen, so kann man die komplexe Größe

(70)
$$u = v(\cos p + i\sin p)$$

benutzen und dann die nötigen Endformeln leicht ableiten.[3]

In nahem Zusammenhang hiermit steht auch das interessante, namentlich von CORNU[4] studierte Problem der Synchronisation zweier — natürlich von vornherein nicht sehr verschieden periodischer — Schwingungsbewegungen (Pendel, Balanciers, Platten, Galvanometer u. s. w.). Die Gleichungen lassen sich unter gewissen Annahmen leicht aufstellen und aus ihren Lösungen Anhaltspunkte für die Methodik der Synchronisation gewinnen. Die Einzelheiten dieser Methodik, die begreiflicherweise elektromagnetischen Charakters ist, gehören nicht hierher.

---

[1] A. OBERBECK, G. HELMERT, R. SCHUMANN, PH. FURTWÄNGLER, a. a. O. — [2] Vgl. C. v. ORFF, Abh. Münch. Akad. d. Wiss. **14.** 1883. — [3] PH. FURTWÄNGLER, a. a. O. — [4] A. CORNU, C. R. **104.** 1464. 1887; **105.** 1106. 1887; **106.** 26. 1888; **118.** 313. 1894.

Anwendungen des Pendels. Die wichtigste Anwendung des Pendels ist die zur Regulierung zeitmessender Apparate, d. h. als Uhrpendel. Die Pendeluhr ist eine der vielen Ideen von HUYGENS.[1] Die Regulierung geschieht dadurch, daß immer abwechselnd der eine oder der andere von zwei mit dem Pendel verbundenen Haken in dasjenige Zahnrad eingreift, welches durch ein Gewicht in ständige Drehung versetzt wird; es kann infolgedessen dieses Rad während jeder Schwingung nur um einen Zahn vorrücken. Andererseits sorgt das Zahnrad durch den Stoß, welchen es dem Haken jedesmal gibt, dafür, daß die Pendelschwingungen nicht nur dauernd, sondern auch bei gleicher Amplitude erhalten werden. Zur Ermöglichung absoluter Regulierung der Uhr ist die Linse verschiebbar; ein Hinaufschieben beschleunigt, ein Hinabschieben verzögert die Bewegung.

Eine andere, ähnliche Anwendung des Pendels ist der von MÄLZEL 1813 erfundene Taktmesser oder Metronom.[2] Bei demselben ist, um langsame Schwingungen bei kleinen Dimensionen des Apparats zu haben, die Idee des Differentialpendels (s. oben) verwirklicht, die Pendelstange über den Drehpunkt hinaus verlängert und trägt hier ein Gewicht, dessen Verschiebbarkeit verschiedene Schwingungsdauern zu erzielen ermöglicht; die reziproken Werte derselben, die Schwingungszahlen, sind auf der Skala, die natürlich nicht gleichförmig ist, von vornherein notiert; ein Federmechanismus erzeugt zugleich Schläge, die die Periode auch dem Ohr vornehmlich machen. — Ähnliche Apparate für mehr wissenschaftliche als musikalische Zwecke sind vielfach konstruiert worden; insbesondere sei auf das zweiarmige Pendel von HIRN[3], eine Art stummen Metronoms, hingewiesen, das sehr geeignet ist, um Geschwindigkeitsänderungen rasch zu erkennen und annähernd festzustellen.

Das Zentrifugalpendel (p. 395), das in horizontalem Kreise läuft, findet sehr allgemeine Anwendung als Regulator bei periodisch wirkenden Maschinen und Apparaten, so einerseits bei Dampfmaschinen, andererseits bei allen den wissenschaftlichen Methoden, die eine rotierende Trommel zur Registrierung von Vorgängen anwenden. Der Zentrifugalregulator besteht bekanntlich aus zwei schräg und symmetrisch von einer Vertikalstange herabhängenden Armen mit Kugeln an den Enden; die Verbindung der Arme mit der Stange durch Schieber erlaubt den Armen einen beliebigen Winkel gegen die Vertikale anzunehmen. Wenn nun die Achse und damit das ganze System rotiert, stellt sich ein ganz bestimmter Winkel als Funktion der Drehgeschwindigkeit heraus; nimmt letztere, also auch ersterer zu, so nimmt aber das Trägheitsmoment des Systems zu und übt eine verlangsamende Rückwirkung aus, so daß sich als Resultat eine Regulation ergibt, die durch die Einzelheiten der Konstruktion zu einer sehr vollkommenen gemacht werden kann.

Das ballistische Pendel besteht entweder aus dem an starken Stangen pendelnd aufgehängten Geschützlauf und dient alsdann dazu, durch den Rückschlag die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses zu bestimmen; oder es besteht aus einem pendelnd aufgehängten, mit Ton gefüllten Kasten, in den die Kugel einschlägt und auf den sie, in ihm stecken bleibend, ihre Wucht überträgt, so daß man ihre Geschwindigkeit an dieser Stelle ihrer Bahn berechnen kann.

Von der Anwendung eines Pendels mit elektrischem Kontakt im tiefsten Punkte zur Messung kleiner Zeiten ist schon im Artikel „Messung von Raum- und Zeitgrößen" die Rede gewesen. Auch sonst finden elektrische Pendel in Wissenschaft und Technik vielfach Anwendung; jedoch kann hierauf an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

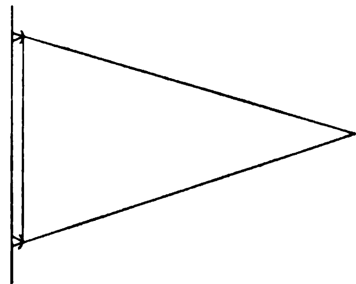
[1] W. HUYGENS, Horologium oscillatorium. Paris 1673. — [2] MÄLZEL, Kurze Abhandlung über den Metronom und dessen Anwendung. Mainz 1836. — [3] G. A. HIRN, C. R. **105**. 40. 1887.

D. Das Horizontalpendel.

Horizontalpendel. Das MACHsche Pendel, bei dem die Drehachse schief gestellt ist, wurde schon erwähnt und abgebildet; es wurde dabei darauf hingewiesen, daß, gemäß der Formel für die Schwingungsdauer

$$(71) \qquad 2T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \varphi}} \ ,$$

wo φ die Neigung der Drehachse gegen die Horizontale ist, die Periode unendlich groß wird für eine geradezu vertikale Achse; in diesem Falle ist das Pendel in jeder Lage im indifferenten Gleichgewicht. Man kann die Beziehung auch so ausdrücken, daß man sagt: die reduzierte Länge des schiefen Pendels ist gleich $l/\cos\varphi$, sie wird also bei vertikaler Drehachse ebenfalls unendlich. Dieser Fall hat in neuerer Zeit hervorragende Wichtigkeit erlangt für geophysikalische Untersuchungen, eine Wichtigkeit, die eine Folge der Empfindlichkeit eines derartigen Apparats gegen Richtungsänderungen der Drehachse ist. Der Apparat heißt Horizontalpendel; er ist zuerst von HENGLER, viel später unabhängig von PERROT ersonnen, dann von ZÖLLNER wieder aufgenommen und von VON REBEUR-PASCHWITZ, EHLERT u. A. vervollkommnet worden.[1] Das alltäglichste Beispiel eines Horizontalpendels ist eine Tür, die bei normaler Konstruktion unter gewöhnlichen Verhältnissen in jeder Lage steht, im Seitengange eines laufenden Eisenbahnwagens aber infolge der Neigungen fortwährend schwankt und bei plötzlichen Änderungen gewaltsam zuschlägt. Ein zu Untersuchungen bestimmtes Horizontalpendel wird man möglichst leicht und reibungsfrei bauen und dabei doch genügende Stabilität und andere Vorteile zu erreichen suchen. Das einfachste Modell besteht, wie Figur 117 veranschaulicht, aus einem Dreieck aus leichten Stäben oder Röhren, das mit zweien seiner Ecken an der Vertikalachse mit Hilfe von Schalen und Spitzen leicht befestigt ist. Bei Neigungen der Achse wird sich das Dreieck stets in die durch die Achse und die Vertikallinie bestimmte Ebene hineindrehen, die Drehungen kann man dann irgendwie messen, am besten, wenn sie sich in engem Bereiche bewegen, mit Spiegelablesung bezw. mittels kontinuierlicher photographischer Registrierung auf einer rotierenden Trommel. Das in der Figur angedeutete Pendel reagiert offenbar nur auf Schwankungen der Achse aus der Papierebene heraus, nicht aber auf solche in derselben; man muß also, um alles zu erhalten, an der Achse zwei zueinander senkrechte Dreiecke anbringen, oder was vorzuziehen ist, zwei zueinander senkrechte (oder auch drei um je 120 Grad voneinander abweichende) selbständige Horizontalpendel benutzen.



Figur 117.

Insoweit liegen die Verhältnisse recht einfach; sie verwickeln sich indessen aus zwei Ursachen. Die eine ist die, daß das Pendel nicht bloß von Drehungen,

[1] L. HENGLER, DINGL. polytechn. Journ. **43**. 58. 1832. — PERROT, C. R. **54**. 728. 1862. — F. ZÖLLNER, Ber. Sächs. Ges. 1869. 1871. 1872; POGG. Ann. **150**. 134. 140. 1873. — E. v. REBEUR-PASCHWITZ, Astr. Nachr. Nr. 2809. p. 9. 1887; Nova Acta der Leop.-Car. Akad. **60**. 1. 1892; Astr. Nachr. **132**. 33. 143. 1893; **133**. 1. 1893; Beitr. z. Geophysik 1895. — O. HECKER, Ztschr. f. Instrumentenk. **16**. 2. 1896; **19**. 261. 1899. — R. EHLERT, Beitr. z. Geophysik **3**. 131. 1896. — Ferner Konstruktionen von EWING, GRAY u. A. — Vgl. auch G. AGAMENNONE, Rend. Acc. Linc. (5) **9**. (I) 107. 1900.

sondern auch von Verrückungen der Achse, letzteres infolge der Trägheit und Reaktion, beeinflußt wird; es ergibt sich also die nicht ganz leichte Aufgabe, beide Einflüsse zu trennen, wobei zu beachten ist, daß die Verrückung eine Wirkung nur ausübt, solange sie sich selbst abspielt, während der veränderten Endlage trotzdem die ursprüngliche Pendellage entspricht; daß dagegen eine Drehung der Achse auch eine endgültige Einstellungsänderung des Pendels bewirkt. Maßgebend in beiden Fällen ist im übrigen das Verhältnis zwischen der Periode T der Erregung und der Eigenperiode des Pendels t, und man sieht, daß das Problem insoweit auf das oben behandelte des Mitschwingens hinausläuft. Dabei sind für die Zwecke, denen das Horizontalpendel dient, drei typische Fälle herauszuheben: für T sehr groß geht das Pendel einfach mit, bleibt also, wenn der Sitz der Erregung die Erde selbst ist, an deren Bewegungen der Apparat doch teilnimmt, scheinbar in Ruhe; bezw. es nimmt, bei Drehungen der Achse, die neue Achse ohne Oszillationen an; für $t = T$ tritt Resonanz ein, der Ausschlag des Pendels wächst ins ungemessene, ein Fall, der natürlich zu vermeiden ist; für T-Werte, die gegen t sehr klein sind, wird das Pendel überhaupt nicht affiziert, d. h. es bleibt absolut in Ruhe; geht also die Erregung wieder von der Erde aus, so wird das Pendelende die erregende Schwingung scheinbar umgekehrt wiedergegeben. Allgemein ist der scheinbare Ausschlag proportional mit der Größe

$$\frac{t^2}{T^2 - t^2}\;; \tag{72}$$

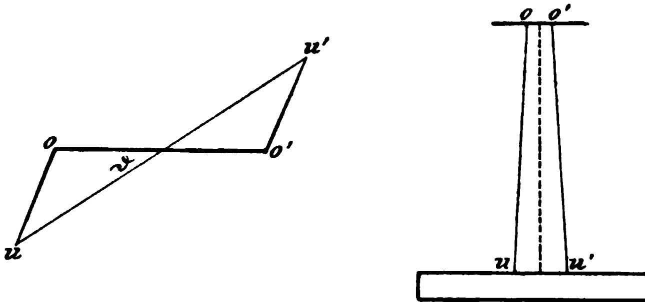
er wird also aus doppeltem Grunde desto größer, je größer, bei gegebenem T, die Eigenperiode t ist; daher die Brauchbarkeit des durch große t ausgezeichneten Horizontalpendels für derartig feine Untersuchungen. — Bei alledem ist nun weiter die Mitwirkung der Eigenschwingungen des Pendels zu beachten; um sie herabzumindern, wendet man eine kräftige Dämpfung, mechanische oder elektrische oder magnetische, an; man erreicht dann zugleich — entsprechend der Theorie der Resonanz —, daß die Resonanz gemildert und über ein praktisch genügendes Gebiet von Perioden der Erregung hin die Empfindlichkeit des Pendels konstant wird; reicht man hiermit noch nicht aus, so muß man mit zwei Pendeln arbeiten, von denen das eine eine lange (20 bis 50 Sekunden), das andere eine kurze Periode (3 bis 10 Sekunden) hat. Schließlich kommt auch der Charakter der erregenden Schwingungen, seien es nun Verschiebungen oder Neigungen, in Frage, ob es nämlich einfache Sinus- oder zusammengesetzte Schwingungen sind; eventuell muß man dann die harmonische Analyse vornehmen. — Bisher ist von den theoretischen Werten der Amplitude, des Ausschlags und der dauernden Verschiebung die Rede gewesen; praktisch werden dieselben nun noch beträchtlich vergrößert durch Anwendung langer Schreibhebel bezw. bei der photographischen Registrierung, langer Lichtwege — ein Verfahren, das zur Darstellung minimaler Bodenbewegungen durch gewaltige Kurvenamplituden führt (1 : 100 und mehr).

In besonders eingehender Weise ist die Theorie des Horizontalpendels und verwandter Apparate einerseits von WIECHERT, andererseits von Fürst GALITZIN behandelt worden; jedoch kann hierauf ebensowenig eingegangen werden wie auf die Anwendungen des Horizontalpendels auf die Beobachtung der Änderungen der Lotlinie, der Fernbeben, der mikroseismischen Bewegung und anderer geophysikalischer Erscheinungen; es muß vielmehr in dieser Hinsicht auf die betreffenden Zeitschriften und amtlichen Veröffentlichungen verwiesen werden.[1]

[1] E. WIECHERT, Beitr. z. Geoph. Erg.-Bd. 1. 264. 1902; Abh. Gött. Ges. (2) 2. 1903; Beitr. z. Geoph. 6. 435. 1903; Phys. Ztschr. 4. 821. 1903. — Fürst B. GALITZIN, C. R. Comm. sismique 1902. p. 101; Zur Methodik der seism. Beob. St. Petersb. 1903; Über die Methodik zur Beobachtung von Neigungswellen, St. Petersburg 1905. — Im Anschluß an die Theorie hat Fürst GALITZIN dann mehrere neue Apparate konstruiert (Doppelpendel, Klinograph).

E. Bifilare Aufhängung.

Bifilare Aufhängung. Ein an einem Faden aufgehängter Körper kann zwar, außer um eine horizontale Achse, auch um den Faden als vertikale Achse, schwingen; diese Schwingungen darf man aber nicht als durch die Schwere, sondern muß sie als durch die Torsion des Fadens hervorgerufen betrachten. Hängt man einen Körper aber an zwei im Ruhezustande vertikalen Fäden auf, so führt er nicht nur um die horizontale Verbindungslinie der beiden oberen Endpunkte der Fäden, sondern auch um eine in der Mitte zwischen ihnen liegende vertikale Achse Schwingungen aus, welche man als eine Folge der Schwere



Figur 118.

zu betrachten hat, weil mit ihnen eine periodische Senkung und Hebung des Körpers verknüpft ist, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil die als unausdehnbar angenommenen Fäden bei der Drehung des Körpers eine schräge Lage erhalten und folglich nicht mehr so weit herabreichen wie vorher. Die angenäherte Theorie dieser Erscheinung läßt sich für den Fall, daß die oberen wie die unteren Enden in gleichem Niveau liegen, leicht entwickeln. Die obere Entfernung der Fäden sei $2o$, die untere $2u$ und die gegen o und u große Länge L. Im abgelenkten Zustande bieten die Fäden alsdann von oben gesehen das Bild der zweiten Figur 118; in dieser Stellung sei uu' noch um z tiefer als oo'. Bezeichnet man noch mit M die Masse, mit D das Drehungsmoment und mit K das Trägheitsmoment des Stabes um die Drehachse, so findet man die Winkelbeschleunigung

$$(73) \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{D}{K} = -\frac{M g o u \sin\vartheta}{LK} \quad ,$$

also durch Vergleichung mit der entsprechenden Formel für das einfache Pendel die korrespondierende Länge

$$(74) \qquad l = \frac{K}{M} \cdot \frac{L}{ou}$$

und somit die Schwingungsdauer

$$(75) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{K}{M} \frac{L}{ou}} \quad .$$

Die somit abgeleitete Formel findet weniger in dieser Gestalt zur Bestätigung der Theorie, als vielmehr in der umgekehrten

$$(76) \qquad K = \frac{T^2}{\pi^2} M g \frac{ou}{L}$$

zur Ermittelung des Trägheitsmoments Anwendung. Um dabei die nicht genau meßbaren Größen o und u zu eliminieren, kann man entweder bei zwei verschiedenen Werten von L beobachten und aus den beiden so erhaltenen Gleichungen für T und T_1, ou eliminieren, oder nach GAUSS ganz so wie bei der analogen Methode für unifilare Aufhängung (s. Artikel „Dynamik", p. 341) die Masse des Körpers durch Anhängung zweier gleicher Körper in gleichem Abstande zu beiden Seiten der Drehachse vermehren und nun wieder die Schwingungsdauer bestimmen. Ist K_1 das hinzugefügte Trägheitsmoment in bezug auf die Drehachse und M die hinzugefügte Masse, so erhält man

(77) $$K = \frac{K_1}{\frac{T_1^2}{T^2}\,\frac{M + M_1}{M} - 1} \quad .$$

Das Trägheitsmoment K_1 kann man, da man gewöhnlich zylindrische Körper hinzufügt, entweder berechnen, oder durch einen dritten Versuch, bei welchem man dieselben nicht im Abstand d_1, sondern im Abstand d_2 von der Drehachse anbringt, eliminieren; im letzteren Falle erhält man

(78) $$K = \frac{T^2 M M_1 \left[\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2\right]}{(T_1^2 - T_2^2)(M + M_1)} \quad .$$

Bei beliebiger Lage der vier Endpunkte und beliebigem Verhältnis der Größen o, u, L muß man beachten, daß sich die ganze Vertikalspannung Mg nicht gleichmäßig über beide Fäden verteilt, sondern etwa wie $\frac{1}{2} Mg(1 + c)$ und $\frac{1}{2} Mg(1 - c)$, und daß, wenn man die mittlere Höhe, die jetzt mit L nicht identisch ist, mit H bezeichnet, ganz entsprechend die eine Höhe $H(1 + f)$, die andere $H(1 - f)$ wird. Man findet dann

(79) $$D = Mg\,\frac{ou(1 - c^2)}{H(1 - cf)} \sin\vartheta \quad ;$$

bei gleichen Niveaus der oberen und unteren Enden kommt man von dieser Formel auf die einfachere:

(80) $$D = \frac{Mgou \sin\vartheta}{\sqrt{L^2 - (o - u)^2 - 4\,ou \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}$$

und schließlich, wenn man im Nenner o und u vernachlässigt, auf die obige Formel zurück.

Die vollständige Theorie führt auf hyperelliptische Funktionen, die durch zehn Verzweigungspunkte charakterisiert sind, mit denen aber praktisch nichts anzufangen ist. Es ist aber von HEUN gezeigt worden, wie man zu einer für die Anwendungen brauchbaren Formel gelangt. Übrigens ist zu bemerken und auch leicht einzusehen, daß bei größerer Amplitude die Schwingungsdauer hier nicht, wie beim unifilaren Pendel, größer, sondern kleiner wird.[1]

Unabhängig von dem Bifilarpendel im obigen Sinne bietet auch das gewöhnliche, aber, statt an einem, an zwei oder mehr Fäden hängende Pendel manches Interessante dar, besonders wegen der dann auftretenden Beschränkung einerseits und Vermannigfachung andererseits der Freiheitsgrade. Man kann dann schließlich auch die Kombination der Dreh- und Pendelschwingungen betrachten.[2]

[1] Die Theorie der bifilaren Aufhängung ist namentlich von BESSEL, GAUSS und F. NEUMANN entwickelt worden. Man vgl. ferner K. HEUN, Gött. Nachr. 1891. p. 54. — A. KURZ, Rep. d. Phys. **23.** 406. 1887. — [2] Vgl. u. A. G. GUGLIELMO, Rend. Acc. Linc. (5) **4.** 2. Sem. p. 163. 1895. — Das Trifilarpendel ist u. a. zum Gegenstand von Studien gemacht worden von A. SCHMIDT, Beitr. z. Geophys. **3.** 1. 1899; **4.** 109. 1900.

F. Foucaultsches Pendel.

Pendel und Erdrotation. Während sich der Einfluß der Erdrotation auf Fall und Wurf (s. d.) durch die Teilnahme der betreffenden Körper an der Bewegung der Erde erklärt, gestaltet sich derselbe Einfluß auf die Bewegung des Pendels gerade entgegengesetzt und läßt sich im Prinzip durch den Ausspruch beschreiben, daß ein solcher Einfluß nicht vorhanden ist. Wenn trotzdem dieser Gegenstand von Interesse ist, so liegt dies einesteils darin, daß wir die Bewegung der Erde nicht wahrnehmen, und folglich an einem Körper, welcher diese Bewegung nicht teilt, eine entgegengesetzt gerichtete, scheinbare Bewegung beobachten werden, teils darin, daß, wenn wir an einem Pendel ohne ausreichenden Grund eine Drehung der Schwingungsebene wahrnehmen, wir hierin einen Beweis für die Drehung der Erde erblicken dürfen. Daß die Schwingungsebene des Pendels durch anderweitige Drehungen nicht beeinflußt wird, kann man auch künstlich zeigen, z. B. indem man den zwischen den Fingern gehaltenen Pendelfaden dreht, wobei der Pendelkörper zwar in Rotation um seine Achse gerät, aber in derselben Ebene weiterschwingt; oder indem man ein schwingendes Pendel in verschiedensten Richtungen hin und her trägt; oder endlich indem man es an einen hohen, auf die Schwungmaschine gesetzten Bügel hängt und diese in Rotation versetzt.

Theorie. Was zunächst die Theorie der Erscheinung betrifft, so ergeben die Gesetze der Dynamik für ein einfaches Pendel folgendes. An die Stelle der Gleichungen (2) treten neue, welche sich durch, der Rotation der Erde entsprechende Glieder von ihnen unterscheiden. Legt man den Anfangspunkt in den schweren Punkt des Pendels, die z-Achse vertikal abwärts, die x-Achse in den Meridian, ist ω die Winkelgeschwindigkeit und φ die geographische Breite, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\,\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt} + \lambda x \quad , \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\,\omega \left(\sin\varphi \frac{dx}{dt} + \cos\varphi \frac{dz}{dt} \right) + \lambda y \quad , \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g + 2\,\omega \cos\varphi \frac{dy}{dt} + \lambda (z - l) \quad . \end{aligned} \right.$$

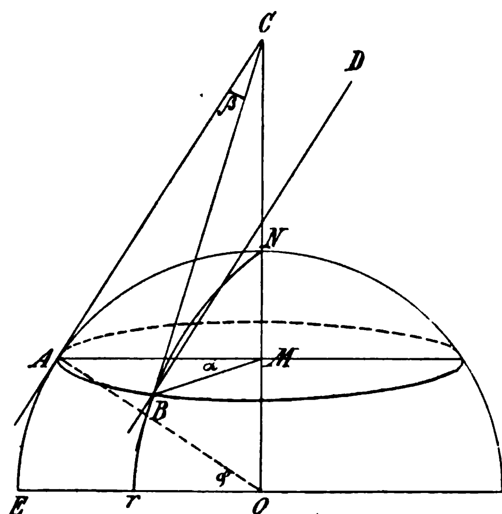
Vernachlässigt sind hierbei die Glieder mit dem (sehr kleinen) Quadrat von ω, sowie die mit dem Widerstand der Luft und der Aufhängung. Trotzdem können die Gleichungen allgemein nur für unendlich kleine Schwingungen integriert werden. Setzt man $x = r\cos\vartheta'$, $y = r\sin\vartheta'$, so daß r und ϑ' die Polarkoordinaten des schweren Punktes in der jedesmaligen Horizontalebene sind, bezeichnet man mit c und C willkürliche Konstanten, und führt man endlich einen neuen Winkel durch die Gleichung $\vartheta' + t\,\omega \sin\varphi = \vartheta$ ein, so wird

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} r^2\, d\vartheta &= c\, dt \quad , \\ d r^2 + r^2\, d\vartheta^2 &= \left(\frac{g}{l}\, r^2 + C \right) dt^2 \quad . \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen zeigen dadurch, daß sie ω nicht enthalten, in der Tat, daß die Schwingungsvorgänge unabhängig sind von der Rotation der Erde. Eine eingehendere Analyse zeigt freilich, daß dies nur für die großen Züge der Erscheinung, nicht aber für die Vorgänge jeder einzelnen Schwingung gilt. Die Erscheinung, welche das FOUCAULTsche Pendel darbietet, wird häufig als Erhaltung der Schwingungsebene bezeichnet (s. unten).

Hiermit ist der wahre Sachverhalt charakterisiert. Von besonderem Interesse ist es aber hier, den Vorgang, wie er sich uns scheinbar darstellt, zu verfolgen.

Ebene Schwingungen. Begnügt man sich mit einer angenäherten Darstellung und beschränkt man sich darauf, die Erscheinung nur kurze Zeit, etwa höchstens bis zu einer Stunde zu verfolgen, so gelangt man für ebene Schwingungen in kurzer und ganz elementarer Weise zum Ziel. Am Pole ist die Winkelgeschwindigkeit der scheinbaren Drehung offenbar dieselbe, wie die wahre der Erddrehung, in einer Stunde dreht sich also die Schwingungsebene um 15^0 und in einem Tage — in diesem Spezialfalle darf man verallgemeinern — ein ganzes Mal herum. Am Äquator findet eine Drehung überhaupt nicht statt, weil hier das Flächenstück, über welchem das Pendel schwingt, bei der Erddrehung sich nur verschiebt, ohne sich in sich selbst zu drehen; es dreht sich zwar um die Erdachse, aber diese Drehung macht die Pendelebene, die doch stets vertikal bleiben muß, selbstverständlich mit. An jedem anderen Orte wird demgemäß die Erscheinung zwischen beiden Extremen liegen. Setzt man das Pendel im Orte A (Figur 119) der Einfachheit halber in der Richtung des Meridians AC in Schwingungen, so bildet die Schwingungsrichtung BD im Orte B mit dem Meridian dieses Ortes den Winkel $CBD = ACB = \beta$. Ist wieder φ die geographische Breite und α der Drehungswinkel AMB, endlich r der Erdradius, so ist $AB = \alpha r \cos\varphi$; andererseits $AC = r \operatorname{tang} AOC = r \operatorname{cotg}\varphi$, und hiermit $AB = \beta r \operatorname{cotg}\varphi$; also durch Vergleichung der beiden Ausdrücke für AB.



Figur 119.

(83) $$\beta = \alpha \sin\varphi \quad ,$$

in Worten: die Drehung der Schwingungsrichtung ist proportional dem Sinus der geographischen Breite. Beispielsweise ist für Berlin $\beta = 0{,}793\,\alpha$, die scheinbare Drehung beträgt also hier in einer Stunde etwa 12^0. Man kann an einem Globus leicht diese Vorgänge verfolgen und überzeugt sich dann, wie die wirkliche Bewegung der Pendelebene beschaffen ist. Der Ausdruck „Erhaltung der Schwingungsebene" erweist sich dabei, wenigstens ohne weiteren Zusatz, als ungerechtfertigt.

So einfach diese Annäherung ist, so kompliziert ist die exakte Theorie, und es herrscht trotz der inzwischen mächtig angeschwollenen Literatur hierüber, aus der die Namen BINET, BRAVAIS, QUET, DUMAS, HANSEN, KAMMERLINGH-ONNES und DE SPARRE besonders hervorzuheben sind, noch manche Unklarheit selbst über wesentlichere Punkte. Daß die obige elementare Entwickelung nicht streng ist, ergibt sich durch verschiedene Erwägungen, z. B. durch die, daß die in B zu AC gezogene Parallele BD gar keine horizontale Linie mehr ist, also auch nicht Schwingungsrichtung sein kann. Wird also schon unter den dortigen einfachen Annahmen die strenge Behandlung selbst für unendlich kleine Schwingungen schwierig, so bietet sie fast unübersteigliche Hindernisse, wenn man sie unter den der Wirklichkeit entsprechenden Bedingungen durchführen will. Indem in dieser Hinsicht auf die erwähnte Literatur verwiesen wird, muß es hier genügen,

die wichtigsten in Betracht kommenden Momente zu erwähnen. 1. Die Schwingungsebene kann nicht sich selbst parallel bleiben, weil sie stets vertikal, im Sinne des augenblicklichen Ortes sein muß. 2. Im Moment des Losbrennens des Fadens besitzt das Pendel bereits eine seitliche Drehungsgeschwindigkeit, welche berücksichtigt werden muß. 3. Es kommt darauf an, in welcher Richtung das Pendel anfangs schwingt. 4. Mit der Zeit verwandeln sich die Schwingungen in sphärische und es tritt dann zu der scheinbaren Drehung die oben abgeleitete wirkliche hinzu. 5. Es kommt darauf an, ob die Schwingungen durch einen Impuls in der Gleichgewichtslage oder durch Loslassen in der abgelenkten erzeugt werden. 6. Die Schwingungsdauer wird eine andere. Endlich käme 7. noch der Luftwiderstand in Betracht; er ist aber, wenigstens auf das angenäherte Drehungsgesetz, ohne Einfluß.

In neuester Zeit hat DENIZOT die Theorie wieder aufgenommen, und zwar von dem ganz allgemeinen Gesichtspunkt der relativen Bewegung. Es wird zunächst nachgewiesen, daß die Zurückführung der Drehung des FOUCAULTschen Pendels auf die zusammengesetzte Zentrifugalkraft (CORIOLISsche Kraft, vgl. p. 306) unzulässig ist, da im vorliegenden Falle mit der Änderung der Bewegungsrichtung auch der Richtungssinn der CORIOLISschen Kraft geändert wird, so daß eine fortwährende Drehung in einem und demselben Sinne nicht begreiflich wird. Andererseits repräsentieren die von BINET und seinen Nachfolgern vernachlässigten Glieder gerade gewisse Zentrifugalkräfte, die sehr wohl imstande sind, eine solche Drehung zu liefern. Es wird daher eine neue Analyse unternommen, und das Ergebnis ist dieses, daß man zu den wirklichen Kräften noch die folgenden beiden fingierten Kräfte (von der CORIOLISschen als unwesentlichen abgesehen) hinzufügen muß: 1. Die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft, die gleich der aus der Erddrehung entspringenden Zentrifugalkraft ist und mit der Erdattraktion zusammen die auf das Pendel wirkende Schwere bildet. 2. Eine bisher völlig unbeachtet gebliebene Zentrifugalkraft, die aus einer scheinbaren Drehung des Körpers um eine durch den Beobachtungsort parallel zur Erdachse gezogene Gerade entstanden gedacht werden kann. Diese Drehung ist unabhängig von irgend welchen äußeren Kräften und ist der Erddrehung gleich und entgegengesetzt; man erhält damit gerade das FOUCAULTsche Gesetz der Drehung, und zugleich ergeben sich die notwendigen Einzelheiten der Erscheinung.

Konisches Pendel. Beim sphärischen Pendel wird sich der Einfluß der Erdrotation natürlich in weit verwickelterer Form geltend machen; sehr einfach wird er aber in dem besonderen Falle des in einem horizontalen Kreise rotierenden konischen oder Zentrifugalpendels. In diesem Falle ergibt sich nämlich als Periode des Pendels, die ohne Erddrehung $2\pi\sqrt{l/g}$ sein würde, der Wert

$$(84) \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}} + \omega \sin\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}} - \omega \sin\varphi} \quad ,$$

je nachdem der Kreis im Sinne der Erddrehung oder gegen ihn zurückgelegt wird; die Differenz beider Werte ist

$$(85) \qquad 4\pi \cdot \frac{l}{g}\,\omega \sin\varphi \quad ,$$

oder als Bruchteil der normalen Periode

$$(86) \qquad 2\sqrt{\frac{l}{g}}\,\omega \sin\varphi \quad ,$$

ein Wert, der allerdings sehr klein ist, bei großem l aber doch festzustellen ist (6 Sekunden täglich).

Es ist das die von BRAVAIS gegebene erste Annäherung; eine genauere Formel hat DUMAS abgeleitet.

Physisches Pendel. Noch komplizierter werden die Verhältnisse beim zusammengesetzten Pendel; trotzdem ist es QUET, HANSEN, KAMMERLINGH-ONNES, CHESSIN u. A. gelungen, die Hauptzüge der Einwirkung zu verfolgen; es kommen dabei wesentlich die Hauptträgheitsmomente des Pendels in Betracht, außerdem spielen Rotationen des Körpers, Torsionsschwingungen des Fadens und andere Einflüsse eine Rolle.[1]

Beobachtungen. Der erste, der die Beobachtung anstellte, und nach dem die Erscheinung ihren Namen erhalten hat, war FOUCAULT; seine Absicht dabei war, einen direkten Nachweis für die Achsendrehung der Erde zu führen (ein weniger in die Augen springender derartiger Nachweis war freilich schon durch die Fallabweichung, s. p. 359, geführt worden. FOUCAULT experimentierte anfangs mit einem 2 m, später — im Meridiansaale der Pariser Sternwarte — mit einem 11 m langen Pendel; dann 1855 in der Ausstellungshalle.

Der Versuch ist seitdem sehr häufig wiederholt und in mannigfacher Weise modifiziert und vervollkommnet worden, so daß er gegenwärtig zu den üblichsten Demonstrationen gehört.

Hat man einen hohen Raum (in Deutschland ist u. a. der Kölner Dom benutzt worden) zur Verfügung, so hängt man einen feinen, aber tragfähigen Draht an der Decke mittels einer Vorrichtung auf, welche möglichste Freiheit der Bewegung gewährt und die Bevorzugung einer Richtung vor anderen als ausgeschlossen erscheinen läßt, und befestigt an ihm eine möglichst schwere, unten mit einer Spitze versehene Kugel. Mit dem Zentrum dicht unter dieser stellt man eine mit Gradeinteilung versehene Kreisscheibe auf. Bindet man nun das Pendel in einer schiefen Stellung, in welcher die Spitze gerade über dem Nullpunkte der Teilung sich befindet, mittels eines Fadens irgendwo an und brennt den Faden in einem bestimmten Zeitpunkt durch, so schwingt das Pendel geradlinig von 0 nach 180. Aber schon nach wenigen Minuten kann man eine Abweichung von dieser Richtung beobachten, und nach 10 Minuten beträgt sie, wenn z. B. in Berlin beobachtet wird, bereits 2^{0}, und zwar im Sinne der Uhrzeigerbewegung. Die Abweichung wird immer größer, bis sie schließlich wegen Abnahme der Amplitude oder Ausartung der ebenen in sphärische Schwingungen sich der Beobachtung entzieht. Auch im gewöhnlichen Zimmer, also mit viel kürzeren Pendeln — man ist nach und nach auf 3, 2, 1 Meter und noch weiter herabgegangen — kann man sich bei geeigneter Anordnung schon in verhältnismäßig kurzer Zeit, einer halben oder einer Viertelstunde, bei einigen Apparaten

---

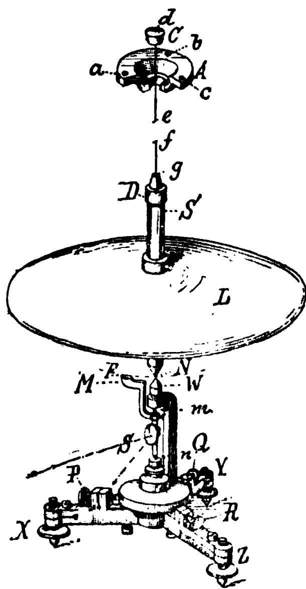
[1] Zur theoretischen Literatur des FOUCAULTschen Pendels: J. P. M. BINET, C. R. **32.** 157. 197. 1851. — LIOUVILLE, BERTRAND, VILLARCEAU, in verschiedenen Bänden des C. R. — A. BRAVAIS, C. R. **32.** 166; **33.** 195. 1851. — J. A. QUET, Journ. de math. **18.** 213. 1853. — W. DUMAS, CRELLES Journ. **50.** 52. 126. 1855. — P. A. HANSEN, N. Schr. der naturf. Ges. Danzig **5.** 1856. — J. FRANZ, Inaug.-Diss. Halle 1872. — SIACCI, Atti di Torino **13.** 1878. — ROETHIG, Ztschr. f. Math. u. Phys. **24.** 153. 1879. — H. KAMMERLINGH-ONNES, Inaug.-Diss. Gron. 1879; N. Arch. v. Wiskunde. **5.** 58. 135. 1879; **6.** 173. 1880. — TAMMEN, Rep. d. Phys. **17.** 278. 1882. — M. DE SPARRE, Ann. soc. scient. Brux. **7.** 111. 1882—83; C. R. **111.** 496. 1890; Mém. sav. étrang. **31.** 1894. — H. SAMTER, Theorie des GAUSSischen Pendels. Berlin 1886. — G. LORENTZEN, Astr. Nachr. **114.** 241. 1886. — K. WEIHRAUCH, Rep. d. Phys. **23.** 643. 1886. — A. S. CHESSIN, Am. Journ. of math. **17.** 86. 1895; Journ. Hopkins Univ. Circ. **14.** 64. 1895. — A. DENIZOT, Ann. (4) **18.** 299. 1905; Bull. Acad. sc. Crac. Dez. 1904 (1905).

Ein ähnliches Problem, nämlich die Bewegung des Pendels in einem Eisenbahnwagen, ist von P. DE ST. ROBERT behandelt worden: Atti R. Acc. Linc. (3) **3.** 277. 1879. Auch hier findet die sogen. Erhaltung der Schwingungsebene nicht statt; man vergleiche dazu auch Artikel „Kinematik und Dynamik".

Ferner sei auf eine Abhandlung hingewiesen von E. BUNGERS über die Bewegung eines schweren Punktes auf einem rotierenden Kegelschnitt: Inaug.-Diss. Halle 1892.

auch schon nach wenigen Minuten, von der Drehung überzeugen und sie bei weiterer Beobachtung auch messen. So kann man die CARDANIsche Aufhängung und speziell das GAUSSische Pendel benutzen, muß dabei jedoch eine Reihe von Fehlerquellen beachten. Man kann ferner die Drehung an einer Teilung mikroskopisch beobachten, so daß man schon die Minuten oder Bruchteile ablesen kann. Eine sehr glückliche Idee besteht darin, daß man die Bewegung des Pendelkörpers mittels einer Lichtquelle an die Wand projiziert, wobei man auf verschiedene Weise stark vergrößerte Bilder erhalten kann. Wenn z. B. das Pendel auf die Wand zu und von ihr weg schwingt, so tritt sehr bald eine Asymmetrie des Schattens auf, und schließlich schwingt der Schatten selbst hin und her; verschiebt man nun die Lichtquelle, bis er wieder still steht, so hat man ein Maß für die Drehung. Noch besser ist es, zwei Pendel zu benutzen, die ursprünglich in einer Ebene schwingen, und deren Kugeln abwechselnd einander ganz nahe kommen und sich weit voneinander entfernen; mit der Zeit weichen dann die Kugeln nach entgegengesetzten Seiten ab, treffen also nicht mehr genau aufeinander, was man in leicht ersichtlicher Weise einem größeren Auditorium demonstrieren oder messend verfolgen kann.

Kompliziertere Apparate, die aber auch exaktere Messungen erlauben, haben u. A. KAMMERLINGH-ONNES und EDELMANN angegeben. Der Apparat des ersteren stellt eine Verallgemeinerung des GAUSSischen Pendels dar; er erlaubt den Nachweis, auch was die Größe der Drehung betrifft, auf verschiedene Weise zu führen und die Ergebnisse zu vergleichen; für den Beobachtungsort (Groningen) ergab sich aus zwei Versuchsreihen eine stündliche Drehung von 12,04° und 11,99°, während die Theorie 12,03° fordert — eine vorzügliche Übereinstimmung. Der Apparat von EDELMANN ist in Figur 120 skizziert: man sieht oben die eigenartige Aufhängung, dann den nur angedeuteten Faden *efg*, dann die Achse *DN* mit der schweren Linse *L*, und bei *N* die Spitze, deren Hin- und Hergang und deren Drehung zu beobachten ist; insoweit ist also an dem Apparat nichts prinzipiell Neues, er kann in gewöhnlicher Weise benutzt werden. Nun wird aber unter das Pendel der kleine Apparat mit einer leicht beweglichen Achse gestellt, und zwar so, daß die Spitze *W* genau unter die ruhende Pendelspitze *N* kommt. Die Achse trägt einen Seitenarm aus Aluminium *M*, der in die kurze Eisenschneide *F* endigt. Da nun die Pendelachse *DN* kräftig magnetisiert und somit *N* ein starker Pol ist, so stellt sich bei ihren Schwingungen die Schneide *F* immer genau unter sie ein, und an dem Spiegel *S* kann man die Drehung der untergestellten Achse mittels Fernrohr und Skale messen; bei 4 m Skalenabstand erhält man nach 5 Minuten schon 11 cm Ablenkung.



Figur 120.

Mit dem konischen, in einem horizontalen Kreise schwingenden Pendel kann man, wie schon BRAVAIS zeigte, die Erscheinung in Übereinstimmung mit der obigen Formel ebenfalls verfolgen.

Selbst an einem ruhig herabhängenden Pendel konnte BOILLOT die Erddrehung durch die scheinbare Drehung des Pendelkörpers, der zu diesem Zweck vor störenden Einflüssen geschützt war, nachweisen.

Schließlich ist auf eine Anzahl von Modellen hinzuweisen, die man ersonnen hat, um die Drehung der Schwingungsebene für Orte verschiedener Breite

direkt zu veranschaulichen. Hierher gehört das Devioskop von Sire, das Kremaklitron von E. v. Gothard und, aus neuester Zeit, ein von Schilling angegebener Apparat. Bei allen kann man auf den Pol, den Äquator oder mittlere Breiten einstellen; im einzelnen ist die Einrichtung ziemlich kompliziert, so daß sich eine andeutende Beschreibung verbietet. Übrigens könnte man, wenn man die Dimensionen genügend groß wählte, die relative Bewegung der Pendelspitze auch einfach in der Weise zur Anschauung bringen, daß man das Pendelstativ fest aufstellt und die Spitze auf einem rotierenden Globus bezw. einer rotierenden Scheibe die Kurven registrieren ließe.[1]

---

[1] Zur experimentellen Literatur: L. Foucault, C. R. **32.** 135. 1851; Pogg. Ann. **82.** 458. — Dufour, C. R. **33.** 13. 1851. — Morren, ibid. **33.** 62. 1851. — A. Bravais, a. a. O. — Dejean de Fonroque, ibid. **88.** 771. 1879. — H. Kammerlingh-Onnes, a. a. O. — G. Sire, Journ. de phys. **10.** 401. 1881. — P. Czermak u. Hiecke, Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. 1885. p. 217. — E. v. Gothard, Ztschr. f. Instrumentenk. **5.** 19. 1885. — A. Boillot, C. R. **106.** 1664. 1888. — M. Koppe, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **1.** 14. 1887. — Th. Edelmann, Wied. Ann. **45.** 187. 1892. — E. Adolph, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **8.** 312. 1895. — A. Berget, C. R. **131.** 106. 1900. — d'Arsonval, ibid. **135.** 832. 1902. — G. Schilling, Vj.-Ber. Wien. Ver. ph. Unt. **9.** 22. 1904. — A. Weinhold, Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **17.** 198. 1904. — U. Behn, Phys. Ztschr. **6.** 744. 1906.

Kreiselbewegung.

Von F. AUERBACH.

Einleitung. Das Kapitel der Kreiselbewegung bietet ein Beispiel hervorragender Art für den Zusammenhang einer zunächst sehr speziellen und beinahe spielerischen Erscheinung mit den höchsten und interessantesten Problemen der mathematischen Analyse und Synthese, der geometrischen Anschauung, der erkenntnistheoretischen und experimentellen Naturlehre und der technischen Anwendungen dar. Das Problem ist demgemäß von äußerst zahlreichen Forschern und von sehr verschiedenen Gesichtspunkten aus bearbeitet worden, und die Literatur des Gegenstandes ist entsprechend umfangreich. Hier muß es genügen, eine ganz kurze Übersicht über die rein physikalischen Beziehungen des Themas zu geben, eine Aufgabe, für deren allgemeinen und methodischen Teil man nichts besseres tun kann, als sich an das klassische, durch die Verknüpfung von Methodik und Systematik vortreffliche Werk von KLEIN und SOMMERFELD zu halten, auf das für eingehendere Information hier ausdrücklich verwiesen sei.

Der Begriff des Kreisels kann enger oder weiter gefaßt werden. Im weitesten Sinne ist es ein starrer Körper, der eine Bewegung im Raume ausführt, bei der Rotationen einen wesentlichen Bestandteil ausmachen. Man kann dann die Definition sukzessive verengern, indem man die Massenverteilung des Körpers als symmetrisch um eine Achse oder gar als von zylindrischem oder gar von sphärischem Charakter annimmt, indem man einen Punkt des Körpers als relativ fest oder gar als absolut fest annimmt, wobei dann Translationen ganz ausgeschlossen werden und nur noch Rotationen auftreten, und endlich, indem man entweder von Kräften ganz absieht (was in physikalischer Hinsicht natürlich nur eine vorbereitende oder abstrahierende Untersuchung liefern wird), oder aber ganz bestimmte Kräfte einführt, wobei physikalisch natürlich die Schwerkraft im Vordergrunde des Interesses steht. Erwägt man, daß nächst den Schwingungen die Drehungen die mannigfaltigste Bewegungserscheinung sind, für die nicht nur Gegenstände auf der Erdoberfläche und von Menschen gebaute Apparate und Maschinen, sondern auch die Weltkörper selbst Träger sind, so sieht man die umfassende Bedeutung des Problems ein.

Allgemeine Theorie. Die Theorie knüpft naturgemäß an die allgemeinen Formulierungen über die Rotation starrer Körper an und kann entweder (siehe Artikel „Kinematik“ und „Dynamik“) rein kinematisch oder dynamisch oder endlich, bei einem gemischten Verfahren, kinetisch durchgeführt werden; es kann andererseits, was sich mit obiger Unterscheidung nicht völlig deckt, geometrisch oder analytisch vorgegangen werden; schließlich kann man versuchen, elementare Betrachtungen ausfindig zu machen, die den höheren Apparat der strengen Theorie entbehrlich machen und doch ein richtiges Bild der Verhältnisse liefern; letzteres

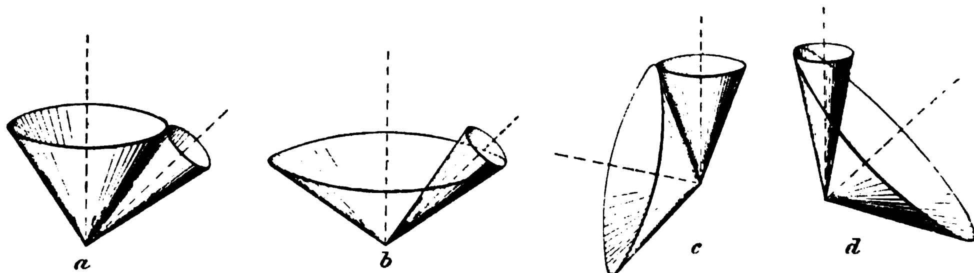
Verfahren ist sehr oft, aber, wie man sagen muß, mit sehr begrenztem Erfolge und vielfach auch nicht ohne wirkliche Unklarheiten und Schiefheiten eingeschlagen worden, so daß man bei der Benutzung dieser elementaren Theorien, die ja für manche Zwecke unentbehrlich sind, jedenfalls mit großer Vorsicht operieren muß.

Nach den früheren Feststellungen hat ein starrer Körper, also ein Kreisel, im allgemeinen sechs Freiheitsgrade; soll einer seiner Punkte, wie das meist der Fall ist, auf einer Ebene spielen, so bleiben nur fünf, soll sogar ein Punkt fest sein, nur drei Freiheitsgrade übrig; die Bewegung besteht dann nur aus Rotationen, und diese Drehung findet in jedem Moment um eine bestimmte Achse, in bestimmtem Drehungssinn und mit bestimmter Winkelgeschwindigkeit statt; von Moment zu Moment kann und wird sich aber Achsenrichtung und Geschwindigkeit ändern, derart, daß die Achsenlagen einen Kegel bilden. Rein kinematisch kann man hiernach (vgl. p. 319) die Kreiselbewegung als das Abrollen eines beweglichen auf einem festen Kegel beschreiben; jener ist der Ort der Achsen im Kreisel, dieser ihr Ort im Raume; jener ist der Kegel der Polhodie, dieser der Kegel der Herpolhodie. Ist der Kreisel ganz frei, so kommt noch eine Translation hinzu, bezw. an die Stelle der beiden Kegel treten zwei allgemeinere geradlinige Flächen, die außerdem nicht nur voneinander abrollen, sondern gleichzeitig aufeinander hingleiten.

Ein besonders einfacher Fall von Kreiselbewegung ist die reguläre Präzession; bei ihr dreht sich die Figurachse um eine feste Gerade des Raumes unter konstanter Neigung und mit gleichförmiger Geschwindigkeit, gleichzeitig aber der Kreisel selbst um die Figurachse ebenfalls mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit. In diesem Falle sind die Polhodie und die Herpolhodie Kreise, die entsprechenden Kegel Kreiskegel. Die drei ausgezeichneten Richtungen sind die Vertikale (1), die Figurachse (2) und die augenblickliche Drehungsachse (3); demgemäß sind die drei charakteristischen Winkel ϑ (12), u (23), v (13); es sind die Öffnungswinkel des Präzessions-, Polhodie- und Herpolhodiekegels. Endlich und die drei in Betracht kommenden Winkelgeschwindigkeiten die des Kreiselns μ, der Präzession ν und der resultierenden Drehung Ω; Größen, zwischen denen offenbar die Beziehungen

$$\frac{\sin u}{\nu} = \frac{\sin\vartheta}{\Omega} = \frac{\sin v}{\mu} \quad , \qquad \Omega^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\,\mu\,\nu\cos\vartheta$$

bestehen. Je nach dem Werte des Verhältnisses $c = \nu : \mu$ sind nun folgende Fälle uud Grenzfälle möglich: (1) für $c = \infty$ (eintretend für $\mu = 0$) dreht sich



Figur 121.

der Kreisel, ohne zu kreiseln, um die Vertikale (dieser Grenzfall gehört also eigentlich nicht hierher); (12) c zwischen ∞ und 0: der bewegliche, spitze Kegel rollt von dem festen außen ab; (2) $c = 0$: Kreiselung um die im Raume feste Figurachse; (23) c zwischen 0 und $-\cos\vartheta$: der bewegliche Kegel rollt von dem festen innen ab; (3) $c = -\cos\vartheta$: der Herpolhodiekegel ist in eine Ebene

ausgeartet, die Rollinie dreht sich wie der Radius eines Kreises in der Ebene herum; (34) c zwischen $-\cos\vartheta$ und $-1/\cos\vartheta$: ein stumpfer Kegel rollt von einem spitzen außen ab; (4) $c = -1/\cos\vartheta$: der Polhodiekegel ist in eine Ebene ausgeartet; (45) c zwischen $-1/\cos\vartheta$ und $-\infty$: der Polhodiekegel rollt von dem Herpolhodiekegel, ihn umfassend, ab; (5) $c = -\infty$: im wesentlichen identisch mit dem Grenzfalle (1). Diese möglichen Fälle sind in dem folgenden Tableau, sowie in den Figuren 121a—d veranschaulicht, in ersterem sind zugleich die die Fälle charakterisierenden Namen beigefügt; der erste Bereich steht als progressive Bewegung den drei anderen als retrograden offenbar gegenüber.

Progressive	Retograde Präzession		
Epizykloiden-	Hypozykloiden-	Antizykloiden-	Perizykloiden-
Bewegung			
$+\infty$ 0	. . . . $-\cos\vartheta$	. . . . $-1/\cos\vartheta$	. . . $-\infty$
reine Kegeldrehung	reines Kreiseln	abrollen in der Ebene	reine Kegeldrehung

Die beiden nächstliegenden Spezialfälle sind die, wo $\vartheta = 0$ ist, beide Kegel sich also auf ihre Achsen zusammenziehen und der Kreisel einfach um seine vertikal stehende Figurachse kreiselt; sowie der Fall $\vartheta = \pi/2$, wo die Figurachse die Horizontalebene beschreibt.

Die reguläre Präzessionsbewegung ist nur ein einfacher Fall der Kreiselbewegung; sie erlaubt aber, indem die gleichförmige durch eine gleichförmig beschleunigte Präzession ersetzt wird, den Übergang zum augenblicklichen Charakter einer beliebigen Kreiselbewegung; mit anderen Worten: die gleichförmige Präzession liefert die Erscheinung für einen Zeitpunkt, die beschleunigte für zwei aufeinander folgende Zeitpunkte. Dabei bleiben die beiden Kegel Kreiskegel, dagegen werden die entsprechenden Kurven Spiralen, die sich in immer weiter werdenden Windungen um die Kegel herumziehen.

Dynamik. Bisher waren die Betrachtungen rein kinematischen Charakters; geht man nunmehr zur Dynamik des Problems über, so muß man einerseits die wirkenden oder nicht wirkenden — Kräfte, andererseits die Massenelemente und ihre Verteilung in Betracht ziehen. Dabei erweist es sich nun methodisch als vorteilhaft, an die Stelle der Kräfte, welche die augenblickliche Geschwindigkeit im Laufe der Zeit erzeugt haben, einen fingierten Impuls zu setzen, der dasselbe momentan zu leisten vermag. Dieser Impuls ist nun offenbar beim freien Körper vom Charakter einer Schraubung, bei dem in einem Punkte unterstützten Kreisel reduziert er sich auf einen Drehstoß, ist also vom Charakter eines axialen Vektors. Die erste Aufgabe der Dynamik des Kreisels besteht also in der Aufstellung der Beziehung zwischen Impulsvektor und Drehgeschwindigkeitsvektor. Die Lösung nimmt eine besonders einfache Form an durch die Einführung der kinetischen Energie des Kreisels, d. h. der von dem Impuls bei der Erzeugung des augenblicklichen Zustands geleisteten Arbeit; sind nämlich[1] p, q, r die Komponenten des Drehungsvektors, L, M, N die des Impulsvektors, ist dm ein Massenelement, sind x, y, z die Koordinaten und ist U die kinetische Energie, so ist U definiert durch die Gleichung (p. 348):

[1] Die Bezeichnungen sind in diesem Artikel nicht durchweg dieselben wie im Artikel „Dynamik", es sind vielmehr hier die durch KLEIN und SOMMERFELD eingeführten Zeichen meist beibehalten worden.

$$U = \frac{1}{2}\Big[p^2\int(y^2+z^2)\,dm + q^2\int(z^2+x^2)\,dm + r^2\int(x^2+y^2)\,dm$$
$$- 2qr\int yz\,dm - 2rp\int zx\,dm - 2pq\int xy\,dm\Big] \quad ,$$

und die Beziehung zwischen den p, q, r und den L, M, N ist durch eine der beiden reziproken Formeln dargestellt:

$$L = \frac{\partial U}{\partial p} \quad , \qquad M = \frac{\partial U}{\partial q} \quad , \qquad N = \frac{\partial U}{\partial r} \quad ,$$
$$p = \frac{\partial U}{\partial L} \quad , \qquad q = \frac{\partial U}{\partial M} \quad , \qquad r = \frac{\partial U}{\partial N} \quad ;$$

in Worten: Die Impulskomponenten sind die Differentialquotienten der kinetischen Energie nach den Drehkomponenten; und umgekehrt: die Drehkomponenten sind die Differentialquotienten der kinetischen Energie nach den Impulskomponenten. Die erste Fassung ist offenbar die induktive, die zweite die deduktive; bei jener ist die kinetische Energie als Funktion der Drehkomponenten, bei dieser als solche der Impulskomponenten gedacht. Eine andere wichtige Formel für U ist diese:

$$U = \frac{1}{2}(pL + qM + rN) \quad ,$$

wofür man, wenn man den Impulsvektor $\mathfrak{J}$ und den Drehvektor Ω selbst, sowie den Winkel φ zwischen ihnen einführt, auch schreiben kann:

$$U = \frac{1}{2}\mathfrak{J}\,\Omega\cos\varphi \quad ,$$

in Worten: die kinetische Energie ist das halbe Produkt aus den beiden Vektoren des Impulses und der Drehungsgeschwindigkeit, den einen auf die Richtung der anderen projiziert. Schließlich kann man auch den Impuls auf die lineare, diese auf die Winkelgeschwindigkeit zurückführen und den herausfallenden Achsenabstand mit der Masse zum Trägheitsmoment K kombinieren; dadurch erhält man:

$$U = \frac{1}{2}K\Omega^2$$

oder, wenn A, B, C die Hauptträgheitsmomente in bezug auf den Unterstützungspunkt sind:

$$U = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \quad .$$

Der Winkel zwischen beiden Vektoren läßt sich in verschiedener Weise darstellen; er wird null, d. h. beide Vektoren fallen in dieselbe Richtung, wenn sie in eine der drei Hauptträgheitsachsen fallen.

Die obigen Formeln und Sätze vereinfachen sich wesentlich durch die beim Kreisel erlaubte Annahme dynamischer Symmetrie, d. h. der Existenz zweier gleicher Trägheitsmomente und der Lage des Schwerpunktes auf der dritten; der Kreisel braucht also kein geometrischer Rotationskörper zu sein, ist aber im KIRCHHOFFschen Sinne vom dynamischen Charaktes eines solchen. Es sei nun

$$A = B \quad ,$$

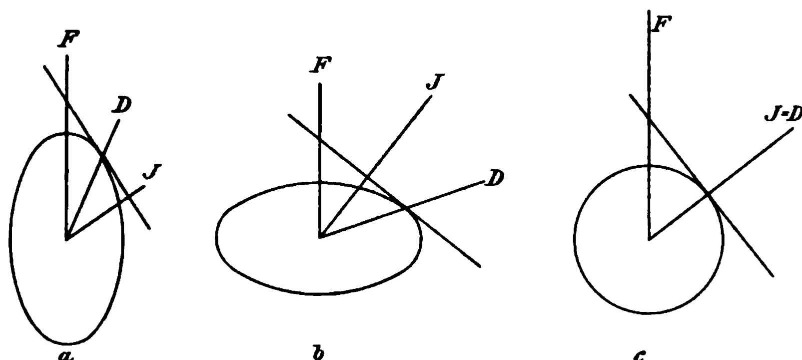
und es sei ferner, was das Größenverhältnis zwischen A und C betrifft:

für den verlängerten Kreisel: $A > C$,
für den abgeplatteten Kreisel: $A < C$,
für den Kugelkreisel: $A = C$.

Beim verlängerten Kreisel liegt die Drehachse immer zwischen Impuls- und Figurachse, beim abgeplatteten liegt die Impulsachse immer zwischen Dreh- und Figurachse, beim Kugelkreisel fallen Impuls- und Drehachse stets zusammen. Dieses letztere Verhalten zeigen die beiden anderen Kreisel nur dann, wenn die

Drehung um die Figur- oder eine Äquatorachse erfolgt. In den Figuren 122a—c sind diese Verhältnisse skizziert.

Eine andere Spezialisierung erfolgt durch die Natur der wirkenden Kräfte. Der einfachste Fall ist offenbar der des kräftefreien Kreisels; bei diesem bleibt der Impuls während der Bewegung nach Größe und Richtung konstant; und ebensowenig ändert sich die kinetische Energie. Wirken dagegen beliebige dauernde äußere Kräfte, so ändert sich der Impuls in jedem Moment so, daß



Figur 122.

seine Änderung nach Größe und Richtung dem von den äußeren Kräften verursachten unendlich kleinen Drehstoße gleichkommt; und die Änderung der kinetischen Energie ist immer gleich der von den äußeren Kräften augenblicklich geleisteten unendlichen kleinen Arbeit. — Bei der kräftefreien Bewegung des symmetrischen Kreisels ist sowohl die Polhodie- wie die Herpolhodiekurve ein Kreis; die allgemeinste Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels ist also die reguläre Präzession.

Permanente Achsen. Im allgemeinen ändert, wie wir wissen, die Drehachse des Kreisels selbst fortwährend ihre Richtung; es gibt aber Fälle, wo sie ihre Richtung beibehält, in welchem Falle man sie als permanente Achse bezeichnen kann. Dabei ist eine weitere Unterscheidung insofern zu machen, als die permanente Achse von stabilem oder labilem Charakter sein kann; in jenem Falle wird eine unendlich kleine Störung auch nur einen unendlich kleinen Effekt haben, der sich überdies bald wieder ganz oder teilweise ausgleichen wird; im anderen Falle wird schon eine sehr kleine Störung das Gleichgewicht völlig zerstören. (Man vgl. Artikel „Statik", p. 273.) — Was nun den allgemeinen Kreisel betrifft, so sind hier lediglich die drei Hauptträgheitsachsen permanente Achsen, und zwar ist die Rotation um die größte oder um die kleinste Achse stabil, dagegen die Rotation um die mittlere Achse labil. Beim symmetrischen Kreisel ist die Figurachse und jede Achse der Äquatorebene eine permanente Achse; jene ist von stabilem, jede von diesen von labilem Charakter. Beim Kugelkreise endlich ist jede Achse durch das Zentrum eine permanente Achse, und zwar von stabilem Charakter; beim Kugelkreise ist also die Rotation um eine im Raume feste Achse die allgemeinste Bewegungsform. — Mit dem Begriff der Stabilität der Achsen ist ein anderer, der Begriff der Erhaltung der Rotationsachse, der bekanntlich in der Kreiselliteratur eine große Rolle spielt (s. w. unten), nicht zu verwechseln. Es handelt sich hierbei vielmehr um die, im Grunde sehr einfache Tatsache, daß bei rascher Rotation der Impulsvektor durch äußere Störungen relativ wenig beeinflußt wird; die reine Rotation geht zwar in eine Kegelbewegung über, aber von sehr kleinem Öffnungswinkel. Es ist das aber keine spezifische Erscheinung der Kreiselbewegung, sondern sie hat ihr volles Analogon auch bei

der fortschreitenden Bewegung, bei der, wenn die Geschwindigkeit des Fortschreitens groß ist, durch einen seitlichen Stoß die Richtung der Bewegung nur sehr wenig geändert wird.

Analytische Darstellung der Kreiselbewegung. Diese ergibt sich im unmittelbaren Anschluß an die Formeln, die in dem Artikel „Dynamik" beim Rotationsproblem angegeben wurden. Es bedarf daher hier nur kurzer Wiederholung und Ergänzung. Die EULERschen Gleichungen sind der analytische Ausdruck für den geometrisch-dynamischen Satz, daß die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses im Raume nach Richtung und Größe gleich ist der den äußeren Kräften entsprechenden Drehkraft; bei der kräftefreien Bewegung insbesondere für den Satz, daß der Impuls im Raume konstant bleibt. Diese Äquivalenz tritt viel deutlicher zutage, wenn man die EULERschen Gleichungen zu einer Vektorgleichung zusammenfaßt und in der Form:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} - \frac{di}{dt} = V(\mathfrak{J}, R)$$

schreibt, wo $\mathfrak{J}$ bezw. i der Impulsvektor, bezogen auf ein im Kreisel bezw. im Raume festes Achsensystem sind, R der Drehungsvektor und V das vektorielle Produkt ist. Für kräftefreie Bewegung wird $i = \text{const}$, also die Vektorgleichung:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = V(\mathfrak{J}, R)$$

für äußere Kräfte, deren Moment D ist, wird sie:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = V(\mathfrak{J}, R) + D \quad .$$

Weitere Ausspruchsweisen gewinnt man durch Einführung der Zentrifugalkräfte; jedoch kann das hier nicht verfolgt werden.

Als Zwischenglied zwischen dem kräftefreien und dem schweren Kreisel ist die Betrachtung der „erzwungenen" Bewegung von Interesse. Wird der Zwang etwa mit der Hand ausgeübt, so hat man die Empfindung, als ob der Kreisel gegen die Führung Widerstand leiste; man kann ihn den Trägheitswiderstand nennen. Er ist offenbar der von der Hand ausgeübten Kraft gleich und entgegengesetzt, hängt also mit dem Impuls i durch die Vektorgleichung

$$T = -\frac{di}{dt}$$

zusammen; geometrisch wird er gefunden, indem man die Impulsvektoren für zwei benachbarte Zeitpunkte t und t' zeichnet, ihre Endpunkte verbindet und die Verbindungslinie durch das Zeitintervall $t - t'$ dividiert. Wirken Kräfte mit dem Moment D, so wird ein Teil der Impulsänderung hierdurch ausgeglichen, es bleibt also als Widerstand nur noch

$$T' = -\frac{di}{dt} + D$$

übrig. Ist dieser Widerstand T' null, so ist die Bewegung die den wirkenden Kräften entsprechende natürliche Bewegung, andernfalls ist sie eine erzwungene; eine Kreiselbewegung kann auch zu einem Teile natürlich, zum anderen erzwungen sein; mit anderen Worten: ein Kreisel kann natürliche und erzwungene Freiheitsgrade der Bewegung haben. Am einfachsten gestaltet sich die Sache beim Kugelkreisel; hier kann man, in völliger Analogie mit dem Massenpunkte, den Trägheitswiderstand in einen Beschleunigungswiderstand H parallel der Bahn und einen Deviationswiderstand K senkrecht dazu zerlegen; jener hängt von der Beschleunigung der Drehung, dieser von der Neigungsänderung ab und wirkt in dem

Sinne, daß er den Polhodiekegel an den Herpolhodiekegel anpreßt; zur Überwindung des Deviationswiderstands ist keine Arbeitsleistung erforderlich. Beim allgemeinen Kegel werden die Verhältnisse der Zerlegung mißlich; jedoch läßt sich wenigstens für den symmetrischen Kreisel die Auswertung des Deviationswiderstands gut durchführen und zu besonders anschaulicher Darstellung der Bewegung verwenden, worauf hier aber nicht eingegangen werden kann.

Das vollständige System der Differentialgleichungen der Kreiselbewegung besteht aus den EULERschen Gleichungen und den Gleichungen für die Änderungsgeschwindigkeiten $\varphi' \psi' \vartheta'$ der EULERschen Winkel $\varphi \psi \vartheta$; jene bestimmen die Lage der Impulsachse — oder die des Drehungsvektors — gegen den Kreisel; diese die Lage des Kreisels im Raume:

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C) q r + D_x \qquad \varphi' = r - \operatorname{ctg} \vartheta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \quad ,$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A) r p + D_y \qquad \psi' = \frac{1}{\sin \vartheta} (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \quad ,$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B) p q + D_z \qquad \vartheta' = (p \cos \varphi - q \sin \varphi) \quad .$$

Die Bedeutung der EULERschen Winkel ist schon im Artikel „Dynamik" (p. 343) angegeben worden; speziell für den Kreisel führt man mit Vorteil die Knotenlinie, d. h. die gleichzeitig auf der Vertikalen und der Figurachse senkrechte Linie ein, mit solchem Richtungssinne, daß, von ihr gesehen, die Figurachse von der Vertikalen im Uhrzeigersinne abweicht. Es ist alsdann φ der Winkel der Knotenlinie gegen die im Kreisel feste x-Achse, ψ ihr Winkel gegen die im Raume feste ξ-Achse, ϑ der Winkel der im Kreisel festen z-Achse gegen die im Raume feste ζ-Achse.

Die Integration dieser Gleichungen ist schon im Artikel „Dynamik" auf p. 349 skizziert und dort gezeigt worden, daß man nur in zwei Fällen mit elliptischen Funktionen auskommt; nämlich einerseits, wenn bei beliebiger Gestalt keine Kräfte wirken, und andererseits, wenn es sich um einen der Schwere unterworfenen, aber seinem Gestaltscharakter nach symmetrischen Kreisel handelt; handelt es sich sogar um einen gleichzeitig symmetrischen und kräftefreien Kreisel, so kommt man sogar auf einfache trigonometrische Funktionen. Als Ergänzung möge hier noch die Form angedeutet werden, die KLEIN und SOMMERFELD der Lösung gegeben haben, eine Form, durch die das Problem in der einfachsten und elegantesten Weise zum Abschluß gebracht wird.

An die Stelle der EULERschen Winkel sollen die vier komplexen und paarweise einander konjugierten Größen

$$\alpha = \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(\varphi + \psi)}{2}} \quad , \qquad \beta = i \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(-\varphi + \psi)}{2}} \quad ,$$

$$\gamma = i \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(\varphi - \psi)}{2}} \quad , \qquad \delta = \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(-\varphi + \psi)}{2}} \quad ,$$

eingeführt werden; hat man diese, so findet man die EULERschen Winkel aus den reziproken Gleichungen:

$$\cos \vartheta = \alpha \delta + \beta \gamma \quad , \qquad \sin \vartheta = \sqrt{-4 \alpha \beta \gamma \delta} \quad ,$$

$$e^{2 i \psi} = \frac{\alpha \beta}{\gamma \delta} \quad , \qquad e^{2 i \varphi} = \frac{\alpha \gamma}{\beta \delta} \quad .$$

Die vier neuen Größen kann man nun direkt als Thetafunktionen

$$\vartheta(t) = e^{-\frac{\pi}{4}\frac{\omega'}{\omega}} \sin\frac{\pi t}{2\omega} - e^{-\frac{9\pi}{4}\frac{\omega'}{\omega}} \sin\frac{3\pi t}{2\omega} + \ldots$$

$$\Theta(t) = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\omega'}{\omega}} \sin\frac{\pi t}{2\omega} - e^{-\frac{9\pi}{2}\frac{\omega'}{\omega}} \sin\frac{3\pi t}{2\omega} + \ldots$$

der Zeit darstellen, einerseits für den kräftefreien beliebigen, andererseits für den schweren Kugelkreisel sowie indirekt alsdann auch für den schweren symmetrischen Kreisel; dabei treten vier transzendente Konstanten auf, nämlich die beiden elliptischen Perioden ω und ω' sowie zwei andere, in jedem der beiden Fälle verschiedene; diese Konstanten lassen sich schließlich auf die elementaren Grundkonstanten des Problems (Impulsprojektionen auf Vertikale und Figurachse, Trägheitsmomente, eventuell Abstand zwischen Schwerpunkt und Unterstützungspunkt, höchster und tiefster Kippwinkel) zurückführen, womit das Problem vollständig gelöst ist.

Die Formeln für den kräftefreien, beliebig gestalteten Kreisel lauten, wenn zur Abkürzung

$$c = \frac{\Theta(i\omega' - is)\cdot\Theta(i\omega' + is)}{\Theta(2i\omega' - 2is)\cdot\Theta(2i\omega')} \quad , \qquad W(t) = \sqrt{\Theta(t - i\omega')\cdot\Theta(t + i\omega')}$$

gesetzt wird und ω, ω', l und s die vier Konstanten sind:

$$\alpha = \sqrt{c}\, e^{ilt} \frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{W(t)} \quad , \qquad \beta = i\sqrt{c}\, e^{ilt} e^{\frac{i\pi}{2\omega}(t - i\omega' + is)} \frac{\Theta(t + is)}{W(t)} \quad ,$$

$$\gamma = i\sqrt{c}\, e^{-ilt} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)} \frac{\Theta(t - is)}{W(t)} \quad , \qquad \delta = \sqrt{c}\, e^{-ilt} \frac{\Theta(t + 2i\omega' - is)}{W(t)} \quad ;$$

indem man den Konstanten alle möglichen reellen Werte gibt, erhält man sämtliche möglichen Bewegungen des kräftefreien Kreisels. Von besonderem Interesse ist natürlich die Bahn eines Kreiselpunktes, z. B. die eines Punktes, der vom Zentrum den Abstand 1 hat; die stereographische Projektion dieser Bahn auf die xy-Ebene ist durch die Gleichung

$$\lambda = \frac{\alpha \Lambda + \beta}{\gamma \Lambda + \delta}$$

bestimmt, wo Λ und λ die, die relative und absolute Lage des Punktes charakterisierenden komplexen Größen, d. h. (xyz im Kreisel, $\xi\eta\zeta$ im Raume fest) die Größen

$$\Lambda = \frac{x + iy}{1 - z} \quad , \qquad \lambda = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$$

sind; für den Punkt auf der z-Achse wird einfach

$$\Lambda = \infty \quad , \qquad \lambda = \frac{\alpha}{\gamma} \quad .$$

Allgemein stellen sich die Bahn eines Punktes im Abstand 1, die Polhodie und Herpolhodie sowie die neun Richtungskosinus zwischen den festen und beweglichen Achsen als elliptische Funktionen ersten Grades dar; von den Bahnen der übrigen Punkte gilt das aber nicht mehr.

Für den schweren Kugelkreisel andererseits wird, wenn zur Abkürzung

$$k^2 = \frac{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)\,\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}\,, \qquad k'^2 = \frac{\vartheta(ia + i\omega')\,\vartheta(ia - i\omega')}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}\,,$$

$$l = i\,\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)}\,, \qquad l' = i\,\frac{\vartheta'(i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta(i\omega' - \omega + ib)}\,,$$

gesetzt wird und jetzt ω, ω', a und b die vier Konstanten sind:

$$\alpha = k e^{ilt}\cdot\frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t - i\omega')}\,, \qquad \beta = k' e^{il't}\cdot\frac{\vartheta(t - \omega + ib)}{\vartheta(t + i\omega')}\,,$$

$$\gamma = k' e^{-il't}\,\frac{\vartheta(t + \omega - ib)}{\vartheta(t + i\omega')}\,, \qquad \delta = k\cdot e^{-ilt}\,\frac{\vartheta(t + ia)}{\vartheta(t + i\omega')}\,.$$

Für die Punkte der Einheitskugel wird wieder die Bahnkurve wie oben, und speziell für den Achsenpunkt (Kreiselspitze) $\lambda = \alpha/\gamma$ oder ausgeführt, wenn zur Abkürzung:

$$k_1 = e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega + ib - ia)}\,\frac{\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(ia - i\omega')}\,, \qquad l_1 = l + l' - \frac{\pi}{\omega}$$

gesetzt wird:

$$\lambda = k_1 e^{il_1 t}\cdot\frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t + \omega - ib)}\,.$$

Man hat hierin direkt das ebene stereographische Bild der im Raume verlaufenden Spitzenbahn; man kann davon für Zeichnungen unmittelbaren Gebrauch machen. Es sei bemerkt, daß die orthographische Projektion der Bahnkurve weniger einfach ausfällt. Dagegen ist der Übergang von Punkten der Einheitskugel zu beliebigen Punkten unschwer zu machen. Ebenso lassen sich die Ausdrücke für Polhodie und Herpolhodie angeben; sie werden auch hier elliptische Funktionen ersten Grades.

Der Übergang vom Kugelkreisel zum allgemeineren symmetrischen Kreisel wird überaus erleichtert durch den folgenden merkwürdigen Satz: Zu einer bestimmten möglichen Impulskurve gehören unendlich viele mit demselben Anfangsimpuls und derselben Anfangslage der Figurachse vor sich gehende Bewegungen aller derjenigen symmetrischen Kreisel, welche dasselbe Drehmoment der Schwere und dasselbe äquatoriale Hauptträgheitsmoment haben; zugleich mit der Impulskurve wird auch die Bahnkurve der Kreiselspitze bei allen solchen Bewegungen identisch. — Unter diesen Kreiseln befindet sich nun offenbar auch der Kugelkreisel; die Reduktion des symmetrischen auf den Kugelkreisel oder umgekehrt die Verallgemeinerung der Formeln von jenem auf diesen ist daher ohne Schwierigkeit durchzuführen. Es ist das zuerst von DARBOUX erkannt worden. Die Bahnkurve der Kreiselspitze sowie die Polhodie werden auch hier elliptische Funktionen ersten Grades; dagegen wird die Herpolhodie hier weniger einfach.

Für den symmetrischen schweren Kreisel seien schließlich noch die Integralformeln angegeben, durch die sich sämtliche Größen, nämlich einerseits die Zeit und die beiden ersten EULERschen Winkel, andererseits die vier Größen α, β, γ, δ durch den letzten EULERschen Winkel ausdrücken, und zwar unter Benutzung der elementaren Konstanten des Problems, nämlich: die Impulsprojektionen N auf die Figurachse — „Eigenimpuls" — und n auf die Vertikale — „seitlicher Anstoß" —, die Hauptträgheitsmomente $A\,(=B)$ und C, das Moment der Schwere $P = mg\varrho$ (ϱ Abstand des Schwerpunktes vom Unterstützungspunkte, positiv, wenn der Schwerpunkt über, negativ, wenn er unter dem Unter-

stützungspunkte liegt), h die Konstante der Energiegleichung. Dabei werde zur Abkürzung

$$u = \cos\vartheta\,,\quad U = \frac{1}{A^2}\left[2Ah(1-u^2) - (Nu-n)^2 - \frac{A}{C}N^2(1-u^2) - 2APu(1-u^2)\right]$$

gesetzt; dann lauten die Formeln:

$$t = \int\frac{du}{\sqrt{U}}\quad,\qquad \psi = \int\frac{n-Nu}{A(1-u^2)}\,\frac{du}{\sqrt{U}}\quad,$$

$$\varphi = \int\frac{N-nu}{A(1-u^2)}\,\frac{du}{\sqrt{U}} \quad + N\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)t\quad,$$

$$\log\alpha = \int\left[\frac{A\sqrt{U}+i(n+N)}{2A(u+1)} + \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\right]\frac{du}{\sqrt{U}}\quad,$$

$$\log\beta = \int\left[\frac{A\sqrt{U}-i(n-N)}{2A(u-1)} - \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\right]\frac{du}{\sqrt{U}}\quad,$$

$$\log\gamma = \int\left[\frac{A\sqrt{U}+i(n-N)}{2A(u-1)} + \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\right]\frac{du}{\sqrt{U}}\quad,$$

$$\log\delta = \int\left[\frac{A\sqrt{U}-i(n+N)}{2A(u+1)} - \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\right]\frac{du}{\sqrt{U}}\quad.$$

Numerische Berechnung. Um die obigen Formeln in gegebenen Fällen auswerten zu können, muß man die für elliptische Integrale ausgearbeiteten Methoden anwenden. Es gehören dahin die Methode der Reihenentwickelung, die LANDENsche Transformation, eventuell beide Methoden miteinander kombiniert; ferner die formal elegantere GAUSSische Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels (vgl. Artikel „Potentialtheorie", p. 186), sodann die Einführung der Theta-Funktionen, die mechanische Quadratur und endlich — was natürlich am bequemsten ist — die Benutzung der LEGENDREschen Tafeln, deren Neuabdruck freilich sehr erwünscht wäre.

In vielen und gerade den physikalisch am häufigsten betrachteten Fällen von Kreiselbewegung kann man sich nun aber mit einer angenäherten Berechnung begnügen, wobei alsdann die elliptischen Transzendenten in zyklometrische bezw. bei der Umkehr der Funktionalbeziehung in trigonometrische übergehen; nur muß man natürlich sich ein Urteil darüber bilden, welchen Fehler man bei Anwendung dieser angenäherten Formeln man etwa begeht. Einige der weiter unten angeführten Spezialformeln sind auf diese Weise gewonnen.

Diskussion des Ergebnisses. Die Größe U muß, weil unter der Wurzel stehend, positiv sein, um wirkliche Kreiselbewegungen zu liefern. Nun ist aber

$$\text{für } u = +1 \;\;\ldots\ldots\;\; U = -\frac{1}{A^2}(N-n)^2\quad,$$

$$\text{für } u = -1 \;\;\ldots\ldots\;\; U = -\frac{1}{A^2}(N+n)^2\quad,$$

d. h. abgesehen von dem Spezialfall $N = \pm n$, also $U = 0$, negativ; man muß also innerhalb dieses Intervalls ein kleineres absondern, in dem U positiv und an dessen Grenzen $u = e$ und $u = e'$ es null ist; es sind dann e und e' zwei von den Wurzeln der in u kubischen Gleichung $U = 0$ (die dritte ist > 1 oder < -1, also für u, d. h. $\cos\vartheta$ unbrauchbar). Somit gelangt man zu dem anschaulichen Resultat: Die Bahnkurve der Kreiselspitze oszilliert beständig zwischen

den beiden Parallelkreisen $\cos\vartheta = e$ und $\cos\vartheta = e'$ hin und her, wo e und e' die beiden zwischen -1 und $+1$ gelegenen Wurzeln der Gleichung $U = 0$ sind. Dabei ist die einfache Periode, d. h. die Zeit, in der die Spitze von der tiefsten zur höchsten Lage gelangt:

$$\omega = \int_{e}^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}} \quad ;$$

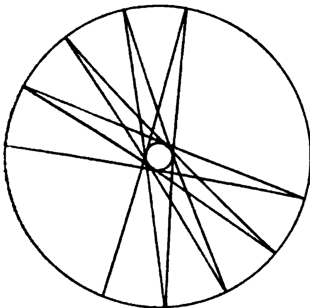
ebensogroß ist auch die Dauer des Herabsinkens, die ganze Periode ist also $2\,\omega$. Endlich erfährt dabei ψ, d. h. der Winkel zwischen der Projektion der Figurachse und der x-Achse den Zuwachs

$$\psi_\omega = \int_{e}^{e'} \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}$$

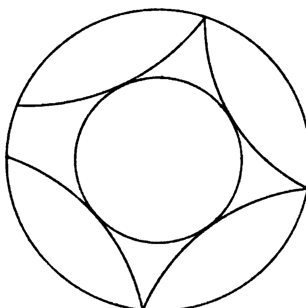
bezw., während der ganzen Periode, den Zuwachs $2\,\psi_\omega$. Die Bahnkurve der Kreiselspitze stellt sonach einen räumlich wie zeitlich periodischen Vorgang dar; sie kommt durch Drehung um den Winkel $2\,\psi_\omega$ um die Vertikale mit sich zur Deckung, besteht also aus einer Serie unter sich kongruenter Bögen, deren jeder in der Zeit $2\,\omega$ durchlaufen wird.

Will man nun die Bewegung im speziellen analytisch diskutieren, so muß man die charakteristischen Kurven dritter Ordnung betrachten, die man erhält, wenn u und v (letzteres ist, bei konstantem n, das bisherige N oder umgekehrt) als Abszisse und Ordinate einträgt — Kurven, die aus zwei getrennten Zweigen bestehen und sich für die verschiedenen Fälle charakteristisch unterscheiden; jedoch müssen wir hier auf die Verfolgung dieser analytischen Formen verzichten und uns mit der geometrischen Betrachtung begnügen.

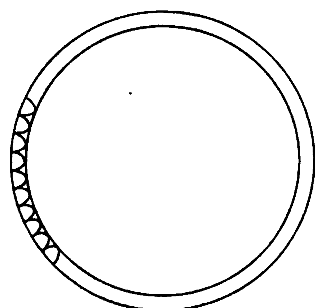
Bei der großen Mannigfaltigkeit der zu variierenden Größen ist es gut, zunächst irgend eine, für das Wesentliche der Formen nicht ins Gewicht fallende



Figur 123.



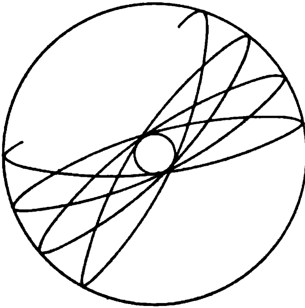
Figur 124.



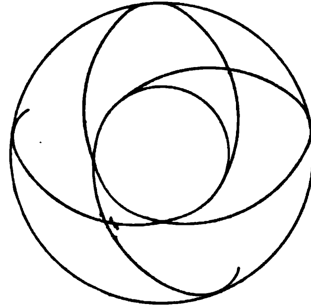
Figur 125.

Annahme zu machen; es sei das die, daß $e = 0$ ist, d. h. daß die Kreiselachse anfangs horizontal steht; ferner sei zunächst der seitliche Anstoß n gleich null, der Eigenimpuls N dagegen erhalte immer größere Werte. Ist zunächst auch $N = 0$, so hat man den Fall des ebenen Vertikalpendels; ist N klein, so erhält man bei stereographischer Projektion eine Zickzackkurve (Figur 123, $N = 0{,}2$) mit Spitzen und nahezu geradlinigen Bögen, die Spitzen sitzen auf dem Äquator auf, die Bögen berühren einen dem Nordpole nahen Parallelkreis (e' nahezu eins); der Umlauf erfolgt entgegengesetzt der Kreiselung, ein Schluß der Kurve in sich findet im allgemeinen nicht statt. Bei mittlerem N (in Figur 124 ist $N = 1{,}73$ und $e' = \frac{1}{2}$) erhält man schon mehrere stärker gekrümmte Bögen auf einen Umlauf,

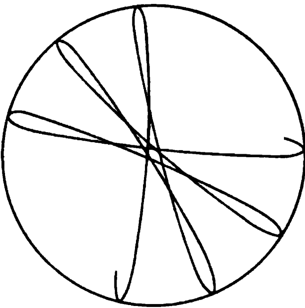
und der nördliche Parallelkreis ist schon ziemlich groß. Bei großem N endlich erhält man (Figur 125) sehr viele kleine Bögen, und e' ist nahezu null, daß die Kreiselschwankungen nur noch minimal sind; man kann daher diese Bewegung, weil sie sich äußerlich kaum von der regulären Präzession unterscheidet, als pseudoreguläre Präzession bezeichnen; hinsichtlich Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung sind aber die beiden Bewegungen natürlich ganz verschieden. —



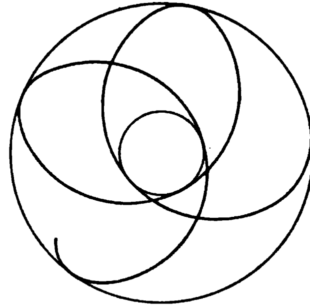
Figur 126.



Figur 127.



Figur 128.



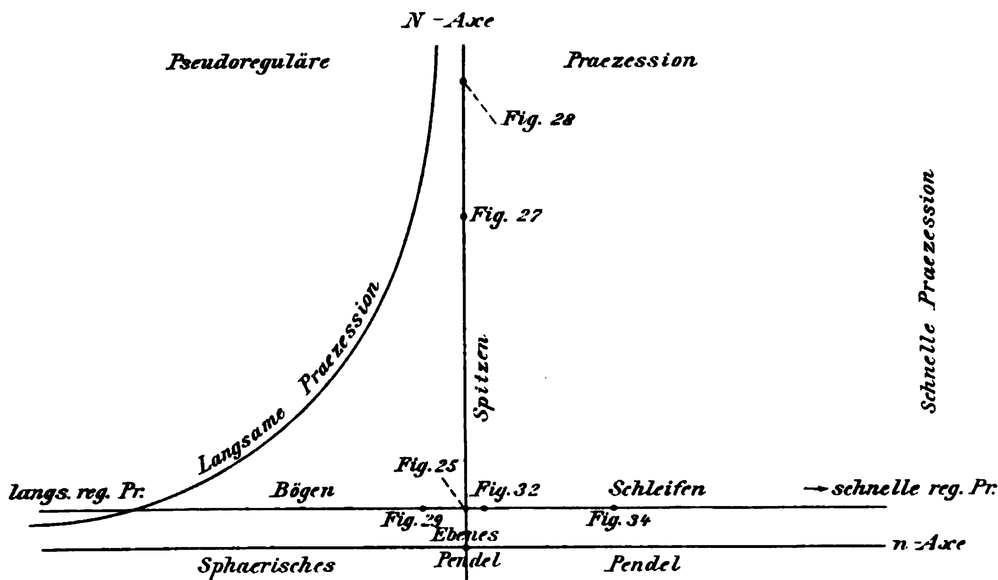
Figur 129.

Ist nun ein seitlicher Anstoß vorhanden, so entsteht aus jedem obiger Fälle eine Serie neuer, z. B. bei negativem n aus dem ebenen das sphärische Pendel, aus den Spitzenkurven werden abgerundete Bögenkurven (Figur 126 und 127); bei positivem n dagegen, d. h. seitlichem Anstoß im Kreiselsinne erhält man Schleifenkurven (Figur 128 und 129); als Grenzfälle erhält man für $n = -\infty$ die langsame, für $n = +\infty$ die schnelle reguläre Präzession, als Folge des Umstands, daß die Teilbögen dort immer kleinere, hier immer größere Spannweite erhalten, also dort schließlich verschwinden, hier in dem Umlaufe aufgehen. — Weitere Serien von Fällen ergeben sich, wenn man die Figurachse anfangs nicht horizontal, sondern beliebig legt; insbesondere tritt alsdann ein Gegensatz hervor, den man durch die Ausdrücke „starker“ und „schwacher“ Kreisel charakterisieren kann; ein Gegensatz, der von Massenverteilung, Anfangslage und Größe des Eigenimpulses abhängt und durch die Beziehungen

$$P < 0 \begin{cases} N^2 > -2AP(1-e) & \text{starker Kreisel} \\ N^2 < -2AP(1-e) & \text{schwacher Kreisel} \end{cases}$$

$$P > 0 \begin{cases} N^2 > -2AP(1+e) & \text{starker Kreisel} \\ N^2 < -2AP(1+e) & \text{schwacher Kreisel} \end{cases}$$

festgelegt ist. Beim starken Kreisel kann der Parallelkreis e' jede Lage auf der Kugel annehmen, beim schwachen ist er dagegen von einer Kalotte ausgeschlossen, die den Südpol umgibt und durch den Kreis $u = -e + N^2/2AP$ begrenzt wird. Beim starken Kreisel gibt es immer zwei Fälle regulärer Präzessionsbewegung, beim schwachen dagegen zwei oder keinen, je nachdem $4APe < N^2$ oder $4APe > N^2$ ist; auch in Hinsicht auf Spitzen- und Schleifenbildung unterscheiden sich starker und schwacher Kreisel wesentlich. — Endlich fällt der Fall für



Figur 130.

unendlich großes n hier nicht mehr mit der schnellen regulären Präzession zusammen, es oszilliert vielmehr die Kreiselspitze um den Äquator herum, indem die Bahnkurve zwischen den Kreisen $+e$ und $-e$ auf und ab schwankt; letztere ist also ein die Kreise $+e$ und $-e$ berührender Kreis. Zwischen diesem Grenzfall und der schnellen Präzession gibt es eine stetige Folge von Übergängen.

Ein Teil der hier erörterten Formen ist in Figur 130 schematisch angeordnet; eine nähere Erläuterung ist überflüssig.

Besondere Bewegungsformen des Kreisels. Bei der großen Zahl der maßgebenden Faktoren wird man von vornherein erwarten dürfen, durch Spezialisierung der aufgestellten Formeln eine große Mannigfaltigkeit möglicher Kreiselbewegungen zu erhalten; viele von ihnen haben freilich kein physikalisches Interesse; unter den übrigen sollen die wichtigsten und einfachsten hier noch kurz erwähnt werden, wobei der Einfachheit halber meist auf den Kugelkreisel exemplifiziert ist.

1. Der aufrechte Kreisel. Der einfachste Fall, der überhaupt möglich ist: die Figurachse ist und bleibt vertikal, um sie erfolgt die Drehung mit gleichförmiger Geschwindigkeit; die Winkel φ und ψ werden zugleich mit der Knotenlinie unbestimmt, dagegen wird ihre Summe $\varphi + \psi = \chi$ der Winkel zwischen x- und ξ-Achse, bestimmt also die Kreiseldrehung; der Fall ist also durch die beiden Gleichungen

$$\vartheta = 0 \quad , \quad \chi = \text{const}$$

formuliert; auch gilt die weitere Beziehung $n = N$, sie gilt aber nicht ausschließlich für unseren Fall, sondern für jeden, in dem die Bahnkurve durch den höchsten

Kugelpunkt hindurchgeht. — Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß die so definierte Bewegung des aufrechten Kreisels bei beliebigen Werten der Drehgeschwindigkeit eine mögliche Bewegung ist, und es bleibt daher nur noch die Frage nach ihrer Stabilität übrig. Es zeigt sich: für $P < 0$ (Schwerpunkt unter dem Unterstützungspunkt) ist die Bewegung sicher stabil; für $P > 0$ (Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkt) ist die Bewegung des starken Kreisels ($N^2 > 4AP$) stabil, die des schwachen ($N^2 < 4AP$) labil, was sich jedoch praktisch wegen der numerischen Verhältnisse nicht zu erkennen geben würde, so daß man von einer theoretischen Labilität und praktischen Stabilität sprechen kann.

Es sei übrigens bei dieser Gelegenheit bemerkt, daß die ganze Frage der Stabilität der Kreiselbewegung in ihrem Resultat völlig davon abhängt, wie man dynamische Stabilität definiert; diese Definition ist durchaus nicht so einfach und feststehend wie die der statischen Stabilität; es sind vielmehr seit LAPLACE und Lord KELVIN verschiedene Definitionen aufgestellt worden. Die eine, die man als die ROUTHsche bezeichnen kann, fordert, daß die aus einer genügend kleinen Störung resultierenden Abweichungen zwischen entsprechenden Lagen des Systems dauernd unter eine gegebene Grenze herabgedrückt werden können; diese Definition erweist sich jedoch als zu eng, indem sie die einfachsten und regulärsten Bewegungen zu instabilen machen würde. Ersetzt man andererseits das Wort „dauernd" in obiger Definition durch „für einen gegebenen Zeitraum $t < T$", so erhält man eine entschieden zu weite Definition, indem jetzt offenbar labile Bewegungen stabil heißen würden, z. B. die des aufrechten schwachen Kreisels. Die richtige Mitte hält schließlich die folgende von KLEIN und SOMMERFELD formulierte Definition: Eine Bewegung soll stabil heißen, wenn sie übereinstimmt mit dem Limes, dem die aus einer beliebigen Impulsänderung resultierende Bewegung bei nach null abnehmender Größe dieser Änderung zustrebt; dagegen soll sie labil heißen, wenn sie von dem so erhaltenen Limes verschieden ist, oder wenn bei verschiedenen Arten der Impulsänderung verschiedene Limites herauskommen, oder wenn ein Limes überhaupt nicht existiert. Diese Definition deckt sich für das Gleichgewicht mit der allgemein gültigen, für die Bewegung erweist sie sich als den physikalischen Vorstellungen überall entsprechend.

2. Die reguläre Präzession. Diese Bewegungsart ist schon eingangs als vorläufiges Beispiel betrachtet worden; es ist jetzt noch folgendes hinzuzufügen. Analytisch ist sie dadurch charakterisiert, daß die beiden zwischen -1 und $+1$ liegenden Wurzeln der Gleichung $U = 0$ hier in eine Doppelwurzel zusammenfließen, woraus folgt, daß auch dU/dn für $u = e$ verschwindet, d. h. es ist

$$A \frac{n - Ne}{A(1 - e^2)} \cdot \frac{N - ne}{A(1 - e^2)} = P = A\mu\nu \quad .$$

Die weitere Betrachtung zeigt, daß die reguläre Präzession zwar bei beliebiger Wahl der Konstanten e, n und N eine Lösung der Gleichungen ist, aber allerdings eine singuläre; sie wird also nur unter ganz besonderen Umständen wirklich auftreten.

3. Die beinahe reguläre Präzession. Nutation. Erteilt man dem Kreisel, während er in regulärer Präzession begriffen ist, einen kleinen Anstoß in beliebiger Richtung, so erhält man eine der regulären Präzession benachbarte Bewegung. Sie ist charakterisiert durch die Formeln:

$$u = u_0 + \varepsilon \sin \frac{\pi t}{\omega} \quad , \qquad \psi = \nu t + \nu_1 \varepsilon \cos \frac{\pi t}{\omega} \quad ,$$

wo die Abkürzungen gelten:

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{A}{2\,P(e'' - u_0)}}\,, \quad \nu = \frac{n - N u_0}{A(1 - u_0^2)}\,, \quad \nu_1 = \frac{N(1 + u_0^2) - 2\,n\,u_0}{\pi\,A(1 - u_0^2)^2}\,\omega,$$

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{1\,u_0^2}{2\,A\,P(e'' - u_0)}}\,\Theta_0\,,$$

wo Θ_0 die ϑ-Komponente des durch den Anstoß erzeugten Impulszuwachses, d. h. seine Projektion auf die Knotenlinie ist (die beiden anderen Komponenten, d. h. die Projektionen auf die Vertikale und die Figurachse erfordern keine neuen Zeichen, da sie in den Größen n und N enthalten sind), wo ferner u_0 der mittlere Parallelkreis und ε die Abweichung von ihm nach beiden Seiten ist, d. h.

$$e = u_0 - \varepsilon\,, \qquad e' = u_0 + \varepsilon\,,$$

wo endlich e'' die dritte Wurzel der Gleichung $U = 0$ ist. — Die erste der Gleichungen, d. h. der Ausdruck für u, stellt eine reguläre Präzession dar, der Präzessionskreis ist $u = u_0$; er fällt mit dem ursprünglichen Präzessionskreise nur dann zusammen, wenn der Anstoß in die ϑ-Richtung fällt, also die Knotenlinie zur Achse hat; dasselbe gilt von der Präzessionsgeschwindigkeit. Die zweite, durch die Gleichung für ψ dargestellte Teilbewegung stellt eine elliptische Schwingung relativ zum Präzessionskreise dar; ω ist die halbe Schwingungsdauer, ε die vertikale, $\nu_1 \varepsilon$ die horizontale Schwingungsamplitude; die Schwingungsdauer bleibt endlich, auch wenn der Anstoß verschwindend klein wird. Man kann diese Teilbewegung, im Gegensatz zur Präzession, als Nutation bezeichnen und demnach als Endergebnis hinstellen: Die betrachtete Kreiselbewegung ist eine Übereinanderlagerung einer regulären Präzession mit einer sich periodisch wiederholenden Nutation. — Die hier betrachtete Bewegung geht, wie die Gleichungen zeigen, von selbst in die reguläre Präzession über; die letztere ist somit eine im obigen Sinne stabile Bewegungsform. Dagegen können die benachbarten Bewegungen nur durch dauernde Störung aufrecht erhalten werden.

4. Die pseudoreguläre Kreiselbewegung. Diese Bewegungsform ist schon im allgemeinen Schema oben angegeben worden. Ihre große Bedeutung liegt darin, daß sie bei den gewöhnlichen Kreiselexperimenten sehr häufig auftritt und eine reguläre Präzessionsbewegung vortäuscht; sie stellt sich namentlich immer dann ein, wenn der Impulsvektor anfänglich in die Richtung der Figurachse fällt und eine beträchtliche Größe hat. Daß in Wahrheit die Bahnkurve kein einfacher Kreis ist, sondern sich aus lauter Bögen, allerdings sehr kleinen, zusammensetzt (vgl. Figur 125); wissen wir schon; es kann nunmehr hinzugefügt werden, daß die Bögen Zykloiden sind, und zwar haben in den Gleichungen

$$\mathfrak{x} = r\,w\,t + a \sin w\,t\,, \qquad \mathfrak{y} = r + a \cos w\,t$$

die Größen r, a, w folgende Werte:

$$r = \frac{A\,P \sin\vartheta_0}{N^2}\,, \qquad a = \frac{n - N\cos\vartheta_0}{N \sin\vartheta_0} - \frac{A\,P\sin\vartheta_0}{N^2}\,, \qquad w = \frac{N}{A}\,;$$

je nachdem a größer, gleich oder kleiner als r ist, erhält man eine Zykloide mit Schleifen, Spitzen oder Abrundungen. Da nun N gewöhnlich sehr groß ist, werden die Dimensionen der Zykloiden äußerst klein, ihre auf einen Umlauf entfallende Anzahl äußerst groß, so daß für das Auge nur die mittlere Bewegung, d. h. eine reguläre Präzession wahrnehmbar bleibt; an Zahlenbeispielen kann man das leicht konstatieren. Hierdurch kommt nun das scheinbare, vielbesprochene Paradoxon zustande, daß der Kreisel nicht in der Schwererichtung, sondern senkrecht dazu, also horizontal-peripherisch ausweicht; in Wahrheit ist aber das erste Stück des Zykloidenbogens radikal gerichtet, und nur infolge des starken

Eigenimpulses tritt rasch die Reaktion ein, worauf sich dasselbe Spiel immer wiederholt, so schnell, daß eben eine gewöhnliche Kreis- bezw. Kegelbewegung vorgetäuscht wird. Alle besonderen Erklärungen für dieses Verhalten, deren im Laufe der Zeiten sehr viele aufgestellt worden sind, sind also, wenn nicht geradezu irrig, so doch mindestens überflüssig. Im experimentellen Teile wird hierauf noch zurückzukommen sein.

5. Der sich aufrichtende Kreisel. Dieser Fall, der in der Beobachtung bekanntlich eine große Rolle spielt, ist vielfach theoretisch, aber immer fehlerhaft behandelt worden, indem versucht wurde, das Aufrichten rein dynamisch abzuleiten. Nach der obigen Theorie kann aber eine Aufrichtung nie eintreten, es bleibt vielmehr immer dieselbe Neigung oder doch dieselbe mittlere Neigung bestehen. Die Aufrichtung kann also nur eine Folge der Reibung am Stützpunkte sein, und in der Tat läßt sich eine wenigstens angenäherte Theorie dieses Einflusses geben, worüber hier nur einige kurze Bemerkungen gemacht werden können. Man muß zwischen gleitender und bohrender Reibung unterscheiden; jene hat die Wirkung, die Impuls- und die Figurachse allmählich aufzurichten, und zwar desto schneller, je langsamer die Kreiseldrehung ist; diese hat die umgekehrte Wirkung, tritt aber hinter jener im allgemeinen bedeutend zurück, so daß das gemeinsame Endresultat die aufrechte Kreiselbewegung ist; ist dieser Zustand erreicht, so wirkt nur noch die bohrende Reibung. Außerdem schwächen beide Arten von Reibung den Impulsvektor, also die Kreiseldrehung; die gleitende bis zu einem gewissen endlichen Minimalwert hinab, die bohrende alsdann weiter bis auf null, worauf der Kreisel umfällt. Die Bahnkurve ist in der Hauptsache eine Spirale, die sich nach außen dem Einheitskreise asymptotisch nähert, nach innen dem Achsenpunkte als eine gewöhnliche archimedische Spirale nähert; die nähere Untersuchung zeigt aber, daß die Linie nicht gleichmäßig, sondern geschlängelt ist, d. h. sie enthält zahlreiche kleinere Nutationen, die sich über die spiralige Präzession lagern.

6. Der auf der Ebene spielende Kreisel. Wenn der Unterstützungspunkt des Kreisels nicht fest ist, sondern die Freiheit hat, sich auf einer Ebene zu bewegen, so lagert sich über die eigentliche Kreiselbewegung eine zweite, und die Bahnkurven werden verwickelter; entsprechend komplizierter wird dann auch die analytische Formulierung, und die Lösung ist nicht mehr elliptischen, sondern hyperelliptischen Charakters. Das nächstliegende Interesse bietet in diesem Falle natürlich die Bahnkurve des Unterstützungspunktes dar; sie stellt sozusagen ein Reaktionsbild der Spitzenkurve vor. Sie ist infolge der Reibung, die sich in diesem Falle begreiflicherweise besonders stark geltend macht, eine Spirale, aber deren einzelne Windungen legen sich im allgemeinen nicht ineinander, sondern mehr oder weniger nebeneinander — eine Erscheinung, die, wie überhaupt das Spielen in der Ebene ohne gerichteten Anfangsimpuls, sich der strengen Theorie entzieht und mehr oder weniger auf kleinen Abnormitäten beruht.

Nebeneinflüsse. Überhaupt ist zum Schlusse zu betonen, daß die Theorie zahlreiche und zum Teil nicht unerhebliche Vernachlässigungen enthält, infolge deren die wirklichen Erscheinungen selbst von denen unserer vollkommensten Theorie noch mehr oder weniger abweichen. Einige dieser Einflüsse sind: die schon besprochene Reibung, der Luftwiderstand, der zum Teil ähnlich wie die feste Reibung, zum Teil aber noch spezifisch wirkt; die Elastizität des Kreiselmaterials selbst und die der Unterlage; der letzteren Glätte, Rauhigkeit, Unregelmäßigkeit u. s. w. Auf alle das kann hier nicht eingegangen werden.

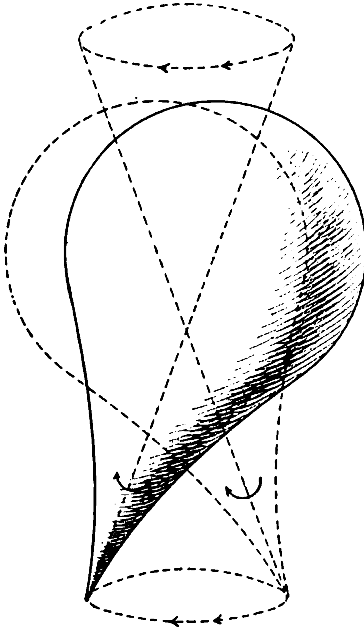
Weiteres zur Theorie. Nachdem im voranstehenden die Kreiseltheorie an der Hand des KLEIN-SOMMERFELDschen Werkes systematisch skizziert worden ist, muß es in bezug auf die anderen Darstellungen dieser Theorie genügen, einige von ihnen aus neuerer Zeit kurz zu erwähnen und im übrigen auf das Literaturverzeichnis am Schlusse des Artikels zu verweisen. — Von den höheren,

mehr oder weniger strengen Theorien, um diese voranzustellen, ist die von W. HESS in mehreren Abhandlungen entwickelte die vorzüglichste; in manchen Punkten kommt sie der oben skizzierten, durch die sie im übrigen überholt ist, schon sehr nahe. — Von hohem Interesse ist ferner die Theorie von GREENHILL. Dieser Autor knüpft, wie übrigens schon vorher andere Mathematiker, namentlich ROUTH, an die Bemerkung JACOBIS an, daß die allgemeine Bewegung des schweren Kreisels in die relative Bewegung zweier schwereloser Körper um den festen Punkt des Kreisels aufgelöst werden kann; im Gegensatz zu dem synthetischen Verfahren von ROUTH wird hier analytisch vorgegangen, d. h. es wird mit der Berechnung der Bewegung des Kreisels begonnen und hieraus dann die beiden JACOBIschen Bewegungen abgeleitet. Im übrigen wird sowohl die analytische Methode (Θ-Funktionen) als die geometrische benutzt; und schließlich werden die einfacheren Fälle nicht nur numerisch durchgerechnet, sondern auch stereoskopisch abgebildet, so daß man mittels des Stereoskops, mit einiger Übung aber auch mit bloßem Auge, die Raumkurven, die ein Achsenpunkt auf der Kugelfläche beschreibt, in ihrem Verlaufe verfolgen kann. — Von Arbeiten, die ein mehr spezielles Interesse haben, seien hervorgehoben eine von RESAL über die Stabilität der Kreiselbewegung, zwei besonders einfache Ableitungen von BARUS und GREENHILL, das von RESAL, BOBYLEW u. A. behandelte Problem des perimetrischen Kreisels (das obere Stielende des Kreisels rollt oder gleitet am Rande einer gegebenen Scheibe, die kreis-, S-förmig u. s. w. ist); das Problem der Aufrichtung des Kreisels durch die Reibung (s. oben), das von GALLOP exakt verfolgt wird (das untere Achsenende wird als kleine Kugel angenommen, die Zerstreuung der Energie durch die Reibung wird ermittelt und gezeigt, inwieweit sich die Achse vertikal stellt oder dieser Lage nähert); eine Abhandlung von PRANG über den auf der Ebene spielenden Kreisel (s. oben), wobei durch gewisse, bei großer Kreiselgeschwindigkeit erlaubte Vereinfachungen die im allgemeinen hyperelliptischen Integrale in elliptische übergehen; endlich, als Beispiel der Anwendung der Vektorenrechnung, eine Abhandlung von FÖPPL.

Die Zahl der Arbeiten, die sich mit der populären Erklärung der Kreiselbewegung befassen, sei es mittels elementar-mathematischer Methoden, sei es ganz ohne Mathematik, ist begreiflicherweise sehr groß. Daß eine derartige Erklärung im besten Falle nur bis zu einem gewissen Grade Rechenschaft von den Verhältnissen geben kann, ist nach dem Vorangegangenen einleuchtend; es sind aber auch vielfach geradezu falsche Darstellungen gegeben worden, und selbst die Ausführungen hervorragender Autoren sind nicht selten schief und unhaltbar. Man wird sich im allgemeinen begnügen müssen, zu zeigen, unter welchen Umständen die drei an Komplikation aufsteigenden Typen der Kreiselbewegung auftreten werden, nämlich die einfache Rotation, die einfache Präzession und die Präzession mit Nutation; ferner zu zeigen, in welchem Richtungs- und Größenverhältnis die drei Teilbewegungen, von denen im ersten Falle nur die eine, im zweiten die beiden ersten, im dritten alle drei vertreten sind, zueinander stehen; dabei wird man als bestimmende Faktoren die Anfangsbedingungen, die seitlichen Impulse, die äußeren Kräfte und die Massenverteilung, namentlich die Lage des Schwerpunktes zum Unterstützungspunkte voneinander trennen müssen und im großen ganzen auch können; die feineren Beziehungen werden dabei aber nicht zur Feststellung gelangen. Es sei in dieser Hinsicht u. a. auf die Lehrbücher der Physik von RIECKE und von GRAY-AUERBACH (mit besonderem Zusatze für die deutsche Ausgabe), auf das kleine, aber reichhaltige Buch von PERRY, „Spinning Tops“ (deutsch von WALZEL, „Drehkreisel“), sowie auf Abhandlungen von POGGENDORFF, JOUFFRET, JONQUIÈRES, HAUCK, FRANCKE, A. SCHMIDT, SCHWARTZE, BARUS, WERNICKE u. A. hingewiesen.

Kreiselapparate. Die Kreisel, die man zu wissenschaftlichen Untersuchungen verwenden kann — zum Teil eignen sich hierzu übrigens auch die gewöhnlichen

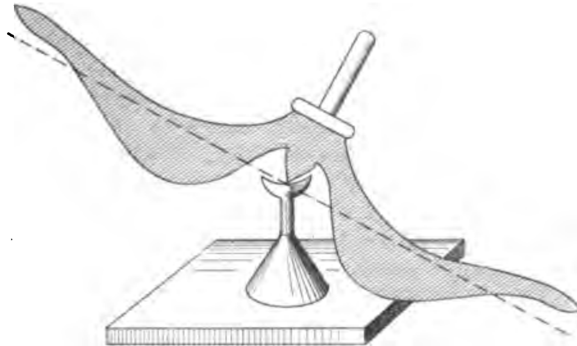
Spielzeuge — kann man in verschiedene Klassen teilen, je nachdem sie geometrisch und dynamisch von sphärischer oder von axialer oder ohne Symmetrie sind; der zweite Fall ist offenbar der wichtigste, einige der im folgenden angeführten Apparate haben aber, während sie hinsichtlich des Hauptkörpers der zweiten Klasse angehören, Nebenteile, durch deren Asymmetrie sie in die dritte Klasse übergehen; man sehe daraufhin die Figuren 132 und 133 an. Ferner sind die



Figur 131 a.



Figur 131 b.



Figur 131 c.

drei Fälle zu unterscheiden, daß der Schwerpunkt in, über oder unter dem Unterstützungspunkt liegt; der zweite Fall liefert den gewöhnlichen, auf der Spitze tanzenden Kreisel, z. B. wie Figur 131 a (die zugleich die Präzession mit Spielen in der Ebene zeigt) oder mit einem Schwungrad und einer hindurchgesteckten Achse wie Figur 131 b (mit Stativ und Schale); man kann aber mit Hilfe eines Stativs den Schwerpunkt auch in oder sogar unter den Unterstützungspunkt hinabdrücken (Figur 131 c, Modell des französischen Ingenieurs ROZÉ, von dem eigent-

lichen Kreisel ist nur ein Meridianschnitt gezeichnet).[1] Den Stützpunkt kann man ferner entweder auf eine kleine Pfanne oder frei auf die Horizontalebene setzen; in jenem Falle hat er nur wenig, in diesem beliebigen Spielraum, ganz fest kann man ihn begreiflicherweise nicht machen, wenigstens nicht auf direktem Wege. Man kann nun aber den Kreisel, statt ihn aufzustellen, auch aufhängen, entweder direkt oder an einer horizontalen Achse mit Ausbalanzierung auf der anderen Seite oder mit kardanischer Aufhängung, d. h. innerhalb mehrerer Ringe, deren Achsen aufeinander senkrecht stehen; hierdurch wird aber natürlich die axiale Symmetrie zerstört. Einige dieser Apparate heißen auch Gyroskope oder Gyrostate, besondere Konstruktionen tragen die Namen ihrer Erfinder. So stellt Figur 132 den BOHNENBERGERschen Apparat — Kugelkreisel in drei Ringen — dar, der äußerste Ring ist vertikal festgestellt, der zweite *B* kann sich um eine vertikale, der dritte *C* um eine horizontale, endlich die Kugel *D* selbst



Figur 132.



Figur 133.

um eine wieder auf letzterer senkrechte Achse drehen; zur Erregung dient eine äquatoriale Rolle, von der sich eine Schnur abziehen läßt. In Figur 133 ist der von PLÜCKER angegebene, von FESSEL konstruierte Rotations- und Präzessionsapparat abgebildet; das Schwungrad *aa* sitzt mit der Achse *bb* in dem inneren Ringe *cc*, dieser mit der Achse *nn* in dem äußeren Ringe *dd*, an diesem ist der in der Gabel *i* spielende Stift *f* befestigt, der am anderen Arm das Gegengewicht *g* trägt; der Apparat ist also, abgesehen von den Freiheiten des Kreisels selbst, um eine horizontale und, infolge der freien Verbindung des Gabelstiels *h* mit dem Stativ, auch um eine vertikale Achse beweglich. Den zweiten Arm mit dem Gegengewicht kann man auch weglassen und das Armende in den Endstift des Stativs einsetzen, so daß der ruhende Kreisel natürlich herunterfällt. Von POGGENDORFF u. A. ist der FESSELsche Apparat modifiziert worden, so durch Verbindung mit einer Schwungmaschine; ferner ist das Polytrop von SIRE zu nennen, bei dem der Kreisel auf einem Teilkreise sitzt und nach dem Prinzip des

[1] Die Zeichnung ist gegen die bei KLEIN und SOMMERFELD etwas abgeändert, da dort der Schwerpunkt, wenigstens bei homogener Verteilung, nicht deutlich unter dem Stützpunkte liegt; durch Aufsetzen von Ringen auf die Achse kann man übrigens leicht den labilen Fall herstellen.

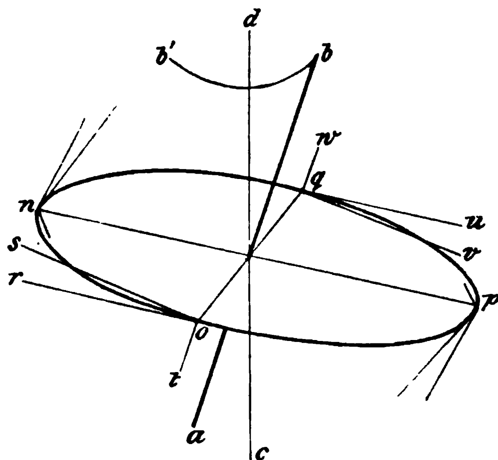
Winkelrades angetrieben wird. Auch kann man den Kreisel aufhängen, sei es an Stangen oder Fäden; besondere Apparate dieser Art sind das Polygonalpendel und das Kegelpendel von GRUEY, Verbindungen von Pendel und Kreisel u. s. w. Von Apparaten der letzteren Art sei noch das gyroskopische Pendel von MERRIT erwähnt; es ist mit Spiegel zur photographischen Registrierung der Spurbahn versehen und liefert sehr hübsche, die Theorie bestätigende Kurven. Der Spitze, auf der der Kreisel tanzt, kann man sehr verschiedenen Grad von Schärfe geben, man kann sie schließlich auch durch eine ganz sanfte Kugelrundung ersetzen, was sogar in mancher Hinsicht Vorteile bietet. Endlich sind die Kreisel zu nennen, die mit Schreibspitzen am oberen Ende versehen sind, mittels deren man auf einem mit leichtem Druck dagegen gehaltenen Karton die Bahnkurven aufzeichnen kann. In dieser und mancher anderen Hinsicht sind u. a. die SCHMIDTschen Kreiselserien zu empfehlen, die früher von dem Erfinder, gegenwärtig aber von KOHL in Chemnitz hergestellt werden. Bei dem auf der Ebene spielenden Kreisel kann man den Stützpunkt selbst die Aufzeichnung besorgen lassen.

Experimente mit den Kreiselapparaten verschiedener Art. Mit Hilfe dieser Apparate kann man nun die wesentlichen Erscheinungen der Kreiselbewegung demonstrieren und studieren. Die wichtigsten dieser Erscheinungen seien im Anschluß an derartige Versuche hier zusammengestellt. Zunächst die auffallendste Erscheinung, daß der Kreisel und überhaupt jeder rotierende Körper nicht umfällt, obgleich er das im ruhenden Zustande der Labilität seines Gleichgewichts halber tun würde. Beispiele liefern ein fortrollender Reifen, ein sich drehender Teller und der gewöhnliche Kinderkreisel. Der fortrollende Reifen fällt nicht um, weil, wenn er zufällig nach rechts kippt, dieses rechts sich im Laufe einer halben Umdrehung in ein links verwandelt u. s. w.; woraus zugleich folgt, daß die Kippungen desto kleiner sein werden, je größer die Rollgeschwindigkeit ist, und daß, bei allmählicher Verlangsamung des Rollens, eine Grenze eintreten wird, wo die Kippung während eines halben Umlaufs zum Umfall führt. Ähnlich beim Kreisel, man kann also sagen: der ruhende Kreisel fällt um, weil er durch Zufall einen Anstoß in bestimmter Richtung erhält; der rotierende Kreisel bleibt aufrecht, weil der durch Zufall in einer bestimmten Richtung erhaltene Anstoß sich durch die Rotation auf alle Richtungen gleichmäßig verteilt.

Man kann diese Erscheinung, obgleich nach den in der Theorie gemachten Bemerkungen (p. 425) nicht sehr passend, als Erhaltung der Rotationsebene bezeichnen, muß aber jedenfalls im Auge behalten, daß es sich hier nur um eine graduelle Eigenschaft handelt, d. h. der Kreisel offenbart ein gewisses, aber begrenztes Bestreben, seine Kreiselebene, richtiger seine Impulsachse (s. oben) zu bewahren. Man kann sich hiervon z. B. in der Weise überzeugen, daß man einen in Gang gesetzten Kreisel mit den Spitzen in die Pole zweier Halbkugeln einsetzt, diese zu einer Kugel zusammenschließt und nun in die Hand nimmt: Verschiebungen setzt die Kugel den normalen Trägheitswiderstand, Drehungen hingegen einen enormen, von der inneren Kreiselung herrührenden Widerstand entgegen, mit einziger Ausnahme der Drehung um eine bestimmte Achse, eben der Kreiselachse. — Oder man benutzt den BOHNENBERGERschen Apparat: solange die Kugel ruht, genügt der leiseste exzentrische Druck, um sie in der gewünschten Richtung zu drehen; kreiselt sie aber, so kann man den ganzen Apparat beliebig neigen und drehen, ohne daß dies auf die absolute Richtung der Achse einen Einfluß hätte.

Die Erhaltung der Rotationsebene kommt indessen nur in zwei Fällen voll zum Ausdruck: entweder muß die Achse vertikal stehen, oder der feste Punkt muß mit dem gemeinsamen Schwerpunkt des Körpers im allgemeinen und der Achse im besonderen zusammenfallen. Ist keines von beiden der Fall, so setzt sich die äußere Wirkung, also beim Kreisel die Schwere, mit dem Bestreben die Rotationsebene zu erhalten, zu einer neuen Bewegung zusammen, welche neben

der kreiselnden Bewegung hergeht und darin besteht, daß die Achse um den festen Punkt eine Kegelfläche bestimmter Art beschreibt; an jedem schief aufgesetzten Kreisel kann man diese Bewegung wahrnehmen. Im großen und ganzen (vgl. die obigen Bedenken) kann man auch von dieser Erscheinung ohne Rechnung ein Verständnis gewinnen. Die Schwere sucht (Figur 134) die Neigung der Achse *a b* gegen die Vertikale *c d* zu vergrößern, also die rotierende Scheibe um eine mit *o q* parallele Achse zu drehen. Die Geschwindigkeit der Punkte *o* und *q* hört infolgedessen auf, eine rein tangentiale *o r* bezw. *q u*, wie bisher, zu sein; sie läßt sich vielmehr, nachdem die Schwere die Scheibe um ein weniges gekippt hat, in die tangentialen Komponenten *o s* und *q v* und in die zur Scheibenebene senkrechten Komponenten *o t* und *q w* zerlegen; vermöge der ersteren wird die Kreiselbewegung fortgesetzt, vermöge der letzteren wird die Scheibe um eine mit *n p* parallele Achse gedreht, also die Kreiselachse *a b* in einer auf der Ebene *a b c d* senkrechten Richtung vornüber gekippt. Sobald dies, wenn auch noch so wenig, der Fall ist, hört auch die Geschwindigkeit der Punkte *n* und *p* auf, rein tangential zu sein, sie erhält vielmehr eine auf der Scheibenebene senkrechte, in *n* nach unten, in *p* nach oben gerichtete Komponente, und die Scheibe wird sich um eine zu *o q* parallele Achse in aufrichtendem Sinne drehen. Die Folge des Zusammenwirkens dieser Umstände ist also eine doppelte: einmal die Verhinderung des Umfallens, und sodann eine zu der Kreislinie *b b'* tangentiale Bewegung des Kreiselachse, vermöge deren letztere eine Kegelfläche beschreibt. Diese Bewegung ist die Präzession. Bei dem gewöhnlichen Kreisel haben Kreiselung und Präzession, von oben gesehen, gleichen Sinn, bei dem Kreisel mit tiefliegendem Schwerpunkte entgegengesetzten.

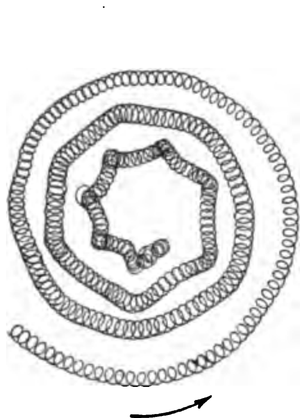


Figur 134.

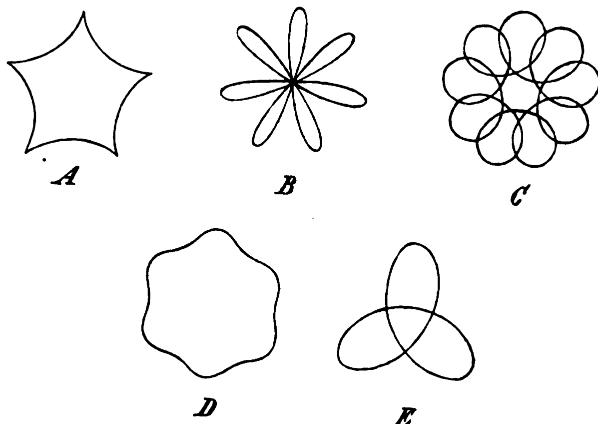
Zur Beobachtung der Präzession unter beliebig zu verändernden Umständen eignet sich ganz besonders der PLÜCKER–FESSELsche Rotationsapparat. Versetzt man die Scheibe durch Abziehen einer auf *b* gewickelten Schnur in Kreiselbewegung, so treten, je nach der Stellung des verschiebbaren Gegengewichts *g*, drei Fälle ein, welche (innerhalb gewisser Grenzen) das Gemeinsame haben, daß der Apparat weder nach der einen noch nach der anderen Seite umfällt, die sich aber in folgender Weise voneinander unterscheiden: Steht *g* so, daß der Kreisel das Übergewicht hat, so dreht sich der ganze Apparat um die Vertikale, und zwar in entgegengesetzter Richtung wie der höchste Punkt der Scheibe *a*. Hat zweitens *g* das Übergewicht, so findet eine entgegengesetzte Drehung statt. Beide Drehungen erfolgen desto schneller, je größer bei gleicher Geschwindigkeit der Kreiselbewegung das einseitige Übergewicht ist. Wenn drittens die beiden Seiten des Apparats sich gerade das Gleichgewicht halten, so ruft die Kreiselbewegung gar keine Drehung um die Vertikale hervor.

Wenn man in der letztgenannten, ausbalanzierten Stellung der Achse einen Stoß erteilt, so tritt die paradoxe Wirkung ein. Stößt man nämlich nach unten, so tritt Bewegung nach rechts ein; stößt man nach rechts, so erfolgt Hebung; stößt man nach oben, so tritt Bewegung nach links ein; stößt man endlich nach links, so erfolgt Senkung. Immer also eine zum Impuls anscheinend senkrechte

rechte Bewegung. Die Erklärung liegt einerseits in dem Richtungsbestreben der Drehungsursache, andererseits darin, daß, wie wir aus der Theorie wissen, die Präzession keine reguläre, sondern eine pseudoreguläre ist, und daß die Bewegung im ersten Moment bei dieser allerdings in die Impulsrichtung fällt, aber sofort umbiegt; mit anderen Worten: der Impuls bewirkt eine Nutation in seiner Richtung, aber diese ist zu klein, um wahrgenommen zu werden, und es



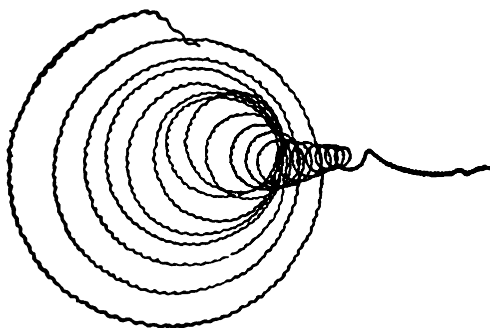
Figur 135.



Figur 136.

tritt bloß die darauf senkrechte Präzession in die Erscheinung. — Man vergleiche hierzu auch einen lehrreichen Versuch mit dem FESSELschen Apparat, den KOPPE angegeben hat.

Überhaupt ist es unter normalen Umständen kaum möglich, die Nutation an sich sichtbar zu machen. Man kann aber mit Hilfe veränderter Anordnung oder durch Kunstgriffe die Schwankungen beträchtlich vergrößern, z. B. indem man einen Kreisel, in dessen Spitze etwas schräg ein Schreibstift eingesetzt ist, auf einer kleinen gläsernen Mulde kreiseln läßt, wobei man die Figur 135 erhält; zahlreiche derartige Kurven hat der Berichterstatter für Vorlesungszwecke schon vor längerer Zeit hergestellt. Ferner hat BOBYLEW mit einem (wie bei GRUEY) an einem Faden hängenden Gyroskop, dessen Schwerpunkt also unterhalb des festen Punktes lag, je nach dem Anfangsimpuls die in Figur 136 wiedergegebenen Kurven erhalten; man erkennt sofort ihre prinzipielle Identität mit den theoretischen. Die Bahn des Stützpunktes des auf der Ebene spielenden Kreisels läßt die Figur 137 sehr schön erkennen; sie ist von SOMMERFELD, der sie von einem kleinen Uhrrädchen mit stählerner Auflagespitze auf Ruß schreiben ließ, freundlichst überlassen und zeigt die einzelnen Vorgänge: die Präzession, die kleinen Nutationen, das Fortwandern auf der Ebene, das spiralige Zusammenschrumpfen der Präzessionsumläufe und endlich das Umfallen in ausgezeichneter Weise.



Figur 137.

Von sonstigen Versuchen, die teils die obigen Haupterscheinungen noch besonders bestätigen, teils die Stabilitäts- und andere Fragen beleuchten, seien noch folgende erwähnt: 1. Die Aufrichtung des Kreisels, die man in ihren Phasen

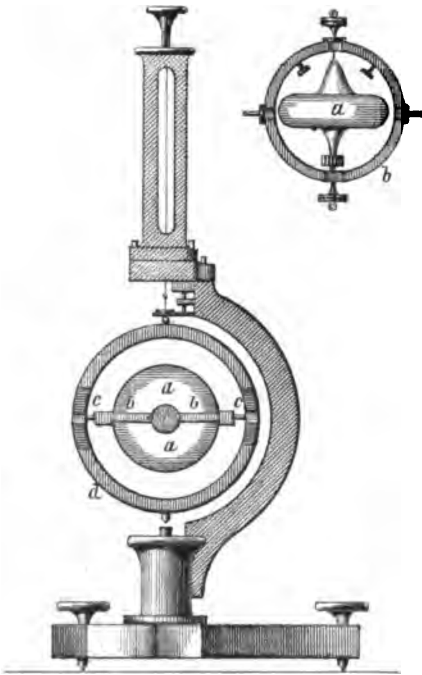
gut verfolgen kann: die Reibung des Stützpunktes erhöht die Präzessionsgeschwindigkeit, und diese wiederum verkleinert den Kegelwinkel; dies dauert aber nur so lange, bis die Kreiselgeschwindigkeit unter einen gewissen Wert herabgesunken ist; alsdann kehrt sich die Wirkung um, der Kegel erweitert sich, und schließlich fällt der Kreisel um. Das aufrechte Kreiseln kann man noch etwas hinziehen, indem man durch entgegengesetzte Drehung der Unterlage, z. B. des Handtellers, die Präzessionsbewegung unterstützt. — 2. Hängt man einen Kreisel an einem tordierten Kautschukfaden auf und läßt ihn kreiseln, so erweitert sich der Kegel, verengert sich wieder auf null, wobei zugleich der Faden detordiert ist; dann tordiert er sich nach der entgegengesetzten Richtung, der Kegel wird wieder weiter u. s. w. — 3. Versuche mit dem alternativen Gyroskop von SIRE (kombinierte Neigungs- und Drehwirkungen). — 4. Unsymmetrische Körper, ohne Kreiselbewegung in die Luft geworfen, führen Drehungen aus, die den Schwerpunkt möglichst tief legen, pendeln darüber hinaus u. s. w.; kreiselnd dagegen steigen und fallen sie mit sich selbst parallel. — 5. Ein homogenes dreiachsiges Ellipsoid stellt sich ruhend auf seine kleinste Achse; setzt man es aber um diese in Kreiselbewegung, so dreht es sich so, daß die mittlere und schließlich so, daß die größte Achse vertikal steht. — 6. Eine Kugel mit exzentrischem Schwerpunkte liegt im Ruhezustand mit einem bestimmten, etwa durch einen weißen Fleck bezeichneten Punkt auf der Unterlage auf; läßt man sie nunmehr kreiseln, so verdreht sie sich so lange, bis der weiße Fleck oben ist und bleibt. — 7. Der Kreiselversuch mit den beiden Eiern: das rohe kommt infolge innerer Reibung fast sofort zur Ruhe und fällt um, das gekochte kreiselt lange in aufrechter Stellung, mit der Spitze als Stützpunkt. — 8. Eine mit Wasser gefüllte Dose, bei der die Masse des Wassers die Masse der festen Hülle übertrifft, dreht sich wie ein fester Kreisel; ein hoher Zylinder dagegen wird durch das Wasser am Kreiseln nahezu sofort verhindert. Man kann die beiden Versuche auch schon mit zwei mit Wasser gefüllten Hohlkugeln anstellen, deren eine etwas abgeplattet, deren andere etwas verlängert ist: jene kreiselt aufrecht und richtet sich, gestört, wieder auf, diese legt sich sofort auf die Seite und fällt um. — 9. Versuche zum Nachweis der Tendenz verschiedener Drehachsen zum gleichsinnigen Parallelismus: man setzt z. B. einen kleineren Kreisel auf einen größeren, der aufrecht kreiselt; der obere Kreisel richtet sich alsdann auf, falls er gleichsinnig, fällt dagegen um, falls er entgegengesetzt kreiselt wie der untere.

Anwendung der Kreiselbewegung zum Nachweise der Achsendrehung der Erde sowie zur Richtungsorientierung. Die Möglichkeit dieses Nachweises hat schon FOUCAULT, im Anschluß an seine bezüglichen Pendelversuche im Jahre 1852 erkannt; er hat sogar, wie BLYTH in der Encyclopädia Britannica (**11.** 351) erwähnt, in ATKINSON (1827) und SANG (1836) in gewissem Sinne schon Vorläufer gehabt. Und zwar erkannte FOUCAULT die Möglichkeit, den Nachweis auf zwei ganz verschiedene Weisen zu führen: die eine ist völlig analog der entsprechenden Anwendung des Pendels und bedient sich des Falles, wo die Erhaltung der Rotationsebene stattfindet (s. oben); die andere beruht auf der Herstellung von Bedingungen, bei denen gewissermaßen das Gegenteil von der Erhaltung der Rotationsebene erzielt wird, nämlich die Einstellung derselben in eine bestimmte, von der ursprünglich gewählten ganz unabhängige Richtung.

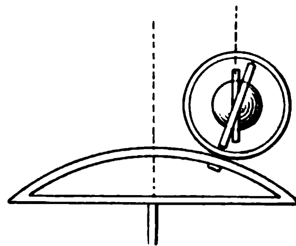
Das FOUCAULTsche Gyroskop (Figur 138) besteht aus dem noch einmal für sich abgebildeten Kreisel *a* in dem Ringe *b*, welcher, ähnlich wie bei den oben beschriebenen Apparaten, mittels der Schneiden *c* in dem äußeren Ringe *d* ruht, der selbst wieder an einem torsionsfreien Faden vertikal hängt, so daß er mit einer unten angebrachten Spitze dicht über einem Plättchen des Fußes einspielt. Der Apparat ist so fein und frei konstruiert, daß im Ruhezustande ein Hauch genügt, um die Kreiselachse in eine andere Lage zu bringen. Rotiert dagegen der Kreisel, so behält die Achse ihre Richtung bei, und zwar absolut,

wie man daraus ersieht, daß bei mikroskopischer Beobachtung eine stetige scheinbare Bewegung derselben konform mit der scheinbaren Bewegung des Himmels auftritt. Man muß also hieraus auf die Achsendrehung der Erde schließen.

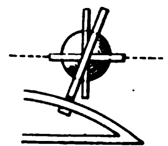
Ganz anders, wenn man die freie Bewegung der Kreiselachse in der Art beschränkt, daß sie aus einer bestimmten Ebene nicht heraus kann. Man kann dies leicht auf zwei verschiedene Weisen erreichen. Fixiert man nämlich den Ring *b* in horizontaler Ebene, so muß die Kreiselachse selbst in der Horizontalebene bleiben; fixiert man andererseits den äußeren Ring in geeigneter Lage, so kann sich die Kreiselachse nur in einer bestimmten Vertikalebene — es sei dies die Meridianebene des Ortes — frei bewegen. In beiden Fällen zeigt sich, daß die Kreiselachse, welche Lage in der betreffenden Ebene sie auch ursprünglich eingenommen haben möge, sich nach einigen Schwingungen in eine bestimmte Richtung einstellt, nämlich im ersten Falle in die des Meridians, im zweiten Falle in die der Erdachse; und zwar beide Male so, daß der Kreisel in demselben Sinne rotiert wie die Erde. Man kann diese Erscheinungen in den Satz zusammenfassen: Wenn ein Körper um eine seiner Hauptachsen rotiert und eine Kraft eine Drehung um eine andere Achse hervorzubringen strebt, so bewegt sich die erstere in die Richtung der letzteren, und zwar auf einem solchen Wege, daß der Sinn der Drehung ein übereinstimmender wird.



Figur 138.



Figur 139a.



Figur 139b.

Man kann diese Erscheinungen mittels der Schwungmaschine willkürlich hervorrufen, indem man z. B. einen BOHNENBERGERschen Apparat durch Vermittelung eines gekrümmten Bügels (Figur 139) exzentrisch und schief auf sie aufsetzt. Je nachdem man den äußeren und mittleren, oder den inneren und mittleren Ring in zueinander senkrechter Stellung festklemmt, stellt sich die Kreiselachse parallel der Achse der Schwungmaschine (*a*) oder parallel dem Meridian (*b*). Sind diese Stellungen eingenommen und dreht man nun die Schwungmaschine plötzlich umgekehrt wie bisher, so schlägt die Kreiselachse um 180° um, um aus dem labilen in das stabile Gleichgewicht zu gelangen.

Die betrachtete Erscheinung, die man im Gegensatz zur „Erhaltung der Rotationsebene" als „Richtung der Rotationsebene" bezeichnen kann, ist von FOUCAULTS Nachfolgern theoretisch und experimentell in verschiedenen Richtungen ausgebildet worden, so namentlich von PERSON, SIRE, GRUEY, HENRY; so zeigt sich ganz allgemein, daß, welches auch die der Kreiselachse freigegebene Ebene sei, man in ihr die Gleichgewichtslage erhält, wenn man die Erdachse

auf sie projiziert. Steht die gedachte Ebene senkrecht zur Erdachse, so ist die Kreiselachse in jeder Lage im indifferenten Gleichgewicht. Was endlich die Schwingungen betrifft, welche die Achse ausführt, ehe sie die Gleichgewichtslage annimmt, so steht deren Dauer in Beziehung zur Winkelgeschwindigkeit der Erde w bei ihrer täglichen Drehung und zur geographischen Breite φ des Ortes einerseits, zur Massenverteilung des Gyroskops und seiner Kreiselgeschwindigkeit n andererseits; bezeichnet man die axialen bezw. äquatorialen Trägheitsmomente von Schwungring, innerem und äußerem Ring mit C, C', C'' bezw. A, A' A'', und ist die mit der Erde fest verbundene Ebene, in der die Achse sich bewegen kann, gegen die Erdachse um den Winkel λ geneigt, so hat man für die Länge des entsprechenden einfachen Pendels die Formel:

$$l = \frac{g'A + C' + A'')}{C w n \cos\lambda} \quad .$$

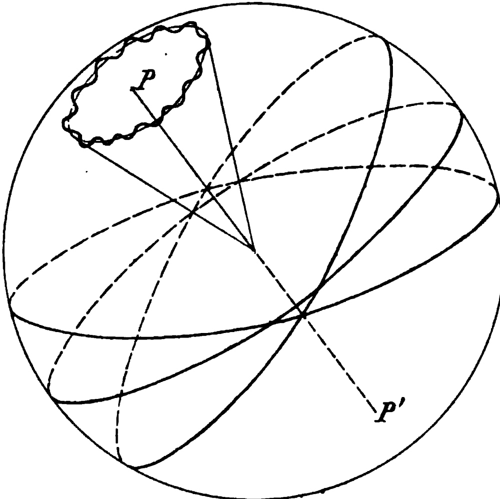
Wie man sieht, kann man das Gyroskop nicht bloß zum Nachweis der Achsendrehung der Erde, sondern geradezu für praktische Orientierungszwecke benützen, nämlich zur Ermittelung der Meridianrichtung, der Richtung der Erdachse, der geographischen Breite u. s. w. In dieser Hinsicht sind namentlich die von Lord KELVIN (W. THOMSON) konstruierten Apparate, wie die gyrostatische Wage, ferner das Marinegyroskop von DUBOIS, das magnetische Gyroskop von CROVA und die elektrischen Gyroskope von TROUVÉ zu erwähnen.[1]

Um schließlich nochmals auf den Nachweis der Achsendrehung zurückzukommen, so sind noch zwei Apparate zu nennen, die einen Fortschritt bedeuten. Das Barogyroskop von PH. GILBERT ist aus dem FOUCAULTschen Apparat in der Absicht hervorgegangen, die Mängel desselben, namentlich hinsichtlich der Justierung, zu beseitigen; der Kreisel selbst sowie der auf horizontalen Schneiden ruhende Rahmen sind zunächst im indifferenten Gleichgewicht, durch Anbringung eines kleinen Laufgewichts unterhalb der Achse wird dann aber Stabilisierung erzielt; die Kreiselachse neigt sich dann gegen die Vertikale in einem Winkel, für den sich eine einfache Formel abgeben läßt. — Ganz originell und zugleich die Einzige, mittels deren eine quantitative Vergleichung wirklich durchgeführt worden ist, ist die Konstruktion, die neuerdings FÖPPL angegeben hat. Der Kreisel besteht aus einem an drei Drähten aufgehängten Elektromotor, auf dessen Welle beiderseits Schwungräder von je 30 kg Gewicht und 50 cm Durchmesser aufgekeilt sind; das Drehungsmoment der Aufhängung ist dann einfach proportional mit dem axialen Trägheitsmoment, den Winkelgeschwindigkeiten w und n, dem $\cos\varphi$ und dem sin des Winkels, den die Achse in der Ruhelage mit dem Meridian bildet; hieraus kann man den Ablenkungswinkel berechnen; man findet, und zwar in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung — die Fehler betrugen nur etwa 2 % — bei Kreiselgeschwindigkeiten von 1500 bis 2000 Drehungen um 5 bis 8 Grad.

Präzession und Nutation der Erde. Eine Kreiselbewegung setzt sich im allgemeinen, wie gezeigt worden ist, aus drei verschiedenen Vorgängen, nämlich

[1] Während der Korrektur erhalte ich eine Abhandlung von O. MARTIENSSEN (Phys. Ztschr. **7**. 535. 1906) über die Verwendbarkeit des Rotationskompasses als Ersatz des magnetischen Kompasses, in der ein, wie es scheint, sehr brauchbarer Apparat nach Theorie und Konstruktion eingehend beschrieben wird. Der elektrisch betriebene, um eine Vertikalachse rotierende Kreisel befindet sich in einer Kompaßrose, die ihrerseits in einem mit Petroleum gefüllten Gefäße schwimmt. Je größer die Zahl der Kreiselungen in der Sekunde, desto genauer die Orientierung; bei 40 Touren beträgt die Unsicherheit noch etwa 2°, bei 77 kaum noch 1°, bei 160 Touren ist die Einstellung für praktische Zwecke völlig exakt; dabei ist die Schwingungsdauer nicht wesentlich größer als beim magnetischen Kompaß. Allerdings ist der Apparat in dieser Form nur auf festem Lande brauchbar; auf dem Schiffe wird er durch dessen Bewegungen sehr gestört; und wenn man diese Störungen durch lange Periode herabmindern wollte, so würden andere Übelstände eintreten.

aus Rotation, Präzession und Nutation zusammen. In großartigem Maßstabe wird eine solche Kreiselbewegung von der Erde ausgeführt. Ihre Drehung um die Sonne ist dabei außer acht zu lassen. Wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre, so würde ihre Achse stets dieselbe Richtung im Raume einnehmen, d. h. stets nach demselben Fixstern zeigen. Wäre andererseits die Erde, wie sie es ist, am Äquator ausgebaucht und drehte sie sich nicht um ihre Achse, so würde die Sonne den infolge der Neigung der Ekliptik, also der Erdachse, schief gegen sie stehenden Äquator der Erde in die Ebene der Erdbahn hineinziehen, also die Erdachse senkrecht gegen diese stellen. Da aber die Erde um ihre Achse rotiert, so tritt keiner von beiden Fällen ein, sondern die Erdachse beschreibt im Laufe der Zeit um die Vertikale auf der Erdbahn einen Kegel (Figur 140).



Figur 140.

Dies ist die Präzession der Erdachse. Sie gibt sich der Beobachtung zunächst in indirekter Weise kund, nämlich durch die Präzession der Frühlings- und Herbstäquinoktialpunkte, d. h. der Schnittpunkte der Äquatorebene mit der Ekliptik. Die Vorrückung dieser Punkte beträgt nun jährlich 50″; ein ganzer Umlauf und somit auch die Periode der Kegelbewegung der Erdachse beläuft sich somit auf

$$\frac{360^0}{50''} = 26000 \text{ Jahre.}$$

In derselben Periode variiert natürlich auch der Nordpol des Himmels; der Abstand des Polarsterns von ihm wird in 300 Jahren nicht mehr, wie gegenwärtig, 1,3^0, sondern nur noch 21′ betragen, dann aber wieder wachsen, und in 12000 Jahren wird die Vega Polarstern sein. Nach POINSOT kann man sich das Kreiseln im Falle der regulären Präzession als ein Abrollen des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel vorstellen, und zwar findet in unserem Falle das Rollen auf der Innenseite statt; der Herpolhodiekegel hat offenbar $23^1/_2{}^0$ Winkelöffnung, der Polhodiekegel ist dagegen, wie die Rechnung zeigt, sehr eng, seine Spur auf der Erdoberfläche ist nämlich ein um den Nordpol geschlagener Kreis von 27 cm Radius. — Übrigens rührt die tatsächliche Präzession nicht von der Wirkung der Sonne allein her, sondern es kommt noch die des Mondes hinzu; und zwar ergibt die Rechnung, mit Benutzung der Massen und Umlaufszeiten sowie der Abplattung der Erde, für den Anteil der Sonne 16″, für den des Mondes aber 34″; der Anteil des Mondes an der Wirkung ist also fast doppelt so groß wie der der Sonne. — Mit Hilfe der EULERschen Winkel ϑ und ψ kann man sonach die Bewegung der Erdachse durch die Formeln

$$\psi = \psi_0 + 50'' \cdot t \quad , \qquad \vartheta = 23^0\, 27'\, 7''$$

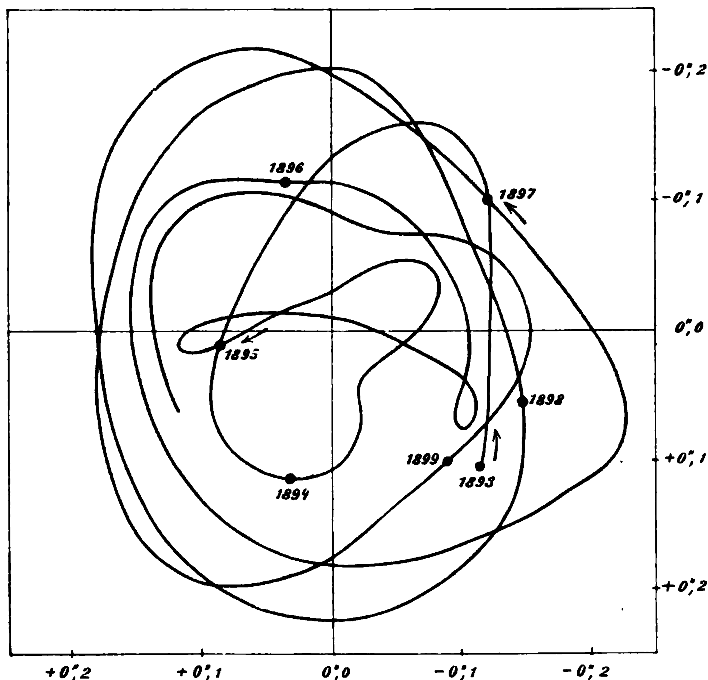
darstellen, wo der Wert von ψ_0 von der Wahl des Anfangspunktes abhängt.

Diese Formeln stellen indessen erst eine erste Annäherung dar. Auch die Mondbahn hat nämlich eine Präzession der Knoten, und zwar mit der relativ außerordentlich kurzen Periode von $18^2/_3$ Jahren; die Folge wird eine in der

gleichen Periode sich vollziehende Nutation der Erdachse sein — eine Nutation, die man, da sie durch äußere Kräfte bewirkt wird, im Gegensatz zu der freien als erzwungene Nutation bezeichnen kann. In der Figur 140 ist die Nutation zugleich mit der Präzession dargestellt, jedoch insofern in ganz falschem Maßstabe, erstens als die Nutationswellen außerordentlich kurz sind — auf einen Umlauf entfallen ihrer 14000 — und dann, insofern diese Wellen auch äußerst flach sind; die Ellipse, die die Erdachse am Himmelsgewölbe beschreibt, und die nach dem Entdecker der Nutation die BRADLEYsche Ellipse heißt, hat nämlich Halbachsen von nur 9 und 7″. — Die vervollständigten Bewegungsgleichungen der Erdachse lauten nunmehr:

$$\psi = \psi_0 + 50'' \cdot t + 17'' \sin(19^1/_3 \cdot t - \psi_0) \quad ,$$
$$\vartheta = 23^0\, 27' + 9'' \cos(19^1/_3 \cdot t - \psi_0) \quad .$$

Damit ist man jedoch immer erst am Anfange der Annäherung, für deren weitere Verfolgung zahlreiche Faktoren berücksichtigt werden müssen, so daß die von den Astronomen benutzten Endformeln sehr verwickelt werden; es muß in dieser Hinsicht auf die astronomischen Bücher, z. B. TISSÉRAND und OPPOLZER, verwiesen werden. — Schließlich sei bemerkt, daß die Berechnung der Präzession u. s. w. aus den genannten Daten insofern keine Bedeutung hat, als umgekehrt für die Feststellung dieser Größen keine genauere Methode existiert, als die Benutzung der Präzessionserscheinungen; es ergeben sich dabei z. B. die Werte 1/305 für die Abplattung der Erde und $1/81^1/_2$ für die Mondmasse im Verhältnis zur Erdmasse.



Figur 141.

Soweit die erzwungene Nutation der Erdachse. Ob es unabhängig von ihr auch eine freie Nutation gebe, ist eine besondere Frage, die nach den Feststellungen der neuesten Zeit zu bejahen ist. Die Kreiseltheorie läßt diese

Nutationen, durch die aus der regulären eine pseudoreguläre Präzession werden würde (p. 435) als möglich zu, sie zeigt ferner, daß die Drehungsachse im Raume nicht merklich schwanken wird, wohl aber die Figurachse, was sich in einer scheinbaren Schwankung der Rotationsachse um die Figurachse zu erkennen geben wird, also in einer Schwankung der geographischen Breite eines und desselben Ortes; sie zeigt endlich, daß diese Nutation eine etwa zehnmonatige Periode und eine vielleicht zu beobachtende Amplitude haben werde. Die Beobachtungen haben nun in der Tat Breitenschwankungen ergeben, und zwar für Orte auf entgegengesetzten Meridianen — Berlin und Honululu — entgegengesetzt gerichtete, wie es sein muß, wenn die Ursache der Breitenschwankung wirklich eine Achsenschwankung sein soll. Man hat alsdann, um beide Komponenten zu erhalten, Beobachtungen in Europa und Amerika, daneben auch solche in Japan durchgeführt und gefunden, daß allerdings der Endpunkt der Drehungsachse den Nordpol in mehr oder weniger kreisähnlichen Kurven von etwa $^1/_8$ bis $^1/_4$ Bogensekunde umkreist, daß aber die Periode nicht die nach EULER benannte zehnmonatige, sondern eine vierzehnmonatige, die sogen. CHANDLERsche, ist. Man kann sogar eine Auflösung in zwei verschiedene Umläufe vornehmen; nach BAKHUYZEN ist der eine ein Kreis von 431 tägiger Periode und 0",155 Amplitude, der andere eine Ellipse von einjähriger Periode, 0",12 großer, 0",06 kleiner Achse und 19° Neigung der großen Achse gegen den Meridian von Greenwich. Die Ursache der Komplikationen ist zweifellos in dem Umstand zu suchen, daß die Erde nicht starr, sondern elastisch nachgiebig ist; der nähere Zusammenhang mit den elastischen Erscheinungen, Erdbeben, Massenverschiebungen u. s. w. muß indessen erst noch festgestellt werden. In Figur 141 ist die die internationalen Beobachtungen zusammenfassende Kurve der Nutation für den Zeitraum von 1893 bis 1899 wiedergegeben.

Die Kreiselbewegung in Physik und Technik. Auf die Rolle, die der Kreisel bezw. die Kreiselbewegung in Physik und Technik spielen, kann hier nur eben hingewiesen werden. In ersterer Hinsicht sei nur die Lehre vom Magnetismus, sowie die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes hervorgehoben, Gebiete, in denen die Theorie der Ätherwirbel von den Hauptsätzen der Kreisellehre vielfachen Gebrauch macht; man lese darüber z. B. das Buch von LODGE über die modernen Theorien der Elektrizität, sowie das schon erwähnte Büchlein über Drehkreisel von PERRY. In der Technik kommen so vielfach rotierende Körper, namentlich Schwungräder vor, daß die Grenze schwer zu ziehen ist. Es sei aber wenigstens auf die Kreiselbewegung der Geschosse (vgl. die Untersuchung von OBERMAYER u. A.), sowie auf die neueste Anwendung des Kreisels selbst genannt, nämlich die zur Dämpfung der Roll- und Stampfschwingungen eines Schiffes, wofür H. LORENZ eine einfache Theorie entwickelt hat.

Literatur.

Das schon im Artikel „Dynamik" beim Rotationsproblem Angeführte ist hier nicht nochmals wiedergegeben).

G. B. AIRY, Math. Trans. Cambr. 1831. — TH. ALBRECHT, Berlin 1890 (vgl. Beibl. **15.** 162). — C. BARUS, Science **13.** 852. 1901; 914. 1901. — D. BOBYLEW, Séances soc. fr. de phys. 1884. p. 134; Ztschr. f. Math. u. Phys. **47.** 354. 1902. — J. G. F. BOHNENBERGER, Beschreibung e. Masch. z. Erl. d. Ges. v. d. Umdrehung d. Erde. Tübingen 1817; GILB. Ann. **60.** 1818. — A. S. CHESSIN, C. R. **133.** 676. 1901; vgl. auch Trans. Amer. soc. **1.** 116. 1900. — A. CROVA, Journ. de Phys. (2) **1.** 271. 1882. — W. G. v. CZUDNOCHOWSKI, Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **15.** 140. 1902. — G. DARBOUX, LIOUV. Journ. (4) **1.** 1885. — E. DUBOIS, C. R. **98.** 227. 1884. — DUMOULIN-FROMMENT u. DOIGNON, C. R. **111.** 428. 1890. — V. DVOŘAK, Phys. Ztschr. **2.** 224. 1901. — L. EULER, Abh. Berl. Akad. 1758. — FINGER, Wien. Ber. **63.** 317; Rep. de Phys. **10.** 138. 1875. — A. FÖPPL, Ztschr. f. Math.

u. Phys. **48.** 272. 1902; Münch. Ber. **34.** 5. 1904; Phys. Ztschr. **5.** 416. 1904. — L. FOUCAULT, C. R. **35.** 421. 424. 469. 602. 1852 und in weiteren Bänden. — FRANKE, Ztschr. f. math. u. nat. Unter. **17.** 422. 1886. — PH. FURTWÄNGLER, Enz. d. math. Wiss. **4.** 1. II. Art. „Mechanik der einfachen physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen", p. 56. 1904. — E. G. GALLOP, Trans. Cambr. Phil. Soc. **19.** 356. 1904. — PH. GILBERT, Ann. soc. sc. Brux. 1878; Bull. sc. math. et phys. Brux. (2) **6.** 189; Journ. de Phys. **4.** 127. 1868. — H. GRASSMANN, Ztschr. f. Math. u. Phys. **48.** 329. 1903. — A. G. GREENHILL, Proc. Lond. math. soc. **26.** 215. 1895; **27.** 545. 1896; Science **14.** 973. 1901; **15.** 712. 1902; Ann. of math. (2) **5.** 1. 67. 1904. — GREENHILL und DEWAR, Proc. Lond. math. soc. **27.** 586. 1896; Engineer **64.** 311. 1897. — GRUEY, in verschiedenen Bänden der C. R. 1855 ff. — A. GRUEL, Rep. d. Phys. **1.** 254. 1864. — E. GUYOU, C. R. **106.** 1143. 1888. — A. HALL, Science **13.** 948. 1901. — H. HAMMERL, Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **6.** 68. 1892. — R. B. HAYWARD, Cambr. phil. Trans. **10.** 1854. — G. HAUCK, Ztschr. f. math. u. nat. Unter. **17.** 81. 423. 1886. — W. HESS, Das Rollen einer Fläche zweiten Grades an einer inv. Ebene. München 1880; Math. Ann. **19.** 121. 1881; **29.** 500. 1887; Rep. de Phys. **18.** 233. 1882. — C. G. J. JACOBI, Werke **2.** — E. JANSEN, Die Kreiselbewegung. Berlin 1891. — DE JONQIÈRES, Rev. mar. et colon. 1886. — JOUFFRET, Rev. d'Artill. **4.** 1874. — F. KLEIN, Amer. Bull. 1896. — F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels. Leipzig 1. Heft 1897; 2. Heft 1898; 3. Heft 1903; Schlußheft demnächst in Aussicht. — CH. KNIPP, Phys. Review **12.** 43. 1901. — M. KOPPE, Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **4.** 70. 1890; **6.** 132. 1893; Sitz.-Ber. Berl. math. Ges. **1.** 22. 1901—02. — O. KRAGH, Ztschr. f. Math. u. Phys. **49.** 315. 1903. — CH. LAGRANGE, Méc. analyt. 2. p. sect. IX. Nr. 35; Oeuvres T. XII. — F. LECONTE, Arch. de Gen. (3) 176. 1890. — R. LEHMANN-FILHÉS, Astr. Nachr. **124.** 377. 1890. — H. LIEBMANN, Math. Ann. **50.** 1897. — H. LORENZ, Phys. Ztschr. **5.** 27. 1904. — LOTTNER, CRELLE Journ. **50.** 1855. — E. MERRIT, Phys. Review **4.** 336. 1897. — E. C. O. NEUMANN, POGG. Ann. **132.** 1867; Rep. de Phys. **4.** 127. 1868. — A. v. OBERMAYER, Mitt. ü. Geg. d. Artillerie- und Gen.-Wesens 1889. p. 869. — PERSON, in verschiedenen Bänden der C. R. 1855 ff. — JOHN PERRY, Spinning Tops. London 1890; deutsch unter dem Titel: „Drehkreisel" von WALZEL. Leipzig 1904. — F. PLÜCKER, POGG. Ann. **91.** 1854. — J. C. POGGENDORFF, ibid. **90.** 348. 1853. — L. POINSOT, Connaiss. des temps 1853; LIOUVILLE Journ. (1) **18**; Th. nouv. de la rot. des corps. Paris 1834; deutsch von SCHELLBACH, Berlin 1851. — C. PRANG, Progr. Oberrealsch. Charlottenburg 1905. — H. RESAL, C. R. **117.** 499. 1893. — A. DE ST.-GERMAIN, Résumé d. l. Th. du mouv. etc. Paris 1887. — A. SCHMIDT, Die elementare Behandlung des Kreiselproblems. Tübingen 1886. — H. SCHEFFLER, Imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Gyralkraft. Leipzig 1866. — TH. SCHWARTZE, Prakt. Phys. 1890; Rep. de Phys. **27.** 101. 1891. — G. SIRE, C. R. in verschiedenen Bänden, namentlich **112.** 155. 638. 1891. — F. J. STAMKART, POGG. Ann. **91.** 462. 1853. — P. G. TAIT, Trans. Edinb. Soc. **25.** 279. 1869. — W. THOMSON (Lord KELVIN), Nature **30.** 524. 1884. — F. TISSÉRAND, Bull. astr. **7.** 341. 1890. — G. TROUVÉ, C. R. **111.** 357. 463. 913. 1890. — C. B. WARRING, Newyork Acad. Science 1887. — A. WERNICKE, Festschr. f. DEDEKIND. Braunschweig 1901. p. 73.

Allgemeine Gravitation.

Von F. AUERBACH.

Übersicht. Unter Gravitation versteht man die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung ponderabler Massen unter der Wirkung von Kräften, wie sie durch das NEWTONsche Gesetz bestimmt sind. Für an sich ruhende Massen sind die Wirkungen der durch dieses Gesetz definierten Kraft sehr einfacher Natur: da die Kraft eine Anziehungskraft ist, werden die betreffenden Massen einfach aufeinander stürzen, bezw. es wird der erheblich weniger massige Körper auf den erheblich massigeren stürzen; in welcher Weise, ist für die Erde als große, die irdischen Körper als kleine Massen bereits im Artikel „Fall und Wurf", im Abschnitt über den freien Fall, erörtert worden. Um so verwickelter aber werden die Erscheinungen, wenn die in Betracht gezogenen Körper von vornherein schon einen Bewegungsimpuls haben, wie dies auf der Erde bei den geworfenen Körpern, im Weltraume bei den Himmelskörpern der Fall ist; von jenen ist in dem genannten Artikel ebenfalls schon die Rede gewesen, diese werden hier abzuhandeln sein, soweit ein rein physikalisches Interesse vorliegt; die Einzelheiten und Schwierigkeiten, namentlich hinsichtlich des Problems dreier und mehrerer sich bewegender Körper, der Störungen u. s. w. können hier nur angedeutet werden. Dagegen ist das Verhalten der irdischen Schwere nach verschiedenen Richtungen hin eingehender zu verfolgen, wenigstens bis dahin, wo ein speziell geophysikalisches und geodätisches Interesse anfängt. Sodann erhebt sich die Frage nach der absoluten Größe der durch das Gravitationsgesetz festgestellten Kraft, d. h. nach dem Werte des in ihr vorkommenden Faktors, der Gravitationskonstante; diese Frage aber hängt innig mit der nach der mittleren Dichte der Erde zusammen. Endlich sind die etwaigen Grenzen der Gültigkeit des Gesetzes festzustellen und im Anschluße daran zu untersuchen, ob und in welcher Weise die Gravitation auf andere Vorgänge zurückgeführt, mit ihnen in Zusammenhang und somit in eine Theorie gebracht werden könne.

A. Mechanik des Himmels.

Die Gesetze von Kepler und Newton. Nach verschiedenen, in ähnlicher Richtung tätig gewesenen Vorläufern war es NIKOLAUS KOPERNIKUS[1], der den geozentrischen Bann durch sein, höchste Einfachheit mit größter Vollkommenheit verbindendes heliozentrisches System brach. Bald darauf gelang es JOHANNES KEPLER, dem kopernikanischen System durch die drei nach ihm benannten

[1] N. KOPERNIKUS, De revolutionibus orbium coelestium. Nürnberg 1543 (deutsch, Thorn 1879).

Gesetze einen strengen Ausdruck zu verleihen. Diese Gesetze sind zwar mit Rücksicht auf die große Mannigfaltigkeit der beobachteten Erscheinungen, die sie umfassen, von erstaunlicher Einfachheit, stellen aber immerhin Beziehungen auf, die noch merkwürdig und speziell genug sind, um den Wunsch nach ihrer Zusammenfassung in einer höheren Einheit zu erregen. Dieser Wunsch ist nicht lange darauf von ISAAC NEWTON durch sein Gravitationsgesetz insofern noch mehr als befriedigt worden, als dieses Gesetz, außer den von den KEPLERschen Gesetzen umspannten Erscheinungen, d. h. den Bewegungen der Planeten, noch die der übrigen Himmelskörper sowie der irdischen Körper beherrscht, womit sich die irdische Schwere als ein Spezialfall der allgemeinen Gravitation darstellt.

Die von KEPLER[1] aus eigenen und fremden Beobachtungen abgeleiteten Gesetze lauten:

1. Die Planeten bewegen sich in elliptischen Bahnen um die Sonne, und diese steht in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse.

2. Der Radiusvektor eines Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen, die in verschiedenen Zeiten überstrichenen Flächen sind also diesen Zeiten proportional.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Abstände von der Sonne.

Wie man sieht, beziehen sich die beiden ersten Gesetze immer auf einen einzelnen Planeten; dagegen stellt das dritte eine Beziehung zwischen den Bewegungen verschiedener Planeten auf. Wie man bemerkt, ist ferner das zweite KEPLERsche Gesetz nichts anderes als einer der allgemeinen Flächensätze — vgl. Artikel „Dynamik“ — in Anwendung auf den vorliegenden Fall.

Das NEWTONsche Gesetz[2] andererseits lautet: Je zwei Körper, deren Volumina klein sind im Vergleich zu ihrer gegenseitigen Entfernung, ziehen sich gegenseitig mit einer Kraft an, die dem Produkt ihrer Massen direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist; in Formel:

$$G = k\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad .$$

Die Kraft G heißt die Gravitation (die Schwere g auf der Erde bezw. g' auf einem anderen Weltkörper erweist sich als ein besonderer Fall); die Konstante k heißt Gravitationskonstante, sie ist die Anziehung zwischen zwei, in der Einheit des Abstandes voneinander befindlichen je der Einheit der Masse gleichen Massenpunkten; sie stellt einen besonderen Fall der allgemeinen Wechselwirkungskonstante dar und führt, gleich eins gesetzt, zum Gravitationsmaße der Massen, wofür auf den Artikel „Grundbegriffe“ (p. 45) zu verweisen ist. Eigentlich müßte man die Gravitationskonstante, um mit der sonst überall durchgeführten Festsetzung, daß eine Anziehung eine negative Kraft ist, im Einklang zu bleiben, als eine negative Größe festsetzen; indem man hiervon absieht, darf man sich nicht wundern, bei manchen Fragen auf scheinbare Widersprüche zu stoßen; insbesondere muß man die Energie des Gravitationsfeldes nicht von null aus additiv, sondern von einer sehr großen Konstante aus abzüglich rechnen, also nicht $E = c\int G\,dG$, sondern

$$E = E_0 - c\int G\,dG$$

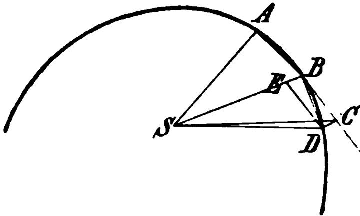
setzen (vgl. hierzu auch p. 275).

Ableitung des Newtonschen aus den Keplerschen Gesetzen. Aus jedem der drei KEPLERschen Gesetze folgt eine andere Eigenschaft der Kraft, die man

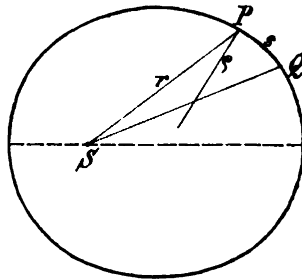
[1] J. KEPLER, Astronomia nova, Prag 1609 (enthält die beiden ersten Gesetze), und Epitome astronomiae copernicanae, Linz 1618 (enthält das dritte Gesetz); Opera, Frankfurt 1858—71. — [2] Is. NEWTON, Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1687 (deutsche Ausgabe von WOLFFERS und in OSTWALDS Klassikern); 3. Buch, prop. 1—7.

zwischen Sonne und Planeten wirksam anzunehmen hat, um die Bewegung der letzteren so einfach wie möglich darzustellen. Aus dem zweiten nämlich folgt, daß diese Kraft die Richtung der Verbindungslinie zwischen Sonne und Planeten hat, und zwar nach der Sonne zu, daß sie also eine Anziehungskraft ist; aus dem ersten folgt, daß sie dem Quadrat der Entfernung zwischen Sonne und Planet umgekehrt proportional ist; aus dem dritten endlich folgt, daß sie der Masse des betreffenden Planeten direkt proportional ist.

a) Angenäherte elementare Ableitung. Es sei S (Figur 142) die Sonne, AB die vom Planeten in einem kleinen Zeitteilchen zurückgelegte Strecke, BC die gleich große Strecke, welche er im zweiten Zeitteilchen in derselben Richtung zurücklegen würde, wenn er nicht durch eine Kraft aus dieser Richtung



Figur 142.



Figur 143.

abgelenkt und somit, statt nach C, nach D gelangte. Nun sind die Dreiecke SAB und SBC aus geometrischen Gründen, die Dreiecke SAB und SBD nach dem zweiten KEPPLERschen Gesetz einander gleich, also auch die Dreiecke SBC und SBD; es liegen folglich ihre Spitzen C und D in einer zur Grundlinie SB parallelen Linie. Hiernach ist BD die Resultante von BC und einer Linie BE, welche in die Richtung BS fällt. Erstere entspricht dem Beharrungsvermögen, letztere der ablenkenden Kraft. Diese ist also nach der Sonne gerichtet.

Ferner ist in Figur 143 das Dreieck $SPQ = \frac{1}{2} s \cdot r \cos r\varrho$, wo s die kleine Wegstrecke und ϱ die Ellipsennormale ist. Ist c eine Konstante und t das Zeitteilchen, in welchem s zurückgelegt wird, so ist nach dem zweiten KEPLERschen Gesetz

$$\tfrac{1}{2} s r \cos(r\varrho) = c t \quad .$$

Nun ist (s. Artikel „Grundbegriffe", p. 33, sowie Artikel „Dynamik", p. 338) die zentripetale Beschleunigung

$$G = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{s}{t}\right)^2 = \frac{4c^2}{\varrho r^2 \cos^3 r\varrho} \quad ,$$

wo v die Geschwindigkeit ist und die bisher nur der Richtung nach definierte Größe ϱ nunmehr der Größe nach den Krümmungsradius darstellt. Für die beiden Endpunkte der großen Achse, AA_1, ergibt sich hieraus unmittelbar

$$G : G_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2} \quad .$$

Für die übrigen Punkte ergibt es sich, wenn man berücksichtigt, daß bei der Ellipse die Beziehung $\varrho \cos^3 r\varrho = \text{const}$ gilt.

Für zwei verschiedene Planeten endlich hat man nach Obigem

$$G : G_1 = \frac{v^2}{r} : \frac{v_1^2}{r_1} \quad ,$$

also, wenn mittels der Gleichungen $v = 2r\pi/T$ und $v_1 = 2r\pi/T_1$ die Umlaufszeiten T und T_1 eingeführt werden,

$$G : G_1 = \frac{r}{T^2} : \frac{r_1}{T_1^2} \quad .$$

Nun ist aber nach dem dritten KEPLERschen Gesetz

$$T^2 : T_1^2 = r^3 : r_1^3 \quad ;$$

folglich ergibt sich

$$G : G_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2} \quad .$$

Die umgekehrte Proportionalität mit dem Quadrat der Entfernung gilt also nicht bloß für die verschiedenen Sonnenabstände eines und desselben, sondern auch bei Vergleichung verschiedener Planeten. Haben diese nun die Massen m und m_1, so erhält man für die Kräfte, welche den obigen Beschleunigungen entsprechen:

$$(1) \qquad K : K_1 = \frac{m}{r^2} : \frac{m_1}{r_1^2} \quad ,$$

d. h. das NEWTONsche Gesetz.

Andere Ableitung nach HELM.[1] Durch Zusammensetzung der elliptischen Bewegung aus zwei aufeinander senkrechten geradlinigen ergibt sich, daß ein Punkt sich auf einer Ellipse bewegt, wenn nach dem Mittelpunkte die Beschleunigung $P = (2\pi/T)^2 R$ (R Abstand eines Punktes M vom Mittelpunkte O) wirkt. Ist also N die Ellipsennormale in M, F der Brennpunkt, $FM = r$, Winkel $(N, r) = \alpha$, Winkel $(N, R) = A$, so ist die Beschleunigung p nach F durch die Gleichung

$$\frac{p \cos\alpha}{P \cos A} = \frac{v^2}{V^2}$$

gegeben, in welcher V und v die Geschwindigkeiten bezw. um O und F sind. Nach dem zweiten KEPLERschen Gesetz ist nun $R\cos A : r\cos\alpha = v : V$, also wird

$$p = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R^3 \cos^3 A}{r^2 \cos^3\alpha} \quad .$$

Ist ferner a die große Halbachse, so ist $R\cos A = a\cos\alpha$, also

$$p = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2 r^2} \quad ,$$

also nach dem dritten KEPLERschen Gesetz

$$p = \text{const} \cdot \frac{1}{r^2} \quad .$$

b) Strenge Ableitung.[2] Die Bewegung ist eine freie, also, wenn ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt wird und XYZ die Komponenten der beschleunigenden Kraft sind,

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad , \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z \quad .$$

Wird die Bahnebene zur xy-Ebene gewählt, so ist $z = 0$, also auch $Z = 0$. Ferner liege der Anfangspunkt der Koordinaten in der Sonne, r sei der Radius-

[1] HELM, Grun. Arch. d. Math. u. Phys. 1879. p. 326. — [2] Vgl. z. B. G. KIRCHHOFF, Mechanik, p. 7.

vektor und φ ihr Winkel mit der x-Achse. Nach dem zweiten KEPLERschen Gesetz ist alsdann die doppelte Dreiecksfläche

(3) $$r^2 d\varphi = c\,dt \quad ,$$

also in rechtwinkligen Koordinaten ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$)

(3a) $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c \quad ,$$

und durch Differentiation

(4) $$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad .$$

Aus (4) und (2) folgt die Proportion $X:Y = x:y$; sie spricht aus, daß die gesuchte Kraft die Richtung der Verbindungslinie zwischen Sonne und Planet hat. Ist K diese Kraft (positiv, wenn abstoßend, negativ, wenn anziehend), so hat man

$$X = \frac{x}{r}K \quad , \qquad Y = \frac{y}{r}K \quad ,$$

und folglich wegen $x^2 + y^2 = r^2$, also $x\,dx + y\,dy = r\,dr$:

(5) $$X\,dx + Y\,dy = K\,dr \quad .$$

Die linke Seite ist nach (2) identisch mit

$$\tfrac{1}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] \quad , \qquad \text{d. h. mit } \tfrac{1}{2}d(v^2) \quad ,$$

und für die Geschwindigkeit v ergibt sich durch Kombination der Gleichung (3a) mit der Gleichung $x\,dx + y\,dy = r\,dr$:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} \quad .$$

Die Gleichung (5) nimmt also die Gestalt an:

(6) $$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} + K \quad .$$

Die linke Seite kann auf Grund des ersten KEPLERschen Gesetzes aus der Gestalt der Bahn berechnet werden. Ist nämlich a die große Halbachse, ε die Exzentrizität der Ellipse ($\varepsilon < 1$), so ist deren Gleichung

$$r = a(1-\varepsilon^2) = \varepsilon x \quad ,$$

also

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2} = -\varepsilon H = -K\frac{\varepsilon x}{r} = -K\left(\frac{a(1-\varepsilon^2)}{r} - 1\right) \quad .$$

Setzt man dies in (6) ein und berechnet K, so findet man

$$K = \frac{-c^2}{a(1-\varepsilon^2)}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{-\text{const}}{r^2} \quad ;$$

d. h. die Kraft ist eine Anziehungskraft und dem Quadrat des Sonnenabstands des Planeten umgekehrt proportional.

Für verschiedene Planeten sind allerdings c, a, ε verschieden; ist aber T die Umlaufszeit, so ist nach (3) cT das Doppelte der Ellipsenfläche, d. h. $cT = 2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Es wird somit

$$K = -4\pi^2\frac{a^3}{T^2}\cdot\frac{1}{r^2} \quad ,$$

also nach dem dritten KEPLERschen Gesetz wiederum

$$K = \frac{-\text{const}}{r^2} \quad .$$

Ableitung der Himmelsbewegungen aus dem Newtonschen Gesetze. Die obige Ableitung des NEWTONschen Gesetzes aus dem KEPLERschen entspricht dem induktiven und historischen Entwickelungsgange des Problems. Die umgekehrte Aufgabe, welche deduktiven Charakters ist, bietet insofern ein erweitertes Interesse dar, als sie nicht bloß zu den KEPLERschen Gesetzen führt, also nicht bloß zur Darstellung der Planetenbewegungen geeignet ist, sondern auch die der übrigen Himmelskörper und des Falles und Wurfes auf der Erde ergibt. Auch fällt dabei die Beschränkung fort, daß ein Körper, dort die Sonne, gewissermaßen der ganzen Erscheinung zugrunde gelegt wird, so daß ihre Bewegung nicht in Betracht kommt und ihre Masse keine Rolle spielt. Die Folge davon war, daß sich das NEWTONsche Gesetz nur in folgender spezieller Form ergab: Die Sonne zieht die Planeten mit einer Kraft an, welche ihren Massen direkt und den Quadraten ihrer Sonnenabstände umgekehrt proportional ist. Nunmehr gehen wir von dem allgemeinen NEWTONschen Gesetz aus.

Um aus diesem das zweite KEPLERsche herzuleiten, hat man einfach den umgekehrten Weg wie oben einzuschlagen, es sei denn, daß man sich überhaupt auf den von der allgemeinen Dynamik (s. d.) gelieferten Flächensatz beruft, von dem jenes Gesetz nur ein spezieller Ausdruck ist. Es handelt sich also nur noch um die Deduktion des ersten und dritten der KEPLERschen Gesetze.

Sind $x y z$ und $x_1 y_1 z_1$ die Koordinaten der beiden als materielle Punkte gedachten Körper, m und m_1 ihre Massen und

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

ihre Entfernung, so erhält man die Bewegungsgleichungen aus der Überlegung, daß die Beschleunigung, welche der eine Punkt erfährt, aus der NEWTONschen Kraft $m m_1 / r^2$ durch Division mit seiner Masse erhalten wird, daß das gleiche für den anderen Punkt gilt, und daß die Komponenten der NEWTONschen Kraft aus dieser durch Multiplikation mit $(x - x_1)/r$ erhalten werden:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d^2x}{dt^2} = k m_1 \dfrac{x - x_1}{r^3} \ , & \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = k m \dfrac{x_1 - x}{r^3} \ , \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = k m_1 \dfrac{y - y_1}{r^3} \ , & \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = k m \dfrac{y_1 - y}{r^3} \ , \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = k m_1 \dfrac{z - z_1}{r^3} \ , & \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = k m \dfrac{z_1 - z}{r^3} \ . \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen enthalten jedoch eine allgemeinere Bewegung, als sie hier darzustellen beabsichtigt wird. Nach den Lehren der Dynamik (s. d.) bewegt sich nämlich der Schwerpunkt beider Punkte, da auf ihn keine Kraft wirkt, gleichförmig und geradlinig, während es hier offenbar nur auf den speziellen Fall ankommt, daß der Schwerpunkt in Ruhe bleibt, die beiden Körper also um ihren ruhenden gemeinschaftlichen Schwerpunkt sich bewegen. In diesem Falle leuchtet durch Anschauung ein, daß die Bahnen beider Körper geometrisch ähnlich sind, da für ihre Schwerpunktsabstände die Proportion $\varrho : \varrho_1 = m_1 : m$ gilt, so daß

$$(8) \qquad r = \frac{\varrho(m + m_1)}{m_1} = \frac{\varrho_1(m + m_1)}{m}$$

wird. Durch Einsetzen des ersten Wertes in die linken, des zweiten in die rechten Gleichungen (7) erhält man, wenn man noch mit Hilfe der Beziehungen

$m_1 x_1 = - m x$ u. s. w. aus den ersten drei Gleichungen $x_1 y_1 z_1$, aus den drei letzten $x y z$ eliminiert:

$$(9) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{k m_1^3}{(m + m_1)^2} \frac{x}{\varrho^3} \quad , \qquad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k m^3}{(m + m_1)^2} \frac{x_1}{\varrho_1^3} \quad \text{u. s. w.}$$

Hiermit ist die Bewegung auf eine Zentralbewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt zurückgeführt.

Man kann noch in anderer Weise verfahren, nämlich die relative Bewegung des Punktes $x y z$ in bezug auf den Punkt $x_1 y_1 z_1$ bestimmen; man braucht zu diesem Zwecke nur die Differenzen der drei ersten und der drei letzten Gleichungen (7) zu bilden; man erhält dann, wenn man $x_1 y_1 z_1$ jetzt als Nullpunkt wählt:

$$(10) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = k(m + m_1) \frac{x}{r^3} , \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = k(m + m_1) \frac{y}{r^3} , \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = k(m + m_1) \frac{z}{r^3} \quad .$$

Man kann also die relative Bewegung des einen Punktes in bezug auf den anderen als Zentralbewegung um diesen betrachten, wenn man letzteren die Summe beider Massen zulegt.

Hier soll die letztere der beiden Darstellungsweisen benutzt werden. Die Sonne sei der Punkt $x_1 y_1 z_1$, also jetzt der Nullpunkt; dem anziehenden Charakter der Kraft entsprechend werde, wie früher, das negative Zeichen gewählt, die Anziehungskraft zweier Masseneinheiten in der Entfernungseinheit wie oben k genannt, und für $k(m + m_1)$ zur Abkürzung μ geschrieben. Man hat dann:

$$(11) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = - \mu \frac{x}{r^3} \quad , \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = - \mu \frac{y}{r^3} \quad , \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = - \mu \frac{z}{r^3} \quad ;$$

diese Gleichungen ergeben durch geeignete Behandlung und Integration:

$$(12) \quad y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c_x \quad , \qquad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = c_y \quad , \qquad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_z$$

und durch erneute Kombination:

$$(13) \qquad c_x x + c_y y + c_z z = 0 \quad .$$

Die Bahn ist also eben, und es gilt der Flächensatz; das ist aber das zweite KEPLERsche Gesetz; in Formel, wenn die xy-Ebene zur Bahnebene gewählt wird und r und φ Polarkoordinaten sind:

$$(14) \qquad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c \quad .$$

Durch eine andere Kombination führen die Gleichungen (11), wenn v die Geschwindigkeit ist, zu der Formel:

$$(15) \qquad \frac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + C \quad ,$$

wo C eine neue Konstante ist. Dies ist der Satz von der lebendigen Kraft, der natürlich gelten muß, da die Gravitation ein Potential besitzt und störende Einwirkungen nicht vorhanden sind.

Gerade Bahn. Der einfachste Fall ist der, wo die Konstante c gleich null ist; die bestrichene Fläche wird alsdann null, die Bahn geradlinig. Nimmt man diese Gerade zur x-Achse, so lautet die Bewegungsgleichung:

$$(16) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\mu}{x^2} \quad ,$$

und einmal integriert, wenn die Konstante mit $\mu/2a$ bezeichnet wird:

$$(17) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{x} - \frac{\mu}{2a} \quad .$$

Je nachdem die Anfangsgeschwindigkeit positiv oder negativ ist, wird sich der Körper von dem Zentralkörper entfernen oder ihm nähern. In dem letzteren, interessanteren Falle erhält man durch nochmalige Integration:

$$(18) \qquad t_1 - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2a}}} \quad .$$

Hier kommt es nun weiter auf das Vorzeichen von a an. Ist es positiv, so wird:

$$(19) \qquad t_1 - t_0 = \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2a-x}} - \frac{\sqrt{x(2a-x)}}{2a}\right]_{x_1}^{x_0} \quad ;$$

setzt man hierin $x_0 = 2a$, $x_1 = 0$, so erhält man den Fall eines mit der Anfangsgeschwindigkeit null aus der Entfernung $2a$ auf die Sonne stürzenden Planeten, die dazu erforderte Zeit ist

$$(20) \qquad T = \frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \quad ,$$

also halb so groß wie die Umlaufszeit eines sich in einer Ellipse mit der großen Halbachse a bewegenden Planeten (s. weiter unten). Speziell für $a = \infty$ wird:

$$(21) \qquad t_1 - t_0 = \frac{2}{3\sqrt{2\mu}} (x_0^{3/2} - x_1^{3/2}) \quad .$$

Ist andererseits a negativ, so wird:

$$(22) \qquad t_1 - t_0 = \frac{2(-a)^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{x-2a} - \sqrt{x}}{\sqrt{x-2a} + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x(x-2a)}}{2a}\right]_{x_1}^{x_0} \quad .$$

Bei anfänglich vom Zentralkörper fortgerichteter Bewegung findet, wenn a positiv ist, bei $x - 2a$ Umkehr statt; wenn a negativ ist, entfernt sich der Planet mit einer bis auf $\sqrt{\mu/(-a)}$ abnehmenden Geschwindigkeit in die Unendlichkeit.

Wie man sieht, kann die Bewegung je nach den Umständen von beschleunigt beschleunigtem, verzögert beschleunigtem oder gar verzögertem Charakter sein; nur wenn der Spielraum der Bewegung klein ist gegen die Entfernung vom Zentralkörper bezw. seinem Mittelpunkt, wird die Bewegung, wie beim irdischen Fall und Wurf, gleichförmig beschleunigt oder verzögert.

Elliptische Bahn. Geht man jetzt zum Falle krummer Bahn, also zu Werten $c \gtrless 0$ über, so benutzt man naturgemäß am besten die Polarform der Gleichung (14) und erhält durch Integration mit Rücksicht auf Gleichung (15), wenn φ_0 die Konstante ist:

$$\varphi = -\arccos \frac{\mu r - c^2}{r\sqrt{\mu^2 + 2c^2 C}} + \varphi_0 \quad ,$$

also, wenn durch geeignete Wahl $\varphi_0 = \pi$ gemacht wird,

(23) $$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\,c^2\,C}{\mu^2}}\cos\varphi} \quad .$$

Vergleicht man dies mit der Polargleichung eines Kegelschnittes

(24) $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

(p Halbparameter, ε Exzentrizität), so sieht man, daß die Bahn eines dem Sonnensystem angehörigen Weltkörpers ein Kegelschnitt ist, in dessen einem Brennpunkte die Sonne steht; und zwar eine Ellipse, wenn $C < 0$, eine Parabel, wenn $C = 0$, eine Hyperbel, wenn $C > 0$ ist; der Fall $C < -\mu^2/2\,c^2$ ist ausgeschlossen; in dem hiernach auch noch sehr unwahrscheinlichen Falle $C = -\mu^2/2\,c^2$ wird die Bahn ein Kreis. Für die Konstanten c und C ergeben sich die Ausdrücke

(25) $$\begin{cases} c = \sqrt{p\,k(m + m_1)} \quad , \\ C = \dfrac{k(m + m_1)(\varepsilon^2 - 1)}{p} \quad . \end{cases}$$

Figur 144.

Für die weitere Darstellung, soweit es sich um elliptische Bahnen handelt, ist es zweckmäßig, an Stelle der sogen. wahren Anomalie φ die sogenannte exzentrische Anomalie u einzuführen; man erhält dieselbe, indem man im Endpunkte (Figur 144) des vom Brennpunkte S gezogenen Radiusvektors r eine Senkrechte zieht und deren Schnittpunkt Q mit dem über der großen Achse $2\,a$ als Durchmesser geschlagenen Kreise mit dem Mittelpunkte M verbindet; es ist dann $u = \angle\, SMQ$. Die Gleichung (24) geht dann in

(26) $$r = a(1 - \varepsilon\cos u)$$

über; und wenn man jetzt die Gleichung (14) nach Elimination von r integriert und zur Abkürzung

(27) $$\frac{\sqrt{k(m + m_1)}}{a^{3/2}} = n$$

setzt, so erhält man die sogen. Keplersche Gleichung

(28) $$u - \varepsilon\sin u = n\,t \quad .$$

Es sei bemerkt, daß der Spezialfall $u = 2\,\pi$ zu der Umlaufszeit

(29) $$T = \frac{2\,\pi}{n} = \frac{2\,\pi\,a^{3/2}}{\sqrt{k(m + m_1)}}$$

führt, so daß die KEPLERsche Gleichung die Form

(30) $$u - \varepsilon \sin u = \frac{2\pi t}{T}$$

annimmt, in welcher sie zeigt, daß, wenn T beobachtet ist, A aus u, also, da

(31) $$\cos u = \frac{\cos\varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

ist, t aus φ berechnet werden kann. Wichtiger ist es jedoch offenbar, umgekehrt φ aus t zu berechnen; durch Reihenentwickelung erhält man hierfür zunächst

(32) $$\left\{\begin{aligned} u = n t &+ \varepsilon \sin n t + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2 n t \\ &+ \tfrac{1}{8}\varepsilon^3 (3 \sin 3 n t - \sin t) \\ &+ \tfrac{1}{6}\varepsilon^4 (2 \sin 4 n t - \sin 2 n t) + \ldots \quad , \end{aligned}\right.$$

wobei es von dem Werte von ε abhängen wird, wieviel Glieder dieser Reihe man nehmen muß. Nun ist die Exzentrizität für die sogen. großen Planeten ein kleiner Bruch, wie die folgende Zusammenstellung, die auch die Werte der großen Halbachse in Vielfachen derer der Erdbahn enthält, erkennen läßt:

Planet	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
a	0,387	0,723	1,000	1,524	5,203	9,539	19,18	30,05
ε	0,206	0,0068	0,017	0,093	0,048	0,056	0,046	0,009

Es wird in diesen Fällen genügen, die drei, unter Umständen auch nur die beiden ersten Glieder der Reihe zu nehmen; im letzteren Falle erhält man sehr einfach:

(33) $$\varphi = n t + 2 \varepsilon \sin n t \quad ,$$

(34) $$r = a(1 - \varepsilon \cos n t) \quad .$$

Größere Werte nimmt die Exzentrizität für die sogen. kleinen Planeten in dem Gürtel zwischen Mars und Jupiter sowie für die Kometen, soweit sie überhaupt noch elliptische Bahn haben, an; für jene sind Werte zwischen 0,2 und 0,4 nicht selten, für diese ist die Annäherung an die eins sogar das Typische. In solchen Fällen muß man entweder eine größere Anzahl von Gliedern der obigen Reihe nehmen oder man muß sie, wofür zahlreiche Methoden existieren, in andere Reihen verwandeln (für $\varepsilon > 0{,}66$ hört obige Reihe überhaupt auf, für alle Teile der Bahn zu konvergieren); bei einer dieser Transformationen kommt man auf BESSELsche Funktionen, für die Tabellen existieren.

Im ganzen gehören zur Bestimmung der elliptischen Bahn eines Weltkörpers sechs Größen, die sogen. Bahnelemente, nämlich: 1. die große Halbachse, 2. die Exzentrizität (oder auch die kleine Halbachse), 3. die Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik (die Bahnebene der Erde), 4. die heliographische Länge des Perihels, 5. die Länge des aufsteigenden Knotens, d. h. des Punktes, in dem die Bahn die Ekliptik, vom Nordpol aus gesehen, von unten nach oben kreuzt, 6. die heliographische Länge des Ortes, an dem sich der Planet in irgend einem als Nullpunkt gewählten Zeitpunkte befindet; diese Länge heißt seine Epoche. Die Perihele und aufsteigenden Knoten schon der großen Planeten sind nach allen Richtungen verteilt; dagegen ist die größte Neigung gegen die Ekliptik, nämlich die der Merkurbahn, nur 7°, bei den kleinen Planeten steigt sie bis zu 35°.

Endlich erhält man aus Gleichung (29) für zwei verschiedene Himmelskörper hinsichtlich ihrer Bewegung um denselben Zentralkörper:

$$T_1^2 : T_2^2 = \frac{a_1^3}{M + m_1} : \frac{a_2^3}{M + m_2} \quad ,$$

wo M die Masse des Zentralkörpers, z. B. der Sonne ist und m_1 und m_2 die Massen der beiden Nebenkörper, z. B. zweier Planeten sind; man kann auch M zur Einheit wählen und unter den m die betreffenden Verhältniszahlen verstehen. Sind diese Verhältniszahlen kleine Brüche, die man vernachlässigen kann, so erhält man das dritte KEPLERsche Gesetz; es gilt also, im Gegensatz zu den beiden ersten Gesetzen, wenigstens für die relative Bewegung — die doch die Bahn liefert — nicht genau. Nun ist aber die Sonne von 1058 mal so großer Masse wie der größte der Planeten, Jupiter, so daß hier der Fehler noch kein Tausendstel, in allen anderen Fällen aber noch viel weniger ausmacht. Dagegen bieten die Doppelsterne einen Fall dar, wo die beiden Massen von gleicher Ordnung sind; es muß dann auf die Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt zurückgegriffen werden. (Für das System Sonne–Erde liegt der Schwerpunkt nur 445 km vom Sonnenmittelpunkt entfernt, also noch tief im Innern des Sonnenkörpers; und selbst der Schwerpunkt des Systems Sonne–Jupiter liegt nur wenig außerhalb des Sonnenkörpers.[1]

Die genaue Gleichung (29) böte übrigens ein Mittel, um aus den Halbachsen und den Umlaufszeiten die Massen der Himmelskörper abzuleiten, wenn nicht die unbekannte Konstante k darin vorkäme. Dadurch wird der Gedanke in dieser direkten Weise unausführbar; wohl aber kann man durch Kombination zweier derartiger Gleichungen, deren eine für den Planeten in Beziehung zur Sonne, deren andere für einen Mond in Beziehung zu seinem Planeten gilt, die Konstante k eliminieren und alsdann gemäß der Gleichung

$$m = \frac{T^2 a'^3}{T'^2 a^3 - T^2 a'^3} M \quad ,$$

in der sich a und T auf den Planeten, a' und T' auf den Mond beziehen, die Masse des Planeten m im Verhältnis zu der der Sonne ermitteln; vorausgesetzt ist dabei, daß der Planet einen und nur einen Mond habe; hat er mehrere, so sind Korrektionen anzubringen (s. weiter unten).

Parabolische und hyperbolische Bahn. Soweit die elliptische Bahnbewegung. Für die parabolische findet sich, indem $\varepsilon = 1$ gesetzt wird:

$$t = \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{k(m + m_1)}} \left(\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{\varphi}{2}\right) \quad ,$$

und hieraus φ als Funktion von t. Für die hyperbolische Bahn endlich wird $\varepsilon > 1$ und somit u rein imaginär, also gleich iu', wo u' reell ist. Man erhält dann die Gleichung zwischen u' und φ:

$$\frac{e^{u'} + e^{-u'}}{2} = \frac{\cos\varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \quad ,$$

ferner die Gleichung zwischen u' und t:

$$u' - \varepsilon \frac{e^{-u'} - e^{-u'}}{2} = \frac{\sqrt{k(m + m_1)}}{a^{3/2}} t$$

[1] In betreff einer Verallgemeinerung des dritten KEPLERschen Gesetzes für allgemeineres Kraftgesetz vgl. P. BOHL, Ztschr. f. Math. u. Phys. 35. 188. 1890.

und kann schließlich u' durch ein Näherungsverfahren ermitteln. — Diese beiden Bahnformen sind bei zahlreichen Kometen mehr oder weniger angenähert vorhanden, die aus großer Entfernung vorübergehend in das Sonnensystem gelangen und sich nachher wieder auf immer aus ihm entfernen.

Übrigens gibt es noch eine andere Art von hyperbolischer Bewegung, nämlich eine solche, bei der die Bewegung in dem einen Hyperbelzweige vor sich geht, während der Zentralkörper in dem anderen, äußeren Brennpunkte steht; eine solche Bewegung tritt ein, wenn die Kraft abstoßenden Charakters ist; die Formeln lassen sich leicht aufstellen. Eine interessante Anwendung hiervon läßt sich auf die Kometenschweife machen, und zwar lassen sich in Verbindung mit den Theorien von BESSEL, ZÖLLNER u. A. die Formen und Lagen der Schweife u. s. w. zum Teil bis ins einzelne verfolgen, worauf hier nicht eingegangen werden kann.

Störungstheorie. Die bisherigen Anwendungen des Gravitationsgesetzes kann man unter dem Namen des Zweikörperproblems zusammenfassen, wenn man nicht noch weitergehen will und diejenigen Fälle, wo der Zentralkörper als festes Zentrum betrachtet wird, als Einkörperproblem bezeichnen will. In Wahrheit handelt es sich aber im Weltraume stets um Bewegungen von mehr als zwei Körpern unter ihrem gegenseitigen gravitierenden Einfluße. Der nächste Schritt wird offenbar der sein, daß man drei Körper annimmt, wodurch man zu dem Dreikörperproblem gelangt. Dabei liegt es nahe, das Problem in der Weise an das bisherige anzuschließen, daß man von den drei Körpern zwei als Hauptkörper, den dritten als einen die Bewegung störenden Nebenkörper auffaßt. So gelangt man zu der für die Astronomie so hochbedeutsamen Störungstheorie, durch die sie ihre schönsten Triumphe gefeiert hat. Hier müssen einige Hinweise auf das auch physikalisch Interessante genügen.

Das Prinzip, das zur Lösung des Störungsproblems verwandt wird, ist von LAGRANGE angegeben worden und heißt die Methode der Variation der Konstanten. Man ermittelt nämlich zuerst die Elemente der ungestörten Bahn, betrachtet diese als veränderlich und bestimmt sie zuletzt derart, daß die wahre Bahn wiedergegeben wird. Die größten Fortschritte hat die Methode und ihre elegante Behandlung erst in neuerer Zeit gemacht, und zwar im Anschluß an die Form, die den Bewegungsgleichungen durch HAMILTON und JACOBI gegeben worden ist (s. Artikel „Dynamik", p. 327, die Bezeichnungen sind dort etwas andere). Ist nämlich $i = 1$ oder 2 (allgemeiner gleich 1 bis $n - 1$), sind p und q die Koordinaten und ist H die charakteristische Funktion, so lauten die Bewegungsgleichungen in der kanonischen Form:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad .$$

Spaltet man nun von H zunächst einen geeigneten Teil H' ab und integriert die den obigen für H' entsprechenden Gleichungen, so bekommt man die Koordinaten durch die Zeit und die vier (allgemein $2[n-1]$) Integrationskonstanten, Parameter genannt, ausgedrückt; die betreffende Bahn heißt nach GYLDÉN die intermediäre Bahn. Sieht man nun die Parameter als veränderlich an, so kann man für sie vier (allgemein $2[n-1]$) Differentialgleichungen erster Ordnung ableiten, die den obigen völlig entsprechen, und die, wenn man die kanonischen Elemente der HAMILTON-JACOBIschen Integrationsmethode als Parameter benutzt, die unmittelbar angebbare kanonische Form annehmen. Dabei tritt an die Stelle von H zweckmäßig eine etwas abgeänderte Funktion F, die den Namen Störungsfunktion erhalten hat. Um sie anzugeben, sei C der massige erste, B der zweite, A der dritte störende Körper, von den entsprechenden Massen seien m_a und m_b klein gegen m_c; q_1, q_2, q_3 seien die Koordinaten von B relativ zu C, q'_1, q'_2, q'_3 die von A relativ zum Schwerpunkt von C und B; r_{ab} und r_{ga} seien die Abstände zwischen A und B bezw. zwischen A und dem

Schwerpunkte von B **und** C; endlich sei a die ungestörte Bahnhalbachse von B, a' die von A; dann ist:

$$F = \frac{k\, m_b\, m_c}{2\,a} + \frac{k\, m_a\, m_c}{2\,a'}$$

$$+ \frac{k\, m_a\, m_b}{r_{ab}} - \frac{k\, m_a\, m_b}{r^3_{ga}} (q_1\, q'_1 + q_2\, q'_2 + q_3\, q'_3) \quad .$$

Wie man sieht, sind die beiden ersten Glieder von der ersten, die beiden letzten von der zweiten Ordnung in bezug auf die Massen; man hat hierin ein Mittel, um die Störungen mit fortschreitender Annäherung zu entwickeln. Natürlich muß man nun die Störung der einzelnen Elemente für sich untersuchen und findet dann, daß sie sich sehr verschieden verhalten. Allgemein aber kann man jedes Element in eine Form bringen, die aus zwei Gliedern besteht: ein trigonometrisches und ein mit der Zeit proportionales; jenes stellt die periodischen Störungen dar, dieses die sogenannten säkularen Störungen. So krass ist indessen dieser Gegensatz nur in der ersten Annäherung; bei weiterer zeigt es sich, daß auch die säkularen Störungen nicht unbegrenzt wachsen, sondern periodischen Schwankungen von sehr großer Amplitude und sehr langer Periode unterliegen; damit aber ist die vielfach ausgesprochene Gefahr einer Instabilität des Sonnensystems wenigstens im nächstliegenden Sinne beseitigt. Die periodischen Störungen andererseits halten sich im allgemeinen in mäßigen Grenzen; sie können aber stark werden, wenn die Umlaufszeiten bezw. die mittleren täglichen Bewegungen der in Betracht kommenden Körper einen kleinen Generalnenner haben, d. h. wenn sie in einfachen Zahlverhältnissen stehen oder dies auch nur angenähert tun. So sind z. B. die mittleren Bewegungen von drei Jupitermonden fast genau, die von Jupiter selbst und Saturn nahezu (Verhältnis 2:5) kommensurabel, die betreffenden Störungen also relativ sehr beträchtlich; die Störung des Planeten Thetis durch Jupiter (1:3) beträgt sogar $4^0\,35'$ in Länge, mit einer Periode von 240 Jahren.

Was nun die säkularen Störungen betrifft, so ist gleich das erste Resultat der Rechnung außerordentlich interessant: die große Achse jedes Planeten bleibt (von periodischen Schwankungen hier ganz abgesehen) unveränderlich; und zwar nicht nur, wie schon LAPLACE gefunden hatte, in erster Annäherung, sondern, wie LAGRANGE nachwies, ganz allgemein; freilich sind bei der strengen Behandlung der neuesten Zeit Bedenken entstanden, inwiefern die Konstanz für alle Zeiten gesichert ist, namentlich in dem Falle, daß einer (oder bei mehr als drei Körpern einige) der Körper umgekehrt um das Zentrum läuft, was bekanntlich bei den Planeten nicht vorkommt.

Aus der Konstanz der großen Achsen folgt nun weiter, daß die Exzentrizitäten und die Neigungen der Bahnen für alle Zeiten kleine Werte behalten müssen, ausgenommen für Planeten, die der Sonne sehr nahe liegen (der Merkur ist noch weit genug) sowie für Planeten von sehr kleiner Masse, so daß also für die Plametoiden die Exzentrizitäten und Neigungen unter Umständen auch große Werte annehmen können, wie das bis zu einem gewissen Grade schon jetzt der Fall ist.

Wenn die bisherigen Konstanzaussagen beschränkte Gültigkeit hatten, so gibt es doch ein Gebilde, dessen Unveränderlichkeit eine vollkommene ist; das ist die unveränderliche Ebene (vgl. Artikel „Dynamik", p. 338) oder, wie sie nach ihrem Entdecker genannt wird, die LAPLACEsche Ebene. Die Konstanten der drei Flächensätze seien c_1, c_2, c_3; sie ändern sich mit der Änderung der Richtung der Koordinatenachsen, jedoch so, daß die Summe der Quadrate

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

unverändert bleibt. Wählt man nun eine Ebene aus, für deren Normale die Richtungskosinus

$$\alpha = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \quad , \quad \beta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \quad , \quad \gamma = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

gegen die ursprünglichen Koordinatenachsen gelten, so wird für sie die Flächenkonstante ein Maximum, während sie für jede durch ihre Normale gelegte Ebene gleich null wird. Diese Ebene erweist sich als unveränderlich bei einer beliebigen Anzahl gravitierender Massen, soweit sie bei der Berechnung berücksichtigt wurden. Nur fremde, äußere Massen dürfen nicht eingreifen; und eine etwa beobachtete Drehung der LAPLACEschen Ebene würde ein sicherer Beweis eines stattgehabten derartigen äußeren Eingriffs in das Sonnensystem sein. Bezeichnet man mit ϑ die Neigung der unveränderlichen Ebene gegen die xy-Ebene, mit ω den Winkel, den der aufsteigende Knoten der unveränderlichen Ebene auf der xy-Ebene mit der x-Achse bildet, so hat man, wie Figur 145 zeigt,

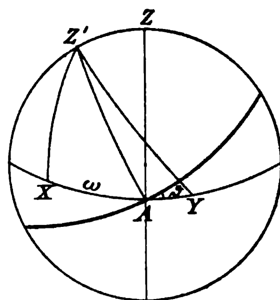
$$\alpha = \sin\vartheta \sin\omega \quad , \quad \beta = -\sin\vartheta\cos\omega \quad ,$$

$$\gamma = \cos\vartheta \quad ,$$

woraus sich zur Bestimmung von ϑ und ω die Formeln

$$\operatorname{tang}\omega = -\frac{c_1}{c_2} \quad , \quad \operatorname{tang}\vartheta\sin\omega = \frac{c_1}{c_3} \quad ,$$

$$\operatorname{tang}\vartheta\cos\omega = -\frac{c_2}{c_3}$$



Figur 145.

ergeben. Nimmt man nun die LAPLACEsche Ebene zur xy-Ebene, so kann man die Flächensätze in der eleganten, von JACOBI herrührenden Weise formulieren: Die Knotenlinien zweier Planetenbahnen auf der unveränderlichen Ebene fallen zusammen, und zwar ist der aufsteigende Knoten der einen Planetenbahn der absteigende Knoten der anderen. — Die Lage der LAPLACEschen Ebene hängt nach dem Gesagten ganz wesentlich von den Massen der in Betracht kommenden Körper sowie von der Neigung ihrer Bahnen gegen die Ekliptik ab; da nun diese letzteren für alle größeren Massen klein ist, wird auch die LAPLACEsche Ebene nur wenig gegen die Ekliptik geneigt sein; in der Tat findet sich, soweit unsere Kenntnis der Planetenmassen eine genaue Berechnung erlaubt:

für 1750: 1° 35′ 31″ , für 1900: 1° 35′ 4″ ;

hierzu ist nun noch die Länge des aufsteigenden Knotens zu fügen:

1750: 102° 57′ 30″ , 1900: 104° 22′ 1″ .

Schließlich ergibt sich noch eine Größe als, wenigstens angenähert konstant: die Umlaufszeit, also das Jahr eines jeden Planeten.

Die Gesamtheit der bisherigen Ergebnisse umfaßt die Erweiterung des zuerst von LAPLACE gelieferten Stabilitätsbeweises für das Sonnensystem.

Die übrigen für das Gesamtsystem charakteristischen Größen bleiben nun nicht konstant, sondern unterliegen säkularen Änderungen; und zwar gehen die Änderungen der Neigungen und Knoten einerseits, die der Perihelien und Exzentrizitäten andererseits unabhängig voneinander vor sich. Als einfache Sätze seien angeführt, daß die Neigung zweier Planetenbahnen gegen die LAPLACEsche Ebene unter gewissen Annahmen konstant bleibt, und daß die gemeinsame Knotenlinie mit gleichförmiger Geschwindigkeit rückwärts wandert, daß dagegen die Perihel-

bewegung um einen mittleren Wert hin und her schwankt u. s. w. Es kann darauf nicht weiter eingegangen werden.

Die Störungen, wie sie hiernach die Theorie verlangt, sind in der Tat im Sonnensystem in äußerst zahlreichen Fällen und in zum Teil recht beträchtlichem Betrage beobachtet worden. Auf die Erde sind besonders Jupiter, Venus und Mars von Einfluß; auf den Jupiter übt der Neptun eine störende Wirkung aus, die groß genug war, um es ADAMS und LEVERRIER zu ermöglichen, aus ihr nicht nur auf seine Existenz zu schließen, sondern auch Ort und Bahn dieses neuen Planeten relativ genau vorher zu bestimmen. Sehr beträchtlich sind die Störungen, denen die kleinen Planeten in der Zone zwischen Mars und Jupiter teils von seiten dieser beiden Weltkörper, teils durch gegenseitigen Einfluß ausgesetzt sind; ihre Bahnen sind daher fortwährenden Änderungen unterworfen, sie können sogar unter Umständen, wie man das z. B. im Hinblick auf die beiden neuentdeckten Marsmonde vermutet hat, von einem großen Planeten abgefangen werden, und vielleicht wird etwas Ähnliches einmal mit dem neu entdeckten kleinen Planeten Eros sich ereignen, der durch die Marsbahn hindurchgeht. Am heftigsten sind die Störungen begreiflicherweise bei den Kometen, wenn sie der Sonne oder einzelnen Planeten einigermaßen nahe kommen; es kann sich dabei u. a. ereignen, daß ein von fernher para- oder hyperbolisch in das Sonnensystem eingetretener Komet in eine elliptische Bahn und somit zum Verbleiben im Sonnensystem gezwungen wird oder daß das Entgegengesetzte eintritt oder endlich, daß das eine und nach einem Umlaufe das Umgekehrte eintritt.

Das Dreikörper-Problem. Wenn die drei Körper als gleichberechtigt angesehen werden, kommt man zu dem allgemeinen Problem der drei Körper. Es ist bekanntlich von der Zeit der großen Analytiker bis auf die neueste Zeit Gegenstand äußerst zahlreicher und genialer Untersuchungen gewesen, die Lösung ist aber nur bis zu einem gewissen Punkte gediehen. Die Form, in der die Untersuchung geführt wird, ist bei den Autoren, unter denen z. B. LAGRANGE, LAPALCE, JACOBI, HESSE, GYLDÉN, POINCARÉ zu nennen sind, verschieden; in der Hauptsache aber handelt es sich um folgendes. Die Bewegungsgleichungen dreier Körper lauten, wenn das Potential ihrer gravitierenden Wechselwirkung

$$\dot{V} = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}}$$

eingeführt wird:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_1},$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_2}, \quad m_2 \frac{d^2z_2}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_2},$$

$$m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_3}, \quad m_3 \frac{d^2y_3}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_3}, \quad m_3 \frac{d^2z_3}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_3}.$$

Nennt man die Summe der Ordnungen eines Systems von Differentialgleichungen die Ordnung des Systems, so ist dieses System von der 18. Ordnung, und man nähert sich der Lösung, je mehr man die Ordnungszahl durch Integrationen reduziert. Man kann zunächst die HESSEsche Reduktion vornehmen, indem man die absoluten durch die relativen Koordinaten der drei Punkte ersetzt, wodurch man bei geeignetem Verfahren zur zwölften und, wenn man die drei Entfernungen als Variable einführt, zur neunten Ordnung gelangt; durch Benutzung des Integrals der lebendigen Kraft sowie der Quadratsumme der Flächenkonstanten kommt man auf sieben und zuletzt durch Elimination der Zeit auf die sechste Ordnung. Es ist nur eine etwas andere Form, wenn man die Reduktion durch die

sechs Schwerpunkts-, die drei Flächen- und den Energiesatz ausführt; die schließliche Ordnung wird ebenfalls sechs. Eine Weiterführung der Reduktion ist noch nicht gelungen, wenigstens nicht im allgemeinen Falle; es läßt sich auch zeigen (BRUNS), daß mehr als obige zehn Integrale auf algebraischem Wege nicht gefunden werden können. Man kann auch sagen, daß man die Gleichungen auf vier Freiheitsgrade zurückführen kann, und dabei kann man sie in der kanonischen Form hinschreiben. Handelt es sich um die Bewegung in einer Ebene, so kann man sogar ein kanonisches System mit drei Freiheitsgraden aufstellen; sieht man von dieser Form ab, so kann man, wie in neuester Zeit nachgewiesen worden ist (CHARLIER, BRUNS u. A.) als Koordinaten entweder die Schwerpunktsabstände oder die Entfernungen der Punkte voneinander benutzen. Andere Spezialfälle sind die, wo die Entfernungen oder die Winkel konstant bleiben u. s. w.

Noch weit verwickelter ist natürlich das allgemeine Problem der n Körper, wo $n = 4$ oder mehr ist.

Der uns nächstliegende Fall von Drei-Körper-Bewegung ist die Bewegung des Mondes unter dem gleichzeitigen Einfluß von Erde und Sonne. Die beiden Wirkungen sind hier tatsächlich von gleicher Größenordnung; sie verhalten sich nämlich, da die Sonne zwar 400 mal so weit entfernt, dafür aber 320000 mal so massig ist, etwa wie 1 : 2. Für die absolute Bewegung des Mondes ist also die Sonne maßgebender als die Erde. Was uns indessen interessiert, ist die Bewegung des Mondes relativ zur Erde, und hierfür kommt in erster Linie die Wirkung der Erde, in zweiter die Differenz der Anziehungen in Betracht, die die Sonne auf die Erde einerseits, auf den Mond andererseits ausübt, eine Differenz, die wegen des relativ geringen Unterschieds der Abstände zwar im ganzen noch recht beträchtlich, aber immerhin klein gegen die Hauptwirkung sein wird; man kann somit auch dieses Problem als ein Störungsproblem behandeln. Die Hauptstörung besteht, wie die einfache Anschauung lehrt, darin, daß die Mondbahn in der Richtung nach der Sonne hin und von ihr weg in die Länge gezogen, quer dazu zusammengeschnürt wird; dazu kommen dann zahlreiche weitere Störungen von verschiedenen Beträgen und Perioden.

Einfluß der Größe und Gestalt der Körper. Bisher ist immer angenommen worden, daß die gravitierenden Körper punktförmig oder doch sehr klein gegen ihre gegenseitigen Entfernungen seien. Im Sonnensystem ist das meist, aber nicht überall der Fall; so ist z. B. der Merkur nur 30 bis 40 Sonnendurchmesser von der Sonne und der Mond nur etwa 30 Erddurchmesser von der Erde entfernt. Wenn man trotzdem selbst in diesen Fällen von der räumlichen Ausdehnung der Körper meist absehen kann, so liegt das daran, daß diese Körper Kugeln sind, deren Dichte nur von Schicht zu Schicht variiert, und daß (vgl. „Potentialtheorie") ein derartiger Körper nach aussen so wirkt, als ob seine ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Ganz richtig ist das nun aber, wie man weiß, nicht: die Planeten haben Abplattungen, die zum Teil gar nicht unbeträchtlich sind, und auch ihre Massenverteilung ist sicher keine ideale. Die Folge hiervon und von ähnlichen Abnormitäten wird eine Reihe besonderer Erscheinungen sein, von denen die Präzession und die Nutation schon im Artikel „Kreiselbewegung" erwähnt worden sind; eine andere hierhergehörige Erscheinung, deren unmittelbarer Ursprung freilich ein anderer ist, ist die Libration. Endlich ist auf die besonderen Erscheinungen und Probleme hinzuweisen, die die Ringe des Saturn infolge ihrer ganz andersartigen Form darbieten, und auf die in der Hydromechanik noch zurückzukommen sein wird.

Historisches zur Mechanik des Himmels. Eine auch nur ausgewählte Literaturübersicht über die letzten Abschnitte verbietet sich im Hinblick auf ihre Ausdehnung und ihren ganz überwiegend astronomischen Charakter. Es muß daher eine kurze historische Andeutung genügen, wobei zwischen dem Störungsproblem und dem allgemeinen Vielkörperproblem zu unterscheiden ist, obgleich

die Grenzen sich natürlich vielfach verwischen. Nachdem schon NEWTON selbst sowie CLAIRAUT und D'ALEMBERT (1747) einzelne Ansätze gemacht hatten (der von CLAIRAUT fand in bezug auf die Verspätung des HALLEYschen Kometen glänzende Bestätigung), entwickelte EULER in den Jahren 1748 bis 1756 die Methode der Variation der Konstanten. Die eigentlichen Begründer der Störungstheorie sind LAGRANGE und LAPLACE; ihre Arbeiten sind, fast gleichzeitig, 1766 bis 1782 erschienen. Unter den Nachfolgern sind u. A. POISSON, CAUCHY, BESSEL, HANSEN, MATTHIEU zu nennen. In neuerer Zeit endlich haben ADAMS, LEVERRIER, DELAUNAY, GYLDÉN, NEWCOMB und viele Andere die Theorie gefördert. — Das Drei-Körper-Problem andererseits wurde zuerst durch LAGRANGE auf wissenschaftliche Höhe gebracht, und zwar im Jahre 1772; seine Arbeit ist niemals inhaltlich, sondern lediglich formell überholt worden. So sind aus der mittleren Periode die Arbeiten von JACOBI, HESSE, BERTRAND und BOUR, aus neuester die von MATTHIEU, TISSÉRAND, GYLDÉN und seinen Schülern, POINCARÉ, BRUNS, PIROGOW, CHARLIER, BOHLIN und STOCKWELL hervorzuheben. — Endlich sei für eingehenderes Studium auf die umfassenden Darstellungen der Mechanik des Himmels verwiesen, und zwar auf das klassische Werk von LAPLACE, sowie auf die modernen Werke bezw. Lehrbücher von TISSÉRAND, GYLDÉN, POINCARÉ, DZIOBEK und CHARLIER.

B. Die irdische Schwerkraft.

Problem Das Problem, das die Schwerkraft und ihr Verhalten in, über und unter der Erde darbietet, ist ein außerordentlich kompliziertes, so daß es erforderlich wird, von den einfachsten Annahmen auszugehen und sich sukzessive den wirklichen Verhältnissen zu nähern. Der einfachste Fall wäre der, daß die Erde eine homogene Kugel wäre, die überdies im Raume ruhte. Läßt man zunächst die letztere Annahme fallen und beachtet die Rotation der Erde um ihre Achse, so muß man zwischen der in die Erscheinung tretenden und der für die ruhende Erde geltenden Schwerkraft unterscheiden; jene setzt sich aus dieser und der Zentrifugalkraft (p. 338) zusammen; diese Resultante wird von den Geodätikern meist schlechtweg als Schwerkraft bezeichnet, von den Physikern aber vielfach als „scheinbare" Schwerkraft, im Gegensatz zur „wahren" Schwerkraft. Läßt man nun weiter die Annahme fallen, daß die Erde eine Kugel sei und führt man ihre Abplattung ein, so kommen neue Abweichungen hinzu, die sich mit den früheren in verwickelter Weise verknüpfen. Schließlich muß man dann die wahre Figur der Erde mit ihren Kontinenten und Ozeanen, Gebirgen und Tälern in Betracht ziehen und versuchen, diesen Anomalien der Massenverteilung, sei es theoretisch, sei es mit Hilfe von Beobachtungsmaterial, Rechnung zu tragen.

Betrachten wir zunächst die allgemeinen Verhältnisse.

Nennt man die Koordinaten irgend eines wirksamen Massenelements dm der Erde x, y, z, wo die Z-Achse mit der Drehachse zusammenfällt, dagegen die Koordinaten des Aufpunktes (p. 181) x', y', z', ihre Entfernung voneinander r und die Winkelgeschwindigkeit der Erde ω, so ist das Potential der zu beobachtenden Schwerkraft:

$$W = k\int\frac{dm}{r} + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\,\omega^2 = V + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\,\omega^2 \quad ,$$

(V das Potential der wahren Schwerkraft); und die Komponenten der Schwerkraft selbst sind:

$$g_x = -\frac{\partial W}{\partial x'} = k\int\frac{x - x'}{r^3}\,dm - x'\,\omega^2 \quad ,$$

$$g_y = -\frac{\partial W}{\partial y'} = k\int\frac{y - y'}{r^3}\,dm - y'\,\omega^2 \quad ,$$

$$g_z = -\frac{dW}{\partial z'} = k\int\frac{z - z'}{r^3}\,dm \quad .$$

Die Flächen $W =$ const sind die Niveauflächen der irdischen Schwere, und es ist, wenn n die Normale bedeutet,

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n} \quad .$$

Aus der Potentialtheorie folgt nun weiter: das Potential sowohl wie die Schwere hat in jedem Punkte einen und nur einen bestimmten Wert, letztere auch eine bestimmte Richtung (ausgenommen Punkte, wo $g = 0$ ist, sogen. Gleichgewichtspunkte, z. B. zwischen Erde und Mond); sowohl W wie g ändert sich stetig, letzteres sowohl nach Größe wie nach Richtung; die Niveauflächen verlaufen stetig gebogen, ohne Kanten und Spitzen und ohne sich selbst zu schneiden, das Entsprechende gilt von den Kraftlinien (Schwerelinien), mit Ausnahme der singulären Punkte (Zentren). Dagegen erfahren die zweiten Differentialquotienten von W Sprünge, wo sich die Dichte sprungweise ändert; es ist nämlich, wenn ϱ' die Dichte im Aufpunkte ist:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} = -4\pi k \varrho' + 2\,\omega^2 \quad ;$$

geometrisch gesprochen: die Krümmung der Niveaufläche ändert sich sprungweise, jedoch, wie man leicht einsieht, nicht in demjenigen Normalschnitte, der parallel zur gemeinsamen Tangente der Niveaufläche und der Unstetigkeitsfläche der Dichte ist, hingegen am stärksten in dem zu dieser Tangente senkrechten Normalschnitte. Paradox könnte der Umstand erscheinen, daß die Größe des Sprunges nur von der Dichte, nicht aber von der absoluten Masse abhängt, daß also eine kleine Masse ebenso stark wirkt wie eine große; indessen ist zu beachten, daß die Wirkungssphäre in beiden Fällen proportional den Massen verschieden ist, d. h. die große Masse deformiert die Niveaufläche auf einem entsprechend größeren Gebiete. Schließlich ist zu bemerken, daß die geographischen Meridiane und Parallelen innerhalb einer Niveaufläche an Unstetigkeitsstellen der Dichte unstetig gebogen sind (unstetige erste Differentialquotienten).

Abhängigkeit der Schwere von der Höhe. Betrachtet man die Erde zunächst als eine homogene oder homogenschichtige Kugel, so kann man einfach von ihrem Mittelpunkte aus rechnen und erhält das Gesetz der Abnahme mit dem wachsenden Quadrat der Entfernung, also, wenn g_0 die Schwere im Meeresniveau, d. h. in der Oberfläche der gedachten Kugel, g die Schwere in der Höhe h über dem Meeresniveau und R der Erdradius ist, die Formel:

$$g_h = g_0\,\frac{R^2}{(R + h)^2} \quad ,$$

oder, da h stets sehr klein gegen R ist (das höchste bis jetzt von Menschen erreichte h ist mit etwa 10 km noch immer 600 mal so klein wie R), näherungsweise

$$g_h = g_0\left(1 - 2\,\frac{h}{R}\right) \quad .$$

Für je drei Kilometer Erhebung nimmt also die Schwere um ein Tausendstel ihres Wertes ab. Dieses theoretische Ergebnis wird durch die Erfahrung vollauf bestätigt, und man kann daher auch umgekehrt aus einem beobachteten Werte g_h den Wert im Meeresspiegel nach der Formel

$$g_0 = g_h \left(1 + 2 \frac{h}{R}\right)$$

berechnen; eine Rechnung, die man als Reduktion der Schwere auf das Meeresniveau bezeichnet. Dabei ist aber die Gültigkeit der Formel auf solche Punkte zu beschränken, die eine völlig isolierte Lage haben, praktisch also auf Messungen im Ballon, gegen dessen Höhe über dem Meeresspiegel die direkt unter ihm oder in einem entsprechenden Umkreise befindlichen Anomalien der Erdoberfläche zu vernachlässigen sind. Auf Berggipfel oder gar auf Hochebenen darf die Formel offenbar nicht angewandt werden, weil hier die Reduktion auch nicht annähernd auf Grund der Kugelform der Erde vorgenommen werden darf.

Die Schwere als Spezialfall der Gravitation. Wenn wirklich die irdische Schwere ein besonderer Fall der allgemeinen Gravitation ist, so müssen sich die Beschleunigungen, die die Erde dem Monde einerseits und den irdischen Körpern auf ihrer Oberfläche andererseits nach ihrem Mittelpunkte hin erteilt, umgekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Erdmittelpunkte. Ist nun S der mittlere Abstand des Mondes vom Erdmittelpunkte und T seine Umlaufszeit, so ist seine zentripetale Beschleunigung B:

$$B = \frac{4\pi^2 S}{T^2} = 0{,}27 \text{ cm/sec} \quad .$$

Folglich muß die Beschleunigung g beim freien Falle an der Erdoberfläche, wenn R der mittlere Erdradius ist:

$$g = \frac{S^2}{R^2} B = 979 \text{ cm/sec}$$

sein, was mit dem wahren Werte 980,6 in Anbetracht der nur angenäherten Bedeutung der durchgeführten Rechnung sehr gut übereinstimmt. Diesen Identitätsnachweis hat schon NEWTON selbst geführt. Daß der Mond in Wahrheit die Erde umkreist, ist die Folge eines Impulses, den er von früher her besitzt; in entsprechender Weise könnte man auch einen irdischen Körper, z. B. eine Kanonenkugel, um die Erde rotieren lassen, indem man ihr einen ihrer Höhe über dem Meeresniveau entsprechenden horizontalen Impuls erteilt; für erreichbare Höhen müßte freilich dieser Impuls Werte haben, die sich nicht verwirklichen lassen.

Da man für eine große Zahl anderer Himmelskörper den Radius und die Masse im Verhältnis zur Erde kennt, so kann man nach dem NEWTONschen Gesetz die Größe der Schwere auf ihrer Oberfläche berechnen. Auf der Sonne ist sie, also auch die Beschleunigung beim freien Falle, 27 mal, auf dem Jupiter zwei- bis dreimal so groß wie auf der Erde; dagegen ist sie auf dem Monde sechsmal so klein, so daß der Fallraum der ersten Sekunde nur 79 und die Länge des Sekundenpendels nur 15,8 cm beträgt.

Abhängigkeit der Schwere von der geographischen Breite. Der Einfluß der Breite ist, wie schon bemerkt, ein doppelter: die Ursache des einen ist die Achsendrehung, die des anderen die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt.

Was zunächst den Einfluß der Achsendrehung betrifft, so ist einleuchtend, daß die am Äquator experimentell bestimmte Schwere g_0 keine einfache Größe, sondern die Differenz der wahren nach dem Erdmittelpunkte gerichteten

Schwere G (wie sie an den Polen rein zur Erscheinung kommt) und der entgegengesetzt gerichteten Zentrifugalkraft ist; es ist also am Äquator

$$g_0 = G - \frac{v^2}{r} = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 9{,}881 - 0{,}034 = 9{,}797 \quad ,$$

wo für G der Wert eingesetzt ist, welcher ohne Achsendrehung stattfinden würde. Unter der geographischen Breite φ ist in dem abzuziehenden Gliede T zwar ebenfalls ein Tag, aber r nicht mehr, wie am Äquator, der Erdradius, sondern der Radius des betreffenden Parallelkreises, also, wenn r nach wie vor den Erdradius bezeichnet, durch $r\cos\varphi$ zu ersetzen. Abgesehen davon, daß hiernach unter der Breite φ die Zentrifugalkraft geringer ist, wirkt sie dort auch nicht mehr, wie am Äquator, der Schwere direkt entgegen, sondern bildet mit der der Schwere entgegengesetzten Richtung den Winkel φ, so daß für die Schwächung der Schwere nur ihre in diese Richtung fallende, durch Multiplikation mit $\cos\varphi$ sich ergebende Komponente in Betracht kommt; man hat also:

$$g_\varphi = G - \frac{4\pi^2 r \cos^2\varphi}{T^2} = 9{,}831 - 0{,}034\cos^2\varphi \quad ;$$

noch geeigneter, weil das Verhältnis von g und G zeigend, ist die Schreibweise

$$g_\varphi = G\left(1 - \frac{1}{290}\cos^2\varphi\right) \quad , \qquad \text{also speziell} \quad g_0 = G\left(1 - \frac{1}{290}\right) \quad .$$

Die hierin enthaltene Funktionalbeziehung, nach welcher die Schwere mit der Breite sich ändern soll, nämlich das Quadrat des Kosinus derselben, wird durch die Beobachtungen bestätigt; dagegen ist der durch dieselben gelieferte Zahlenfaktor größer als der hier theoretisch abgeleitete; im Vergleich zur „idealen“ Schwere G ist die unter der Breite φ beobachtete nicht um $(1/290)\cos^2\varphi$, sondern um $(1/191)\cos^2\varphi$ kleiner. Der Grund hiervon liegt in der Abplattung der Erde. Übrigens ist zu beachten, daß die Zentrifugalkraft nicht nur die Größe, sondern — ausgenommen am Äquator — auch die Richtung der Schwere, also des Lotes und des freien Falles (s. Artikel „Fall und Wurf“) beeinflußt; durch eine der obigen ganz analoge Betrachtung findet man den Winkel, durch den diese Richtungsabweichung dargestellt wird:

$$\delta = \frac{1}{2}\sin^2\varphi\,\frac{4\pi^2 r}{G T^2} = \frac{1}{580}\sin 2\varphi \quad .$$

Unter 45° Breite würde also, die Erde als Kugel gedacht, das Lot um $(1/580)\cdot 360^\circ/2\pi = 0^\circ\,5'\,56''$ von der nach dem Erdmittelpunkte gezogenen Geraden abweichen und zwar auf der nördlichen Halbkugel nach Süden.

Wir kommen nun zu dem zweiten Einfluß, der Abplattung. Die Erde ist nicht, wie bisher angenommen war, eine Kugel, sondern sie weicht von ihr wenig, aber durchaus merklich ab, und zwar in der Weise, daß die Krümmung ihrer Oberfläche vom Äquator nach den Polen hin abnimmt, während sie längs dem Äquator so ziemlich konstant ist. Aus diesem durch Gradmessungen erlangten Resultat ist zu schließen, daß der Polardurchmesser $2b$ der Erde kleiner ist, als der Äquatorialdurchmesser $2a$, daß also die Erde, von Abweichungen höherer Ordnung abgesehen, die Gestalt eines Sphäroids, eines an den Polen ein wenig abgeplatteten Rotationsellipsoids hat. Für die Abplattung hatte BESSEL den Wert 1 : 299,15 gefunden. Nimmt man die von LISTING[1] aus allen Gradmessungen sorgfältig berechneten Mittelwerte und berücksichtigt noch die Messungen von CLARKE u. A., so findet man:

$$a = 6377{,}4\,\text{km} \quad , \qquad b = 6355{,}6\,\text{km}$$

[1] LISTING, Neue Konstanten des Erdkörpers. Göttingen 1878.

und die Exzentrizität (bei den neueren Gradmessungen meist aus den unter den beiden geozentrischen Breiten φ und ψ gemessenen Gradlängen L und l mittels der BOHNENBERGERschen Formel[1]

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{L^{2/3} - l^{2/3}}{L^{2/3}\sin^2\varphi - l^{2/3}\sin^2\psi}}$$

ermittelt, aber auch indirekt aus a und b abzuleiten):

$$\varepsilon = \frac{1}{293} = 0{,}00341 \quad ,$$

also nicht unwesentlich größer. Neuerdings aber haben die Arbeiten von HELMERT und anderen Geodätikern wieder zu kleineren Werten geführt, und man kann zurzeit setzen:

$$\varepsilon = \frac{1}{298{,}33} = 0{,}003352 \quad .$$

Infolge dieser Abplattung muß nun die Schwere vom Äquator nach dem Pole hin zunehmen. Zur Ableitung des bezüglichen Gesetzes darf man nun aber nicht etwa die den verschiedenen Breiten entsprechenden Erdradien und von diesen die reziproken Quadrate nehmen, weil bei einem Sphäroid, so wenig es auch von der Kugel abweichen möge, die Masse nicht mehr als im Mittelpunkte vereinigt gedacht werden darf. Es muß vielmehr die Rechnung für das Sphäroid wirklich durchgeführt werden; hier genüge zunächst die Angabe des Resultats, daß wiederum die Größe $\cos^2\varphi$ den Verlauf der Änderungen bestimmt, und daß aus dem Zahlenwerte von ε für den relativen Unterschied der Schwere am Äquator und am Pole der Zahlenwert $1/552$ folgt.

Kombiniert man jetzt beide Einflüsse, so erhält man:

$$g_\varphi = G\left(1 - \frac{1}{290}\cos^2\varphi\right)\left(1 - \frac{1}{552}\cos^2\varphi\right) = G\left(1 - \frac{1}{191}\cos^2\varphi\right) \quad ,$$

oder auch mit derselben Genauigkeit:

$$g_\varphi = g_0\left(1 + \frac{1}{191}\sin^2\varphi\right) \quad ,$$

in Übereinstimmung mit der durch die Beobachtungen ermittelten Formel. Es ist ersichtlich, daß man nunmehr auch umgekehrt aus Pendelbeobachtungen die Abplattung der Erde berechnen kann; von CLAIRAUT[2] ist hierfür die einfache Formel (c Zentrifugalkraft am Äquator):

$$\varepsilon = \frac{5}{2}\,\frac{c}{g_0} - \frac{g_{90} - g_0}{g_0}$$

aufgestellt worden.

Genauere Theorie.[3] Um das Problem ohne Voraussetzungen ganz allgemein zu behandeln, muß man die Entfernung r zwischen dem anziehenden und dem Aufpunkte gemäß der Formel:

$$r^2 = u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\gamma$$

durch die Abstände beider Punkte vom Schwerpunkte der Erde und den Winkel γ zwischen diesen beiden Radien ausdrücken, und nunmehr:

---

[1] BOHNENBERGER, Astronomie. Tübingen 1811, p. 187. — [2] CLAIRAUT, Théorie de la figure de la terre. Paris 1743. — [3] Vgl. u. A. F. R. HELMERT, Die höheren Theorien der Geodäsie. 2 Bde. Leipzig 1884. — Ferner seien aus der höchst umfangreichen Literatur über die Figur der Erde zwei epochemachende Werke herausgegriffen: PH. FISCHER, Unters. über die Gestalt der Erde, Darmstadt 1868, und H. BRUNS, Die Figur der Erde. Leipzig 1876.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{u'}\left[1 - 2\frac{u}{u'}\cos\gamma + \left(\frac{u}{u'}\right)^2\right]^{-1/2}$$

nach Potenzen von u/u' entwickeln:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{u'}\left[1 + \frac{u}{u'}P_1 + \left(\frac{u}{u'}\right)^2 P_2 + \left(\frac{u}{u'}\right)^3 P_3 + \left(\frac{u}{u'}\right)^4 P_4 + \ldots\right] \quad ,$$

wobei die Koeffizienten P bekanntlich Kugelfunktionen werden, und zwar, wenn $u' > u$ ist:

$$P_1 = \cos\gamma \quad , \qquad P_2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cos 2\gamma \quad , \qquad P_3 = \tfrac{3}{8}\cos\gamma + \tfrac{5}{8}\cos 3\gamma \quad ,$$

$$P_4 = \tfrac{9}{64} + \tfrac{20}{64}\cos 2\gamma + \tfrac{35}{64}\cos 4\gamma \quad .$$

In der entsprechenden Reihe für das Potential W wird dann das erste Klammerglied gleich M, der ganzen Masse der Erde; das zweite Glied wird wegen der Beziehung auf den Schwerpunkt als Anfangspunkt null; das dritte hängt von den Hauptträgheitsmomenten A, B (äquatorial) und C (polar) ab; schließlich kommt noch das Zentrifugalglied hinzu. Drückt man nun den Winkel γ gemäß der Formel:

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda - \lambda') + \sin\varphi\sin\varphi'$$

durch die Polarwinkel φ und λ (Breite und Länge) aus, so erhält man:

$$W = \frac{k}{u'}\left[\begin{array}{l} M + \dfrac{1}{2u'^2}\left(C - \dfrac{A+B}{2}\right)(1 - 3\sin^2\varphi') \\ \quad + \dfrac{3}{4u'^2}(B - A)\cos^2\varphi'\cos 2\lambda' \end{array}\right] + \tfrac{1}{2}\omega^2 u'^2 \cos^2\varphi' \quad ,$$

wo die Glieder vierter und höherer Ordnung vorläufig weggelassen sind. Bedenkt man nun, daß auch die neuesten Messungen noch keine Abweichung des Äquators vom Kreise, die irgend ins Gewicht fiele, ergeben haben, und daß auch für eine ausgesprochene Anomalie der großen Massenverteilung um die Erdachse kein Anhalt vorliegt (von lokalen Anomalien zunächst ganz abgesehen), so wird man A und B als gleich annehmen dürfen, wodurch sich die Formel für W, wenn noch zur Abkürzung

$$MK = C - \tfrac{1}{2}(A + B) = C - A$$

gesetzt wird, in der einfachen Form:

$$W = \frac{Mk}{u}\left[1 + \frac{K}{2u^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 u^3}{2Mk}\cos^2\varphi\right]$$

(die Striche sind jetzt weggelassen) ergibt, während man für g selbst, je nachdem man den Wert für ein bestimmtes u oder für eine Niveaufläche von gegebenem W_0 haben will, eine der Formeln erhält:

$$g = \frac{Mk}{u^2}\left[1 + \frac{3K}{2u^2}(1 - 3\sin^2\varphi) - \frac{\omega^2 u^3}{Mk}\cos^2\varphi\right] \quad ,$$

$$g = \frac{W_0^2}{Mk}\left[1 + \frac{K}{2u_0^2} - \frac{2\omega^2 u_0^3}{Mk}\right]\cdot\left[1 + \left(\frac{2\omega^2 u_0^3}{Mk} - \frac{3K}{2u_0^2}\right)\sin^2\varphi\right] \quad .$$

Ist nun durch Beobachtung ermittelt:

$$u = u_0(1 - \varepsilon\sin^2\varphi) \quad , \qquad g = g_0(1 + \gamma\sin^2\varphi) \quad ,$$

wo sich jetzt der Index null auf einen Äquatorpunkt bezieht, und nennt man das Verhältnis von Schwungkraft und Schwerkraft am Äquator ζ, in Formel

$$\zeta = \frac{\omega^2 u_0}{g_0} \quad ,$$

so hat man für K die angenäherte Beziehung

$$\frac{3K}{2u_0^2} = 2\zeta - \gamma \quad ,$$

und zwischen ε, γ und ζ die ebenfalls angenäherte Beziehung

$$\varepsilon + \gamma = \frac{5}{2}\zeta \quad ,$$

die, wie man sieht, das CLAIRAUTsche Theorem darstellt. Geht man nun aber einen Schritt weiter, berücksichtigt das Glied vierter Ordnung und setzt demgemäß:

$$g = g_0(1 + \gamma \sin^2\varphi + \gamma' \sin^4\varphi) \quad ,$$

so nimmt die CLAIRAUTsche Beziehung die Form

$$\varepsilon + \gamma = \frac{5}{2}\zeta - \varepsilon\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\zeta\right) + \frac{1}{14}(7\varepsilon^2 - 4\varepsilon\gamma + \gamma')$$

an. Es zeigt sich freilich, daß das Zusatzglied tatsächlich, wenigstens für das uns am meisten interessierende Sphäroid in der Meeresfläche sehr klein ist, nämlich nur etwa ein Milliontel, während doch die Hauptglieder nahe an ein Hundertstel reichen; jedenfalls ist damit jede gewünschte Genauigkeit erzielt.

Es ist ferner jetzt die Änderung mit der Höhe zu untersuchen. Im Meeresspiegel selbst weicht die Niveaufläche, die hier Geoid genannt zu werden pflegt (die verschiedenen Autoren stimmen aber im Gebrauch dieses Wortes nicht ganz überein), nahezu mit einem Rotationsellipsoid gleicher Abplattung überein; nach der Höhe zu wird die Abweichung, anfangs langsam, später schneller, immer größer, und die äußerste Niveaufläche (Grenze der Atmosphäre, vgl. Artikel „Aeromechanik“) ist ganz abweichend geformt. Die Formel für die Schwere in verschiedenen Höhen h über dem Meeresspiegel wird jetzt natürlich sehr verwickelt, weil die Abnahme der Schwere mit der Höhe nunmehr auch von der geographischen Breite beeinflußt wird. Beschränkt man sich auf die Glieder zweiter Ordnung, so findet man, wenn man jetzt für den Äquatorialradius der Erde das Zeichen a einsetzt:

$$g = g_0\left[1 - \frac{2h}{a}(1 + \varepsilon + \zeta - 2\varepsilon \sin^2\varphi) + \frac{h^2}{a^2}\right] \quad .$$

Es möge schließlich die Formel hingeschrieben werden, die alle drei Einflüsse zusammenfaßt, nämlich den korrigierten Schwerewert am Äquator, den Einfluß der Breite und den Einfluß der Höhe; dabei möge, um auch die so modifizierten Formeln zur Verfügung zu stellen, an Stelle des äquatorialen Erdradius a der mittlere R benutzt werden; es ist dann, wenn Glieder vierter Ordnung überall weggelassen werden:

$$g_{h,\varphi} = \frac{Mk}{R^2}\left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{3}{2}\zeta\right) \cdot (1 + \gamma \sin^2\varphi)$$
$$\cdot \left[1 - \frac{2h}{R}\left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon + \zeta - 2\varepsilon\sin^2\varphi\right) + \frac{h^2}{R^2}\right] \quad .$$

Figur- und Dichteanomalien der Erde; Reduktion und Kondensation. Alle bisherigen Betrachtungen bezogen sich immer noch auf eine ideale Erde, in erster Annäherung Kugel, in zweiter Sphäroid, in dritter Geoid. Es sind nun noch die wirklichen, unregelmäßig verteilten Anomalien in der Gestalt und Massenverteilung der Erde zu berücksichtigen. Gewöhnlich geschieht bezw. früher geschah das durch Reduktion auf den Meeresspiegel, unter Beachtung des den

Aufpunkt umgebenden Terrains. Am einfachsten gestaltet sich begreiflicherweise die Rechnung, wenn der Punkt auf einer Ebene, in der Höhe h über dem Spiegel, liegt; es ist das zugleich der dem früher betrachteten Falle des Luftballons diametral entgegengesetzte Fall; eine einfache Rechnung ergibt für diesen Fall, wenn d die oberflächliche Dichte an dem betreffenden Orte und D die mittlere Dichte der Erde ist:

$$g_h = g_0 \left[1 - \frac{2h}{R}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{d}{D}\right)\right] \quad ,$$

also, wenn, wie es annähernd vielfach der Fall sein wird, $d = \frac{1}{2} D$ ist:

$$g_h = g_0 \left(1 - \frac{5}{4}\frac{h}{R}\right) \quad ,$$

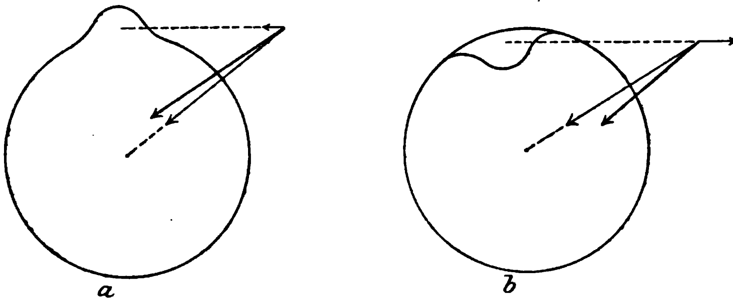
und umgekehrt

$$g_0 = g_h \left(1 + \frac{5}{4}\frac{h}{R}\right) \quad .$$

Man kann nun der Reihe nach verschiedene Typen für die Gestaltung des umgebenden Terrains einführen, wie Zylinder, Kegel u. s. w. und sich dadurch Anhaltspunkte für die Werte des Koeffizienten σ in der Formel

$$g = g_0 \left(1 - \sigma \frac{h}{R}\right)$$

verschaffen; sie werden natürlich zwischen den obigen Extremen liegen.[1] — Indessen ist hiermit das Problem nicht erledigt; es sind wohl die Erhebungen, nicht aber die Senkungen berücksichtigt, es müssen die Verhältnisse von Kontinenten, Gebirgen, Inseln u. s. w. in Betracht gezogen werden. Hierzu dient das von HELMERT vorgeschlagene und eingehend studierte Verfahren der Kondensation. Es besteht darin, daß man sich zu der mathematischen Erdoberfläche eine Parallelfläche in überall gleichem Abstande, z. B. mittlerer Erdradius mal Abplattung,



Figur 146.

konstruiert denkt, und daß man dann alle außerhalb liegenden Massen in sie hinein kondensiert, eventuell die fehlenden aufgefüllt denkt. Den Effekt dieser Kondensation kann man formelmäßig ausdrücken, es muß aber von der Wiedergabe dieser Formeln hier abgesehen werden. Es genüge zu konstatieren, daß das Verfahren gegenüber dem früheren Reduktionsverfahren Unterschiede liefert, die für feinere Zwecke nicht unmerklich sind, aber doch mehr geodätisches Interesse als physikalisches haben.

Übrigens wird die lokale Konfiguration nicht nur den Betrag der Schwere, sondern auch ihre Richtung beeinflussen, nämlich immer dann, wenn um den

[1] Wegen einer experimentellen Prüfung durch RICHARZ und KRIGAR-MENZEL, sowie einer zweiten durch SCHEEL und DIESSELHORST siehe weiter unten.

betrachteten Punkt herum eine Asymmetrie der Gestalt oder der Massenverteilung stattfindet, z. B. in der Nähe von Gebirgen oder Bergen, an Meeresküsten u. s. w. Man nennt diese Erscheinung Lotablenkung oder Lotstörung; dabei ist zu unterscheiden zwischen Lotanziehungen durch Massenanhäufungen und Lotabstoßungen durch Massendefekte, wie dies in den Figuren 146 *a* und *b* angedeutet ist; die schwachen Pfeile sind die Richtungen der Komponenten, die starken geben die Richtung der resultierenden Schwerkraft an. Die Berechnung im einzelnen ist natürlich in wirklichen Fällen sehr verwickelt, kann aber für ideale Fälle genügend streng durchgeführt werden (s. weiter unten).

Änderung der Schwere nach der Tiefe. Wäre die Erde eine homogene Kugel, so müßte die Schwere von der Oberfläche nach der Tiefe hin ständig abnehmen, da nach der Potentialtheorie (s. d.) die außerhalb des betreffenden Punktes gelegene Kugelschale auf den Punkt gar nicht, die übrig bleibende Vollkugel aber natürlich schwächer anziehend wirkt als die ganze Erde. Es ist dies letztere unmittelbar einleuchtend, weil bei der kleineren Kugel der Nenner des Ausdrucks m/r^2 nur in quadratischem, der Zähler aber in kubischem Verhältnisse kleiner ist als bei der größeren. Diese Argumentation wird aber hinfällig, wenn die Dichte von außen nach innen zunimmt. An ihre Stelle hat alsdann eine kompliziertere Rechnung zu treten, welche u. A. von HELMERT[1], unter anderen Voraussetzungen aber kürzlich von WEIHRAUCH[2] durchgeführt worden ist. Letzterer gelangt zu dem Satze: „Geht man innerhalb einer aus konzentrischen, homogenen Kugelschalen gebildeten Kugel aus dem Zentrumsabstand $a + da$ in den Abstand a, so nimmt die Schwere zu oder ab $(G_a \gtreqless G_{a+da})$, je nachdem die Dichte der durchbrochenen Schicht kleiner oder größer ist, als zwei drittel der mittleren Dichte der Kugel, zu welcher man gelangt $(\delta_a \lesseqgtr \frac{2}{3}\delta_a')$." Hiernach muß die Schwere beim Eindringen ins Erdinnere anfangs zunehmen, wie es die Beobachtungen tatsächlich ergeben (so daß man schon hieraus einen Rückschluß auf die Zunahme der Erddichte nach innen zu machen könnte); später aber muß, von einer bestimmten Tiefe an, die Schwere wieder abnehmen und im Erdmittelpunkte null werden. In welcher Tiefe der Übergang stattfindet, hängt von dem Gesetz ab, nach welchem die Dichte mit der Tiefe zunimmt; tut sie dies gleichförmig, so liegt diese Stelle in 0,186 Erdradius Tiefe, und der Maximalwert von G ist $G_{max} = 1{,}055$ g; wächst dagegen die Dichte gleichförmig beschleunigt, so ist die kritische Stelle in 0,138 Erdradius Tiefe und $G_{max} = 1{,}088$ g.

Wegen des weiteren Zusammenhangs dieser Frage vergleiche man weiter unten.

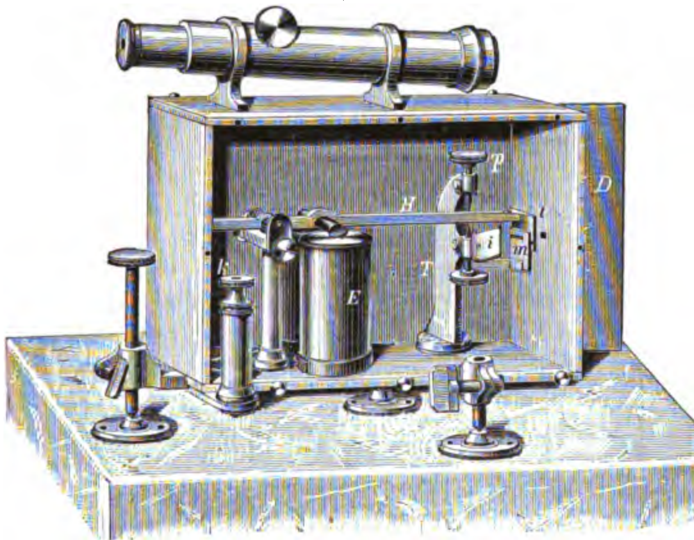
Apparate zur Messung der Schwere. Es kommen hier zwei Aufgaben und bei jeder von ihnen wieder mehrere spezielle Aufgaben in Betracht. Es handelt sich nämlich erstens um Feststellung der Richtung der Schwere und zweitens um Messung ihres Betrags; es handelt sich ferner entweder um absolute Messungen oder um Abweichungen der Richtung und Größe an einem bestimmten Orte von denen an einem Orte oder von gewissen Normalwerten, also um örtliche Relativmessungen; endlich kommt die Messung etwaiger zeitlicher Änderungen in Frage. Das Problem der Schweremessung stellt sich hiermit in völlige Parallele mit dem anderer physikalischer Messungen, z. B. des Erdmagnetismus (vgl. Bd. 5).

Was einerseits die Richtungsbestimmungen betrifft, so werden sie natürlich am einfachsten mit dem Lote ausgeführt, worüber auf den Artikel „Messung von Raum- und Zeitgrößen" zu verweisen ist. Empfindlicher und genauer sind diejenigen Methoden, welche die auf der Anwendung des Horizontalpendels (s. Art. „Pendel") oder auf Kombination der Beobachtung von Flüssigkeitsspiegeln mit astronomischen Beobachtungen beruhen, und die in neuester Zeit in verschiedenen Formen ausgearbeitet worden sind. Dabei ist es von Wichtigkeit,

[1] F. R. HELMERT, Die höheren Theorien der Geodäsie, 2 Bde. Leipzig 1884. — [2] WEIHRAUCH, Rep. d. Phys. **22**. 396. 1886.

die beiden Hauptrichtungen, die nordsüdliche und die ostwestliche, zu trennen; erstere, die Lotabweichung im Meridian ist, außer physikalisch, für die Breitenbestimmung von Wichtigkeit, letztere, die Lotabweichung längs der Parallele, kommt nur physikalisch in Betracht, da die Länge chronometrisch bestimmt zu werden pflegt (vgl. weiter unten).

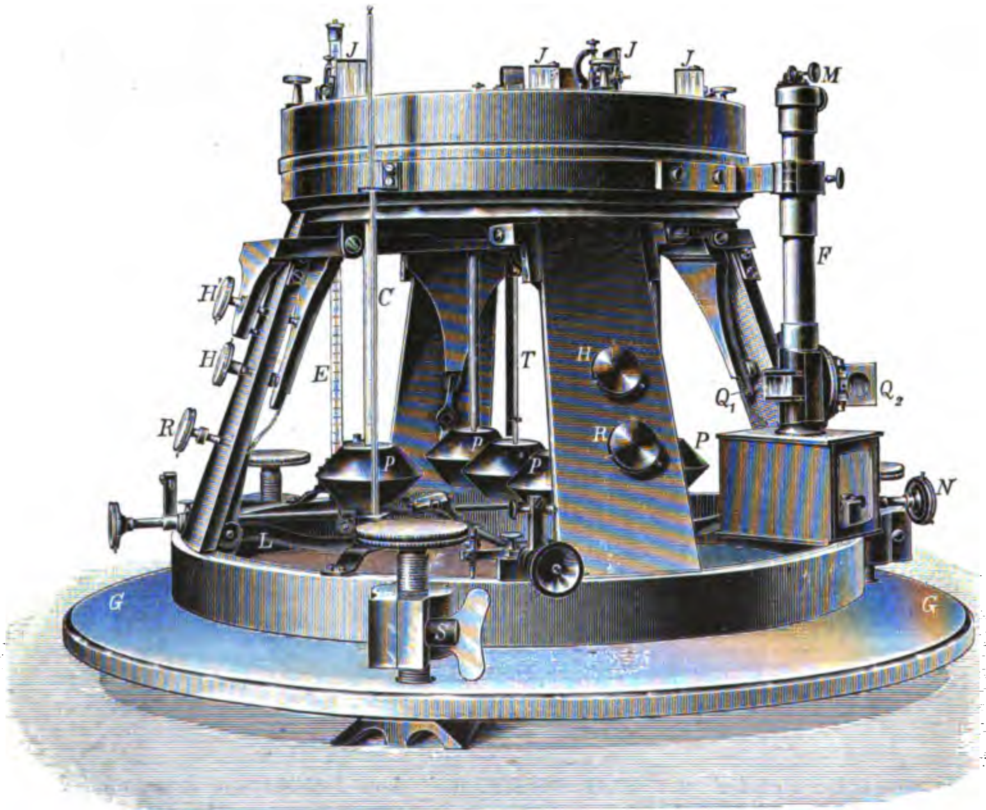
Was andererseits die Größe der Schwerkraft betrifft, so ist der weitaus wichtigste Apparat zu ihrer Messung das Pendel. Es muß seinetwegen auf den Artikel „Pendel“ verwiesen werden; zur Ergänzung des dort angeführten für die besonderen Zwecke, die hier in Betracht kommen, diene das Folgende. Die Schwere ist, wie wir wissen, das π^2fache der Länge des korrespondierenden einfachen Sekundenpendels; für ein einfaches Pendel von anderer Periode ist mit dem Quadrat dieser Periode zu dividieren; außerdem sind die nötigen Korrektionen wegen Amplitude, Luftverdrängung, Luftmitnahme, Reibung u. s. w. anzubringen. Um die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels zu erhalten, hat man in früheren Zeiten vorwiegend das Reversionspendel (p. 399) benutzt,



Figur 147.

(das Öffnungsbild, und es spielt in der ihm von einigen Konstruktoren gegebenen modernen Form noch jetzt eine gewisse Rolle. Für die meisten Zwecke aber ist es durch das Sternecksche Pendel verdrängt worden, bei dem l direkt aus den Dimensionen berechnet wird, und das ganz besonders mit Rücksicht auf seine Benutzung auf Reisen und unter Beachtung aller zu vermeidenden Fehlerquellen, namentlich der Temperatureinflüsse und des Mitschwingens der Nebenteile (vgl. p. 407) gebaut worden ist. Das eigentliche Sternecksche Pendel (vgl. die Figur 148) ist ungefähr 25 cm lang, hat also etwa eine halbe Sekunde Schwingungsdauer, die Stange aus vergoldetem Messing ist relativ leicht, der Körper dagegen, ein abgestumpfter Doppelkegel aus blasenfreiem Rotguß, in der Mitte 8, oben und unten 4 cm breit, sowie 4 cm hoch, etwa 1 kg schwer. Es ruht auf Achatschneiden und ist zur Beobachtung mit einem Planspiegel versehen. Das Fernrohr ruht (Figur 147) auf dem Deckel eines Kastens, das vom Lichtbündel gelieferte Bild schwankt auf der Vertikalskale auf und ab; indessen kann das Licht nur durch zwei Spalte hindurch in dem Augenblick, wo sie sich decken; da nun der zweite Spalt durch Uhr und Elektromagnet bedient wird, kann man es einrichten, daß in jeder Sekunde nur ein Bild (das Öffnungsbild,

das andere ist unscharf) momentan sichtbar wird; die Zeit zwischen zwei Koinzidenzen dieses Bildes mit dem Horizontalfaden des Fernrohrs ist die Zeit, in der das Pendel eine Schwingung mehr oder weniger macht als halbe Sekunden vergangen sind; die Amplitude kann sehr klein genommen werden. Dazu kommen noch elektrische Relais zur Übertragung der Stromschlüsse auf andere Stationen und Erregung der dortigen entsprechenden Apparate. Von HAID, HASEMANN u. A. ist der Apparat weiter vervollkommnet worden, insbesondere sind z. B. bei HAID vier gleiche Pendel in den Ecken eines Quadrats montiert, die sich, je zwei parallel und senkrecht zueinander schwingend, kontrollieren und



Figur 148.

die Fehler eliminieren; außerdem hängt in der Mitte ein äußerlich ganz ähnliches, aber als Thermometer dienendes Pendel, sowie an der Seite ein Fadenpendel mit beleuchtbarem Faden. Das Ganze ist aus der Figur 148 zu ersehen, die den Apparat von HAID darstellt. Um sich weiter von dem Gange der Uhr unabhängig zu machen, beobachtet man an jedem Orte drei Pendel je acht Stunden lang, was man erreichen kann, wenn man das Gefäß bis auf 6 cm Hg-Druck auspumpt; den Zweipendelapparat von HASEMANN stellt Figur 149 schematisch von der Seite und von oben dar. Von anderen Vervollkommnungen der Apparate seien noch die von K. R. KOCH angegebenen erwähnt.

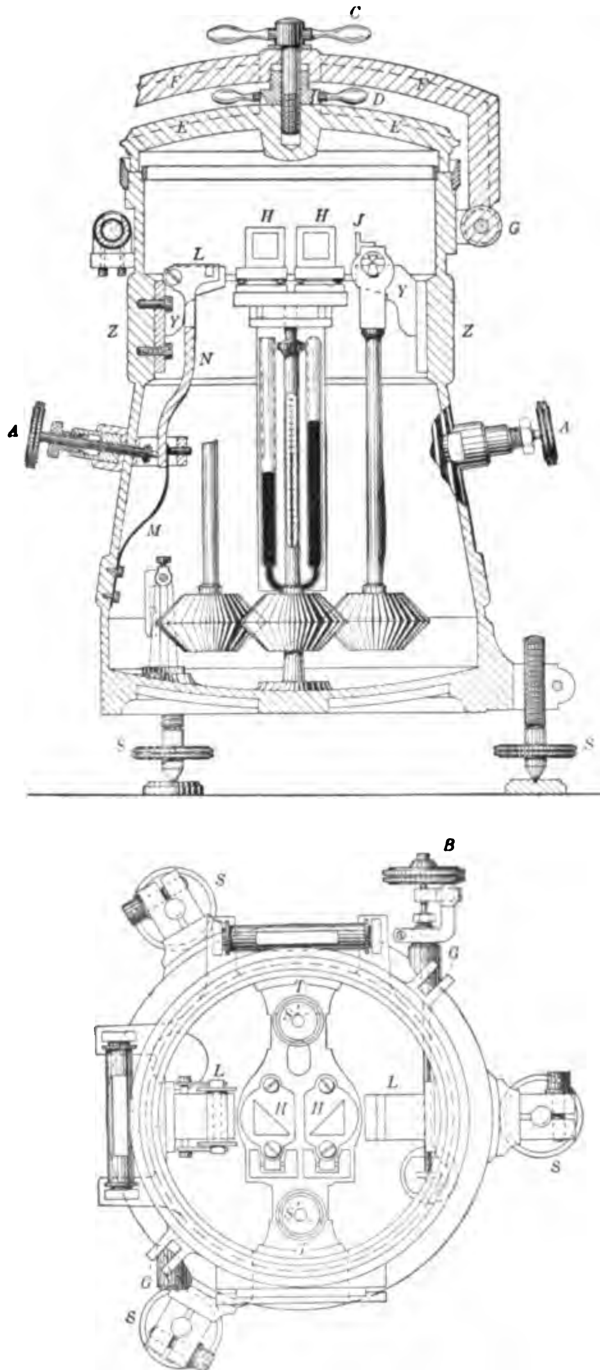
Von sonstigen Methoden kommt die Benutzung von Fallapparaten aus leicht ersichtlichen Gründen nicht ernstlich in Betracht, auch die Vorschläge, die Schwingungen einer fallenden und schwingenden Stimmgabel zu benutzen (v. BABO, WORTHINGTON, KOTTENBACH) dürften nur begrenzte Bedeutung haben (vgl. auch

Artikel „Fall und Wurf"). Dagegen ist noch eine sehr interessante Methode zu erwähnen, die sich neuerdings als sehr brauchbar erwiesen hat — namentlich in Fällen, wo, wie auf hoher See, Pendelbeobachtungen nicht durchführbar sind. Sie beruht auf dem Umstand, daß die Luftdruckangabe eines Quecksilberbarometers von der Schwerkraft abhängt, die eines Federbarometers oder eines Siedethermometers dagegen nicht; das Federbarometer kommt nun wegen seiner nicht ausreichenden Zuverlässigkeit nicht in Betracht, wohl aber das Siedethermometer oder Thermobarometer (vgl. p. 104); allerdings macht sich auch hier ein Übelstand, nämlich die thermische Nachwirkung geltend; aber mit Hilfe des Jenaer Glases 59 III kann man diesen Fehler auf ein Minimum reduzieren. Ist b die Ablesung am Barometer mit allen Korrektionen außer der wegen der Schwere, B der wahre Luftdruck, bezogen auf den Ort, wo die wahre Schwere G ist, so ist $B : b = g : G$, also

$$\delta g = -G \cdot \frac{\delta b}{b^2} \cdot B = -G \cdot \frac{\delta b}{b} ,$$

andere Autoren, wie MOHN, nehmen auch noch B als veränderlich. Da man nun in δb bis 0,0015 cm kommen kann, erhält man $\delta g =$ 0,02 cm, was eine zwar mit Pendelmessungen nicht ebenbürtige, aber sonst sehr annehmbare Grenze ist.

Endlich ist auf eine von sehr allgemeinen Gesichtspunkten ausgehende Arbeit von EÖTVÖS hinzuweisen, die die Ergebnisse langjähriger Studien hinstellt und, wie es scheint, zum Zweck der Verfolgung der Lokalvariationen der Schwerkraft nach Größe und Richtung das feinste bisher Erreichte leistet. Legt man für einen Ort die x-Achse



Figur 149.

ostwestlich, die y-Achse nordsüdlich, die z-Achse vertikal nach unten, so werden die Komponenten der Schwere in einem Nachbarorte von anderer Länge, Breite, Höhe durch die neun Differentialquotienten oder, wegen der Existenz eines Potentials W, durch die sechs zweiten Differentialquotienten von W bestimmt sein. Nun ist, wenn r und r' die Hauptkrümmungsradien der Niveaufläche sind,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{g_0}{r} \quad , \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{r'} \quad ,$$

$\partial^2 W/\partial z^2$ aber ist alsdann durch die LAPLACEsche Gleichung, modifiziert wegen der Drehgeschwindigkeit ω:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\,\omega^2$$

bestimmt. Von den drei anderen Differentialquotienten ist einer null, die beiden anderen bestimmen sich durch die Winkel (eigentlich ihre Tangenten), die die Schwere in dem um z unter dem Ausgangspunkt gelegenen Punkte in der xz-Ebene, bezw. yz-Ebene macht; man hat also:

$$\psi = \frac{1}{g}\,\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z} \quad , \qquad \chi = \frac{1}{g}\,\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z} \quad .$$

Mißt man also, außer g_0, noch die beiden Krümmungsradien und die beiden Abweichungen der Lotlinie, so hat man alle Daten, die man braucht. Nun gilt aber die Relation

$$\frac{\partial g}{\partial z} = g\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) + 2\,\omega^2 \quad ;$$

man kann also die Summe der Krümmungsradien aus der Änderung der Schwere mit der Höhe ableiten, diese letztere aber mit der gewöhnlichen Wage (s. w. u.) ermitteln; es bleibt also nur noch die Differenz zu bestimmen. EÖTVÖS hat nun zwei sehr empfindliche Drehwagen gebaut, eine symmetrische und eine unsymmetrische Form; beide zusammen liefern ψ, χ und $1/r_1 - 1/r_2$; man kann die eine als Horizontal-, die andere als Krümmungsvariometer bezeichnen.[1]

Resultate. Auf die angegebene Weise sind nun Schweremessungen an zahlreichen Orten der Erde ausgeführt worden, und man hat namentlich in neuerer Zeit Wert darauf gelegt, auch solche Gebiete in die systematischen Messungen mit hineinzuziehen, die bis dahin noch fühlbare Lücken in dem Netze ließen. Aus diesen Messungen hat man alsdann zunächst die wahrscheinlichsten Werte bezw. Formeln für die Pendellänge und die Schwerkraft abgeleitet; aus diesen Formeln kann man dann die Idealwerte der Größen für beliebige Orte berechnen. Es sei hier zunächst eine ältere Zusammenstellung wiedergegeben, die von ALBRECHT[2] herrührt und sich auf die Länge des Sekundenpendels im Meeresspiegel als Funktion der Breite bezieht:

---

[1] Aus der Literatur der instrumentellen Technik der Schweremessung kann hier nur das oben erwähnte zitiert werden (weiteres in den Gradmessungspublikationen, der Ztschr. f. Instrumentenk. u. s. w.): R. v. STERNECK, Ztschr. f. Instrumentenk. **8.** 157. 1888. — P. A. M. WORTHINGTON, Nat. **46.** 490. 1892. — M. HAID, ibid. **16.** 193. 1896. — L. HASEMANN, ibid. **22.** 97. 1902. — K. R. KOCH, Ztschr. f. Instrumentenk. **18.** 293. 1898; J. Ver. f. Nk. Württ. 1901. p. 356. — R. KOTTENBACH, Ztschr. f. phys. u. chem. Unt. **13.** 198. 1900. — H. MOHN, Vid. Selsk. Skrifter. Christ. 1899. — O. HECKER, Ztschr. f. Instrumentenk. **21.** 133. 1901; Veröff. Geodät. Inst. Berl. 1903. — R. v. EÖTVÖS, WIED. Ann. **59.** 354. 1896. — M. BRILLOUIN (Viertelsekundenpendel), C. R. **125.** 292. 1897. — [2] ALBRECHT, in seiner Neubearbeitung v. BREMIKERS log.-trig. Tafeln. Berlin 1883. p. 597.

Beobachter	Zahl der Messungen	Länge des Sekundenpendels l in cm
SABINE	18	99,09893 + 0,51341 $\sin^2\varphi$
„	25	99,12771 + 0,51422 $\sin^2\varphi$
FOSTER	15	99,10057 + 0,51495 $\sin^2\varphi$
AIRY	49	99,10170 + 0,50868 $\sin^2\varphi$
BOWDITCH . . .	52	99,10002 + 0,51330 $\sin^2\varphi$
BAILY	79	99,10217 + 0,50987 $\sin^2\varphi$
BORENIUS	47	99,10250 + 0,51160 $\sin^2\varphi$
POUILLET	44	99,10256 + 0,50719 $\sin^2\varphi$
PH. FISCHER . .	73	99,10108 + 0,51049 $\sin^2\varphi$
E. SCHMIDT . .	47	99,09780 + 0,51536 $\sin^2\varphi$

Mittelwert: $l = 99{,}102 + 0{,}510 \sin^2\varphi$,

„ $g_\varphi = 978{,}10 + 5{,}03 \sin^2\varphi$.

Ganz neuerdings hat nun HELMERT durch Bearbeitung von etwa 1400 Einzelwerten nach einem nach allen Richtungen wohldurchdachten Verfahren eine Formel gewonnen, die sich auf den Meeresspiegel bezieht und, je nachdem man die Schwere im Äquator ($g_{0,0}$) oder die unter 45° ($g_{0,45}$) als Vergleichsgröße benutzt, die beiden Formen

$$g = 978{,}046\,(1 + 0{,}005302 \sin^2\varphi - 0{,}000007 \sin^2 2\varphi)$$

$$g = 980{,}632\,(1 - 0{,}002644 \cos 2\varphi + 0{,}000007 \cos^2 2\varphi)$$

annimmt; nach den besten absoluten Bestimmungen würden diese Werte noch einer Korrektion um etwa $-0{,}015$ bedürfen. In der Regel wird übrigens auch die um $+0{,}035$ bezw. $+0{,}020$ verbesserte Formel

$$g = 978{,}00\,(1 + 0{,}005310 \sin^2\varphi)$$

$$g = 980{,}60\,(1 - 0{,}002648 \cos 2\varphi)$$

ausreichen. Nach der vollständigen Formel sind nun die folgenden Zahlen berechnet, die die relative Abweichung der idealen Schwere an dem betreffenden Orte von der Schwere unter 45° im Meeresspiegel in Millionteln angeben, zur Gewinnung der absoluten Schwere also mit 10^{-6} zu multiplizieren, zu 1 hinzuzufügen (bezw. von 1 abzuziehen) und schließlich mit 980,617 zu multiplizieren sind; die Höhe wird z. B. in der Tabelle von BÖRNSTEIN mit dem schematischen Koeffizienten $-0{,}00031\,h$ berücksichtigt (h in Metern), was nach den obigen Auseinandersetzungen nur für ganz exponierte Punkte zulässig wäre; es ist daher im folgenden bei Orten, deren Seehöhe beträchtlich ist — bei den übrigen ist es für die hier gewählte Stellenzahl irrelevant — bei Gipfelcharakter $-0{,}00025\,h$ und bei Plateaucharakter $-0{,}00020\,h$ benutzt. Bei der Auswahl sind alle Momente möglichst berücksichtigt.

Wie man sieht, besteht zwischen den Extremen, nämlich für den Mount Everest einerseits und den Nordpol andererseits, eine Differenz von etwa 6½ tausendstel des Wertes.

Die wirklich beobachteten Werte der Schwere stimmen an den meisten Orten sehr gut mit den so berechneten Werten überein; es gibt aber zahlreiche Orte, wo die Differenz, also die Anomalie der Schwerkraft, merklich, und es gibt eine Anzahl Orte, wo sie sogar beträchtlich wird. Insbesondere besteht hier ein Unterschied zwischen drei Klassen von Orten: kontinentalen, Küsten- und ozeanischen Orten. Dabei hat sich die merkwürdige Tatsache herausgestellt, daß die Anomalie auf ozeanischen Inseln fast durchweg positiv, im Innern der Kontinente meist negativ ist; man ist geneigt, hieraus auf eine Verdichtung der Erdkruste unter dem Wasser sowie auf ein Ansteigen des Meeresniveaus

nach den Küsten hin zu schließen. Bei Küstenorten kommt nun noch die Richtungsanomalie hinzu, ebenso wie an Orten, die am Rande von Gebirgen

Ort	Breite			Höhe	$10^6 \Delta g : g_{0,45}$
Aachen (Met. Obs.)	50	47′	2″	203	488
Amsterdam	52	22′	30″	3	673
Athen (Sternw.)	37	58′	21″	107	− 671
Batavia (Met.)	− 6	11′		8	− 2578
Berlin (N. St.)	52	30′	17″	37	677
Bern (St.)	46	57	9	572	58
Bombay (St.)	18	53	45	10	− 2088
Bonn (St.)	50	43	45	62	510
Breslau	51	6	56	121	436
Brüssel (Uccle)	50	47	53	100	510
Buenos Ayres (Met.)	− 34	16		22	− 975
Christiania (St.)	59	54	44	25	1310
Edinburgh (St.)	55	55	28	134	950
Frankfurt (Dom)	50	6	43	108	446
Freiburg	47	59	40	271	215
Genf (St.)	46	11	59	374	30
Göttingen (St.)	51	31	48	159	565
Graz (Phys. Inst.)	57	4		369	102
Hamburg (St.)	53	33	7	21	773
Heidelberg	49	23	55	114	380
Helsingfors	60	9	43	12	1333
Hongkong	22	18	13	33	− 1890
Jena	50	55	35	157	511
Jerusalem	31	48		748	− 1340
Innsbruck	47	16		573	88
Kairo	30	4	38	33	− 1320
Kiel	54	20	59	6	846
Köln (Dom)	50	56	33	54	533
Königsberg	54	42	50	21	875
Konstantinopel (Met.)	41	2		75	− 382
Kopenhagen (St.)	55	41	13	14	960
Leipzig (N. St.)	51	20	6	119	535
Lissabon (St.)	38	42	31	94	− 600
London (Greenwich)	51	28	38	47	582
Madrid (St.)	40	24	30	655	− 555
Mailand (St.)	45	27	59	120	17
Melbourne (St.)	− 37	49	53	28	− 660
Montblanc	45	50		4810	− 1110
Moskau (St.)	55	45	20	142	940
Mount Everest	27	59		8840	− 3800
München	48	8	46	519	5
Newyork	40	43	49	96	− 412
Nordpol (oder Südpol)	90			0	2648
Paris (St.)	48	50	11	59	339
Petersburg (St.)	59	56	30	3	1318
Potsdam (Astr. Inst.)	52	22	56	94	650
Prag (St.)	50	5	16	197	428
Rom (St. C. Rom.)	41	53	54	59	− 300
San Francisco	37	47	28	47	− 620
Sankt Helena (St.)	− 15	55	26	536	− 2380
Schneekoppe	50	44		1610	115
Stockholm (St.)	59	20	33	44	1260
Straßburg	48	35		145	298
Tiflis	41	41	4	487	− 410
Tokio	35	39	18	21	− 852
Wien (Un.-St.)	48	13	55	150	264
Zürich (St. d. Pol.)	47	22	40	468	120

liegen. So sind z. B. die Alpen, der Harz und andere Gebirge nach Anomalie der Größe und Richtung der Schwere eingehend erforscht worden. Um diese

Anomalien darzustellen, kann man Kurven ideal gleicher Schwere, Kurven wirklich gleicher Schwere und endlich Kurven gleicher Anomalie entwerfen; jedoch kann darauf hier nicht eingegangen werden, auch ist die Sache noch völlig in der Weiterentwickelung begriffen. Dasselbe gilt von den Messungen der Schwere in Schachten; daß sie, wie die Theorie verlangt, anfangs zunimmt, ist vielfach festgestellt worden; für das Gesetz dieser Zunahme reicht aber das Material, das ohnehin nur mit Vorsicht zu benutzen ist, noch nicht hin.

Zeitliche Änderungen der Schwere. Die Frage, ob die Schwerkraft an einem und demselben Orte stets gleich sei oder ob sie Änderungen der Richtung und der Größe erfahre, ist schon vor langer Zeit aufgeworfen und seitdem vielfach behandelt worden. Im Prinzip ist die Frage natürlich zu bejahen, und es läßt sich sofort eine ganze Reihe von Ursachen teils periodischer teils unregelmäßiger Änderungen angeben, nämlich Verbiegungen der Erdoberfläche, Massenverschiebungen im Innern, Ebbe und Flut, Mondanziehung u. s. w. Es fragt sich nur, ob diese Wirkungen groß genug sind, um festgestellt und gar gemessen zu werden; jedenfalls werden dazu sehr empfindliche Apparate gehören. Für die Änderungen der Intensität wird man entweder mit besonders empfindlichen Pendeln arbeiten oder Apparate benutzen, die man dauernd ablesen kann, z. B. solche, die vom manometrischen Charakter sind, d. h. es wird z. B. eine Quecksilbersäule entweder durch einen elastischen Boden (SIEMENS' Bathometer) oder durch ein Gasvolumen getragen; die Kapillarität und andere Fehler mindern aber die Genauigkeit dieser Apparate sehr erheblich; als Typus sei der Apparat von BOUQUET DE LA GRYE[1] genannt. Die Richtungsänderungen andererseits, also die Lotschwankungen und Lotveränderungen, kann man nach STRAUBEL auf vier wesentlich verschiedene Arten untersuchen, nämlich mit der Libelle, mit dem gewöhnlichen Lote oder Pendel, mit dem Horizontalpendel und mit dem künstlichen Horizont. Die Libellen haben sich nicht bewährt. Die Pendel können entweder direkt beobachtet werden und gestatten bei Fadenaufhängung direkt ein vollständiges Flächenbild der Lotschwankung zu gewinnen; oder sie haben, wie die von Lord KELVIN und G. H. DARWIN herrührende Form, einen Übertragungsmechanismus, so daß die Empfindlichkeit sehr groß wird und z. B. noch 0,000025 mm Bewegung der Pendelspitze festgestellt werden können; allerdings stehen dem auch Bedenken gegenüber. Das Horizontalpendel (s. Artikel „Pendel", p. 411) ist namentlich durch v. REBEUR-PASCHWITZ verbessert und mit großem Erfolg angewandt worden. Der künstliche Horizont ist, nach ungeeigneten Vorläufern, von WOLF und ABBE brauchbar gemacht worden; es wird hier das vom Quecksilberhorizont herrührende Spiegelbild einer Marke mit dem von einer in der Erde festen Fläche herrührenden Spiegelbilde derselben Marke verglichen; bei WOLF sind die beiden Spiegel gegeneinander geneigt, bei ABBE steht die zugleich spiegelnde und durchlassende feste Fläche parallel dicht vor dem Quecksilber- oder Ölspiegel, was besondere optisch-rechnerische Vorteile hat. An das ABBEsche Verfahren knüpft nun das fünfte und neueste, von STRAUBEL angegebene, an. Anstatt die Neigung der beiden Spiegel aus der Neigung der Lichtstrahlen gegeneinander abzuleiten, wird die Verschiedenheit der Dicke der Schicht zwischen ihnen — sie stehen deshalb sehr nahe beieinander — mit dem FIZEAU-ABBEschen Dilatometer gemessen; das Vorbeiziehen der Interferenzstreifen bietet hier bekanntlich ein vorzügliches Mittel zur dauernden Verfolgung der zu beobachtenden Änderungen.[2]

---

[1] BOUQUET DE LA GRYE, C. R. **116**. 341. 1893. — [2] G. H. DARWIN, Rep. Brit. Assoc. 1881 u. 82. — HENGLER, PERROT, ZÖLLNER, s. Artikel „Pendel". — v. REBEUR-PASCHWITZ, Astr. Nachr., Nr. 2809, 2874, 3001, 3002, 3109, 3110, 3152, 3169, 3177. — R. EHLERT, Beitr. z. Geoph. **3**. 131. 1896. — M. C. WOLF, C. R. **97**. 1884. — E. ABBE, Astr. Nachr. **127**. 89. 1891; Ges. Abh. **2**. 212. — R. STRAUBEL, Beitr. z. Geophysik. **3**. 247. 1897.

Was derartige Messungen zunächst ergeben, ist die etwaige mit der Zeit erfolgende Änderung des Winkels der Lotrichtung mit der Normale zur physischen Erdoberfläche an dem Orte der Beobachtung. Kombiniert man nun die Beobachtungen mit solchen über etwaige Polschwankungen, z. B. durch Beziehung eines Flüssigkeitsspiegels auf die Richtung nach einem dem Zenit nahen Stern, so kann man auch den Gang der Lotlinie im Weltraume verfolgen und hieraus dann, je nach dem Charakter der festgestellten Änderungen, Schlüsse ziehen auf die Anteile, die die genannten Richtungen an den relativen Richtungsänderungen haben.

Was die bisherigen Ergebnisse betrifft, so weiß man in bezug auf die Intensität der Schwere nur, daß Änderungen, wenn sie vorhanden sind, jedenfalls außerordentlich klein und nicht mit Sicherheit größer als die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler sind; ausgenommen natürlich Fälle, in denen gewaltige Veränderungen der betreffenden Gegend stattgefunden haben. Dagegen sind die Lotschwankungen zwar auch klein, aber doch mit Sicherheit festzustellen; sie stellen im allgemeinen Bruchteile einer hundertstel Bogensekunde dar, können aber in außergewöhnlichen Fällen auch bis nahe an die Bogensekunde heranreichen. Dabei zeigt sich, daß in ihrem periodischen Teile mehrere Perioden deutlich vorwalten, so die halbtägige, die ganztägige und wohl auch die jährliche; es liegt nahe, sie mit Mond und Sonne in Verbindung zu bringen. Des weiteren unterscheidet man dann sogenannte Nullpunktsbewegungen (nämlich der Pendelspitze); sie sind jedenfalls das Ergebnis reeller Bodenbewegungen, wobei vermutlich Luftdruck-, Wärme- und andere Schwankungen meteorologischer und geophysikalischer Elemente im Spiele sind. Hinsichtlich der Einzelheiten muß auf die Werke und Zeitschriften der Geophysik verwiesen werden.

C. Erddichte und Gravitationskonstante.

Bestimmung der Masse der Erde. Die bisherigen Betrachtungen haben zwei Punkte von offenbarer Wichtigkeit noch gänzlich unberührt gelassen, nämlich den Wert der Konstanten k im NEWTONschen Gesetz, d. h. der Gravitationskonstante, und den Wert der Erdmasse M. Kennt man letzteren, so kann man aus der beobachteten Beschleunigung durch die Schwere an der Erdoberfläche die Gravitationskonstante offenbar ohne weiteres ableiten, und umgekehrt; es besteht nämlich offenbar die Beziehung

$$g = k\frac{M}{R^2} \quad ,$$

woraus sich für die Berechnung von k aus M oder umgekehrt die Formeln:

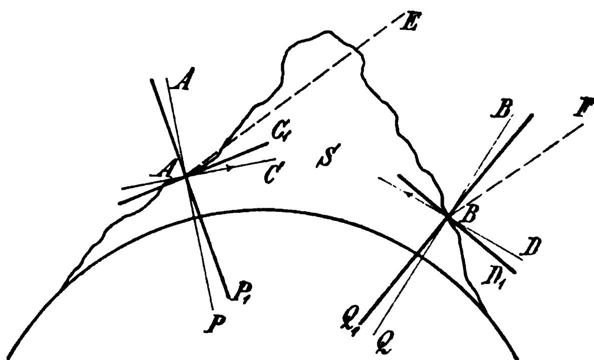
$$k = \frac{gR^2}{M} \quad , \qquad M = \frac{gR^2}{k}$$

ergeben. Noch für einen anderen Zweck ist die Kenntnis der Erdmasse von großer Wichtigkeit, nämlich für die Berechnung der Masse anderer Himmelskörper. Ist z. B. M die Sonnenmasse, m die Erdmasse, R der Sonnenabstand der Erde, r der Erdabstand des Mondes, T die Umlaufszeit der Erde um die Sonne, t die des Mondes um die Erde, so sind die Brüche R^3/T^2 und r^3/t^2 zwar nicht einander gleich, wie sie es nach dem dritten KEPLERschen Gesetz sein müßten, wenn es sich beide Male um denselben Zentralkörper oder wenigstens um solche von gleicher Masse handelte; sie werden sich aber wie diese Massen verhalten:

$$M : m = \frac{R^3}{T^2} : \frac{r^3}{t^2} \quad .$$

Hieraus kann man M bestimmen, wenn m bekannt ist. Ähnlich verhält es sich mit der Masse anderer Planeten. Ferner ergibt die Erdmasse durch Division mit dem Volumen die mittlere Erddichte, die ihrerseits wieder interessante Schlüsse zu ziehen erlaubt. Nach alledem kann es nicht Wunder nehmen, wenn zur Bestimmung der Erdmasse zahlreiche Untersuchungen angestellt worden sind. Die gemeinsame, ihnen zugrunde liegende Idee ist die, die Anziehung der Erde zu vergleichen mit der Anziehung von Körpern, deren Masse bezw. Dichte man kennt; je nachdem diese Massen natürliche (Berge, Seen) oder künstliche (Kugeln, Bleiklötze u. s. w.) sind, kann man zwei Klassen von Versuchen unterscheiden; eine weitere Klassifikation ergibt sich aus der Art des benutzten Instruments (Lot, Pendel, Drehwage, Schwerwage u. s. w.). Alle diese Versuche haben noch den weiteren Sinn, daß sie die gravitierende Wirkung begrenzter, natürlicher oder künstlicher Massen direkt vor Augen führen; man hat sogar schon Vorlesungsapparate dieser Art hergestellt (s. u.).

1. **Methode der Lotabweichung** (ersonnen von BOUGUER 1749). Zu beiden Seiten eines Berges nehmen die Lote (Figur 150) eine gegen die reguläre Richtung AP und BQ veränderte Richtung AP_1 und BQ_1 an, so daß, wenn die beiden Orte auf demselben Meridian liegen, der Winkel zwischen den Loten nicht mehr gleich der Breitendifferenz, sondern größer ist. Damit wird zugleich die Horizontale gegen den Berg hin gehoben, und folglich die Polhöhe in A verringert (EAC_1 statt EAC), in B vergrößert (FBD_1 statt FBD). Mißt man beide Polhöhen, so kann man also aus ihnen und der Breitendifferenz die Lotablenkung δ berechnen. Nun



Figur 150.

seien der Einfachheit halber die Punkte A und B in gleicher Höhe mit dem vermutlichen Schwerpunkte des Berges S gewählt; (anderenfalls ist in der Formel noch der Sinus eines Winkels hinzuzufügen). Das Lot nimmt dann unter der Wirkung der vertikalen Kraft M/R^2 (M Masse, R Radius der Erde) und der horizontalen Kraft m/r^2 (m Masse des Berges, r Abstand seines Schwerpunktes, S vom Lote) eine gegen die Vertikale um den Winkel δ geneigte Lage an; es ist also

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{m/r^2}{M/R^2} = \frac{mR^2}{Mr^2} \quad ,$$

und somit die mittlere Dichte der Erde

$$d = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{m}{Rr^2\operatorname{tang}\delta} \quad .$$

MASKELYNE[1], der diese Methode zuerst mit Erfolg anwandte und zwar an dem Berge Schiehallien in Schottland, der einen fast genau ostwestlich gerichteten Grat darstellt, erhielt ungefähr $d = 4{,}8$; JAMES, der sie viel später wiederholte,

[1] MASKELYNE und HUTTON, Phil. Trans. 1775. p. 500; 1778. p. 689; 1821. p. 276.

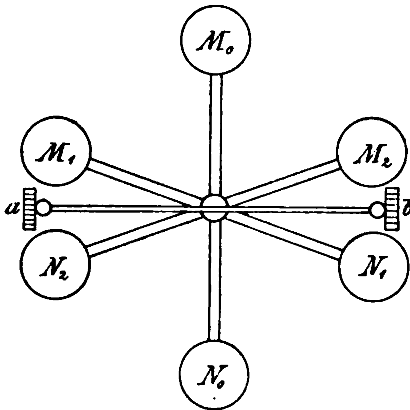
fand $d = 5{,}32$; weitere Bestimmungen rühren her von PECHMANN (in den Alpen) und PRESTON (auf den Hawaii-Inseln).[1]

1a. Methode der künstlichen Schwereverminderung. Das Gegenstück zu der obigen Methode bildet gewissermaßen das Verfahren, das BERGET[2] angewandt hat. Es stand ihm in Belgien ein See von 22 ha Oberfläche zur Verfügung, dessen Spiegel durch Wasserabfluß binnen weniger Stunden um ein Meter gesenkt werden konnte. Ein „Gravimeter" nach BOUSSINGAULT, bei dem die Elastizität einer abgeschlossenen Wasserstoffmenge von konstanter Temperatur durch eine Quecksilbersäule im Gleichgewicht gehalten wird, diente zur Messung der Anziehung des abgeflossenen Wassers; die, natürlich sehr geringe, Änderung des Quecksilberspiegels wurde nach der FIZEAUschen Interferenzmethode gemessen, leider, wie es scheint, in nicht einwandfreier Weise. Es fand sich:

$$k = 6{,}80 \cdot 10^{-8} \quad , \qquad M = 5{,}85 \cdot 10^{27}\,\mathrm{g} \quad , \qquad d = 5{,}41 \quad .$$

So interessant die Berg- und Seemethode auch sein mag, es ist einleuchtend, daß sie auf größere Genauigkeit keinen Anspruch machen kann; immerhin hat sie zuerst eine Vorstellung von dem Zahlenwerte der Erddichte gegeben.

2. Methode der Torsionswage. An einem sehr leichten, an einem feinen Drahte horizontal aufgehängten Stabe sind die mit elfenbeinernen, horizontalen Skalen versehenen Kugeln a und b angebracht, so daß das Ganze infolge der Torsionskraft des Fadens eine bestimmte Lage einnimmt, und in den Beobachtungsfernröhren gerade die Nullstriche der Skalen in das Fadenkreuz fallen. Diese Lage bleibt auch noch unverändert, wenn ein mit zwei großen Bleikugeln M und N je vom Gewicht P ausgestatteter Balken in die Lage $M_0 N_0$ gebracht wird; wird er dagegen in eine der Lagen $M_1 N_1$ oder $M_2 N_2$ gebracht, so wird durch die Anziehung der Bleikugeln das Stäbchen $a\,b$ in dem einen oder andern Sinne so weit gedreht, bis die Torsionskraft des Drahtes der Anziehungskraft der Bleikugeln das Gleichgewicht hält. Nun ist erstere, wenn die Drehung n Längeneinheiten auf der Skale betrug, die Schwingungsdauer von $a\,b$ gleich t und das Gewicht der Kugeln a und b je gleich p ist,



Figur 151.

$$K = \frac{2\pi^2 p\,n}{g\,t^2} \quad ;$$

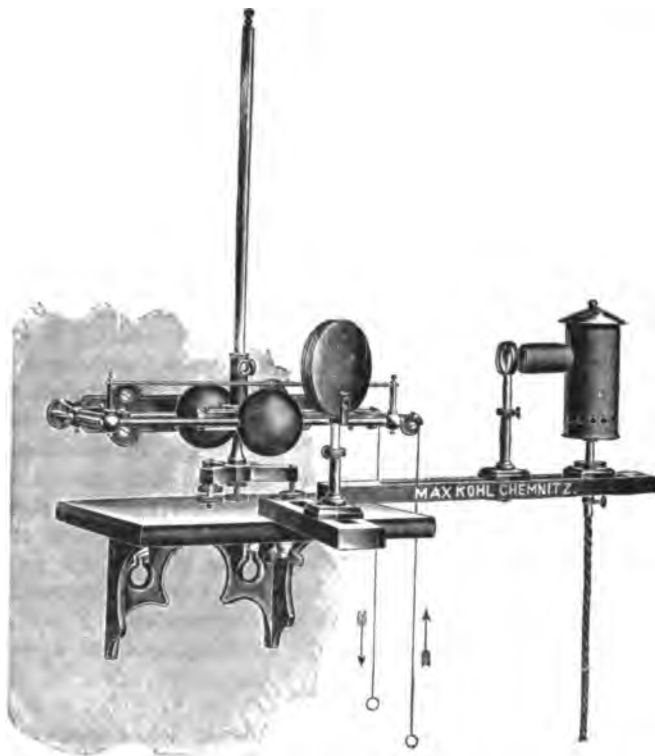
also ist dies auch die Anziehung der Bleikugeln auf a und b, und zwar in einem bestimmten Abstand ihrer Mittelpunkte, nämlich $r - n$ (r Abstand der Mittelpunkte, bevor $a\,b$ angezogen wurde.) Es übt also einerseits die Bleikugel vom Gewicht P im Abstand $r - n$ die Anziehung K, andererseits die Erde im Abstand R (Erdradius) eine dem Gewicht des angezogenen Körpers, also hier p gleiche Anziehung aus, es läßt sich also mittels einer einfachen Proportion das Gewicht bezw. die Masse der Erde, und hieraus ihre Dichte bestimmen, nämlich

$$d = \frac{3}{4}\,\frac{g}{\pi^3}\,\frac{P\,t^2}{R\,n\,(r - n)^2} \quad .$$

[1] JAMES, Phil. Mag. (4) **12.** 314. **15.** 129. 1856. — E. PECHMANN, Wien. Denkschr. **22.** **41.** 1864. — E. D. PRESTON, Bull. Wash. Phil. Soc. **12.** 369. 1895. — [2] A. BERGET, C. R. **116.** 1501. 1893. Vgl. auch GOUY, C. R. **117.** 96. 1893.

CAVENDISH[1], der Erfinder der Methode, wählte aus leicht ersichtlichen Gründen den Apparat sehr groß; der Balken aus Tannenholz war 6' lang, der Torsionsdraht von versilbertem Kupfer maß 39 Zoll in Länge und hatte eine solche Dicke, daß die einfache Schwingungsdauer 7 Minuten betrug; die kleinen Bleikugeln maßen 2, die großen 12 Zoll im Durchmesser, jede der letzteren wog also mehr als einen Doppelzentner. Er fand $d = 5{,}48$; später fanden bei sorgfältigerer Vermeidung der Versuchsstörungen und Fehlerquellen REICH[2] 5,49 und 5,58, BAILY[3] 5,67

In neuerer Zeit haben CORNU und BAILLE[4] das Verfahren in der Weise modifiziert, daß sie, um die aus dem Umlegen der schweren Kugeln herrührenden



Figur 152.

Fehler zu vermeiden, statt fester flüssige, nämlich Quecksilbermassen benutzten, in gußeisernen Schalen in fester Stellung eingeschlossen; die Lageänderung wird durch Umgießung des Quecksilbers durch Röhren bewerkstelligt; die anziehenden Massen sind hier nur je 12 kg schwer, in gleichem Verhältnis ist aber auch der ganze Apparat kleiner, was sich als sehr vorteilhaft für die Genauigkeit der Ergebnisse erwiesen hat und auch später beibehalten wurde. Die Schwingungen, aus denen die Gleichgewichtslagen abgeleitet werden sollen, wurden elektrisch registriert, um ein vollständiges Bild der Bewegung zu gewinnen. Das Schlußergebnis aus mehreren Versuchsreihen ist 5,56 für die mittlere Erddichte. Ferner

[1] H. CAVENDISH, Phil. Trans. 1798; GILB. Ann. 2. Die Idee rührt, wie CAVENDISH angibt, von J. MITCHELL her. — [2] F. REICH, Versuche über die mittlere Dichte der Erde mit der Drehwage. Freiberg 1838. — Neue Versuche mit der Drehwage. Leipzig 1852. — [3] F. BAILY, Mem. of the R. Astron. Soc. Lond. 14. 1843. — [4] A. CORNU u. J. BAILLE, C. R. 76. 954. 1873; 86. 571. 699. 1001. 1878.

hat neuerdings BOYS[1] die Methode wieder aufgenommen, und zwar mit Benutzung der von ihm erfundenen Quarzfäden, denen man bekanntlich bei sehr kleiner Torsion doch eine sehr beträchtliche Festigkeit geben kann. Er operierte im übrigen teils mit der alten, aber auf sehr kleine Dimensionen gebrachten Drehwage, teils mit einer neuen, deren Konstruktionsprinzip das folgende ist: an einem vertikalen, konischen Glasstabe sind in verschiedenen Niveaus die anzuziehenden Massen, in diesem Falle Zylinder, mittels Metallarmen befestigt; der Glasstab trägt den Beobachtungsspiegel und läuft oben in den tragenden Quarzfaden aus. Mit diesen verschiedenen Typen hat BOYS sehr sorgfältige Messungsreihen ausgeführt und im Mittel $d = 5{,}527$ gefunden. — In einer anderen Richtung hat C. BRAUN[2] die Methode vervollkommnet, indem er die Torsionswage in ein ziemlich hohes Vakuum einschloß; das Ergebnis war zufällig genau die gleiche Zahl wie sie BOYS gefunden hatte. — Von der ebenfalls hierher gehörigen Arbeit v. EÖTVÖS[3] ist schon oben die Rede gewesen. — Endlich hat BURGESS[4] die Belastung des Quarzfadens durch eine sinnreiche Vorrichtung (die Gewichte schwimmen auf Quecksilber) wesentlich herabgemindert, so daß er ihn sehr dünn nehmen konnte und eine außerordentliche Empfindlichkeit erhielt; eine vorläufige Bestimmung ergab 5,55.

Durch geeignete Abänderung ist der BOYSsche Apparat durch KOHL[5] in einen transportablen Demonstrationsapparat umgewandelt, der die optisch projizierten Ablenkungen einem größeren Auditorium vorzuführen erlaubt, die Gesamtansicht zeigt Figur 152.

Übrigens kann man mit der Drehwage noch in anderer Weise operieren, indem man nämlich, statt die wirkenden Massen seitlich anzubringen und dadurh eine Ablenkung zu erzeugen, sie in der Verlängerung des Hebels anbringt und dadurch die Direktionskraft erhöht, also die Schwingungsdauer verkleinert. Auf diese Weise erhielt BRAUN einen mit dem früheren gut übereinstimmenden Wert.

3. Methode der Pendelschwingungen. Es ist oben gezeigt worden, daß beim Herabgehen unter die Erdoberfläche die Schwere zunächst zunehmen muß, und daß die Art dieser Zunahme mit der mittleren Dichte der außerhalb des betreffenden inneren Punktes gelegenen Kugelschale d' und des inneren Kugelkernes d in einer einfachen Beziehung steht. Bringt man demgemäß ein Pendel, das auf der Erdoberfläche eine bestimmte Schwingungsdauer T besitzt, an jenen unterirdischen Ort und bestimmt wieder die Schwingungsdauer t, so kann man, indem man d' nach Möglichkeit schätzt, d berechnen; dies ist aber, da die Tiefe h des unterirdischen Ortes stets sehr klein im Vergleich zum Erdradius R sein wird, die mittlere Dichte der Erde. Mit Hilfe der leicht abzuleitenden Formel

$$d = \frac{d' T^2 [R^3 - (R-h)^3]}{(R-h)[t^2 R^2 - T^2 (R-h)^2]} \quad ,$$

oder der angenäherten kürzeren

$$d = \frac{3 d'}{2 - \frac{R}{h}\left(\frac{T^2 - t^2}{T^2}\right)}$$

fand AIRY[6] $d = 6{,}56$. Später hat v. STERNECK[7] zahlreiche derartige Bestimmungen

[1] C. V. BOYS, Proc. Roy. Soc. **46.** 254. 1889; **56.** 131. 1894; Lond. Phil. Trans. **186.** 1. 1895; Nat. **50.** 330. 336. 417. 1894. — [2] C. BRAUN, Wien. Denkschr. **64.** 187. 1897. — [3] R. v. EÖTVÖS, WIED. Ann. **59.** 354. 1896. Vgl. auch, wegen einer hiermit zusammenhängenden Asymmetrie beim Gebrauch der Drehwage: M. BRILLOUIN, C. R. **131.** 1293. 1900. — [4] G. K. BURGESS, C. R. **129.** 407. 1899; Phys. Review **14.** 247. 257. 1902. — [5] M. KOHL, Ann. d. Phys. **6.** 641. 1901. — [6] G. B. AIRY, Lond. Phil. Trans. 1856. p. 297. 343. — Vgl. auch S. HAUGHTON, Phil. Mag. (4) **12.** 50. 1856 sowie F. FOLIE, Bull. de Brux. (2) **33.** 389. 1872. — [7] R. v. STERNECK, in zahlreichen Bänden der Wien. Ber. und den Mitteilungen des militärisch-geographischen Instituts 1882 ff.

ausgeführt. Bei der Unsicherheit in bezug auf den für d' einzusetzenden Wert kommt diese Methode schließlich doch nicht in Betracht.

4. Pendelmethode von Wilsing.[1] Dieselbe beruht auf der Anwendung eines sehr empfindlichen Differentialpendels, dessen Ruhelage mittels Spiegelablesung bis auf 1″ bestimmt werden kann, und dessen Pendelkörpern die ablenkenden Massen einmal von der einen, das andere Mal von der anderen Seite genähert werden. Das Endresultat aus vielen Versuchen war:

$$d = 5{,}594 \pm 0{,}032 \quad .$$

Später wurde die Messung, unter Ausschluß mehrerer Fehlerquellen, wiederholt und ergab:

$$d = 5{,}577 \pm 0{,}013 \quad .$$

LÁSKA[2] hat vorgeschlagen, als wirkende Masse eine große Glashohlkugel zu nehmen, die man von einem anderen Raume aus mit Quecksilber füllt, Messungen scheinen aber nicht ausgeführt worden zu sein.

5. Methode der Wägung. Genauer als alle bisherigen Methoden ist ohne Zweifel die, bei welcher das unter veränderten Einwirkungen veränderte Gewicht eines Körpers mittels der Wage bestimmt wird. JOLLY[3], der diese Methode zuerst anwandte, äquilibrierte eine und dieselbe Masse einmal durch Aufsetzen von Gewichtsstücken auf eine in gleicher Höhe befindliche Wagschale, ein anderes Mal durch Aufsetzen von Gewichtsstücken auf eine 21 m tiefer befindliche mit jener oberen durch einen Draht verbundenen Wagschale. Die Differenz ergab die Abnahme der Schwere mit der Höhe. Er baute dann unterhalb der unteren Schale eine 5775 kg schwere Bleikugel auf und bestimmte die entsprechende Differenz. Die Zunahme ergab die Anziehung der Bleikugel auf die Gewichte in der unteren Schale, da bis zur oberen Schale, wie der Versuch ergab, die Bleikugel keine meßbare Wirkung ausübte. JOLLY erhielt aus zahlreichen Versuchen

$$d = 5{,}692 \pm 0{,}068 \quad ,$$

also einen Wert, der mit dem WILSINGschen zwar ungefähr (bis auf 2 %) übereinstimmt, dessen Fehlergrenzen aber doch gänzlich außerhalb der Fehlergrenzen jenes fallen.

Wesentlich verbessert wurde die Methode einerseits durch POYNTING[4], andererseits durch RICHARZ und KRIGAR-MENZEL. POYNTING vermied den Nachteil der JOLLYschen Anordnung, daß vertikale, durch Temperaturdifferenzen erzeugte Luftströmungen die Wägung beeinträchtigen können, außerdem vermied er die Arretierung der Wage während einer Versuchsreihe und die Störung durch Erschütterungen. Die Wage war eine große Goldwage mit einem Balken von vier Fuß, mittels eines Drehtisches wurden die großen Kugeln von je $153^1/_2$ kg zuerst unter die eine, dann unter die andere der hängenden Kugeln von je $21^1/_2$ kg gebracht, die Ausbalanzierung erfolgte durch eine entferntere Kugel, deren Wirkung natürlich in Rechnung gezogen wurde; die Ablenkungen wurden durch einen Spiegel in bifilarer Aufhängung vergrößert, indem der eine Faden fest, der andere mit der Wage verbunden war, sie wurden mit Fernrohr aus einem anderen Zimmer beobachtet; das Ergebnis war $d = 5{,}4934$. — RICHARZ und KRIGAR-MENZEL (bei den Vorarbeiten war auch A. KÖNIG beteiligt)[5] fanden Gelegenheit, an einem

---

[1] J. WILSING, Berl. Sitz.-Ber. 1885. p. 13; Publ. des astrophysikalischen Observatoriums Potsdam 1887; ibid. 1889. p. 133. — [2] W. LÁSKA, Ztschr. f. Instrumentenk. **9.** 354. 1889. — [3] PH. v. JOLLY, Münch. Abhandl. (2) **13** und **14**; WIED. Ann. **14.** 331. 1881. — [4] J. H. POYNTING, Lond. Phil. Trans. **182**a. 565. 1891; The mean density of the earth. London 1894. — [5] A. KÖNIG u. F. RICHARZ, Berl. Sitz.-Ber. 1884. p. 1203; WIED. Ann. **24.** 664. 1885. — F. RICHARZ und O. KRIGAR-MENZEL, Berl. Ber. 1896. p. 1305; Berl. Abhandl. (Anhang); WIED. Ann. **66.** 177. 1898; Ztschr. f. Instrumentenk. **19.** 40. 1899;

besonders günstigen Orte, nämlich in den Kasematten der Festung Spandau zu arbeiten. Jedes Ende des Wagebalkens trug zwei Wagschalen in 226 cm vertikalem Abstande, sowohl die beiden oberen wie die beiden unteren Schalen waren auf gleichem Niveau. Als anziehender Körper diente ein aus Bleistücken aufgebauter Bleiklotz von etwa 2 cbm Volumen, also über 22 Tonnen Masse; die an der Wage befestigten Drähte wurden mittels Durchlochungen derart durch den Klotz hindurchgeführt, daß die oberen Schalen nahe über, die unteren nahe unter dem Klotze hingen. Wägt man nun eine Masse m einmal in der Schale rechts oben durch Gewichte m_u in der Schale links unten, und sodann umgekehrt in der Schale rechts unten durch Gewichte m_o links oben, und nennt man die Schwere oben g_o, unten g_u, die Anziehung des Bleiklotzes am Orte der Schalen k', so hat man:

$$m(g_o + k') = m_u(g_u - k') \quad ,$$
$$m(g_u - k') = m_o(g_o + k') \quad ,$$

und hieraus, wenn man $m_u - m_o = \delta$, $g_u - g_o = \gamma$ setzt, mit den erlaubten Vernachlässigungen

$$\delta = \frac{2m}{g_o}(2k' - \gamma) \quad .$$

Hierin bestimmt sich γ durch analoge Wägungen vor Aufbau des Bleiklotzes, m_u' und m_o' zu $\gamma = g_o(m_u' - m_o')/2m = \delta' g_o/2m$, und es wird

$$k' = \frac{g_0}{4m}\left(\delta + \delta'\right) \quad .$$

Bedenkt man nun, daß $k' = k(\partial V)/(\partial z)$ ist (V Potential des Bleiklotzes, k Gravitationskonstante), und daß sich $\partial V/\partial z$ berechnen läßt, so sieht man, daß man hier direkt k (indirekt also auch die mittlere Erddichte) findet. Dabei können, gegenüber JOLLYs Apparat, die Manipulationen und Wägungen unter weit sichererem Ausschluß von Luftzug- und Temperatureinflüssen ausgeführt werden, und die Genauigkeit ist mindestens die Vierfache. Außerdem wurden alle Vorsichtsmaßregeln ergriffen und alle Fehler in Rechnung gestellt; nur das Arretieren der Wage ließ sich nicht vermeiden, hat aber jedenfalls auch höchstens einen ganz winzigen Fehler erzeugt. Das Endresultat war 5,505 oder mit einer nachträglichen Korrektion wegen elastischer Kompression (eine zweite wegen magnetischer Wirkungen erwies sich als unmerklich):

$$d = 5{,}507 \pm 0{,}009 \quad , \qquad k = (6{,}682 \pm 0{,}011)\cdot 10^{-8} \quad .$$

Zugleich konnte aus den Versuchen die Abnahme der Schwere mit der Höhe abgeitet werden; es fand sich 0,000652, während nach der theoretischen Formel (p. 467 und 473) $2h/R$ die Zahl 0,000697 zu erwarten war; der Fall des freien Ballons ist eben nicht erfüllt, und infolgedessen wird der Koeffizient σ nicht 2, sondern 1,87.[1] Bald darauf haben SCHEEL und DIESSELHORST[2] nach ähnlichem Verfahren die Abnahme der Schwere mit der Höhe auf dem Gebäude der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Charlottenburg bestimmt; es ergab sich (Turm und Schornstein, 30 m Höhe) der Koeffizient σ fast zu 2 (genauer 1,98), wie für exponierte Punkte.

6. Methode der Flüssigkeitsoberfläche. Eine weitere Methode hat kürzlich GERSCHUN[3] vorgeschlagen, nämlich die Messung der Krümmung einer Flüssigkeits-

---

Phys. Ztschr. **2.** 135. 1901; Mitt. naturw. Ver. Greifswald 1899. (Tafeln.) — F. RICHARZ, Marb. Ber. 1903. p. 27 u. 97; Astron. Vierteljahrsschr. **33.** 43. 1898. — E. TAKE, DRUDES Ann. **15.** 1010. 1904.

[1] F. RICHARZ u. O. KRIEGAR-MENZEL, WIED. Ann. **51.** 559. 1894. — [2] K. SCHEEL u. H. DIESSELHORST, Wiss. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt **2.** 185. 1895. — [3] A. L. GERSCHUN, C. R. **129.** 1013. 1899. — A. SELLA, Arch. de Genève (4) **10.** 322.

oberfläche, die erfolgt, wenn man ihr von oben her eine große Masse nähert. Hat diese Masse die Form einer Kugel vom Radius r und von der Dichte δ, ist ihr Mittelpunkt um h von der Oberfläche entfernt, und ist ϱ der Krümmungsradius eines durch den Kugelmittelpunkt gehenden Vertikalschnittes, so hat man die Gleichung:

$$\frac{R}{\varrho} = 1 + \frac{\delta}{d}\left(\frac{r}{h}\right)^2 \quad .$$

Wie man sieht, nützt es nichts, eine sehr große Kugel zu nehmen, weil man dann die Entfernung h auch nicht klein machen kann; man wird also eine kleine Kugel aus möglichst dichtem Stoffe der Flüssigkeitsoberfläche möglichst nahe bringen. Für eine Platinkugel und $r = 0{,}9\,h$, so daß also der Abstand des unteren Kugelrandes von der Oberfläche nur $^1/_9$ des Radius beträgt, würde $\varrho = 1650$ km werden; zur Messung so großer Krümmungsradien dürften die heutzutage ausgebildeten dioptrischen Methoden imstande sein. Man vergleiche hierzu auch eine Mitteilung von SELLA.

Ergebnis. Faßt man alles zusammen, so kann man den wahrscheinlichsten Wert der in Rede stehenden Größen durch folgende Erwägungen gewinnen. Die Messungen in der Natur müssen wegen zu großer Unsicherheit ausscheiden; von den Messungen durch das Laboratoriumsexperiment wird man nur die neueren, mit vervollkommneten Apparaten und unter Ausschluß der aus den früheren entnommenen Fehlerquellen gewonnenen benutzen. Man erhält dann folgendes Tableau:

Drehwage	CORNU und BAILLE	5,56	Mittel: 5,538 (1 und 5 mit halbem Gewicht)
	BOYS	5,527	
	BRAUN	5,527	
	v. EÖTVÖS	5,545	
	BURGESS	5,55	
Gewöhnliche Wage	POYNTING	5,493	Mittel: 5,500
	RICHARZ und KRIGAR-M.	5,507	
Pendel	WILSING	5,577	

Wie man sieht, ist der WILSINGsche Wert wesentlich größer als alle anderen, so daß man ihn, obleich die Methode den anderen ebenbürtig ist, ausschließen wird, bis nach derselben Methode noch ein zweiter Wert vorliegt. Von den beiden anderen Methoden liefert die horizontale merklich größere Werte als die vertikale, und das bleibt auch bestehen, wenn man die Zahl von CORNU und BAILLE etwa wegläßt; worauf diese Differenz beruht, läßt sich nicht mit Sicherheit sagen. Man muß also bis auf weiteres das Hauptmittel nehmen und erhält:

$$d = 5{,}519 \quad , \qquad k = 6{,}668 \cdot 10^{-8} \quad .$$

Es sei bemerkt, dass das hier errechnete Endergebnis die Mitte hält zwischen denen, zu denen RICHARZ und ZENNECK einerseits und BURGESS andererseits gelangen.[1] Schließlich sei als historisch interessant erwähnt, daß schon NEWTON die mittlere Erddichte auf 5 bis 6, also ganz richtig geschätzt hat.

Massenverteilung in der Erde. An dem gewonnenen Resultat ist am auffälligsten, daß hiernach die mittlere Dichte der Erde die mittlere Dichte ihrer dem Menschen zugänglichen Oberflächenschicht bedeutend übertrifft; sie ist etwa doppelt so groß. Man muß also annehmen, entweder, daß die Dichte stetig von außen nach innen zunehme, oder daß die Erde aus zwei verschieden dichten Teilen bestehe. Die erstere, bis vor kurzem ausschließlich vertretene Ansicht führt nun weiter zu der Aufgabe, das Gesetz der Dichtezunahme mit der Tiefe zu ermitteln. Leider liegen hierfür keine tatsächlichen Materialien vor, man muß daher

[1] RICHARZ, s. oben. — BURGESS, s. oben. — J. ZENNECK im Artikel „Gravitation" der Enz. d. math. Wiss. V. 1. 25. 1903.

zur Hypothese greifen. Der erste, der eine solche Hypothese aufstellte, war LAPLACE; er setzt

$$\text{entweder} \quad d = d_0\,[1 + \varepsilon(1 - u)] \qquad \text{oder} \qquad d = \frac{A}{u}\sin(un) \quad ,$$

was für die Zunahme der Dichte 1,59 d_0 bezw. 2,42 d_0 ergibt. Von den Konsequenzen der Annahmen, daß die Zunahme gleichförmig oder gleichförmig beschleunigt erfolge, ist schon oben die Rede gewesen. Eine Exponentialformel hat OEKINGHAUS[1], eine aus Differenzen zweier Potenzen bestehende STAPFF[2], endlich eine solche in Form einer Potenzreihe TUMLIRZ[3] aufgestellt. Sie führen alle zu mehr oder weniger verschiedenen Zahlenwerten für die Dichte im Erdinnern; für den Erdmittelpunkt selbst liefern sie Werte zwischen 10 und 13, im Mittel etwa 11,5. Dagegen geht WIECHERT[4] von der Vorstellung aus, daß die Erde aus einem dichten Kerne und einem weniger dichten Mantel, die unvermittelt aneinandergrenzen, bestehe; aus gewissen Annahmen ergibt sich dann, daß der Kern bis etwa $^4/_5$ des Radius reicht und die Dichte 7,9 bis 8,6 haben kann, was mit der Dichte von Eisen unter hohem Drucke gut verträglich ist; daß andererseits der Mantel das letzte Fünftel des Radius, aber zwei Fünftel der Masse und etwa die Hälfte des Volumens ausmacht, und daß seine Dichte etwa 3 bis $3^1/_2$ beträgt, also der Gesteinsdichte etwa entspricht. Auf die weiteren Konsequenzen dieser und anderer hierhergehöriger Theorien kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden; es sei deshalb auf die Spezialwerke von HELMERT (s. oben) und S. GÜNTHER (Handbuch der Geophysik. 2. Aufl. Stuttgart 1897), sowie auf die Zeitschrift „Beiträge zur Geophysik“ verwiesen.

D. Begrenzung und Erklärung des Gravitationsgesetzes.

Gültigkeitsgrenzen des Newtonschen Gesetzes. Bisher wurde durchweg das NEWTONsche Gesetz als streng gültig und als der vollständige Ausdruck der im Gravitationsfelde herrschenden Verhältnisse angesehen, und die Tatsachen haben das gerechtfertigt. Trotzdem drängt sich die Frage auf, ob die Gültigkeit des Gesetzes über alle Raum-, Zeit- und Genauigkeitsgrenzen hinaus gelte. Die etwaigen Abweichungen könnten in zwei Klassen zerlegt werden, es könnte nämlich die Kraft G von den beiden im NEWTONschen Gesetz vorkommenden Faktoren, Massen und Entfernung in anderer als dort angegebener Weise abhängen, und sie könnte zweitens von Faktoren abhängen, die dort überhaupt nicht vorkommen.

Was die erste Klasse betrifft, so ist die Proportionalität mit den Massen durch die Gesetze der Himmelsmechanik bis zu einem sehr hohen Grade garantiert; und die Bestimmungen der Erddichte bestätigen dies, da die Werte, die sie liefern, keine mit der Größe der angewandten Massen parallel laufenden Differenzen zeigen, obgleich diese Größe kolossal verschieden war.

Auch die Abhängigkeit von der Entfernung muß nach der Gesamtheit der astronomischen Beobachtungen einschließlich der Störungen dem invers quadratischen Gesetz äußerst genau gehorchen. NEWCOMB (und Andere) hat das eingehend untersucht und z. B. gezeigt, daß die Mondparallaxe, die Mondstörungen und das dritte KEPLERsche Gesetz die Entfernungsfunktion sehr weitgehend und bis zur Grenze des Planetensystems garantieren. Für irdische Fälle kann man wieder aus den Versuchen über Erddichte Schlüsse ziehen, und

[1] E. OEKINGHAUS, Arch. Math. u. Phys. (2) **13.** 55. 1894; Wien. Ber. (IIa) **107.** 1059. 1898. — [2] F. M. STAPFF, WILD. Ann. **46.** 169; **48.** 790. 1892; Beitr. z. Geophys. **2.** 1. 1894. — [3] O. TUMLIRZ, Wien. Ber. (IIa) **101.** 1528. 1892. — [4] E. WIECHERT, Verh. Naturf.-Ges. 1897. p. 42; Gött. Nachr. 1897. p. 221.

Mackenzie hat solche Versuche noch besonders für verschiedene Entfernungen durchgeführt, aber mit negativem Erfolg. Aber eben diese Genauigkeit hat unsere Anforderungen sehr hoch geschraubt, und so kann man denn einige kleine Abweichungen, die die Beobachtungen zeigen, nicht ignorieren: eine Abweichung in der Perihelbewegung des Merkur im Betrage von 40 bis 41″ im Jahrhundert, dieselben, aber kleiner, bei den anderen inneren Planeten, Unregelmäßigkeiten in der Mondbewegung und relativ große Anomalien in der Bewegung des Enckeschen und vielleicht auch anderer Kometen. Man wird also versuchen, diese Abweichungen durch Abänderung des Entfernungsgesetzes darzustellen.

Hierzu kommt aber noch ein anderes, prinzipielles Bedenken, wenigstens wenn man das Gesetz auf unbegrenzte Räume und Massen anwenden will — ein Bedenken, das Seeliger zu folgender Betrachtung veranlaßt. Denkt man sich jeden Weltkörper zu einer großen, aber endlichen Kugel in passender Weise ausgezogen, so wird die Anziehung, die irgend ein Körper A erfährt, gleich sein der Anziehung eines überall mit Masse von endlicher Dichte erfüllten Raumes, der nach außen alle in Betracht gezogenen Körper, nach innen den Punkt A allseitig umschließt, während der innere Hohlraum keine Masse enthält. Sind nun r und R die Abstände eines Massenelements von A und von dem nahebei gelegenen Anfangspunkte O, γ der eingeschlossene Winkel und φ der Winkel dieser Ebene mit einer festen durch AO, so hat man für den Grenzfall $AO = 0$, also $r = R$, die folgenden Ausdrücke für Potential, Beschleunigung und Spannung (ϱ die Dichte):

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\gamma\, d\gamma \int_{r_0}^{r_1} \varrho\, r\, dr \quad ,$$

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_1(\cos\gamma)\, d\gamma \int_{r_0}^{r_1} \varrho\, dr \quad ,$$

$$S = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_2(\cos\gamma)\, d\gamma \int_{r_0}^{r_1} \varrho\, \frac{dr}{r} \quad ;$$

während also das Potential endlich bleibt, werden Beschleunigung und Spannung unbestimmt unendlich, wenn die obere Grenze von r unendlich wird; man kann das an einfachen Beispielen veranschaulichen.

Will man nun das Entfernungsgesetz modifizieren, so liegt es am nächsten, wie das Green und Hall getan haben, die Potenz 2 durch eine andere, natürlich wenig abweichende zu ersetzen; allein einmal beseitigt man damit das Seeligersche Bedenken nicht, und dann liefert die Korrektion, wenn sie auf den Merkur zugeschnitten wird (Exponent gleich 2,00000016), für andere Körper, z. B. für den Mond ganz ungeheuerliche Abweichungen. Dagegen leistet die von Seeliger vorgeschlagene Formel

$$K = k\, m\, m' \frac{e^{-\lambda r}}{r^2}$$

zunächst dies, daß jetzt die Integrale

$$\int_{r_0}^{r_1} \varrho\, e^{-\lambda r}\, r\, dr \quad , \qquad \int_{r_0}^{r_1} \varrho\, e^{-\lambda r}\, dr \quad , \qquad \int_{r_0}^{r_1} \varrho\, \frac{e^{-\lambda r}}{r}\, dr \quad ,$$

bestimmt und endlich bleiben auch für $r_1 = \infty$; und sodann wird die Veränderung der Perihellänge χ, wenn v die wahre Anomalie, a die große Halbachse und ε die Exzentrizität ist:

$$\varepsilon \frac{d\chi}{dv} = - \frac{\lambda a (1 - \varepsilon^2) \cos v}{1 + \varepsilon \cos v} \quad .$$

Aus dem Merkurwert folgt hiernach $\lambda = 0{,}00000038$, und hieraus Perihelbewegungen der anderen Sterne, wie sie freilich nicht beobachtet worden sind, aber doch von kleinen Beträgen. — Ähnliche Betrachtungen hat übrigens auch C. NEUMANN angestellt. — Die Ergänzung der Funktion durch ein Exponentialglied hat auch noch den Vorzug vor einer Änderung der Potenz, daß unsere Vorstellung von der Verbreitung der Kraft über Kugelflächen nicht gestört wird, sondern, gerade wie bei der Schwächung von Licht und Schall durch sphärische Ausbreitung und Absorption, bestehen bleibt.

Den SEELIGERschen Einwand kann man auch noch auf eine ganz andere Weise beseitigen, indem man nämlich, wie dies FÖPPL getan hat, in Analogie mit den elektrischen und magnetischen Vorstellungen, neben den positiven auch negative Massen einführt, und zwar so, daß die Gesamtmasse im Universum null würde; daß man keine negativen Massen, d. h. Abstoßung beobachtet, könnte daran liegen, daß eben infolge dieser Abstoßung alle negativen Massen bereits in große Ferne gelangt sind.

Wir kommen nun zu der zweiten Klasse von Ergänzungen des NEWTONschen Gesetzes, nämlich zu einer etwaigen Abhängigkeit der Kraft von anderen Faktoren. Es könnte nun von Einfluß sein: a) Die physikalische Natur, also Elastizität und Heterotropie des Stoffes; aber weder konnte v. EÖTVÖS Unterschiede zwischen physikalisch und chemisch verschiedenen Stoffen konstatieren, die über die Fehlergrenze hinausgegangen wären; noch haben die Versuche mit Kristallen bezw. mit dem Vorgange der Kristallisation, wie sie MACKENZIE, POYNTING und KREICHGAUER ausgeführt haben, etwas Positives ergeben. — b) Die chemische Umsetzung der Körper; damit kommt man auf die schon im Artikel „Grundbegriffe", p. 48 angeführten Versuche über Gewichtsänderung durch chemische Umbildung zurück; Versuche, die jedenfalls noch weiterer Klärung bedürfen. — c) Die Temperatur: nichts derartiges ist festgestellt. — d) Das umgebende Medium. Dieses Problem ist schon frühzeitig behandelt worden, namentlich im Hinblick auf vermeintliche oder wirkliche Abweichungen von Kometenbahnen. Schon LAPLACE hat eine Formel entwickelt, welche eine Art von Absorption im Medium statuiert und damit auf die SEELIGERsche Formel hinauskommt. Aus neuerer Zeit sei als Beispiel die Theorie von A. DE ST.-GERMAIN erwähnt. Indessen hat sich ein wirkliches Bedürfnis für die Mechanik des Himmels doch kaum ergeben; und für irdische Verhältnisse haben AUSTIN und THWING noch direkt mit der Drehwage, indem sie verschiedene Substanzen zwischen die aufeinander wirkenden Massen brachten, gezeigt, daß der Einfluß eines Mediums, wenn überhaupt vorhanden, jedenfalls unter $^2/_{1000}$ des Wertes liegt. — e) Die Zeit. Und zwar könnte hier zweierlei stattfinden: Erstens eine Änderung oder Schwankung der Gravitation mit der Zeit; tatsächlich liegt hierüber nichts vor, eine theoretische, auf energetischen Erwägungen beruhende Betrachtung von PICTET erscheint sehr angreifbar. Zweitens aber — und das bringt uns auf ein altes, für die elektrische sogen. Fernwirkung neuerdings gelöstes Problem — könnte die Gravitation Zeit brauchen, um von dem beeinflussenden zu dem beeinflußten Körper zu gelangen. Diese Hypothese ist von verschiedenen Astronomen, so von LEHMAN-FILHÈS und TH. V. OPPOLZER rechnerisch verfolgt worden, und es hat sich gezeigt, daß man, um die gegenwärtige Harmonie zwischen Erfahrung und Theorie nicht zu stören, die Geschwindigkeit ungeheuer groß selbst im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit annehmen müßte, und daß man die jetzt bestehenden Unstimmigkeiten doch nicht beseitigen würde. — f) Die Bewegung der Körper. Bisher wurde angenommen, daß es für die gravitierende Wirkung der Körper gleichgültig ist, ob sie ruhen oder sich bewegen; letzteres tun z. B.

die Himmelskörper mit zum Teil sehr beträchtlichen Geschwindigkeiten. Will man — ein Gedanke, den schon LAPLACE entwickelt hat — einen Einfluß dieser Bewegung auf die Gravitation formulieren, so wird man einfach eines der in der Elektrodynamik aufgestellten Gesetze herübernehmen. Dabei zeigt sich, daß sowohl das WEBERsche wie das RIEMANNsche Grundgesetz viel zu kleine Werte für die Merkurkorrektion liefern, wenn man die in dem Grundgesetz vorkommende Konstante gleich der Lichtgeschwindigkeit setzt; auch das GAUSSische Grundgesetz gibt noch zu wenig; eher könnte man zum Ziele gelangen, wenn man zwei dieser Gesetze, z. B. das RIEMANNsche und das WEBERsche, nach dem Vorschlag von LÉVY in passender Weise kombiniert, womit freilich eine sehr künstliche Komplikation geschaffen wird. In einfacherer Weise leistet dasselbe, nämlich genau die richtige Anomalie des Merkurperihels zu liefern, die von GERBER aufgestellte Potentialformel:

$$V = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{2}{c}\,\frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2}\left[\frac{dr}{dt}\right]^2\right) \quad ,$$

die sich aus dem Zeitverbrauch bei der Wirkung ableiten läßt.

Alles in allem kann man sagen, daß die Versuche, das NEWTONsche Gesetz zu modifizieren, zu ergänzen oder zu verallgemeinern, noch sehr im Flusse sind, und daß man, von wenigen sozusagen mikroskopischen Abweichungen abgesehen, dieses Gesetz noch immer als den vollkommenen Ausdruck aller himmlischen und irdischen Vorgänge vom Gravitationscharakter ansehen kann.

Erklärungen des Gravitationsgesetzes. Wenn man auf dem von KIRCHHOFF besonders scharf präzisierten Standpunkte (p. 42 u. 216) steht, daß die Naturforschung die Erscheinungen der Natur in einer Weise darzustellen habe, die Vollkommenheit mit möglichster Einfachheit verbindet, daß aber die letzten Ursachen dieser Erscheinungen außerhalb ihres Bereichs liegen, so muß man sich durch NEWTONsche Gesetz für völlig befriedigt erklären. Denn einerseits stellt es die Tatsachen, die es umspannt, vollständig dar, andererseits ist eine weitere Vereinfachung undenkbar, im Gegenteil, jede Analyse muß notwendig Komplikationen herbeiführen. Der Grund, trotzdem eine derartige Analyse vorzunehmen, kann also nur in der Abneigung zahlreicher Naturforscher gegen die Darstellung von Erscheinungen durch Fernkräfte und ihrem Wunsche, diese Fernkräfte durch Nahekräfte zu ersetzen, liegen. Daß diese letzteren nicht weniger unbegreiflich sind, als die ersteren, ist schon bei den Grundbegriffen behandelt worden; jener Grund ist also nicht stichhaltig. Nun kann man sagen, das Bedürfnis nach einer solchen neuen Theorie sei für die Gravitation dringend geworden, nachdem diese Theorie für die elektromagnetischen Erscheinungen die alte Fernwirkungstheorie gänzlich beseitigt hat. Darauf ist zu erwidern, daß das nicht aus erkenntnistheoretischen Gründen, sondern deshalb geschehen ist, weil die drei gegen die Fern- und für die Nahewirkung entscheidenden Tatsachen dort aufgefunden worden sind: die Zeitlichkeit der Ausbreitung der Wirkung, die Beeinflussung durch das Medium und die Beeinflussung des Mediums; von keiner dieser drei Erscheinungen ist bei der Gravitation etwas bekannt. Dies mußte vorangeschickt werden, um die im folgenden ganz kurz zu skizzierenden Theorien der Gravitation, unter denen manche sehr geistvolle und einige relativ exakt durchgeführte sind, prinzipiell zu kennzeichnen.

Eine Klassifikation der Theorien ist einheitlich kaum durchzuführen, da sie sich durch verschiedene, miteinander kombinierte Annahmen unterscheiden: atomistische oder stetige Konstitution der Materie oder des Äthers oder beider, Druck- oder Stoßkräfte, mechanischer oder elektromagnetischer Charakter der Vorgänge u. s. w. Im folgenden werden daher die beiden hauptsächlichen Theorien vorangestellt und die übrigen hinterher kurz erwähnt; die Darstellung folgt dabei

der von KORN in der Einleitung seines Werkes gegebenen, unter Ergänzung durch die sehr reichhaltigen Angaben von ZENNECK.

Ätherstöße. Die Teilchen des Äthers schwirren nach den Grundanschauungen der kinetischen Gastheorie nach allen Richtungen und treffen dabei unter Umständen auf die in dem Äther eingebetteten materiellen Teilchen; hat man deren zwei, so wird dadurch ihre Verbindungslinie zu einer Art von Symmetrielinie für die Stöße, und es resultiert eine Wechselwirkung zwischen den beiden Massen. Dabei kann man, wie das zuerst LESAGE, der Urheber der Theorie und später Lord KELVIN getan haben, die Stöße als vollkommen elastisch betrachten, so daß die Ätherteilchen nach dem Stoße mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit zurückfliegen; oder man kann, wie ISENKRAHE, von Elastizität überhaupt absehen, so daß die auftreffenden Ätherteilchen im Massenteilchen zur Ruhe kommen und sozusagen in ihm aufgehen. Die elastische Theorie hat den Übelstand, daß die zur Gravitation Veranlassung gebende „Schirmwirkung" des einen Teilchens auf das andere durch die Reflexion von Ätherteilchen gerade wieder ausgeglichen wird, so daß gar keine Wirkung zustande kommt; die unelastische Theorie ergibt eine fortwährende Zerstörung von Energie, von der man nicht weiß, was aus ihr wird. Beide Annahmen machen weitere Hilfshypothesen nötig, um die Proportionalität mit den Massen und die inverse mit dem Quadrat der Entfernung zu liefern; insbesondere muß man die Körper als porös für die Ätherteilchen annehmen, ob man hierunter nun eine physikalische oder atomistische Porosität verstehe. Weitere Schwierigkeiten haben TOLVER PRESTON, RYSANECK, JAROLIMEK u. A. durch Annahmen über die Weglänge der Teilchen zu beseitigen versucht; es bleiben aber noch zahlreiche Schwierigkeiten übrig, die eine ausgedehnte Literatur erzeugt haben; es sei besonders auf die Einwände von CROLL, BOCK und P. DU BOIS-REYMOND hingewiesen.

Hydrodynamische Theorie. Pulsationen. Der Ätherstoßtheorie steht die hydrodynamische gegenüber, bei der das Zwischenmedium formal als ein Kontinuum betrachtet wird, so daß man die klassische Mechanik, insbesondere das D'ALEMBERTsche Prinzip anwenden kann; die Gleichungen, die sich dabei ergeben, werden besonders einfach, wenn man dem Äther nahezu vollständige Inkompressibilität zuschreibt; das Erhaltungsprinzip ist dabei, als Ausfluß des D'ALEMBERTschen Prinzips, von selbst gewahrt. Dagegen dürfen hier die ponderablen Massen nicht als ruhend, sondern sie müssen als bewegt angenommen werden; die Art dieser Bewegung wird dadurch bestimmt, daß sich die Gravitationswirkung einer kugelförmigen Masse ohne Bevorzugung einer Richtung nach allen Seiten in gleicher Weise fortpflanzen muß. Damit gelangt man zu der zuerst von BJERKNES eingeführten und theoretisch und experimentell sehr elegant und gründlich durchgearbeiteten Lehre von den Pulsationen von Kugeln in einer Flüssigkeit, d. h. es wird der Radius eines kugelförmigen Massenteilchens

$$R = R_0 + A \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

gesetzt, wo A die Amplitude und T die Periode der Pulsation ist; im übrigen ist, soweit es sich um die Lehre als solche handelt, auf den späteren Artikel „Gemeinschaftliche Bewegung fester und flüssiger Körper" zu verweisen. Diese Theorie ist nun von KORN aufgenommen und zu einer Theorie der Gravitation ausgebildet worden. Denkt man sich also den Raum von einer nahezu inkompressiblen Flüssigkeit von sehr geringer Dichte erfüllt und in diesem Medium relativ leicht kompressible, pulsierende Kugeln von gleicher Periode und Phase in relativ großen Abständen voneinander verteilt, so erhält man genau das Gravitationsgesetz. Bei der Kleinheit der Kompressibilität, die man annimmt, wird die Wellenlänge groß sein gegen die Entfernungen, z. B. im Sonnensystem, so daß der Einwand, bei einem Abstand von mehr als einer halben Wellenlänge

gehe die Anziehung in eine Abstoßung über, irrelevant wird. Die Frage, woher es komme, daß alle Massenteilchen gewissermaßen aus eigenem Antrieb mit gleicher Periode und Phase pulsieren, wird mit einem Schlage gelöst, wenn man alle diese Pulsationen dadurch erzeugt denkt, daß auf dem ganzen Raume, also z. B. auf dem gesamten Sonnensystem, ein äußerer periodischer Druck lastet, der unter den angenommenen Verhältnissen auf alle Körper in gleicher Weise wirken muß. Eine Schwierigkeit bietet schließlich die irdische Schwere, weil man hier die Entfernung nicht mehr als klein gegen die Körper (Erde) ansehen kann. Man hat hier zwei Auswege: entweder denkt man sich die Erde selbst wieder aus lauter weit zerstreuten Teilchen zusammengesetzt, oder man betrachtet den Spezialfall der Wirkung einer pulsierenden Kugel auf eine sehr viel kleinere nahe ihrer Oberfläche; es zeigt sich dann durch Rechnung, daß in diesem Falle die Eigenpulsation des kleinen Körpers gar nicht in Betracht kommt, und das entspricht ganz der Tatsache, daß für den Fall der Körper auf der Erde ihre Masse gleichgültig ist. Später hat KORN auch die Absorption (das Exponentialglied SEELIGERS) berücksichtigt, und zwar in einer nach und nach verallgemeinerten Form, so daß sich schließlich das allgemeinste Gravitationsgesetz auf Grund der Theorie der universellen Schwingungen ergibt, und zwar in der Form (die Zeichen verstehen sich leicht):

$$G = -m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial r}\left[f_1 \frac{e^{-\lambda r}}{r} \cos \varkappa r + f_2 \frac{e^{-\lambda r}}{r} \sin \varkappa r\right] .$$

Andere Theorien. Statt der Pulsationen kann man auch — und das ist viel früher, zuerst schon durch HOOKE, geschehen — Schwingungen annehmen, und zwar entweder in den Massenteilchen oder nur im Äther, während jene absorbierend wirken. Noch einfacher, aber ebenso wenig befriedigend in ihren Folgerungen ist die schon von NEWTON herrührende Annahme, daß es sich einfach um Strömungen im Äther handle, die durch Druckdifferenzen hervorgerufen seien. Die Literatur über diese Vorstellung ist besonders reich. Endlich nimmt PEARSON, der anfangs auch die Pulsationen vertrat, später an, daß sich im Äther dauernd Stellen finden, wo der Äther ein- oder ausströmt, also Quellen und Senken (vgl. p. 71); natürlich erhält man auf diese Weise außer den positiven auch negative Massen.

Elektromagnetische Theorie. Mit den letzten Betrachtungen haben wir uns schon merklich der letzten Klasse von Theorien genähert, den elektrischen und elektromagnetischen. Eine elektrische Theorie hatte schon MOSSOTTI entwickelt; hiernach soll zwischen zwei Körpermolekeln sowie zwischen zwei Ätheratomen Abstoßung, dagegen zwischen einer Körpermolekel und einem Ätheratom Anziehung stattfinden, die letztere soll überwiegen. Die Theorie ist dann von ZÖLLNER und W. WEBER auf dem Boden der Fernwirkungstheorie verbessert worden. In feldtheoretischer Form ist sie von H. A. LORENTZ und W. WIEN entwickelt worden. Jedoch haben alle diese Versuche qualitative oder quantitative Erfolge hinsichtlich der Darstellung der Erscheinungen und ihrer Anomalien bisher nicht gehabt.

Literatur zum Abschnitt D.

(Es sind, außer den im Text zitierten, auch eine Reihe von Abhandlungen aufgenommen, die oben nicht erwähnt werden konnten; dagegen sind die schon unter C. zitierten Arbeiten nicht wiederholt. Zusammenfassungen der ganzen Lehre oder einzelner Teile findet man namentlich bei ISENKRAHE, DRUDE, KORN und ZENNECK). Anordnung alphabetisch.

L. W. AUSTIN u. C. B. THWING, Phys. Review **5**. 294. 1897. — C. A. BJERKNES, mehrere verstreute Abhandlungen, gesammelt in dem von V. BJERKNES herausgegebenen Werke: Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte. Leipzig 1900. — A. M. BOCK, Inaug.-Diss. München 1891. — P. DU BOIS-REYMOND, Naturw. Rundschau **3**. 169. 1888. — W. BROWNE,

Phil. Mag. (5) **10.** 437. 1894. — C. CHREE, Proc. Edinb. math. soc. **11.** 107. 1892—93. — J. CROLL, Phil. Mag. (5) **5.** 45. 1877. — N. v. DELLINGHAUSEN, Grundzüge einer Vibrationstheorie der Natur. Reval 1872; Das Rätsel der Gravitation. Stuttgart 1880; Kosmos (Stuttgart) **1.** 1884. — P. DRUDE, WIED. Ann. **62.** (Anhang) 1897. — R. v. EÖTVÖS, Math. Ber. aus Ungarn **8.** 65. 1891; WIED. Ann. **59.** 354. 1896. — A. FÖPPL, Münch. Ber. **27.** 93. 1897. — FRITSCH, Progr. Realsch. Königsberg 1874 und 1886. — P. GERBER, Ztschr. f. Math. u. Phys. **43.** 93. 1898; Progr. Realg. Stargardt 1902. — G. GREEN, Cambr. Trans. 1835. p. 403. — J. HÄDICKE, Dis Lösung des Rätsels u. s. w. Leipzig, Barth, 1902. — M. HALL, Astron. Journal **14.** 45. — J. W. HÄUSSLER, Rep. d. Phys. **22.** 501. 1886; **24.** 60. 1888. — G. HELM, Ztschr. f. Math. u. Phys. **23.** 261. 1878. — J. v. HEPPERGER, Wien. Ber. **97.** 337. 1888. — G. HOLZMÜLLER, Ztschr. f. Math. u. Phys. 1870. p. 69. — R. HOOKE, An attempt to prove the motion of the earth. London 1674. — C. ISENKRAHE, Progr. Gymn. Krefeld 1877—78; Das Rätsel von der Schwerkraft. Braunschweig 1879; Über die Fernkraft u. s. w. Leipzig 1889; Ztschr. f. Math. u. Phys. **37.** (Suppl.) 163. 1892. — H. JANUSCHKE, Progr. Realsch. Teschen 1893. — A. JAROLIMEK, Wien. Ber. **88.** 897. 1883. — A. KORN, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlagen der Hydrodynamik. 2. Aufl. Berlin 1898; vorher schon verstreute Abhandlungen. Mitt. math. Ges. Charkow 1903; Münch. Ber. **33.** 383. 563. 1903. — D. KREICHGAUER, Berl. phys. Ges. **10.** 13. 1891. — E. LAMPE, Rep. de Phys. **23.** 571. 1887; **24.** 324. 1888. — LAPLACE, Méc. cél. **4** und **5.** — A. LEAHY, Cambr. phil. Trans. **14.** 45. 1885. — R. LEHMANN-FILHÈS, Astr. Nachr. **110.** 208. 1895. — LESAGE, Berl. Mem. 1782. — M. LÉVY, C. R. **110.** 545. 1890. — H. A. LORENTZ, Versl. Akad. Amst. 1899 bis 1900. p. 603. — A. S. MACKENZIE, Phys. Review **2.** 321. 1895. — R. MEWES, Stein der Weisen **7.** 321. 1895. — O. F. MOSSOTTI, S. l. forces, qui régissent la const. int. des corps. Turin 1836. — C. NEUMANN, Leipz. Abh. 1874; Allgemeine Untersuchungen über das Prinzip der Fernwirkung. Leipzig 1896. — S. NEWCOMB, The elements of the inner planets. Washington 1895. — I. NEWTON, Phil. nat. pr. math. — J. ODSTRČIL, Wien. Ber. **89.** 485. 1884. — TH. VON OPPOLZER, Naturf.-Vers. Salzburg 1881. — C. PEARSON, Quart. Journ. **20.** 60. 1883; Cambr. Trans. **14.** 71. 1889; Lond. math. Proc. **20.** 38. 1889; Am. Journ. of math. **13.** 419. 1898. — R. PICTET, Arch. Gen. (6) **3. 7.** 513. 1882. — J. H. POYNTING, Nat. **62.** 403. 1900. — J. H. POYNTING u. P. L. GRAY, Proc. Roy. Soc. **64.** 120. 1898. — TOLVER PRESTON, Phil. Mag. (5) **4.** 200. 364. 1877; (5) **15.** 391. 1881; Wien. Ber. **87.** 795. 1883; Inaug.-Diss. München 1894. — B. RIEMANN, Ges. Werke. 2. Aufl. p. 529. — A RYSANEK, Rep. de Phys. **24.** 90. 1887. — A. DE SAINT-GERMAIN, C. R. **110.** 1184. 1890. — K. SCHLICHTING, Progr. Lüben 1891. — SCHRAMM, Die allgemeine Bewegung der Materie. Wien 1872. — C. SEEGERS, Inaug.-Diss. Göttingen 1864. — H. SEELIGER, Astr. Nachr. **137.** 129; **138.** 51. 255. 1895; Münch. Ber. **26.** 371. 1896. — H. SERVUS, Inaug.-Diss. Halle 1885. — SPILLER, Die Urkraft des Weltalls. Berlin 1876. — P. TANNERY, Soc. sc. phys. de Bord. (3) **5.** 1890. — W. THOMSON, Trans. Edinb. Soc. 1867 und 1872. — F. TISSÉRAND, C. R. **75.** 760. 1872; **110.** 113. 1890. — A. VASCHY, Journ. de Phys. (2) **5.** 165. 1886. — J. H. WEBER, Prometheus **9.** 241. 257. 1898. — W. WEBER, Ges. Werke. — W. WIEN, Arch. néerl. 1900. — J. WILSING, Astr. Nachr. **137.** 387; **138.** 254. 1895. — J. YARKOWSKI, Hypothèse cinétique de la gravitation etc. Moscou 1888. — J. ZENNECK, Gravitation, in der Enz. d. math. Wiss. V **1.** 25. 1903. — F. ZÖLLNER, Erklärung der universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektrizität. Leipzig 1882.

Elastizität im allgemeinen.

Von F. AUERBACH.

A. Die Grundbegriffe.

Einleitung. Wie im Artikel „Allgemeine Mechanik" ausgeführt wurde (p. 212), steht der allgemeinen die spezielle Mechanik gegenüber. Jene behandelt diejenigen Bewegungen, bei denen die Körper als solche ungeändert bleiben, also lediglich ihren Ort und ihre Lage im Raume verändern (bezw. im Falle der Statik beibehalten). Die Natur der Körper kommt hierbei nicht in Betracht, ausgenommen ihre Masse bezw. die Dichte der sie bildenden Stoffe. In der speziellen Mechanik, in der es sich um die Veränderungen der Körper in sich handelt, ist das begreiflicherweise anders; hier kommt die Natur der Körper bezw. der sie bildenden Stoffe ganz wesentlich in Betracht. Diese ihre Natur nennt man ganz allgemein ihre Elastizität. Wie also die Masse eines Körpers sein Widerstand gegen Lagenveränderung im ganzen, so ist die Elastizität der Widerstand gegen Lagenveränderung der Teile des Körpers im einzelnen und gegeneinander. Die Gesamtbewegungen kommen hier also nicht Betracht, und man wird, um sie auszuschalten, immer einen oder einige Punkte des Körpers als fest ansehen; wo dies nicht angängig ist, hat man die Gesamtbewegung am Schlusse zu der elastischen einfach hinzuzufügen. — Wie in der allgemeinen Bewegung dem empirischen Begriff der Beschleunigung der abstrahierte der Kraft zur Seite gestellt wird, so stehen sich hier elastische Veränderung und elastische Beanspruchung gegenüber; und wie dort unter dem Gleichgewicht der Kräfte und Impulse Ruhe eintritt, so spielt auch hier der elastische Gleichgewichtszustand eine besondere Rolle; er tritt ein, wenn die äußere Beanspruchung gerade gleich der inneren Gegenkraft ist, die sie erzeugt hat, und auch diese Gegenkraft nennt man nicht selten Elastizität.

Beanspruchung und Veränderung. Für die beiden Begriffe, die sonach im Gebiet der Elastizitätserscheinungen im wechselseitigen Verhältnis von Ursache und Wirkung stehen, besitzt die deutsche Sprache keine in jeder Hinsicht passende Ausdrücke; mangels besserer wird man von Beanspruchung als Ursache und von Veränderung als Wirkung sprechen dürfen; diese Veränderung ihrerseits ruft dann in dem Körper eine auf die Flächen wirkende Gegenkraft oder einen Zustand wach, den man als Zwang oder Spannung bezeichnen kann. Die englische Sprache hat dafür die bequemen Worte stress und strain, die man, ohne gleich speziell zu werden, nicht übersetzen kann. In bezug auf den Stress oder die Beanspruchung ist ferner die zwiefache Möglichkeit gegeben, die wirkliche Größe für die beanspruchte Fläche oder den Wert pro Flächeneinheit (Dyne/qcm) darunter zu verstehen; es empfiehlt sich, das letztere zu tun, in

Fällen aber, wo der ganze Druck gemeint ist, dies ausdrücklich zu betonen. Es gibt, wie schon die gewöhnlichsten Fälle der Praxis lehren, zahlreiche Arten von Beanspruchung und ebenso zahlreiche entsprechende Veränderungen; so die einseitige und die allseitige Dehnung und ihr Gegenteil, die einseitige und die allseitige Zusammenziehung; die Biegung, die Scherung und die Drillung; und, kinetisch, die Versetzung in Schwingungen der verschiedenen Art, die Stoßwirkung u. s. w. Es ist nun leicht einzusehen, daß man alle diese Veränderungen auf zwei Grundtypen zurückführen bezw. aus ihnen zusammensetzen kann.

Volumenänderung und Gestaltänderung. Man braucht sich zu diesem Zwecke nur daran zu erinnern (vgl. „Grundbegriffe", p. 8 u. 18), daß ein Körper durch sein Volumen einerseits und seine Gestalt andererseits charakterisiert ist. Demnach wird es zwei Gattungen elastischer Veränderungen geben, nämlich reine Volumenänderungen einerseits und reine Gestaltänderungen andererseits; bei jenen bleibt der Körper sich selbst ähnlich, er wird nur, und zwar nach allen Richtungen in gleichem Maße, größer oder kleiner; bei diesen behält er immer dasselbe Volumen bei; bei jenen ist die Winkeltreue, bei diesen die Volumentreue gewahrt, und zwar entweder nur im äußerlichen Sinne oder — und das ist es, worauf es schließlich ankommt — in dem Sinne, daß auch in den einzelnen Teilen des Körpers bis auf seine Elemente hinab die Winkel- bezw. die Volumentreue gewahrt bleibt. Die Veränderung der Gestalt heißt Deformation — ein Ausdruck, der freilich auch im allgemeinen Sinne von Veränderung überhaupt gebraucht wird; die Veränderlichkeit der Gestalt heißt Deformabilität, ihr reziprokes, also der Widerstand gegen Gestaltsänderung, heißt Gestalts- oder Deformationselastizität; die Veränderung des Volumens heißt Kompression, seine Veränderlichkeit Kompressibilität oder Zusammendrückbarkeit, wenn es sich um Verkleinerung, Dilatation bezw. Dilatabilität oder Ausdehnbarkeit, wenn es sich um Vergrößerung des Volumens handelt, das reziproke heißt Volumen- oder Kompressionselastizität. Im allgemeinen wird sich eine elastische Veränderung aus beiden Typen zusammensetzen, und daraus entsteht eine große Mannigfaltigkeit. Andererseits sind die beiden Typen nur bei homogenen und isotropen Körpern einfache Größen; insbesondere werden sich heterotrope Körper nach verschiedenen Richtungen verschieden verhalten.

Aggregatzustände. Das verschiedene Verhalten der verschiedenen Körper gegen die beiden typischen Beanspruchungen führt sofort zu einer sehr deutlichen Klassifikation der Stoffe (man vergleiche hierzu das schon im Artikel „Grundbegriffe", p. 55, Gesagte).

a) Feste Körper. Sie zeigen in keiner von beiden Hinsichten ein spezialisiertes Verhalten; sie beanspruchen nämlich, um in endlichem Maße verändert zu werden, endliche Kräfte, und zwar sowohl für die Deformation als auch für die Kompression; mit anderen Worten, in beiden typischen Fällen — und damit auch in allen zusammengesetzten Fällen — sind Ursache und Wirkung von gleicher Größenordnung. Äußerlich macht sich das dadurch geltend, daß sie eine selbständige Gestalt und ein selbständiges Volumen besitzen; man kann also bei ihnen von einem natürlichen und einem erzwungenen Volumen und ebenso von einer natürlichen und von einer erzwungenen Gestalt sprechen. Auch für die Ausbreitung einer Beanspruchung in ihrem Innern besteht keinerlei Vereinfachung: in jedem Punkte gibt es eine Normal- und eine Tangentialkomponente des Druckes, also, bei der Auflösung jeder dieser Größen in ihre rechtwinkligen Komponenten, sechs gleichwertige Druckkomponenten; mit anderen Worten: der elastische Druck pflanzt sich in ihnen im allgemeinen schief und in verschiedenen Richtungen mit verschiedener Stärke fort. Und zwar gilt alles das nicht etwa nur bei heterotropen, sondern, außer in ganz speziellen Fällen der Beanspruchung und Körperform, auch für die isotropen Körper. Dabei sind aber andererseits die Drucke

in verschiedenen Richtungen im allgemeinen durchaus nicht voneinander unabhängig, es bestehen bestimmte Beziehungen, die sich von Fall zu Fall anders gestalten; und hierdurch wird die Lehre von beträchtlicher Komplikation.

Man pflegt die Lehre von den elastischen Deformationen der Körper festen Aggregatzustandes als Elastizitätslehre im engeren Sinne zu bezeichnen; sie zerfällt naturgemäß einmal in eine elastische Statik und eine elastische Dynamik, sodann in eine Lehre von den isotropen und eine solche von den heterotropen Körpern, als welche namentlich die Kristalle in Betracht kommen; endlich in eine Lehre von den elastischen Veränderungen im engsten Sinne, nämlich soweit sie vorübergehender Natur sind, und in eine vielfach als Lehre von der Kohäsion bezeichnete Lehre von den bleibenden Veränderungen der Körper.

b) Flüssigkeiten, worunter hier speziell tropfbare Flüssigkeiten zu verstehen sind. Sie zeigen in bezug auf jeden der beiden typischen Elementarvorgänge ein spezielles Verhalten, und zwar in bezug auf beide ein entgegengesetztes. Der deformierenden Beanspruchung setzen sie nämlich einen sehr kleinen Widerstand entgegen, es ist also zur Erzielung einer endlichen Deformation nur eine sehr kleine Kraft erforderlich; andererseits setzen sie einer komprimierenden Beanspruchung einen sehr großen Widerstand entgegen, zur Erzielung einer endlichen Kompression ist also eine sehr große Kraft erforderlich. Übertreibt man nun dieses Verhalten aufs äußerste, so gelangt man zu der Abstraktion einer idealen Flüssigkeit: eine solche ist ohne Kraftaufwand deformierbar und andererseits überhaupt nicht komprimierbar; sie hat ein durchaus selbständiges und natürliches Volumen, aber gar keine selbständige Gestalt, sie würde zerfließen, wenn man ihr nicht durch feste Wandungen Halt böte. Indessen ist in letzterer Hinsicht eine Einschränkung vorzunehmen, und zwar im Hinblick auf die Gesamtheit der unter dem Namen der Kapillarität zusammengefaßten Erscheinungen: diese führen in gewissem Sinne schließlich doch zu selbständigen Gestalten (Tropfen, Häutchen, Blasen u. s. w.); man pflegt deshalb die Lehre von der Kapillarität von der eigentlichen Mechanik der Flüssigkeiten, der sogen. Hydromechanik, abzutrennen und für sich zu behandeln.

Es sei bemerkt, daß der Ausdruck „ideale Flüssigkeiten" nicht immer in gleichem Sinne gebraucht wird; es wird zuweilen darunter nur die unendlich kleine Deformationselastizität verstanden, so daß man, wenn man außerdem noch die unendlich große Kompressionselastizität festsetzen will, sagen muß: ideale inkompressible Flüssigkeiten. In Wahrheit hat jede Flüssigkeit eine gewisse, wenn auch sehr kleine Kompressibilität, und sie ist für die verschiedenen tropfbaren Flüssigkeiten verschieden groß. Auch hat jede Flüssigkeit einen gewissen Widerstand gegen Gestaltsänderung, den man, wobei freilich noch gewisse andere, hier nicht näher zu berührende Gesichtspunkte in Betracht kommen, als Zähigkeit oder innere Reibung bezeichnet. Je zäher eine Flüssigkeit ist, desto mehr entfernt sie sich vom Typus einer idealen Flüssigkeit, desto mehr nähert sie sich, wenn die Zähigkeit schließlich ganz besonders groß wird, dem Charakter des festen Körpers, und es gibt Fälle, wo die Grenze sich verwischt.

c) Gase, auch kompressible Flüssigkeiten genannt. Hiermit ist bereits angedeutet, daß Flüssigkeiten und Gase einander näher stehen, als jede von ihnen den festen Körpern; das Gemeinsame ist eben das spezialisierte Verhalten gegenüber den Beanspruchungen, aber die Art der Spezialisierung ist nur zum Teil die gleiche, zum Teil aber ganz verschiedenartig. Gemeinsam ist den Gasen mit den Flüssigkeiten, daß der Widerstand gegen Deformation sehr klein ist; er ist hier sogar noch kleiner, wenigstens wenn man gleiche Volumina vergleicht; setzt man ihn geradezu gleich null, so erhält man die Abstraktion des idealen Gases; bei den wirklichen Gasen ist aber eine gewisse, wenn auch kleine Zähigkeit oder innere Reibung vorhanden. Ist dies das Gemeinsame zwischen

Gasen und Flüssigkeiten, so haben dagegen die Gase ein ganz besonderes und sehr merkwürdiges Verhalten gegen Volumenbeanspruchung. Ihr Widerstand gegen Kompression ist nämlich bei weitem nicht so groß wie bei jenen, er ist von endlichem Betrage, d. h. Kraft und Wirkung sind wie bei den festen Körpern von gleicher Größenordnung. Ein Widerstand gegen Volumenvergrößerung andererseits ist nicht nur nicht vorhanden, sondern das Gas nimmt sogar von selbst jeden ihm dargebotenen Raum ein; mit anderen Worten: die Gase haben weder eine selbständige Gestalt noch ein selbständiges Volumen, ihr natürliches Volumen ist, soweit man von ihm sprechen kann, unendlich, ihr natürlicher Zustand der unendlicher Zerstreuung. Auch dies ist freilich eine zu weitgehende Abstraktion, ein wirkliches Gas hat Spuren von Kohäsion, und die verschiedenen Gase haben sie in verschiedenem Maße. Die Gase werden in der Aeromechanik behandelt — allerdings nur bis zu einem, sehr beschränkten Grade, da bei dem angedeuteten Verhalten der Gase die Temperatur bei ihnen eine so große Rolle spielt, daß die meisten Erscheinungen, die sie darbieten, in das Gebiet der Wärmelehre verwiesen werden müssen.

Die hier zunächst folgenden Artikel befassen sich ausschließlich mit Körpern des festen Aggregatzustands, also mit der Elastizitätslehre im engeren Sinne.

Elastizitätsmoduln und Elastizitätskoeffizienten. Die einfachste Beziehung, die man zwischen einer bestimmten Art von Beanspruchung und der ihr entsprechenden Veränderung aufstellen kann, ist offenbar die Proportionalität. Man erhält alsdann zwei verschiedene Proportionalitätsfaktoren, je nachdem man die Veränderung als Vielfaches der Beanspruchung oder die Beanspruchung als Vielfaches der Veränderung ausdrückt. Die Nomenklatur ist in diesem Falle sehr schwankend und es ist fast die Hoffnung aufzugeben, daß es noch gelingen werde, Einheitlichkeit durchzusetzen. Am verbreitetsten und am geeignetsten zu gleicher Zeit ist die Bezeichnung des Faktors

(1) $$V = \varepsilon B$$

(V die Veränderung, B die Beanspruchung) als Elastizitätskoeffizient, dagegen die Bezeichnung des Faktors

(2) $$B = E V$$

als Elastizitätsmodul; beide sind offenbar reziprok zueinander, d. h. es ist:

(3) $$\varepsilon = \frac{1}{E}\,, \qquad E = \frac{1}{\varepsilon}\,,$$

und es ist:

$$\varepsilon = \frac{V}{B}\,, \qquad E = \frac{B}{V}\,,$$

in Worten: der Elastizitätskoeffizient ist das Verhältnis der elastischen Veränderung zur Beanspruchung, der Modul das Verhältnis der Beanspruchung (oder des ihr gleichen inneren Zwanges) zur Veränderung.

Natürlich handelt es sich hier, gleichviel ob man den Modul oder den Koeffizienten ins Auge faßt, nicht um einen einzelnen Begriff, sondern um eine ganze Begriffskategorie, insofern jeder Art von Beanspruchung ein anderer Modul bezw. Koeffizient entspricht; und es wird sich in jedem der Einzelfälle darum handeln, die Begriffe „Veränderung" und „Beanspruchung" näher zu präzisieren.

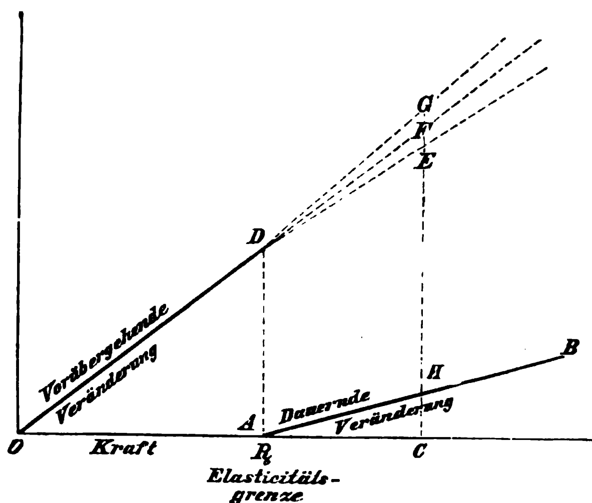
Jede der beiden Größen hat gewisse prinzipielle und praktische Vorzüge: der Koeffizient den, daß er von der primären Beanspruchung ausgeht, der Modul den, daß er, wie die Masse, einen Widerstand gegen Veränderung darstellt; letzterer Vorteil gibt, sowohl erkenntnistheoretisch wie für praktische Zwecke, den Ausschlag, es wird daher fast allgemein mit Moduln gerechnet (vgl. jedoch im Artikel „Zug und Druck"). Für die meisten Arten von Beanspruchung und für

die meisten Stoffe ist im absoluten Maße der Koeffizient eine sehr kleine, der Modul eine sehr große Zahl. Er ist aber für die verschiedenen Stoffe von sehr verschiedenem Werte, und auch für einen und denselben Stoff hängt er von besonderen Umständen, der Struktur, der Temperatur u. s. w. ab. Für verschieden große Beanspruchungen gleicher Art dagegen ist er, solange die obige Grundannahme der Proportionalität zwischen Beanspruchung und Veränderung richtig ist, konstant. Für kleine Beanspruchungen ist das, wie wenigstens früher angenommen wurde und auch den Verhältnissen bei fast allen infinitesimalen Vorgängen entspricht, der Fall; es haben sich aber neuerdings kleine Abweichungen hiervon geltend gemacht, die eine Modifikation der Grundannahme erfordern.

Elastizitätsgrenze; dauernde Veränderung. Für mehr und mehr wachsende Beanspruchung tritt dann aber die Komplikation ein, daß die durch sie erzeugte Veränderung nicht mehr ausschließlich vorübergehenden Charakters, d. h. elastisch im engeren Sinne ist, daß vielmehr ein Teil von ihr dauernd bestehen bleibt, auch nachdem die Beanspruchung aufgehoben wurde. Man nennt die Stelle, wo dies eintritt, die Elastizitätsgrenze, muß aber bedenken, daß dies keine exakte Größe, sondern ein von der Genauigkeit der Feststellung in endlichem Grade abhängiger Begriff ist, der nur durch eine praktische Übereinkunft festgelegt werden kann. Auch kommt als erschwerend die Tatsache hinzu, daß der Dauerzustand nicht sofort, sondern erst ganz allmählich eintritt, und daß er nach Grad und zeitlicher Ausbildung davon abhängt, wie lange die Beanspruchung angedauert hat — eine Gesamtheit von Beziehungen, die man als elastische Nachwirkung bezeichnet (s. d. betr. Artikel).

Die Elastizitätsgrenze läßt sich nun offenbar in verschiedener Weise charakterisieren: einmal durch die Grenzbeanspruchung, die eben eine merkliche Veränderung zurückläßt; oder aber durch die dieser Grenzbeanspruchung entsprechende vorübergehende Veränderung, d. h. diejenige vorübergehende Veränderung, von der eben noch nicht oder eben schon ein Teil dauernd bestehen bleibt: die Grenzveränderung. Dieser letztere Begriff nun bietet, von seiner wissenschaftlichen Bedeutung abgesehen, noch ein besonderes Interesse dar, insofern er, wie eine einfache Betrachtung lehrt, das ist, was man im allgemeinen Sprachgebrauch gewöhnlich meint, wenn man einen Stoff als stark elastisch bezeichnet: man meint damit weder seinen großen Modul (denn Kautschuk z. B. hat einen sehr kleinen Widerstand gegen Dehnung), noch auch seine hohe Grenzbeanspruchung (diese ist bei Kautschuk ebenfalls nicht sehr beträchtlich), sondern die Grenzveränderung (Kautschuk kehrt noch nach einer sehr beträchtlichen vorübergehenden Dehnung in den ursprünglichen Zustand zurück). Die beiden hier eingeführten Maße der Elastizitätsgrenze, die Grenzbeanspruchung und die Grenzveränderung, würden offenbar, wenn das Proportionalitätsgesetz soweit gültig bliebe, zueinander im Verhältnis des Moduls stehen, sie tun es tatsächlich, wenn man den Begriff des Moduls erweitert und darunter den jeweiligen, durch die Annäherung an die Grenze modifizierten Wert des Moduls versteht. Die Grenzveränderung oder, wie man nach dem Obigen auch sagen kann, die populäre Elastizität, ist also das Verhältnis der Grenzbeanspruchung zum Modul. Den Bereich, innerhalb dessen ein Körper nach Aufhebung der Beanspruchung seinen ursprünglichen Zustand wieder annimmt, nennt man den Bereich seiner elastischen Vollkommenheit, und die elastische Vollkommenheit selbst kann man sodann zu einem Maßbegriff machen, indem man darunter die Höhe der Grenzbeanspruchung versteht; indessen herrscht in dieser Hinsicht keine Übereinstimmung der Bezeichnung. In der Figur 153 ist R_0 die Elastizitätsgrenze, also OR_0 der Bereich der elastischen Vollkommenheit, von da nach rechts ist der Körper elastisch unvollkommen, d. h. er erfährt eine dauernde Veränderung AHB; damit steht es offenbar im Zusammenhang, daß die bis dahin proportionale vorübergehende Veränderung OD jetzt nicht mehr gleichförmig wächst wie DE, sondern stärker, also wie DG, wo EG gleich CH ist; oder

eventuell nur wie CF, wo EF gleich $\frac{1}{2} CH$ ist — Einzelheiten, über die natürlich nur der Versuch entscheiden, und für die es begreiflicherweise auch auf die näheren Umstände des Versuchs ankommen wird.



Figur 153.

Festigkeit. Wird die Beanspruchung noch weiter getrieben, so gelangt man früher oder später zu einem Punkt, wo das Verhalten des Körpers eine neue Abnormität aufweist: er gibt an gewissen Stellen den Zusammenhang seiner Teile auf, er zerbricht, zerreißt, springt, wird zertrümmert, zerdrückt, zerquetscht u. s. w. Die Beanspruchung, bei der dies eintritt, heißt die Festigkeit, und es ist klar, daß das wiederum eine ganze Kategorie von Größen ist, je nach der Art der Beanspruchung, um die es sich handelt. Die Festigkeit der verschiedenen Stoffe ist sehr verschieden, und die eines und desselben Stoffes sehr verschieden für verschiedene Arten der Beanspruchung sowie für verschiedene Begleitumstände. Der den Zusammenhang der Teile aufhebenden Beanspruchung entspricht wiederum eine bestimmte Veränderung, eben diejenige, welche nicht mehr ertragen wird, und auch diese ist sehr verschieden. Das Verhältnis beider Größen wird aber hier auch nicht annähernd mehr durch den normalen Modul dargestellt, weil eben der Bereich der normalen Verhältnisse längst verlassen ist.

Von besonderem Interesse ist das gegenseitige Lageverhältnis der beiden somit festgestellten singulären Punkte des Beanspruchungsprozesses: der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit. Zwischen beiden liegt ein gewisser Bereich, nämlich der der zwar unvollkommenen, aber noch mit Kontinuität verträglichen Elastizität; aber die Größe dieses Bereichs ist für verschiedene Stoffe sehr verschieden, und es gibt insbesondere sehr viele Stoffe, für die er sehr klein und sehr viele andere, für die er sehr groß ist; jene heißen spröde, diese geschmeidig oder plastisch (Glas und Wachs sind typische Vertreter).

Von allen den zuletzt angedeuteten Verhältnissen wird in einem Schlußartikel „Kohäsion" die Rede sein. Die zunächst folgenden Artikel und so auch der vorliegende allgemeine Artikel haben es ausschließlich mit der eigentlichen Elastizität, also mit dem Bereich der elastischen Vollkommenheit zu tun.

Volumenmodul und Gestaltmodul. Diese beiden typischen Moduln lassen sich, wenigstens für isotrope Körper, in vorläufiger und elementarer, aber sehr anschaulicher Weise folgendermaßen charakterisieren:

1. Der Volumenmodul oder Kompressionsmodul ist das Verhältnis der in dem Körper wachgerufenen Volumenelastizität zu der Volumenänderung.

durch welche dieselbe wachgerufen worden ist; oder auch: das Verhältnis der komprimierenden Kraft zu der dadurch hervorgebrachten Kompression. Um diesen Modul zu ermitteln, muß man Versuche anstellen, bei welchen der untersuchte Körper und jeder seiner Teile sich selbst ähnlich bleibt, also nur sein Volumen ändert, derart, daß alle Winkel ungeändert bleiben und alle Längen sich so ändern, daß aus der Länge 1 die Länge $1 - \varepsilon$ wird, wo ε stets ein kleiner Bruch ist; aus dem Volumen 1 wird dann also das Volumen $(1 - \varepsilon)^3$, also für kleine ε mit Vernachlässigung seiner höheren Potenzen das Volumen $1 - 3\,\varepsilon$; die Kompression ist also $3\,\varepsilon$. Zu diesem Zwecke muß man auf die ganze Oberfläche einen gleichmäßigen Druck p ausüben, und man findet somit den Volumenmodul

(4) $$k_1 = \frac{p}{3\,\varepsilon} \quad .$$

Der Vorgang, welcher bei der gleichförmigen Kompression stattfindet, ist nun aber ein zusammengesetzter, und es ist notwendig, dies auch in der Formel (4) zum Ausdruck zu bringen. Am einfachsten gestaltet sich die Analyse, wenn der Körper die Form eines Würfels von der Kantenlänge 1 hat. Der Druck auf das erste Paar gegenüberliegender Seitenflächen verkürzt die auf ihnen senkrechte Dimension des Würfels um α, so daß dieselbe $1 - \alpha$ wird; aber erfahrungsgemäß fügt sich die Materie dem in einer Richtung ausgeübten Zwange nur zum Teil, während sie ihn zum anderen Teil durch Ausbreitung in den Querdimensionen ausgleicht; durch den Druck auf das erste Paar Gegenflächen wird also nicht nur die auf diesen senkrechte Dimension in $1 - \alpha$, sondern es wird auch jede der beiden anderen in $1 + \beta$ verwandelt. Nimmt man jetzt die Drucke auf alle drei Paar Gegenflächen gemeinsam in Betracht, so sieht man ein, daß jede Dimension einmal um α verkürzt, aber zweimal um β verlängert wird; der Würfel bleibt also Würfel, aber aus der Kante 1 wird die Kante $1 - \alpha + 2\,\beta$, oder auch $1 - (\alpha - 2\,\beta)$. Hieraus folgt:

(5) $$\varepsilon = \alpha - 2\,\beta$$

und somit nach (1)

(6) $$k_1 = \frac{p}{3\,(\alpha - 2\,\beta)} \quad .$$

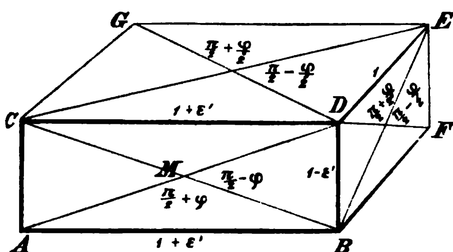
2. Der Gestaltsmodul oder Deformationsmodul[1] ist das Verhältnis der in einem Körper wachgerufenen Gestaltselastizität zu der Deformation, welche dieselbe wachgerufen hat; oder auch das Verhältnis der deformierenden Kraft zu der durch sie erzeugten Deformation. Um ihn zu ermitteln, muß man eine Anordnung treffen, bei welcher das Volumen des Körpers und jedes seiner Teile dasselbe bleibt und nur seine Gestalt und die seiner Teile sich ändert. Das geschieht (wenn dem Körper wieder Würfelgestalt gegeben wird) dadurch, daß man auf das erste Paar Gegenflächen den Druck p, auf das zweite Paar den Zug $-p$, auf das dritte Paar aber gar nichts wirken läßt. Es wird dann aus der ersten Dimension $1 - \varepsilon'$, aus der zweiten $1 + \varepsilon'$, während die dritte 1 bleibt; das Volumen 1 hat sich dann in $(1 - \varepsilon')(1 + \varepsilon') = 1 - \varepsilon'^2$ verwandelt, ist also, da ε'^2 vernachlässigt werden kann, dasselbe geblieben. Auch hier ist es nicht schwer, die Größe ε' auf α und β zurückzuführen. Infolge des Druckes in der

[1] In englischen Schriften (z. B. THOMSON, Elasticity, TAIT, Properties of Matter, THOMSON u. TAIT, Nat. Philos.) wird die Gestaltselastizität „Starrheit" (*rigidity*), im Gegensatz zur Volumenelastizität, genannt, wofür nur ausnahmsweise das Wort „Steifheit" (*stiffness*) eintritt; entsprechend wird dann vom Starrheitsmodul oder kurz der „Starrheit" gesprochen. In der deutschen Literatur bedeutet aber Starrheit die Unzugänglichkeit eines Körpers gegen jede Art von innerer Veränderung, gleichviel ob Kompression oder Deformation. Die Übertragung des englischen Ausdrucks ist also möglichst zu vermeiden.

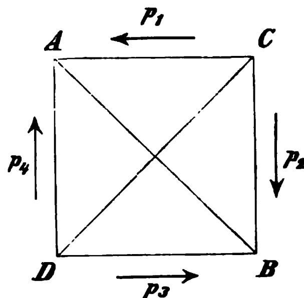
ersten Richtung verwandeln sich nämlich die Kanten in $1-\alpha$, $1+\beta$, $1+\beta$; infolge des Zuges in der zweiten Richtung wird dann hieraus bezw. $1-\alpha-\beta$, $1+\beta+\alpha$, $1+\beta-\beta$ oder anders geschrieben: $1-(\alpha+\beta)$, $1+(\alpha+\beta)$, 1. Es ist also

(7) $$\varepsilon' = \alpha + \beta \quad .$$

Es fragt sich nun, was man als Maß der Gestaltsänderung, die der Würfel erfahren hat, betrachten soll. Nun ist klar, daß das Charakteristische für Gestaltsänderungen die Änderung ist, welche alle Winkel zwischen irgend welchen im Körper vorkommenden Linien (ausgenommen die in der Richtung der Kanten verlaufenden) erfahren haben; denn die Winkel bleiben bei einer reinen Kom-



Figur 154.



Figur 155.

pression ungeändert. Zieht man etwa auf jeder Würfelseite das Diagonalenkreuz, so werden bei der Deformation des Würfels in ein Parallelepipedon die vier rechten Winkel jedes Diagonalenkreuzes in zwei spitze und zwei stumpfe sich verwandeln. Betrachtet man die am meisten deformierte Seitenfläche, also das Rechteck $ABCD$ (Figur 154) mit den Seiten $1-\varepsilon'$ und $1+\varepsilon'$ und nennt man die Winkeländerung φ, so daß

$$\angle BMD = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \text{und} \quad \angle AMB = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

und folglich

$$\angle BAD = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

wird, so hat man

$$\frac{1-\varepsilon'}{1+\varepsilon'} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1 - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}} \quad ,$$

also

$$\varepsilon' = \alpha + \beta = \frac{\varphi}{2} \quad .$$

Definiert man nun den Gestaltsmodul durch die Gleichung

(8) $$k_2 = \frac{p}{\varphi} \quad ,$$

d. h. als Quotienten der Kraft durch die Änderung des rechten Winkels zwischen Linien, die in der Ebene von Druck und Zug verlaufen, so findet man

(9) $$k_2 = \frac{p}{2(\alpha+\beta)} \quad .$$

Es möge bemerkt werden, dzß in den beiden anderen Rechtecken *BDEF* und *CDEG* die Winkeländerung kleiner ist und speziell bei kleinen Gestaltsänderungen nur $\varphi/2$ beträgt, weil hier die eine Rechtecksseite ungeändert geblieben und nur die andere verkürzt bezw. verlängert ist.

Man kann bei Untersuchung der Gestaltelastizität auch noch etwas anders verfahren, nämlich indem man die Deformation ermittelt, welche in einem Würfel gleiche tangential wirkende Kräfte von der Anordnung der Kräfte p in Figur 155 hervorbringen. Zieht man nun wieder das Diagonalenkreuz und kombiniert in Gedanken einmal p_1 mit p_2 und p_3 mit p_4, das andere Mal p_1 mit p_3 und p_2 mit p_4, so sieht man, daß die eine Diagonale *AB* einen Druck, die andere *CD* einen Zug erfährt, und die Größe dieser Wirkung ist nach dem Parallelogramm der Kräfte jedesmal $p \cdot \sqrt{2}$, also, da auch die Länge der Diagonalen im Verhältnis von $\sqrt{2}$ größer ist als die der Kanten, für die Längeneinheit oder, da ja die Figur nur einen Querschnitt des Würfels darstellt, für die Flächeneinheit gerade gleich p. Man gelangt also von diesem Ausgangspunkte im wesentlichen zu demselben Ergebnis wie bei dem erstgewählten, nämlich zu einer Verkürzung in einer, zu einer gleichen Verlängerung in der zweiten Dimension, während die dritte unverändert bleibt.

Noch bei weitem einfacher als die beiden betrachteten ist freilich die folgende Gestaltsänderung, welche man eine einfache Schiebung oder Scherung[1] nennt. Sie besteht darin, daß eine Ebene im Körper fest bleibt, jede dieser parallele Ebene aber in einer bestimmten, für alle gleichen Richtung sich in sich selbst um ein ihrem Abstande von der festen Ebene proportionales Stück verschiebt; jede auf dieser Schar von Ebenen ursprünglich senkrechte gerade Linie bleibt gerade, neigt sich aber um einen bestimmten Winkel. Die Größe der Schiebung kann man dann entweder durch diesen Winkel φ messen oder durch die Größe der Verschiebung v, welche die Punkte der von der festen Ebene um die Einheit abstehende Parallelebene erfahren, d. i. durch die Tangente jenes Winkels. Die Drehung φ', welche eine gegen die Normale um den Winkel ψ geneigte Gerade erfährt, ist

$$\varphi' = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon \cos^2 \psi}{1 \pm \varepsilon \sin \psi \cos \psi}\right) ,$$

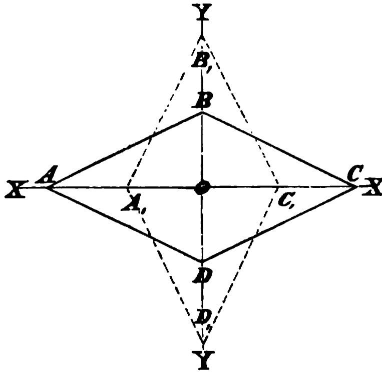
wo das + oder — Zeichen gilt, je nachdem die Gerade bei ihrer Drehung die senkrechte Lage nicht passiert oder passiert. Außerdem ändert sich auch die Länge aller Geraden, auch der ursprünglich senkrechten; ungeändert bleibt nur die Länge derjenigen Geraden, welche vor oder nach der Drehung beiderseits gleiche Winkel mit der Normalen bilden.

Es läßt sich nun zeigen, daß die oben betrachtete reine Deformation durch Druck und darauf senkrechten Zug sich auf eine einfache Scherung zurückführen läßt. In Figur 156 sei A irgend ein Punkt des Körpers, welcher auf der Verkürzungsachse XX liegt, so daß er nach der Verkürzung nach A_1 fällt; B sei ein auf der Verlängerungsachse YY anfänglich derartig gelegener Punkt, daß $OB = OA_1$ ist, dann wird, wenn B_1 der neue Ort von B ist, auch $OB_1 = OA$ und folglich $AB = A_1 B_1$ sein. Durch Wiederholung dieser Betrachtung für die Punkte C und D findet man, daß der Rhombus $ABCD$ sich in den kongruenten Rhombus $A_1 B_1 C_1 D_1$ verwandelt. Verschiebt und dreht man nun den Körper, indem man ihn als starr betrachtet, also ohne elastische Änderungen, so, daß sich $A_1 B_1$ mit AB deckt (Figur 157), wozu bei der Geringfügigkeit der stattgehabten Deformation auch nur eine sehr kleine Verschiebung und Drehung erforderlich sein wird, so

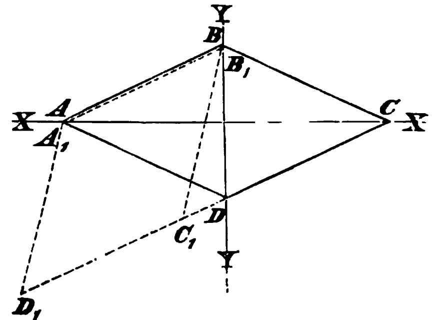
---

[1] Der Ausdruck Scherung ist vorzuziehen, weil der Ausdruck Schiebung zu Verwechselungen mit dem Begriffe „Verschiebung" Anlaß geben kann. Näheres über diesen Vorgang bei THOMSON und TAIT, Theor. Phys. 1. 118.

fällt gleichzeitig $C_1 D_1$ in die Verlängerung von CD, und man sieht, daß es sich um eine einfache Scherung handelt. Alles was an der durch Druck und darauf senkrechten Zug erzeugten reinen Deformation von elastischem Charakter ist, kommt also auf eine einfache Scherung hinaus.



Figur 156.



Figur 157.

Potential- und Verdrehungsveränderung. Während sich die Unterscheidung von Volumen- und Gestaltelastizität direkt auf die beiden Grundeigenschaften der Körper, das Volumen und die Gestalt anlehnt, bezieht sich eine andere Unterscheidung mehr auf die Funktionalbeziehung zwischen den Veränderungen des Körpers in den einzelnen Richtungen in seinem Innern. Wenn sich nämlich die Komponenten der Verrückung als Differentialquotienten einer und derselben Funktion der Koordinaten darstellen lassen, so heißt die Veränderung eine Potentialveränderung oder Potentialdeformation; ist das nicht der Fall, so kann man sie als Verdrehungs- oder Drillungsveränderung bezeichnen, weil in diesem Falle, nicht aber im ersteren, elastische Verdrehungen der Teile gegeneinander auftreten. In erster Linie ist hierbei, wie immer in der Lehre von der Elastizität, an den Übergang in neue Gleichgewichtszustände gedacht; denkt man aber einmal an Bewegungen des entsprechenden Charakters, so sind diejenigen der ersten Art Potentialbewegungen, die der zweiten das, was man bei Flüssigkeiten Wirbelbewegungen nennt. Es liegt in der Natur dieser Unterscheidung, daß darauf des näheren erst bei der strengen mathematischen Theorie eingegangen werden kann.

Homogene Deformation. Eine besondere, relativ einfache Art der Veränderung ist diejenige, für welche von THOMSON und TAIT der Name homogene Deformation eingeführt worden ist (statt dessen wird auch zuweilen gleichförmige Deformation gesagt, womit aber bei anderen Autoren wiederum ein anderer Sinn verbunden wird). Homogene Deformation findet statt, wenn alle Punktepaare, die sich anfangs in gleichen Abständen voneinander in parallelen Linien befinden, auch nachher gleich weit voneinander entfernt sind und in parallelen Linien liegen; dabei kann sich aber jener Abstand und die Richtung der parallelen Linien geändert haben. Bei der homogenen Deformation bleibt eine Gerade eine Gerade, eine Ebene eine Ebene, ein Parallelogramm ein Parallelogramm und ein Parallelepiped ein Parallelepiped; ähnlich und ähnlich gelegene Teile bleiben ähnlich und ähnlich gelegen; endlich läßt sich jede Figur im Körper nach der Veränderung als eine orthographische Projektion der früheren auf irgend eine Ebene ansehen. Bei der homogenen Deformation bleibt, wovon der Name herrührt, der Körper homogen, wenn er es vorher war; er bleibt aber nicht isotrop; in diesem Sinne steht diese Art von Veränderung in einem gewissen Verallgemeinerungsverhältnis zu der reinen Volumenänderung, wo der Körper isotrop und homogen bleibt.

Praktische Moduln. Die beiden eingeführten Elastizitätsarten und die sie messenden Moduln sind von prinzipieller Bedeutung und Einfachheit und können daher als Hauptmoduln bezeichnet werden. Was bei den Vorgängen, deren Maß sie sind, einfach ist, ist jedoch nur das Endergebnis (nämlich die reine Volumenänderung bezw. die reine Gestaltsänderung), nicht aber die Anordnung, welche man zu treffen hat, um jene Ergebnisse zu erzielen. Erfordert doch der eine Fall drei aufeinander senkrechte Drucke oder Züge, der andere einen Druck und einen darauf senkrechten Zug. Praktisch einfacher sind offenbar Veränderungen, welche man mit einer einzigen Kraft erzeugen kann. Eine weitere Vereinfachung entsteht dadurch, daß man dem Körper eine beträchtliche Ausdehnung nicht in allen drei, sondern nur in zwei Dimensionen oder gar nur in einer gibt, so daß er den Charakter einer Fläche (Platte, Membran) oder einer Linie (Stab, Draht, Faden) erhält. Die praktisch einfachen Veränderungen derartig einfacher Körper werden ebenfalls in Moduln ihr Maß finden, und diese Modul kann man, im Gegensatz zu den Hauptmoduln, praktische Moduln oder Spezialmoduln nennen. Da den bezüglichen Erscheinungen weiter unten besondere Artikel gewidmet sind, genügt hier eine kurze Anführung.

1. Längsdehnung (oder Längskontraktion) eines Stabes oder Drahtes durch Längszug (oder Druck). Der Modul derselben ist der Dehnungsmodul oder Modul der Längskontraktion; in Deutschland wird er vielfach kurzweg Elastizitätsmodul, in England YOUNGs Modul genannt. Zu der oben vorkommenden Größe α steht er, wie unmittelbar einleuchtet, in der einfachen Beziehung:

$$E = \frac{p}{\alpha} \quad . \tag{10}$$

Mit Hilfe der Gleichungsn (6) und (9) läßt sich nun α, und ebenso β durch die Hauptmoduln k_1 und k_2 ausdrücken:

$$\alpha = p\frac{3k_1 + k_2}{9k_1 k_2} \quad , \qquad \beta = p\frac{3k_1 - 2k_2}{18 k_1 k_2} \quad ; \tag{11}$$

und folglich wird

$$E = \frac{9k_1 k_2}{3k_1 + k_2} \quad . \tag{12}$$

Man nennt beim Zuge α die Längsdehnung der Längeneinheit, β die Querkontraktion der Einheit der linearen Querdimensionen; beim Druck α die Längskontraktion der Längeneinheit, β die Dehnung der Einheit der linearen Querdimensionen. Die Änderung des Querschnitts selbst ist, da sie stets nur klein ist, offenbar 2β. Das Verhältnis $\beta : \alpha$ wird gewöhnlich mit μ bezeichnet und heißt das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation oder, da es eine reine Zahl ist, auch kurz Elastizitätszahl. Nicht nur E, sondern auch μ hat für die verschiedenen Stoffe verschiedene Werte. Aus den Gleichungen (11) findet man:

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3k_1 - 2k_2}{2(3k_1 + k_2)} = \frac{3 - 2\varkappa}{2(3 + \varkappa)} \quad , \tag{13}$$

$$\varkappa = \frac{k_2}{k_1}$$

das Verhältnis des Gestaltsmoduls zum Volumenmodul ist. Von diesem Verhältnis und nur von diesem hängt also die Elastizitätszahl eines Stoffes ab; und zwar ist μ desto größer, je kleiner $\varkappa$ ist. Für $\varkappa = \infty$ wird $\mu = -1$, für $\varkappa = 0$ wird $\mu = +\frac{1}{2}$. Im Prinzip kann also μ alle zwischen -1 und $+\frac{1}{2}$ gelegenen Werte annehmen. Ersterer Grenzwert findet bei Stoffen statt, deren Gehalts-

elastizität sehr groß gegen die Volumelastizität ist; letzterer im umgekehrten Falle, also bei Stoffen, die sich wie inkompressible Flüssigkeiten verhalten. In Wahrheit kommen, wie es scheint, nur positive Werte von μ vor, und sie liegen meist über 0,2. (Weiteres im Artikel „Zug und Druck".)

Führt man die Elastizitätszahl μ in die Gleichungen (6) und (9) ein, schafft dadurch β weg und ersetzt p/α nach Gleichung (10) durch E, so erhält man:

$$(14) \qquad k_1 = \frac{E}{3(1-2\mu)}\,, \qquad k_2 = \frac{E}{2(1+\mu)}\,.$$

In dem betrachteten Falle wirkt die Kraft nur in einer Richtung, der Erfolg ist aber ein allseitiger. Man kann auch umgekehrt fragen: Welche Kräfte müssen wirken, damit der Erfolg eine reine Längsdehnung sei? Eine den obigen analoge Betrachtung ergibt als erforderlichen Längszug, wenn ε die gewünschte Längsdehnung ist $(k_1 + \frac{4}{3}k_2)\varepsilon$, außerdem aber den Querzug $(k_1 - \frac{2}{3}k_2)\varepsilon$. Der Modul der reinen Längsdehnung ist also $k_1 + \frac{4}{3}k_2$.

2. Biegung. Sie ist von relativ einfachem Charakter, wenn der Körper in zwei Richtungen außerordentlich dünn ist, es tritt dann lediglich Krümmung oder Krümmungsänderung der Längsdimension ein (ganz dünner Stab), nächstdem bei einem Körper mit einer außerordentlich kleinen Dimension, es wird hier die von den beiden Hauptdimensionen gebildete Fläche gekrümmt oder in ihrer Krümmung geändert (sehr dünne Platten oder Membranen). Von besonderem Interesse ist aber gerade der kompliziertere Fall, daß zwar eine oder zwei Dimensionen vorwiegend, die anderen aber ebenfalls ausgebildet sind (dicker Stab, dicke Platte); es tritt alsdann zu der Erscheinung der Krümmung noch die weitere hinzu, daß einzelne Teile des Körpers Längsdehnung, andere Längszusammenziehung erfahren, woraus folgt, daß sich der Vorgang, also auch der Biegungsmodul — der hiernach keine selbständige Größe ist — auf die Dehnung, also auf den Dehnungsmodul zurückführen läßt; und weiter für Stäbe, daß, wie mit der Längsänderung eine entgegensetzte Queränderung, so auch mit der Längsbiegung eine entgegengesetzte Querbiegung verknüpft ist, während bei Platten diese Nebenerscheinung mit der der Hauptbiegungen interferiert.

3. Drillung oder Torsion. Sie wird bei einem Drahte oder Stabe dadurch erzeugt, daß, während der eine Endquerschnitt festgehalten wird, der andere einem Kräftepaar mit der Längsrichtung des Körpers als Achse unterworfen wird. Am einfachsten ist die Erscheinung, wenn der Querschnitt kreisförmig, der Körper also kreiszylindrisch ist; er behält dann sein Volumen bei, die Veränderung ist also eine reine Gestaltsänderung, und auch diese ist nur eine solche der Körperelemente, während die Gestalt des Körpers als ganzen ebenfalls unverändert bleibt. Der Torsionsmodul ist somit identisch mit dem Gestaltsmodul, und man hat, wenn man ihn mit T bezeichnet, die der Gleichung (14) entsprechende:

$$(15) \qquad T = k_2 = \frac{E}{2(1+u)}\;;$$

d. h. der Torsionsmodul ist nicht, wie der Biegungsmodul, durch den Dehnungsmodul allein bestimmt, er hängt vielmehr mit beiden bei der Längsdehnung auftretenden Konstanten zusammen. Bei nichtzylindrischen Körpern ist der Vorgang der Torsion komplizierter, hier wird die äußere Gestalt und im allgemeinen auch das Volumen verändert.

Während Dehnung und Biegung vom Charakter von Potentialdeformationen sind, ist die Drillung, woher eben der Name entnommen ist, vom Drillungscharakter.

Außer den genannten Spezialdeformationen gibt es noch mancherlei andere; außerdem können sich zwei oder mehrere von ihnen kombinieren, und es können auch, besonders bei komplizierteren Körperformen, wie Bändern, Spiralen,

Ketten u. s. w., gewisse Kombinationen mit anderen oder mit gewissen einfachen Deformationen äquivalent werden.

Heterotrope Körper. Das Gesagte gilt für isotrope Körper; für anisotrope werden die Verhältnisse natürlich wesentlich komplizierter, und es kann vorläufig nur folgendes bemerkt werden. Mit den Begriffen Volumen- und Gestaltselastizität kommt man hier nicht mehr aus, und es genügt auch nicht, etwa für jede der Hauptrichtungen einen Volumen- und einen Gestaltsmodul einzuführen; man muß vielmehr für jede Richtung einen Dehnungsmodul ins Auge fassen und ihm mehrere sekundäre Quermoduln zur Seite stellen; führt man dies für alle Richtungen durch, so kommt man im allgemeinen zu einer großen Zahl (21) von Moduln; natürlich kann sich diese Zahl durch die Symmetrieeigenschaften des Körpers verringern, und man kann dann unter Umständen auch noch auf die Begriffe des Volumen- und Gestaltsmoduls zurückgehen. So hat ein regulärer Kristall drei Moduln, nämlich einen für das Volumen und zwei für die Gestalt, dagegen ein gezogener Draht zwar ebenfalls drei, aber zwei für das Volumen und nur einen für die Gestalt, andere Kristalle haben je zwei oder je drei Moduln für Volumen und Gestalt u. s. w.; exakter läßt sich das nur auf Grund der mathematischen Theorie verfolgen (vgl. weiter unten in diesem Artikel sowie in dem besonderen Artikel „Elastizität der Kristalle").

Beziehungen der Elastizität zu anderen Erscheinungen. Von der Beziehung zu den Festigkeits- oder Kohäsionserscheinungen ist schon die Rede gewesen; auch die Beziehungen zur inneren Reibung sind nach dem Vorangeschickten einleuchtend. Die Beziehungen zum Schall sind sehr innige, insofern alle Schallschwingungen fester Körper auf Elastizität beruhen, auch wenn sie, wie das übrigens nur in besonderen Fällen geschieht, durch andere Kräfte, z. B. Magnetismus, erregt werden. — Sehr mannigfach sind die Beziehungen zur Wärmelehre. Insbesondere ist auf folgende drei Klassen von Erscheinungen hinzuweisen: 1. Einfluß der Temperatur auf die elastischen Konstanten der Körper, so auf die Moduln, die Grenzwerte, die Festigkeit u. s. w.; dieser Einfluß ist an den betreffenden Stellen mit angegeben. 2. Einfluß des Wärmeaustausches des Körpers mit der Umgebung bezw. des Fehlens eines solchen Austausches auf die elastischen Vorgänge in dem Körper; die Extreme in dieser Hinsicht sind (vgl. „Wärmelehre") die isothermische und die adiabatische Zustandsänderung, entsprechend ergeben sich isothermische und adiabatische Elastizitätskonstanten, die wenig, aber unter Umständen merklich voneinander verschieden sind; bei den Gleichgewichtsproblemen sind im allgemeinen die isothermischen, bei den raschen Bewegungsvorgängen die adiabatischen Werte zu nehmen. — 3. Die Temperaturänderung infolge elastischer Vorgänge, unter gewissen Umständen Erwärmung, unter anderen Abkühlung; diese Beziehung steht offenbar in reziprokem Verhältnis zur vorigen. — 4. Eine andere Umkehrung: elastische Veränderungen können, statt durch elastische Beanspruchung auch durch zeitliche Temperaturänderungen oder durch räumliche Temperaturverschiedenheiten hervorgerufen werden. Man spricht bei den Erscheinungen dieser letzten Klassen vom thermischen Druck und muß dann die Theorie in die allgemeine Thermodynamik einordnen; es wird jedoch, soweit tunlich, an geeigneter Stelle schon dieses Bandes auf die angedeuteten Beziehungen eingegangen werden.

Weiter kommen in Betracht interessante Beziehungen zu elektrischen Kräften und Vorgängen sowie, ganz entsprechend, zu magnetischen; diese, unter dem Namen der Elektrostriktion und Magnetostriktion bekannten Beziehungen finden in Band **4** und **5** ihre Besprechung. — Ebenso ist wegen der Beziehungen zu optischen Erscheinungen auf Band **6** zu verweisen; eine theoretische Beziehung zur Optik besteht übrigens bekanntlich auch insofern, als man die Lichterscheinungen auf elastische Ätherschwingungen zurückführen kann — eine Vorstellung, die aber neuerdings durch die elektromagnetische fast vollständig verdrängt worden

ist. — Schließlich ist die Lehre von der Elastizität begreiflicherweise ein wichtiger Abschnitt der technischen Mechanik; in diesem Werke kann auf die technischen Probleme nur gelegentlich und soweit sie auch rein wissenschaftliches Interesse darbieten, eingegangen werden.

B. Mathematische Theorie.

1. Das System der Dilatationen.

Eine unendlich kleine Veränderung eines Körpers ist, wenn die Koordinaten eines seiner Punkte ursprünglich $\xi\,\eta\,\zeta$, nachher aber $\xi''\,\eta''\,\zeta''$ sind, durch die linearen Gleichungen:

$$(16)\quad \begin{cases} \xi'' = a_1 + a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \;, \qquad \eta'' = a_2 + a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \;, \\ \zeta'' = a_3 + a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta \end{cases}$$

bestimmt, denen die durch Auflösung nach $\xi\,\eta\,\zeta$ sich ergebenden Gleichungen

$$(17)\quad \begin{cases} \xi = b_{11}(\xi'' - a_1) + b_{21}(\eta'' - a_2) + b_{31}(\zeta'' - a_3) \;, \\ \eta = b_{12}(\xi'' - a_1) + b_{22}(\eta'' - a_2) + b_{32}(\zeta'' - a_3) \;, \\ \zeta = b_{13}(\xi'' - a_1) + b_{23}(\eta'' - a_2) + b_{33}(\zeta'' - a_3) \end{cases}$$

entsprechen. Punkte des Körpers, welche ursprünglich in einer Ebene lagen, tun dies auch nachher noch; gerade Linien sind gerade, parallele sind parallel geblieben. Ferner lehrt ein Blick auf die Gleichungen (16), daß die Veränderung aus zwei Teilen besteht, deren erster in einer Zunahme der Koordinaten um die Größen a_1, a_2, a_3, also in einer einfachen Verschiebung ohne Drehung besteht, wobei sich der Körper wie starr verhält. Für die Elastizitätstheorie kommt diese Verschiebung nicht in Betracht, und man kann daher die Gleichungen (16) durch die einfacheren

$$(18)\quad \begin{cases} \xi' = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \;, \qquad \eta' = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \;, \\ \zeta' = a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta \end{cases}$$

ersetzen.

Diese Formeln gelten in gewissem Sinne, wenn den Koeffizienten keinerlei Beschränkungen auferlegt werden, auch für endliche Veränderungen. Für kleine Veränderungen — und diese sind für die engere Elastizitätslehre eben die wichtigsten — werden aber die Koeffizienten, soweit sie zwei gleiche Indizes haben, nur wenig von eins und, soweit sie verschiedene Indizes haben, nur wenig von null verschieden sein; das soll also im folgenden angenommen werden. Aus der Form der Gleichungen folgt dann eine Reihe von Eigenschaften der kleinen Veränderung, von denen die wichtigste die der Superposition mehrerer Veränderungen ist, in dem Sinne, daß sich die entsprechenden Koeffizienten einfach addieren; umgekehrt wird man also auch eine gegebene Veränderung auffassen dürfen als Superposition mehrerer, und zwar auf unendlich viele Arten, so daß man die Möglichkeit der Wahl einer bestimmten, in rechnerischer oder anderer Hinsicht besonders geeigneten Zerlegung gewinnt. Bei großen Veränderungen gilt das Superpositionsprinzip nicht mehr, es kommen dann vielmehr erstens Glieder höherer Ordnung hinzu, und zweitens ist das Ergebnis einer zusammengesetzten Veränderung nicht mehr unabhängig von der Reihenfolge, in der die einzelnen Veränderungen vorgenommen werden.

Ferner lassen sich aus den Formeln (18) folgende Sätze ableiten:

1. Eine vom Koordinatenanfangspunkte ausgehende Gerade von der Länge r und den Richtungskosinus $\alpha\,\beta\,\gamma$ hat nachher die durch die Gleichungen

$$(19)\quad \begin{cases} r'\alpha' = r(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma) \ , & r'\beta' = r(a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma) \ , \\ r'\gamma' = r(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma) \ , & \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \end{cases}$$

sich ergebende Länge r' und Kosinus $\alpha'\beta'\gamma'$. Die Größe

$$(20)\qquad \frac{r'-r}{r}$$

heißt lineare Dilatation. Parallele Linien erfahren gleiche Dilatation und gleiche Richtungsänderungen.

2. Für eine Dreiecksebene mit einer Ecke im Anfangspunkte und der Fläche s ergibt sich analog, wenn D' die Determinante der Größen a_{11} u. s. w. ist:

$$(21)\quad \begin{cases} s'\alpha' = sD'(b_{11}\alpha + b_{12}\beta + b_{13}\gamma) \ , \quad s'\beta' = sD'(b_{21}\alpha + b_{22}\beta + b_{23}\gamma) \ , \\ s'\gamma' = sD'(b_{31}\alpha + b_{32}\beta + b_{33}\gamma) \ . \end{cases}$$

Hier heißt

$$(22)\qquad \frac{s'-s}{s}$$

die Flächendilatation. Vom Dreieck kann man durch Zerlegung und Zusammensetzung ohne weiteres zu denselben Resultaten auch für andere Flächen gelangen.

3. Ein senkrechter Zylinder von der Grundfläche s, der Höhe r und den Richtungskosinus $\alpha\beta\gamma$ dieser Höhe verwandelt sich in einen schiefen Zylinder mit der Basis s', der Achse r' und den Kosinus $\alpha'\beta'\gamma'$ für die Höhe, $\alpha''\beta''\gamma''$ für die Achse; und zwar sind $s'\alpha'\beta'\gamma'$ durch die Gleichungen (21), $r'\alpha''\beta''\gamma''$ durch die Gleichungen (20), wenn darin $\alpha'\beta'\gamma'$ durch $\alpha''\beta''\gamma''$ ersetzt werden, bestimmt. Das Volumen vorher und nachher ist

$$v = rs \quad , \qquad v' = r's'(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'') \quad ,$$

und hieraus findet man

$$(23)\qquad \frac{v'-v}{v} = D' - 1 = D \quad .$$

Diese Größe D heißt die räumliche oder kubische Dilatation und zwar wiederum nicht bloß für zylindrische, sondern für beliebige Teile des Körpers.

4. Es läßt sich ferner zeigen, daß man die durch die Gleichungen (18) dargestellte Veränderung des Körpers noch weiter zerlegen kann, nämlich in eine Drehung des dabei sich wie starr verhaltenden Körpers um den Anfangspunkt und in eine Dilatation nach drei bestimmten, aufeinander senkrechten Richtungen xyz gemäß den Gleichungen

$$x' = \mu_1 x \quad , \qquad y' = \mu_2 y \quad , \qquad z' = \mu_3 z \quad .$$

Die auf einer der Achsen gelegenen Körperteilchen bleiben also auf ihr; die in diesen Richtungen stattfindenden Dilatationen, also die Größen

$$(24)\quad \frac{x'-x}{x} = \mu_1 - 1 = \lambda_1 \, , \qquad \frac{y'-y}{y} = \mu_2 - 1 = \lambda_2 \, , \qquad \frac{z'-z}{z} = \mu_3 - 1 = \lambda_3$$

heißen die Hauptdilatationen, die betreffenden Achsen Hauptdilatationsachsen. Punkte, die ursprünglich auf einer Kugelfläche sich befanden, liegen nachher auf einem Ellipsoid, die Halbachsen desselben fallen in die Richtungen der xyz und haben die Längen μ_1, μ_2, μ_3. Stellt man die Gleichung dieses Ellipsoids auf, bezogen auf das System der $\xi\eta\zeta$, so findet man ohne prinzipielle Schwierigkeit die Komponenten der Drehung, die Werte der Hauptdilatationen und die Richtungen der Hauptdilatationsachsen. Für unendlich kleine Veränderungen

kann man diese Rechnung leicht ausführen, und man findet dann als Drehungskomponenten

(25) $$\frac{a_{32}-a_{23}}{2} \quad , \quad \frac{a_{13}-a_{31}}{2} \quad , \quad \frac{a_{21}-a_{12}}{2} \quad ,$$

als Hauptdilatationen die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der Gleichung

(26) $$\begin{vmatrix} a_{11}-1-\lambda \; , & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) \; , & \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12}) \; , & a_{22}-1-\lambda \; , & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31}+a_{13}) \; , & \frac{1}{2}(a_{32}+a_{23}) \; , & a_{33}-1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

als Richtungskosinus $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$ der x-Achse die Wurzeln der Gleichungen

(27) $$\left\{\begin{aligned} (a_{11}-1-\lambda_1)\alpha_1 + \tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21})\beta_1 + \tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31})\gamma_1 &= 0 \quad , \\ \tfrac{1}{2}(a_{21}+a_{12})\alpha_1 + (a_{22}-1-\lambda_1)\beta_1 + \tfrac{1}{2}(a_{23}+a_{32})\gamma_1 &= 0 \quad , \\ \tfrac{1}{2}(a_{31}+a_{13})\alpha_1 + \tfrac{1}{2}(a_{32}+a_{23})\beta_1 + (a_{33}-1-\lambda_1)\gamma_1 &= 0 \end{aligned}\right.$$

und die Richtungskosinus α_2, β_2, γ_2, der y-Achse, und α_3, β_3, γ_3, der z-Achse aus zwei entsprechenden Gleichungssystemen. Endlich ist die räumliche Dilatation

(28) $$\mu_1 \mu_2 \mu_3 - 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3 \quad .$$

Nennt man jetzt $u\,v\,w$ die Komponenten der Verrückung, die der Punkt $x\,y\,z$ bei der stattfindenden Veränderung erfährt, so hat man in den obigen Formeln

(29) $$\left\{\begin{array}{lll} a_{11}-1 = \dfrac{\partial u}{\partial x} \; , & a_{12} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \; , & a_{13} = \dfrac{\partial u}{\partial z} \; , \\ a_{21} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \; , & a_{22}-1 = \dfrac{\partial v}{\partial y} \; , & a_{23} = \dfrac{\partial v}{\partial z} \; , \\ a_{31} = \dfrac{\partial w}{\partial x} \; , & a_{32} = \dfrac{\partial w}{\partial y} \; , & a_{33}-1 = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{array}\right.$$

zu setzen. Die Verrückungskomponenten werden jetzt, wenn

$$a_{11}-1 = a \quad , \qquad a_{22}-1 = b \quad , \qquad a_{33}-1 = c \quad ,$$
$$\frac{a_{23}+a_{32}}{2} = l \quad , \qquad \frac{a_{31}+a_{13}}{2} = m \quad , \qquad \frac{a_{12}+a_{21}}{2} = n \quad ,$$

gesetzt wird:

(30) $$u = ax + ny + mz \; , \qquad v = nx + by + lz \; , \qquad w = mx + ly + cz \quad ,$$

so daß nur noch sechs Koeffizienten vorhanden sind. Hiernach werden die linearen Dilatationen:

(31) $$\lambda_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \qquad \lambda_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \qquad \lambda_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ,$$

und die räumliche Dilatation ist

(32) $$D = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + b + c = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad .$$

Dagegen hängen die Gestaltsänderungen von den Größen

(33) $$2l = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \qquad 2m = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \qquad 2n = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ab. Aus beiden setzt sich die gesamte Veränderung zusammen, und es gilt für sie der aus den obigen Formeln sofort abzulesende Satz: In jedem Punkte gibt es, wie auch das System der Verrückungen beschaffen sein mag, stets drei auf-

einander senkrechte Richtungen, in denen die Verrückungen Maxima und Minima sind, auf denen vor und nach der Veränderung dieselben Teilchen liegen, und um die herum die Verrückungen derart symmetrisch angeordnet sind, wie ein Ellipsoid um seine drei Achsen. Dieses Ellipsoid heißt das Dilatationsellipsoid. Sind zwei Hauptdilatationen einander gleich, so geht es in ein Rotationsellipsoid, bei Gleichheit aller Hauptdilatationen in eine Kugel über, und es bleibt dann nur noch eine bezw. gar keine ausgezeichnete Richtung mehr übrig.

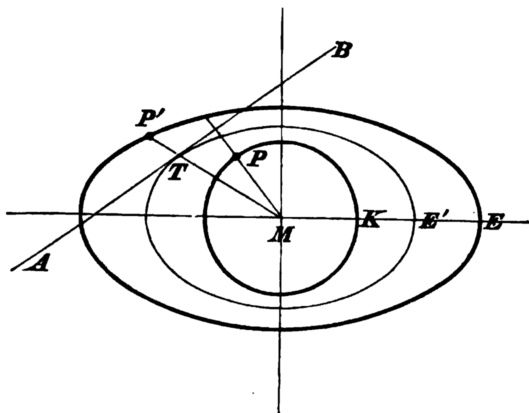
Um für einen Punkt, dessen ursprünglicher Ort P auf der Kugelfläche K (Figur 158) gegeben ist, den Ort auf dem Dilatationsellipsoid nach der Verrückung konstruktiv zu finden, führt man außer diesem Ellipsoid E

(34) $$\left(\frac{x}{1+\frac{\partial u}{\partial x}}\right)^2+\left(\frac{y}{1+\frac{\partial v}{\partial y}}\right)^2+\left(\frac{z}{1+\frac{\partial w}{\partial z}}\right)^2=C^2$$

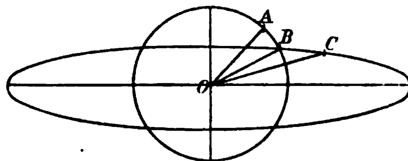
noch das Hilfsellipsoid E'

(35) $$\frac{x^2}{1+\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{y^2}{1+\frac{\partial v}{\partial y}}+\frac{z^2}{1+\frac{\partial w}{\partial z}}=C^2$$

ein, konstruiert beide Flächen, legt an E' diejenige Tangentialebene AB, welche auf der Verlängerung von MP senkrecht steht, verbindet M mit dem Berührungspunkte T und verlängert MT bis zum Schnittpunkte P' mit E; es ist dann P' der gesuchte Ort. Umgekehrt findet man zu P' das zugehörige P.



Figur 158.



Figur 159.

Sind alle drei Hauptdilatationen positiv, so liegt das Ellipsoid, wie in der Figur, völlig außerhalb der Kugel; sind sie alle drei negativ, so liegt es völlig innerhalb; in den anderen Fällen schneiden sich die beiden Flächen, die Punkte der Schnittkurven sind also Endpunkte von Linien, die nur Drehung, nicht aber Längenänderung erfahren haben, z. B. in Figur 159 die Linie, die ursprünglich die Lage OA hatte, jetzt die Lage OB hat (dagegen hat sich die ursprüngliche Linie OB zu OC gedehnt). Negativ kann keiner der drei Nenner werden, solange die Veränderungen klein bleiben, die Fläche kann also in diesem Falle nie ein Hyperboloid werden. An einer anderen Stelle des Körpers wie der hier betrachteten werden die Achsen des Ellipsoids andere Richtungen und Längenverhältnisse haben; der Übergang wird aber, solange nicht in der Masse selbst Unstetigkeiten auftreten, ebenfalls stetig erfolgen.

Für die sechs Differentialquotienten der Verrückungen bezw. Kombinationen von ihnen, die für die elastischen Veränderungen maßgebend sind, hat man verschiedene Abkürzungen vorgeschlagen; die von KIRCHHOFF angegebenen

$$(36)\quad \begin{cases} x_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,, & y_z = z_y = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\,, \\ y_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,, & z_x = x_z = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\,, \\ z_z = \dfrac{\partial w}{\partial u}\,, & x_y = y_x = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

sind entschieden am brauchbarsten. Die Flächendilatation ist dann in jeder der drei Koordinatenebenen:

$$y_y + z_z\,, \qquad z_z + x_x\,, \qquad x_x + y_y\,.$$

Die räumliche Dilatation ist

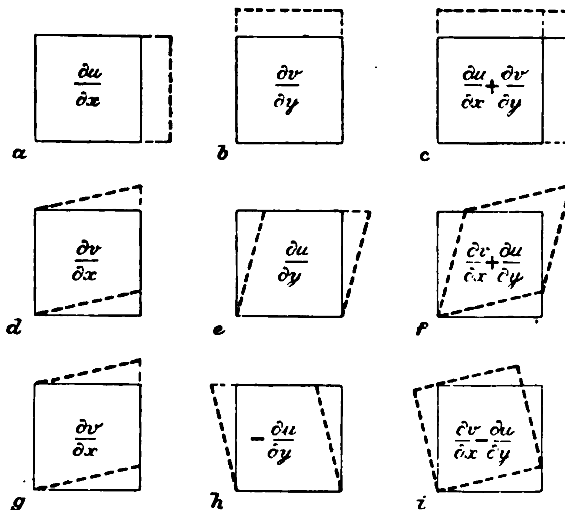
$$(37)\qquad D = x_x + y_y + z_z\,,$$

und die Drehungskomponenten sind:

$$(38)\qquad \omega_x = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\,, \qquad \omega_y = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\,, \qquad \omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

(bezw. die Hälften dieser Größen). Man kann sich diese Größen in der durch die Figuren 160 *a*—*i* angedeuteten Weise veranschaulichen.

Die erste (*a*) zeigt eine lineare Dilatation x_x, wodurch sich das ursprüngliche Quadrat in ein Rechteck verwandelt; *b* zeigt ebenfalls eine lineare Dila-



Figur 160.

tation, aber in der *y*-Richtung, also y_y; durch Kombination erhält man die Flächendilatation, bei der man wieder ein Quadrat, aber ein größeres erhält; schließlich kann man das Verfahren auf drei Dimensionen (Würfel) ausdehnen. Andererseits ist in *d* eine Veränderung vom Typus $\partial v/\partial x$, d. h. eine Scherung dargestellt, wodurch aus dem Quadrat ein Rhombus wird; entsprechend handelt es sich in *e* um $\partial u/\partial y$; durch Kombination beider erhält man die in *f* dar-

gestellte Veränderung, die offenbar durch x_y oder y_x bestimmt ist; entsprechend könnte man die beiden durch $y_z(z_y)$ und $z_x(x_z)$ charakterisierten Veränderungen darstellen; man kann sie als kombinierte Scherungen oder Doppelscherungen bezeichnen; schließlich kann man auch hier eine räumliche Kombination vornehmen. Dagegen erhält man, wenn man die Veränderung g, die mit d identisch ist, mit derjenigen kombiniert, die der in e entgegengesetzt ist, also mit h, d. h. durch Bildung der Differenz $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$, als Ergebnis i, also, wie man sieht, eine reine Drehung ohne elastische Veränderung.

Aus der Definition der Größen $x_x \ldots$ geht ohne weiteres hervor, daß sie nicht willkürlich gewählt werden dürfen; es müssen vielmehr zwischen ihren zweiten Differentialquotienten die folgenden Beziehungen bestehen:

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 z_z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 y_z}{\partial y\,\partial z}\;, & 2\dfrac{\partial^2 x_x}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial y_z}{\partial x} + \dfrac{\partial z_x}{\partial y} + \dfrac{\partial x_y}{\partial z}\right)\;, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 x_x}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 z_x}{\partial z\,\partial x}\;, & 2\dfrac{\partial^2 y_y}{\partial z\,\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial y_z}{\partial x} - \dfrac{\partial z_x}{\partial y} + \dfrac{\partial x_y}{\partial z}\right)\;, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 y_y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 x_y}{\partial x\,\partial y}\;, & 2\dfrac{\partial^2 z_z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial y_z}{\partial x} + \dfrac{\partial z_x}{\partial y} - \dfrac{\partial x_y}{\partial z}\right)\;; \end{cases}$$

diese Beziehungen sind zuerst von DE ST. VENANT, später auf verschiedenen Wegen von KIRCHHOFF, BELTRAMI, KOENIGS u. A. abgeleitet worden.

Umformung in andere Koordinaten. Nicht selten ist es erwünscht, die Ausdrücke der Dilatationen und Deformationen in anderen als rechtwinkligen Koordinaten, namentlich in allgemeinen orthogonalen Koordinaten einzuführen; es seien daher die typischen Ausdrücke angeführt, wobei für den Augenblick p, q, r die neuen Koordinaten und die Größen h die Summen der Quadrate der Ableitungen der neuen nach den alten Koordinaten sind, also z. B.:

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2$$

ist. Es wird dann z. B. die dem alten x_x entsprechende neue Größe

$$(40)\qquad p_p = h_1\frac{\partial(u)}{\partial p} + h_1 h_2 (v)\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{h_1}\right) + h_3 h_1 (w)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{h_1}\right)\;,$$

und entprechend q_q und r_r; ferner wird:

$$(41)\qquad q_r = \frac{h_2}{h_3}\,\frac{\partial}{\partial q}[h_3(w)] + \frac{h_3}{h_2}\,\frac{\partial}{\partial r}[h_2(v)]\;,$$

und entsprechend r_p und p_q; hieraus ergeben sich dann weiter die kubische Dilatation:

$$(42)\qquad (D) = h_1 h_2 h_3\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{(u)}{h_2 h_3}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{(v)}{h_3 h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(w)}{h_1 h_2}\right)\right]\;,$$

und die Drehungskomponenten:

$$(43)\qquad \omega_p = h_2 h_3\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{(v)}{h_3}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(w)}{h_2}\right)\right]\;,$$

und entsprechend ω_q und ω_r.

Die wichtigsten Spezialisierungen dieser Formeln sind die für Polarkoordinaten r, φ, ψ:

$$
(44)\quad \left\{
\begin{aligned}
& r_r = \frac{\partial u}{\partial r} \;, \quad \varphi_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \;, \quad \psi_\psi = \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{v}{r}\operatorname{ctg}\varphi + \frac{u}{r} \;, \\
& \varphi_\psi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - w\operatorname{ctg}\varphi\right) + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial v}{\partial \psi} \;, \quad \psi_r = \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \;, \\
& \qquad\qquad r_\varphi = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \;, \\
& D = \frac{1}{r^2\sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u \sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r v \sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial \psi}(r w)\right] \;;
\end{aligned}
\right.
$$

sodann für zylindrische, elliptische Koordinaten u. s. w. Bei Kristallen ist natürlich unter Umständen auch die Transformation in schiefwinklige Koordinaten von Bedeutung.

Wegen der Begründung und Durchführung der Koordinatentransformation vergleiche man namentlich die bezüglichen Arbeiten von LAMÉ, BORCHARDT, CESARO, TEDONE u. A.

Zerlegung in Dilatationen und Scherungen. Es soll jetzt gezeigt werden, daß und in welcher Weise sich jede beliebige gegebene Veränderung in eine reine Volumenänderung und eine reine Gestaltsänderung zerlegen läßt. Setzt man nämlich:

$$
\begin{aligned}
& a = a_1 + a_2 \;, \quad b = b_1 + b_2 \;, \quad c = c_1 + c_2 \;, \\
& l = l_1 + l_2 \;, \quad m_1 = m_1 + m_2 \;, \quad n = n_1 + n_2 \;,
\end{aligned}
$$

wo sich der Index 1 auf die reine Dilatation, der Index 2 auf die reine Deformation bezieht, so hat man für die zwölf unbekannten Größen gerade zwölf Gleichungen, nämlich die sechs obigen und außerdem:

$$
a_1 = b_1 = c_1 \;, \quad l_1 = m_1 = n_1 = 0 \;, \quad a_2 + b_2 + c_2 = 0 \;.
$$

Man genügt diesen Forderungen, indem man den Größen die folgenden Werte gibt:

$$
(45)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a_1 = b_1 = c_1 = \frac{a+b+c}{3} \;, \quad l_1 = m_1 = n_1 = 0 \;, \\
& a_2 = \frac{2a-b-c}{3} \;, \quad b_2 = \frac{2b-c-a}{3} \;, \quad c_2 = \frac{2c-a-b}{3} \;, \\
& \qquad l_2 = l \;, \quad m_2 = m \;, \quad n_2 = n \;.
\end{aligned}
\right.
$$

Das Problem ist somit eindeutig gelöst, d. h. eine gegebene Veränderung läßt sich immer und stets nur auf eine einzige Weise in eine reine Dilatation und eine reine Deformation zerlegen.

Die Deformation selbst kann man dann weiter in sehr interessanter Weise als ein System zweier Doppelscherungen auffassen, wobei allerdings die Scherungsrichtungen nicht in die Koordinatenachsen fallen, sondern diagonal verlaufen. Die erste Doppelscherung ist nämlich durch die Gleichungen

$$
(46)\qquad u_1 = 0 \;, \quad v_1 = -s_1 y \;, \quad w_1 = +s_1 z
$$

bestimmt. Denkt man sich nämlich die xy-Ebene horizontal, die z-Achse vertikal, so geben die unter 45^0 geneigten Dachflächen eines Hauses, dessen First parallel der x-Achse läuft, die Lage der beiden Schichtungen an, die Verschiebung der höheren Schichten gegen die tieferen erfolgt bei positivem Koeffizienten bergauf, bei negativem bergab. Ebenso ist die zweite Doppelscherung durch die Gleichungen

$$(47) \qquad u_2 = -s_2 x \quad , \quad v_2 = 0 \quad , \quad w_2 = +s_2 z$$

charakterisiert; hier läuft aber der Dachfirst parallel der y-Achse. Nimmt man nun zu diesen beiden Doppelscherungen noch eine gleichförmige Dilatation

$$(48) \qquad u_0 = \frac{1}{3} D x \quad , \quad v_0 = \frac{1}{3} D y \quad , \quad w_0 = \frac{1}{3} D z$$

hinzu, so erhält man durch Superposition:

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= - s_1 x + \frac{1}{3} D x = a x \quad , \\ v &= -s_1 y + \frac{1}{3} D y = b y \quad , \\ w &= +s_1 z + s_2 z + \frac{1}{3} D z = c z \quad . \end{aligned} \right.$$

Die die Veränderung

$$(50) \qquad u = a x \quad , \quad v = b y \quad , \quad w = c z$$

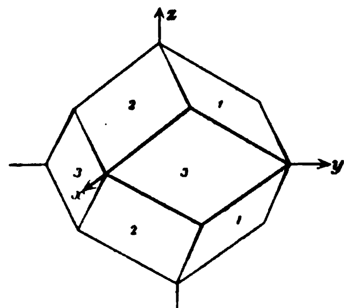
kennzeichnenden Größen a, b, c sind somit dargestellt durch die kombinierten Koeffizienten:

$$(51) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{1}{3}(a + b + c) + \frac{1}{3}(a - b) - \frac{1}{3}(c - a) \quad , \\ b &= \frac{1}{3}(a + b + c) + \frac{1}{3}(b - c) - \frac{1}{3}(a - b) \quad , \\ c &= \frac{1}{3}(a + b + c) + \frac{1}{3}(c - a) - \frac{1}{3}(b - c) \quad , \end{aligned} \right.$$

womit zugleich die Sonderstellung der z-Achse beseitigt erscheint und alle drei Richtungen gleichberechtigt auftreten; man kann demgemäß die beiden Doppelscherungen durch drei solche ersetzen, von den Beträgen:

$$(52) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= 0 \quad , & v_1 &= +\frac{1}{3}(b - c) y \quad , & w_1 &= -\frac{1}{3}(b - c) z \quad , \\ u_2 &= -\frac{1}{3}(c - a) x \quad , & v_2 &= 0 \quad , & w_2 &= +\frac{1}{3}(c - a) z \quad , \\ u_3 &= +\frac{1}{3}(a - b) x \quad , & v_3 &= -\frac{1}{3}(a - b) y \quad , & w_3 &= 0 \quad ; \end{aligned} \right.$$

die Richtung der dritten von ihnen ergibt sich unter Beibehaltung des obigen Bildes als die der Vertikallinien der Mauer eines Hauses, das zu den beiden vorigen um je 45° orientiert ist. Die Gesamtheit der sechs Lagen von Schichten, die durch die drei Doppelscherungen in dem Körper gebildet werden, kann man sich zugleich mit der Richtung der Schiebungen durch die eine Hälfte der Begrenzungsflächen eines regulären Rhombendodekaeders veranschaulichen, dessen Hauptachsen in die Koordinatenachsen fallen (Figur 161); zur ersten Doppelscherung gehören die beiden Ebenen 1, zur zweiten die beiden mit 2, zur dritten die beiden mit 3 bezeichneten Ebenen; die Schiebungsrichtungen ergeben sich durch die längeren Rhombendiagonalen.



Figur 161.

Spezialfälle erhält man schließlich, indem man bei dieser Art der Zerlegung entweder die Dilatation oder eine der Doppelscherungen wegläßt, oder zwei der letzteren einander gleich werden läßt u. s. w.

Lord Kelvins Tetraedermethode. Als einen weiteren Schritt auf dem zuletzt beschrittenen Wege kann man die neuerdings von Lord KELVIN angegebene Methode zur Darstellung elastischer Veränderungen bezeichnen; die Scheidung in Dehnungen und Scherungen fällt hier ganz fort — wie übrigens schon bei der zuletzt besprochenen Darstellung, die von HELMHOLTZ herrührt und mit der KELVINschen nahe verwandt ist. Nach Lord KELVIN betrachte man ein beliebig gestaltetes und gerichtetes Tetraeder $A_0 B_0 C_0 D_0$ vor bezw. $ABCD$ nach der Veränderung; seine drei Paare von sich nicht schneidenden Kanten seien nachher:

$$(3p,\ 3p') \quad , \qquad (3q,\ 3q') \quad , \qquad (3r,\ 3r') \quad ;$$

also die Kanten des aus den Schwerpunkten der Flächen aufgebauten Tetraeders:

$$(p, p') \quad , \qquad (q, q') \quad , \qquad (r, r') \quad ;$$

vorher entsprechend mit den Indizes 0; die Längenänderungen sind also:

$$(p - p_0,\ p' - p_0') \quad , \qquad (q - q_0,\ q' - q_0') \quad , \qquad (r - r_0,\ r' - r_0') \quad .$$

Nun sei das ursprüngliche Tetraeder regulär, d. h. es sei:

$$p = p' = q = q' = r = r' \quad ,$$

und es sei ihm die alle Kanten berührende Kugel eingeschrieben, die bekanntlich ihren Mittelpunkt in dem des Tetraeders hat und alle Kanten in ihren Mitten berührt; nach der Veränderung ist aus der Kugel ein Ellipsoid geworden mit genau denselben Eigenschaften, das Dilatationsellipsoid; zu seiner Konstruktion lassen sich verschiedene Wege angeben. Zwischen den neuen Größen und den früheren a, b, c, l, m, n bestehen die Beziehungen:

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} p - 1 &= \tfrac{1}{2}(m + n + a) \quad , & p' - 1 &= \tfrac{1}{2}(m + n - a) \quad , \\ q - 1 &= \tfrac{1}{2}(n + l + b) \quad , & q' - 1 &= \tfrac{1}{2}(n + l - b) \quad , \\ r - 1 &= \tfrac{1}{2}(l + m + c) \quad , & r' - 1 &= \tfrac{1}{2}(l + m - c) \end{aligned} \right.$$

oder umgekehrt, wenn

$$p + p' + q + q' + r + r' - 6 = 2s$$

gesetzt wird:

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= p - p' \ , & b &= q - q' \ , & c &= r - r' \quad , \\ l &= s - p - p' + 2 \ , & m &= s - q - q' + 2 \ , & n &= s - r - r' + 2 \quad . \end{aligned} \right.$$

2. Das System der Drucke.

Dem System der Veränderungen ist nun das System der Drucke oder Spannungen zur Seite zu stellen, mit anderen Worten: es ist die **elastische Geometrie** zur **elastischen Dynamik** zu ergänzen. Wie auf einen starren Körper, so sind auch auf einen elastischen zunächst äußere Kräfte wirksam anzunehmen, ihre Werte für die Masseneinheit des Körpers seien wie in der allgemeinen Mechanik X, Y, Z. Beim elastischen Körper kommen aber hierzu noch Druckkräfte, die auf die Flächenelemente wirken; und zwar teils gegebene äußere Druckkräfte auf die Oberflächenelemente, teils innere elastische Spannungen auf alle Flächenelemente, sowohl die realen an der Oberfläche als die im Innern überall gedachten; von diesen Reaktionsdrucken ist zunächst die Rede.

Der elastische Druck hängt nicht bloß, wie eine Massenkraft, vom Orte, sondern auch von der Richtung des Flächenelements ab, auf das er wirkt; diese Richtung wird am besten durch die Richtung der Normale n des Flächenelements charakterisiert, der Druck also mit P_n bezeichnet. Dieser Druck steht im allgemeinen schief auf dem Flächenelement, muß also behufs weiterer Behandlung in seine rechtwinkligen Komponenten:

$$(55) \qquad X_n = P_n \cos(Px) \quad , \qquad Y_n = P_n \cos(Py) \quad , \qquad Z_n = P_n \cos(Pz)$$

zerlegt werden. Wird nun die Dichte im Punkte xyz mit ϱ, ein Raumelement mit $d\tau$, ein Oberflächenelement mit ds, dessen Normale nach innen mit n bezeichnet, so nehmen die Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers die Form an:

$$(56) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int \varrho \frac{d^2x}{dt^2} d\tau &= \int \varrho X d\tau + \int X_n ds \quad , \\ \int \varrho \frac{d^2y}{dt^2} d\tau &= \int \varrho Y d\tau + \int Y_n ds \quad , \\ \int \varrho \frac{d^2z}{dt^2} d\tau &= \int \varrho Z d\tau + \int Z_n ds \quad . \end{aligned} \right.$$

$$(57) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int \varrho \left(z \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2z}{dt^2} \right) d\tau &= \int \varrho (zY - yZ) d\tau + \int (zY_n - yZ_n) ds \quad , \\ \int \varrho \left(x \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2x}{dt^2} \right) d\tau &= \int \varrho (xZ - zX) d\tau + \int (xZ_n - zX_n) ds \quad , \\ \int \varrho \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right) d\tau &= \int \varrho (yX - xY) d\tau + \int (yX_n - xY_n) ds \quad ; \end{aligned} \right.$$

die drei ersten formulieren die Kräfte und Beschleunigungen, die drei letzten die Drehungsmomente und Winkelbeschleunigungen.

Daß die Druckkomponenten mit dem Richtungssinn der Normalen das Zeichen und nur dieses wechseln, ist einleuchtend, kann aber noch exakt (aus der Größenordnung der letzten Glieder auf den rechten Seiten) erwiesen werden; d. h. es ist:

$$(58) \qquad X_{-n} = -X_{+n} \quad , \qquad Y_{-n} = -Y_{+n} \quad , \qquad Z_{-n} = -Z_{+n} \quad .$$

In Worten: Druck und Gegendruck auf ein Flächenelement sind gleich groß und entgegengesetzt. Ferner kann man die Drucke auf das im allgemeinen schiefe Flächenelement ds zurückführen auf die Drucke, die an demselben Orte auf drei Flächenelemente wirken, die die Projektionen von ds auf die Koordinatenebenen darstellen, deren Normalen also bezw. die x-, y-, z-Achse sind; und zwar wird, wenn man diese Drucke mit P_x, P_y, P_z und ihre Komponenten mit

$$X_x, Y_x, Z_x \quad ; \qquad X_y, Y_y, Z_y \quad ; \qquad X_z, Y_z, Z_z$$

bezeichnet:

$$(59) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \quad , \\ Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) \quad , \\ Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz) \quad ; \end{aligned} \right.$$

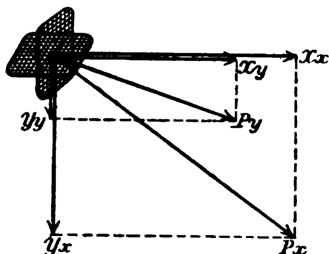
d. h. die Drucke X_n u. s. w. ergeben sich als die Summen der Projektionen der X_x, X_y, X_z u. s. w. auf die Normale n. Die Größen X_x, Y_y, Z_z sind offenbar Normaldrucke, die sechs anderen Tangentialdrucke.

Setzt man diese Werte in die Bewegungsgleichungen ein, wendet die drei letzten von ihnen auf ein kleines Parallepipedon an und betrachtet die Größen-

ordnung der einzelnen Glieder, so sieht man ein, daß, wenn die Winkelbeschleunigungen nicht unendlich groß werden sollen, die Oberflächenglieder rechts für sich bis auf unendlich kleines verschwinden müssen. Nun heben sich aber die Glieder mit X_x u. s. w. für je zwei gegenüberliegende Flächenelemente unter sich auf, da sie entgegengesetzt gleich sind und an gleichen Hebelarmen wirken; die Glieder mit X_y u. s. w. tun das aber, jedes für sich, nicht, weil die Hebelarme verschieden sind; sie müssen sich also paarweise kompensieren, und man erhält:

(60) $$Y_z = Z_y \quad , \qquad Z_x = X_z \quad , \qquad X_y = Y_x \quad ;$$

in Worten: Für je zwei von den drei durch einen Punkt senkrecht zueinander gelegten Flächenelementen sind diejenigen Tangentialdrucke, welche normal zur Schnittlinie der beiden Flächenelemente stehen, untereinander gleich. In Figur 162 ist das für die beiden auf der Papierebene senkrechten Flächenelemente angedeutet; wie man sieht, sind P_x und P_y verschieden, ebenso auch ihre Normalkomponenten X_x und Y_y; dagegen sind ihre Tangentialkomponenten Y_x und X_y gleich groß.



Figur 162.

Hiermit reduziert sich die Zahl der Druckkomponenten von 9 auf 6, nämlich drei eigentliche Druck- (oder Zug-)kräfte X_x, Y_y, Z_z, und drei Tangential- oder Scherungskräfte Y_z, Z_x, X_y.

Verwandelt man nun, nach Einsetzen der Werte (59), in den Gleichungen (56) nach bekannter Methode die Oberflächenintegrale in Raumintegrale, erwägt, daß die Gleichungen dann nicht nur für den ganzen Körper, sondern auch für jedes Element $d\tau$ gelten müssen, und ändert links die Bezeichnung in der Weise, daß jetzt $x\,y\,z$ die Anfangskoordinaten eines Punktes, $u\,v\,w$ seine Verrückungskomponenten zur Zeit t sind, so findet man als Differentialgleichungen der Bewegung:

(61) $$\left\{\begin{aligned} \varrho\frac{d^2u}{dt^2} &= \varrho X - \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) \quad , \\ \varrho\frac{d^2v}{dt^2} &= \varrho Y - \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) \quad , \\ \varrho\frac{d^2w}{dt^2} &= \varrho Z - \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) \end{aligned}\right.$$

und speziell als Differentialgleichungen des Gleichgewichts:

(62) $$\left\{\begin{aligned} \varrho X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \quad , \\ \varrho Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \quad , \\ \varrho Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \quad . \end{aligned}\right.$$

Im allgemeinen ist der Druck, den ein Flächenelement erfährt, schief gegen dasselbe gerichtet; es gehen aber durch jeden Punkt drei aufeinander senkrechte Flächenelemente, welche senkrechte Drucke erfahren. Diese Drucke heißen Hauptdrucke und ihre Richtungen Hauptdruckachsen. Man kann sie ganz analog wie die Hauptdilatationen bestimmen, wenn man, wie dort das Dilatationsellipsoid, so hier das Druckellipsoid einführt. Dasselbe wird jedoch hier verschiedenartig gewählt. Die Einen nennen so das Ellipsoid

(63) $$X_x\xi^2 + Y_y\eta^2 + Z_z\zeta^2 + 2\,Y_z\eta\zeta + 2\,Z_x\zeta\xi + 2\,X_y\xi\eta = 1$$

oder in Polarkoordinaten:

$$X_x \alpha^2 + Y_y \beta^2 + Z_z \gamma^2 + 2\,Y_z \beta\gamma + 2\,Z_x \gamma\alpha + 2\,X_y \alpha\beta = \frac{1}{r^2} \quad . \tag{64}$$

Die Halbachsen und somit die Hauptdrucke findet man dann der Größe und Richtung nach durch die Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} X_x - \varepsilon & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - \varepsilon & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad , \tag{65}$$

$$\begin{cases} (X_x - \varepsilon)\alpha + X_y\beta + X_z\gamma = 0 \quad , \qquad Y_x\alpha + (Y_y - \varepsilon)\beta + Y_z\gamma = 0 \quad , \\ Z_x\alpha + Z_y\beta + (Z_z - \varepsilon)\gamma = 0 \quad . \end{cases} \tag{66}$$

Jedoch sind die drei Wurzeln $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ der ersten dieser Gleichungen nicht die Halbachsen, sondern deren reziproke Quadrate; die Hauptdrucke $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ werden also bei diesem Druckellipsoid durch die reziproken Quadrate der Halbachsen dargestellt. Legt man die Koordinatenachsen in die Hauptdruckachsen, so wird die Gleichung des Druckellipsoids einfacher:

$$X_x \xi^2 + Y_y \eta^2 + Z_z \zeta^2 = 1 \quad . \tag{67}$$

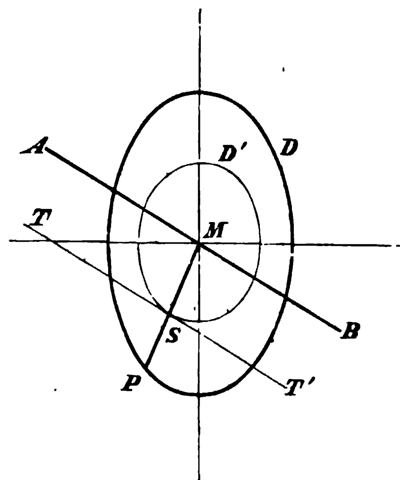
Andere führen dagegen als Druckellipsoid dasjenige ein, dessen Halbachsen unmittelbar die Hauptdrucke darstellen, dessen Gleichung also in bezug auf die Hauptdruckachsen als Koordinatenachsen

$$\frac{\xi^2}{X_x^2} + \frac{\eta^2}{Y_y^2} + \frac{\zeta^2}{Z_z^2} = 1 \tag{68}$$

lautet. Man kann dann wiederum die zu einem gegebenen Druck gehörige Druckebene konstruktiv finden, wenn man die Hilfsfläche

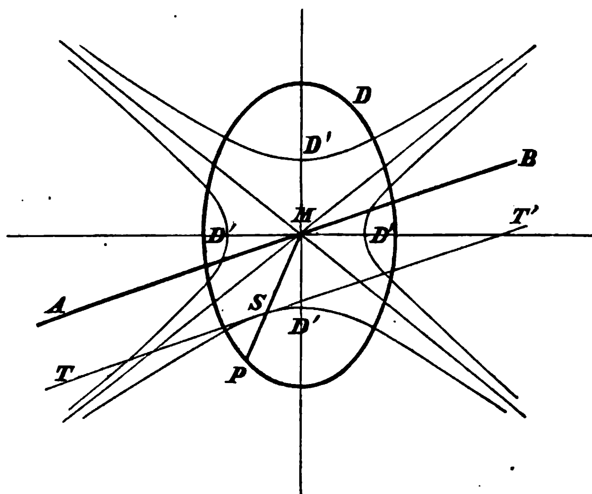
$$\frac{\xi^2}{X_x} + \frac{\eta^2}{Y_y} + \frac{\zeta^2}{Z_z} = 1 \tag{69}$$

benutzt. Ist dann nämlich MP der einen Druck der Richtung und Größe nach darstellende Radius des Druckellipsoids D und legt man durch seinen Schnittpunkt S mit der Hilfsfläche D' an diese die Tangentialebene TT', so ist die durch M zu TT' gelegte Parallelebene AB die Druckebene. Die Hilfsfläche dann, wie in Figur 163, ein Ellipsoid sein, sie kann aber auch, wie in Figur 164, aus zwei Hyperboloiden, einem einschaligen und einem zweischaligen bestehen. Ersteres ist der Fall, wenn die drei Hauptdrucke das gleiche, letzteres, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben. Im zweiten Falle gibt es ein System von Ebenen (nämlich die Tangentialebene des gemeinsamen Asymptotenkegels der beiden Hyperboloide), für welche die auf sie wirkenden Drucke in ihnen selbst liegen, welche also nur einen seitlichen Zug erfahren; man nennt jenen Kegel zuweilen den Scherungskegel. Sind zwei Hauptdrucke einander gleich, so erhält man als Druckellipsoid ein Rotationsellipsoid; sind alle drei einander gleich, eine Kugel.



Figur 163.

Ist von den drei Hauptdrucken der eine gleich null, so werden die Drucke dargestellt durch die Radien eines Systems von ähnlichen konzentrischen Ellipsen, deren Achsen proportional sind dem Sinus des Winkels zwischen der Normale



Figur 164.

der betreffenden Druckebene und der druckfreien Achse. Sind endlich zwei Hauptdrucke gleich null, so ist der Druck proportional dem Kosinus des Winkels, welchen die Normale der Druckebene mit der Achse, in welcher Druck stattfindet, bildet.

3. Beziehung zwischen Streß und Strain.

Bezieht man sich wieder auf ein beliebiges Koordinatensystem, nennt die Hauptdrucke $p_1 p_2 p_3$ und ihre Richtungskosinus $\alpha \beta \gamma$ mit den Indizes 1, 2, 3, so ergeben sich folgende Ausdrücke der Druckkomponenten:

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} X_x &= p_1 \alpha_1^2 + p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^2 \quad , \\ Y_y &= p_1 \beta_1^2 + p_2 \beta_2^2 + p_3 \beta_3^2 \quad , \\ Z_z &= p_1 \gamma_1^2 + p_2 \gamma_2^2 + p_3 \gamma_3^2 \quad , \\ Y_z = Z_y &= p_1 \beta_1 \gamma_1 + p_2 \beta_2 \gamma_2 + p_3 \beta_3 \gamma_3 \quad , \\ Z_x = X_z &= p_1 \gamma_1 \alpha_1 + p_2 \gamma_2 \alpha_2 + p_3 \gamma_3 \alpha_3 \quad , \\ X_y = Y_x &= p_1 \alpha_1 \beta_1 + p_2 \alpha_2 \beta_2 + p_3 \alpha_3 \beta_3 \quad . \end{aligned} \right.$$

Isotrope Körper. Bei isotropen Körpern, also bei Körpern, die sich nach allen Richtungen gleich verhalten, fallen, weil kein Gegengrund vorhanden ist, die Hauptdrucke in die Richtungen der Hauptdilatationen und sind lineare homogene Funktionen derselben; es ist ferner einleuchtend, daß in dem Ausdruck für jeden der Hauptdrucke die entsprechende Dilatation einen, die beiden anderen Dilatationen einen gemeinsamen zweiten Koeffizienten haben werden; da schließlich klar ist, daß die wachgerufenen inneren Drucke den Dilatationen, die sie wachgerufen haben, entgegengesetzt sind, so erhält man die Gleichungen:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= -A\lambda_1 - B(\lambda_2 + \lambda_3) \quad , \qquad p_2 = -A\lambda_2 - B(\lambda_3 + \lambda_1) \quad , \\ p_3 &= -A\lambda_3 - B(\lambda_1 + \lambda_2) \quad . \end{aligned} \right.$$

A und B stellen die eine Form der sogen. Elastizitätskonstanten für isotrope Körper dar. Zu einer anderen, von KIRCHHOFF herrührenden, zweckmäßigeren Form K und Θ gelangt man durch die Substitution

$$A = 2K(1+\Theta) \quad , \quad B = 2K\Theta \quad .$$

Bei einer dritten (historisch ältesten) Bezeichnungsweise wird von jedem der beiden obigen Zeichensysteme das eine Zeichen gewählt, nämlich

$$\nu = K \quad , \quad \lambda = B \quad ;$$

es sind das die sogen, LAMÉschen Elastizitätskonstanten. [LAMÉ selbst und seine Nachfolger schrieben μ und λ; μ ist durch ν ersetzt worden, um Verwirrung zu vermeiden.] Hier sollen zunächst K, Θ benutzt werden; (s. jedoch die Tabelle weiter unten).

Die obigen Ausdrücke werden dann, wenn die räumliche Dilatation $D = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ [Gleichung (32)] eingeführt wird:

$$(71a) \quad \begin{cases} p_1 = -2K(\lambda_1 + \Theta D) \quad , \quad p_2 = -2K(\lambda_2 + \Theta D) \quad , \\ p_3 = -2K(\lambda_3 + \Theta D) \quad . \end{cases}$$

Hierdurch werden die Druckkomponenten

$$(72) \quad \begin{cases} X_x = -2K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \Theta D\right) \quad , \quad Y_z = Z_y = -K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad , \\ Y_y = -2K\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \Theta D\right) \quad , \quad Z_x = X_z = -K\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad , \\ Z_z = -2K\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \Theta D\right) \quad , \quad X_y = Y_x = -K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad , \end{cases}$$

oder kürzer:

$$(72a) \quad \begin{cases} X_x = -2K(x_x + \Theta D) & Y_z = -Ky_z \quad , \\ Y_y = -2K(y_y + \Theta D) & Z_x = -Kz_x \quad , \\ Z_z = -2K(z_z + \Theta D) & X_y = -Kx_y \quad . \end{cases}$$

Hiermit sind die X_x u. s. w. durch x_x u. s. w. ausgedrückt. Durch Auflösung kann man, mit Rücksicht auf (32) auch umgekehrt die x_x u. s. w. sowie D durch die X_x u. s. w. ausdrücken und erhält:

$$(73) \quad \begin{cases} D = -\frac{1}{2K(1+\Theta)}(X_x + Y_y + Z_z) \quad , \\ x_x = -\frac{X_x}{2K} + \frac{1}{2K(1+\Theta)} X_x + Y_y + Z_z) \quad , \\ y_y = -\frac{Y_y}{2K} + \frac{1}{2K(1+\Theta)}(X_x + Y_y + Z_z) \quad , \\ z_z = -\frac{Z_z}{2K} + \frac{1}{2K(1+\Theta)}(X_x + Y_y + Z_z) \quad , \\ y_z = -\frac{1}{K} Y_z \quad , \quad z_x = -\frac{1}{K} Z_x \quad , \quad x_y = -\frac{1}{K} X_y \quad . \end{cases}$$

Beziehungen für Kristalle. Diesen relativ einfachen Formeln für isotrope Stoffe stehen die für Kristalle ohne besondere Symmetrieeigenschaften als die kompliziertesten gegenüber. Bei ihnen sind Zusammenfassungen irgendwelcher

Art nicht möglich, man muß jede der sechs Größen X_x u. s. w. durch alle sechs Größen x_x ausdrücken bezw. umgekehrt und erhält im ersten Falle:

$$
(74)\quad \left\{\begin{aligned}
-X_x &= a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y \quad ,\\
-Y_y &= a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_z + a_{24}y_z + a_{25}z_x + a_{26}x_y \quad ,\\
-Z_z &= a_{31}x_x + a_{32}y_y + a_{33}z_z + a_{34}y_z + a_{35}z_x + a_{36}x_y \quad ,\\
-Y_z &= a_{41}x_x + a_{42}y_y + a_{43}z_z + v_{44}y_z + a_{45}z_x + a_{46}x_y \quad ,\\
-Z_x &= a_{51}x_x + a_{52}y_y + a_{53}z_z + a_{54}y_z + a_{55}z_x + a_{56}x_y \quad ,\\
-X_y &= a_{61}x_x + a_{62}y_y + a_{63}z_z + a_{64}y_z + a_{65}z_x + a_{66}x_y \quad ;
\end{aligned}\right.
$$

im zweiten:

$$
(75)\quad \left\{\begin{aligned}
-x_x &= b_{11}X_x + b_{12}Y_y + b_{13}Z_z + b_{14}Y_z + b_{15}Z_x + b_{16}X_y \quad ,\\
-y_y &= b_{21}X_x + b_{22}Y_y + b_{23}Z_z + b_{24}Y_z + b_{25}Z_x + b_{26}X_y \quad ,\\
-z_z &= b_{31}X_x + b_{32}Y_y + b_{33}Z_z + b_{34}Y_z + b_{35}Z_x + b_{36}X_y \quad ,\\
-y_z &= b_{41}X_x + b_{42}Y_y + b_{43}Z_z + b_{44}Y_z + b_{45}Z_x + b_{46}X_y \quad ,\\
-z_x &= b_{51}X_x + b_{52}Y_y + b_{53}Z_z + b_{54}Y_z + b_{55}Z_x + b_{56}X_y \quad ,\\
-x_y &= b_{61}X_x + b_{62}Y_y + b_{63}Z_z + b_{64}Y_z + b_{65}Z_x + b_{66}X_y \quad ;
\end{aligned}\right.
$$

zwischen den $a_{11} \ldots a_{66}$ und den $b_{11} \ldots b_{66}$ bestehen natürlich die bekannten Beziehungen. Die Zahl von 36 Konstanten, die hiernach der allgemeinste elastische Körper besitzt, reduziert sich, wie wir gleich sehen werden, auf 21.

Elastizitätsgleichungen für isotrope Körper. Setzt man die Werte (72) in die Gleichungen (61) ein und benutzt man für die dabei auftretende Summe zweiter Differentialquotienten das Symbol $\varDelta$, so erhält man die Gleichungen:

$$
(76)\quad \left\{\begin{aligned}
\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \varrho X + K\cdot\varDelta u + K\left(1+2\Theta\right)\frac{\partial D}{\partial x} \quad ,\\
\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \varrho Y + K\cdot\varDelta v + K\left(1+2\Theta\right)\frac{\partial D}{\partial y} \quad ,\\
\varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \varrho Z + K\cdot\varDelta w + K\left(1+2\Theta\right)\frac{\partial D}{\partial z} \quad ,
\end{aligned}\right.
$$

und speziell für das Gleichgewicht in der Gestalt

$$
(77)\quad \left\{\begin{aligned}
\varrho X + K\varDelta u + K\left(1+2\Theta\right)\frac{\partial D}{\partial x} &= 0 \quad ,\\
\varrho Y + K\varDelta v + K\left(1+2\Theta\right)\frac{\partial D}{\partial y} &= 0 \quad ,\\
\varrho Z + K\varDelta w + K\left(1+2\Theta\right)\frac{\partial D}{\partial z} &= 0 \quad .
\end{aligned}\right.
$$

Variationsformen der Grundgleichung. Man kann diese Gleichungen als die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen (s. Artikel „Dynamik", p. 323) eines elastischen Körpers bezeichnen und ihnen (analog wie dort p. 324—328) das mit ihnen gleichbedeutende D'ALEMBERTsche und HAMILTONsche Prinzip an die Seite stellen. Sind dabei jetzt wieder xyz die Koordinaten zur Zeit t und δ_x, δ_y, δ_z die Komponenten einer unendlich kleinen Verrückung, bezeichnet man die Arbeit, welche die Kräfte bezw. die Drucke bei der gedachten Verrückung leisten, mit A_1 bezw. A_2, d. h. setzt man

(78) $A_1 = \int \varrho\, d\tau (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) \quad , \qquad A_2 = \int ds (X_n\,\delta x + Y_n\,\delta y + Z_n\,\delta z) \quad ,$

bezeichnet man ferner die kinetische Energie mit T, also

(79) $$T = \frac{1}{2} \int \varrho\, d\tau \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] \quad ,$$

und setzt man endlich noch zur Abkürzung

(80) $$\left\{ \begin{aligned} F = \int d\tau \Big[& X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + Y_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ & + Y_z \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + Z_x \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + X_y \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \Big] \quad , \end{aligned} \right.$$

so erhält man in der Gleichung

(81) $$\int \varrho\, d\tau \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z \right) - A_1 - A_2 - F = 0$$

das D'ALEMBERTsche Prinzip, in der für den Fall des Gleichgewichts hieraus sich ergebenden speziellen Gleichung

(82) $$A_1 + A_2 + F = 0$$

das Prinzip der virtuellen Verrückungen, und in der Gleichung

(83) $$\int_{t_0}^{t_1} dt (\delta T + A_1 + A_2 + F) = 0 \quad ,$$

in welcher t_0 und t_1 so gewählt sind, daß für sie alle δ_x, δ_y, δ_z verschwinden, das HAMILTONsche Prinzip. Wie man sieht, muß man, um eines dieser Prinzipe auf elastische Körper anzuwenden, zu der Arbeit der äußeren Kräfte und zur Arbeit der Oberflächendrucke noch die Größe F hinzufügen. Man kann sich dieselbe hiernach ebenfalls als die Arbeit gewisser Kräfte vorstellen, und diese Kräfte sind die elastischen Kräfte.

4. Potential und Energie.

Potential der elastischen Kräfte. Man kann die Größe F leicht auf die Form

$$F = \delta \int f\, d\tau$$

bringen, wo

(84) $$f = K(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Theta D^2)$$

ist. Hieraus folgt, daß die Größe, deren Variation die Arbeit F ist, d. h. die Größe

$$V = \int f\, d\tau$$

das Potential der elastischen Kräfte ist. Für die Volumeneinheit ist f selbst das Potential der elastischen Kräfte, die in einem isotropen Körper wirksam sind. Daß ein solches Potential immer existiert, muß freilich erst noch streng bewiesen werden; es genüge hier der Hinweis, daß dieser Nachweis aus den Grundsätzen der Energetik bezw. Thermodynamik in ganz entsprechender Weise geführt wird, wie für starre Körper; mit anderen Worten: die Existenz des Potentials ist eine Folge des Energieprinzips, und es müssen in allen Fällen, wo Zerstreuung von

Energie stattfindet, die entsprechenden Ergänzungen der Betrachtung mit Rücksicht auf die Wärmeerzeugung u. s. w. gemacht werden.

Andere Formen für f erhält man, wenn man statt der speziellen Größen λ die allgemeineren *abclmn* oder die Deformationsgrößen x_x u. s. w. einführt; in letzteren wird.

(85) $$f = K\Theta(x_x + y_y + z_z)^2 + K[(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + \tfrac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2)] \quad ,$$

wofür man, wenn man zur Abkürzung außer D noch die quadratische Größe

(86) $$D_1^2 = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2)$$

einführt, in Kürze

(87) $$f = K\Theta \cdot D^2 + K_1 \cdot D_1^2$$

schreiben kann. Dies kann als die Kirchhoffsche Normalform des Potentials der elastischen Kräfte bezeichnet werden. Will man auch hier wieder, wie bei den Kräften selbst, eine Trennung in ein reines Dilatationsglied und ein Scherungsglied vornehmen, so muß man durch die Formeln[1]

(88) $$H = \tfrac{1}{3}A + \tfrac{2}{3}B = \tfrac{2}{3}K(1 + 3\Theta)$$

eine neue Konstante H einführen, die offenbar mit dem Volumenmodul k_1 identisch ist, und erhält dann den Ausdruck:

(89) $$f = \tfrac{1}{2}H(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + \tfrac{1}{3}K[(\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2]$$

oder, in den *abclmn* den Ausdruck:

(89a) $$f = \tfrac{1}{2}H(a + b + c)^2 + \tfrac{1}{3}K[(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 + 6(l^2 + m^2 + n^2)] \quad .$$

Diesen Ausdruck kann man als die Helmholtzsche Normalform des Potentials der elastischen Kräfte bezeichnen.

Wirkt auf den Körper schon im Anfangszustand ein Druck p, so muß man noch das Glied

$$-p(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \qquad \text{bezw.} \qquad -p(a + b + c)$$

hinzufügen; dieses Glied wird allerdings unter gewöhnlichen Verhältnissen, z. B. wenn p der Atmosphärendruck ist, gegen die anderen zu vernachlässigen sein; es kann aber bei elastischen Vorgängen unter vielen Atmosphären u. s. w. eine Rolle spielen.

Aus dem Potential erhält man nun die Druckkräfte durch Bildung der Gefällkomponenten, d. h. der negativen Differentialquotienten nach den Deformationsgrößen (manche Autoren wählen auch dieses Potential so, daß seine positiven Differentialquotienten die Drucke ergeben); es ist also:

(90) $$\begin{cases} X_x = -\dfrac{\partial f}{\partial x_x} \;, & Y_y = -\dfrac{\partial f}{\partial y_y} \;, & Z_z = -\dfrac{\partial f}{\partial z_z} \;, \\ Y_z = -\dfrac{\partial f}{\partial y_z} \;, & Z_x = -\dfrac{\partial f}{\partial z_x} \;, & X_y = -\dfrac{\partial f}{\partial x_y} \;. \end{cases}$$

Die Ausrechnung ergibt, wenn man von der Kirchhoffschen Normalform ausgeht, die schon früher aufgestellten Beziehungen (72a) zwischen Druck- und Deformationsgrößen; entsprechend kann man mit der Helmholtzschen Formel verfahren.

Die Formel (84) stellt den speziellsten, nämlich den für isotrope Körper gültigen Wert des Potentials der elastischen Kräfte dar. Umgekehrt wird man

[1] Bei Helmholtz selbst etwas anders, weil hier A und B abweichende Bedeutung (halbe Größe) haben.

den allgemeinsten Wert erhalten, also den für Kristalle ohne besondere Symmetrieeigenschaften gültigen, wenn man f gleich der allgemeinsten homogenen quadratischen Funktion der Deformationsgrößen setzt, also:

$$
(91)\quad \left\{
\begin{aligned}
2f = a_{11}x_x^2 &+ 2a_{12}x_x y_y + 2a_{13}x_x z_z + 2a_{14}x_x y_z + 2a_{15}x_x z_x + 2a_{16}x_x x_y \\
&+ a_{22}y_y^2 + 2a_{23}y_y z_z + 2a_{24}y_y y_z + 2a_{25}y_y z_x + 2a_{26}y_y x_y \\
&+ a_{33}z_z^2 + 2a_{34}z_z y_z + 2a_{35}z_z z_x + 2a_{36}z_z x_y \\
&+ a_{44}y_z^2 + 2a_{45}y_z z_x + 2a_{46}y_z x_y \\
&+ a_{55}z_x^2 + 2a_{56}z_x x_y \\
&+ a_{66}x_y^2 \quad .
\end{aligned}
\right.
$$

Wie man sieht, enthält der Ausdruck, im Gegensatz zu den 36 in den Formeln (74) für die Druckkomponenten enthaltenen Konstanten, deren nur 21, so daß eine Reduktion um 15 stattgefunden hat; offenbar infolge des Umstands, daß von den 30 Konstanten, die zwei verschiedene Indizes haben, je zwei, nämlich die durch Vertauschung der Indizes auseinander hervorgehenden, z. B. a_{12} und a_{21} einander gleich werden; die betreffenden Glieder sind in der obigen Formel bereits zusammengezogen worden, sie haben daher auch die Faktoren 2, oder vielmehr, wenn man f selbst betrachtet, sie haben den Faktor 1, die sechs quadratischen Glieder aber nur den Faktor $\frac{1}{2}$ (in dieser Hinsicht weichen ebenfalls verschiedene Autoren voneinander ab). Entsprechend werden nun die Druckkomponenten ebenfalls einfacher, allerdings nicht in der Schreibweise, aber in der Bedeutung der Koeffizienten, und man kann in den Formeln (74), um das zum Ausdruck zu bringen, alle Indizes so schreiben, daß immer die kleinere Ziffer der größeren vorangeht.

Zwischen den Formeln (84) und (91) als Extremen liegen nun diejenigen für Körper mit bestimmten Symmetrieeigenschaften; es wird darauf im Artikel „Elastizität und Kristalle" eingegangen werden.

Energie elastischer Körper. Physikalisch gefaßt, ist natürlich (vgl. Artikel „Dynamik") V bezw. f die potentielle Energie des Körpers bezw. seiner Volumeneinheit; die Größe f kann man daher auch als die räumliche Dichte der elastischen Energie bezeichnen. Nach den Prinzipen der allgemeinen Mechanik muß die potentielle Energie eines Körpers, der sich im Gleichgewichtszustand befindet, ein Minimum sein; und umgekehrt, wenn sie ein Minimum ist, besteht Gleichgewicht; unter Gleichgewicht ist hier echtes, d. h. stabiles gemeint; im labilen würde es sich um ein Maximum handeln, und es kann auch gemischte Gleichgewichtszustände geben. Ferner kann es Gleichgewichtszustände mit innerem Zwange geben, z. B. eine gespannte Armbrust oder ein raschgekühltes Glas; für solche Körper ist zwar V im ganzen ein Minimum, aber nicht die einzelnen f für die Volumenelemente, die sogar teilweise Maxima sein werden. Im Bewegungszustand kommt nun noch die kinetische Energie hinzu, über die in allgemeiner Hinsicht nichts Besonderes zu sagen ist, da sie sich natürlich ganz entsprechend wie die kinetische Energie starrer verhält; bei der Betrachtung der elastischen Bewegungen wird hierauf noch zurückzukommen sein.

Von Interesse ist es noch, die Wanderung der Energie in einem elastischen Körper zu verfolgen, also den Energiefluß oder Energievektor zu bestimmen, wie das wohl zuerst PEARSON getan hat. Die ganze Energie ist nach dem Vorangegangenen:

$$
(92)\quad \left\{
\begin{aligned}
U = &\frac{1}{2}\iiint \varrho \left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right] d\tau \\
&+ \iiint \left[K\Theta D^2 + K(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + \frac{1}{2}K(y_z^2 + z_x^2 + x_y)^2\right] d\tau \quad .
\end{aligned}
\right.
$$

Bildet man nun dU/dt, ersetzt hierin $\varrho\, d^2(u,v,w)\, dt$ durch die ihnen nach den Elastizitätsgleichungen äquivalenten Ausdrücke und formt etwas um, so erhält man, wenn ds ein Oberflächenelement, R die Verschiebungsgeschwindigkeit, χ der Winkel zwischen ihr und der Normalen von ds, ω die Elementardrehung, ψ ihr Winkel mit jener Normalen, φ der Winkel zwischen der auf R und ω senkrechten Geraden und jener Normalen, S die Totalverschiebung für die Richtung von R, d. h. (l, m, n die Richtungkosinus von R) der Vektor:

$$l\frac{\partial(u,v,w)}{\partial x} + m\frac{\partial(u,v,w)}{\partial y} + n\frac{\partial(u,v,w)}{\partial z} \quad ,$$

endlich χ' der Winkel von S mit jener Normalen ist, den Ausdruck:

$$\varrho\frac{dU}{dt} = 2K\iint\left[\Theta D R\cos\chi + R\omega\sin\psi\cos\varphi + RS\operatorname{ctg}\chi'\right]ds \tag{93}$$

oder kürzer:

$$\varrho\frac{dU}{dt} = F_1 + F_2 + F_3 \quad , \tag{93a}$$

wo die drei Glieder die Bedeutung haben:

$$F_1 = 2K\Theta\iint DR\cos\chi\, ds, \quad F_2 = 2K\iint R\omega\sin\psi\cos\varphi\, ds, \quad F_3 = 2K\int RS\operatorname{ctg}\chi'\, ds\,. \tag{94}$$

F_1 ist der Fluß der Druckenergie, er findet in der Richtung von R statt; F_2 ist der Fluß der Drehungsenergie, er steht auf R und ω senkrecht und befolgt dieselben Gesetze, wie der Energiefluß im elektromagnetischen Felde; endlich ist F_3 der Fluß der Totalverschiebungsenergie, er hat die Richtung von S.

Deformationspotential. Dem Potential der elastischen Kräfte steht das Deformationspotential φ gegenüber, insofern, wie jenes die Druckkomponenten, so dieses die elastischen Verrückungen durch Differentiation ergibt; d. h. es ist definiert durch die Formeln:

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad , \quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad , \quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad ; \tag{95}$$

das negative Zeichen, das bisher meist weggelassen wurde, ist zum Zwecke der Übereinstimmung mit früheren Festsetzungen und mit dem Kräftepotential hinzugefügt worden. Dieses Potential entspricht dem in der Hydromechanik gebrauchten Geschwindigkeitspotential, mit dem Unterschied eines Zeitfaktors. Es ist ein gewöhnliches Potential, kein Tensorpotential (p. 205—208) wie das Potential der elastischen Kräfte; ein solches würde man erhalten, wenn man die Größe aufstellte, deren Differentialquotienten nicht u, v, w, sondern die sechs eigentlichen Deformationsgrößen lieferten — eine Größe, die den Namen eines Deformationspotentials allerdings noch mehr verdienen würde, deren Einführung sich aber nicht als notwendig erweist.

Bildet man die zweiten Differentialquotienten von φ, so findet man die linearen Dilatationen:

$$x_x = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \quad , \quad y_y = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \quad , \quad z_z = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad , \tag{96}$$

also die räumliche Dilatation

$$D = -\Delta\varphi \quad ; \tag{97}$$

ferner aber:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\,, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} \quad ,$$

und somit

$$(98) \qquad y_z = -2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} \quad , \qquad z_x = -2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x} \quad , \qquad x_y = -2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} \quad .$$

Zugleich ergibt sich:

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad ,$$

d. h. die elementaren Drehungskomponenten ω_x, ω_y, ω_z [Gleichung (38)] verschwinden; es findet also keine Verdrehung der einzelnen Körperelemente statt. Nur solche elastische Deformationen, bei denen keine Drillungen stattfinden, besitzen also ein Deformationspotential, also insbesondere Dehnung und Zusammenziehung sowie Biegung (die Krümmung bei der Biegung ist keine Verdrehung im obigen Sinne); man kann solche Deformationen als Potentialdeformationen bezeichnen.

Wenn die kubische Dilatation null ist, erhält man

$$(99) \qquad \Delta\varphi = 0 \quad ,$$

d. h. das Deformationspotential genügt der LAPLACEschen Gleichung (s. Artikel „Potentialtheorie", p. 198).

Wenn das Deformationspotential eine Funktion zweiten Grades ist, werden die Größen x_x u. s. w. Konstanten; dies ist der schon oben erwähnte Fall der homogenen Deformation.

Im allgemeinen Falle, wo sich u, v, w nicht als Ableitungen eines Potentials φ darstellen lassen, kann man doch einen derartigen Teil abspalten und den Rest so formen, daß man erhält:

$$(100) \quad \begin{cases} u = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi_y}{\partial z} - \dfrac{\partial\varphi_z}{\partial y} \quad , \qquad v = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\varphi_z}{\partial x} - \dfrac{\partial\varphi_x}{\partial z} \quad , \\ w = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial\varphi_x}{\partial y} - \dfrac{\partial\varphi_y}{\partial x} \quad ; \end{cases}$$

dabei müssen die neuen Größen, φ_x, φ_y, φ_z die Bedingung

$$(101) \qquad \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_z}{\partial z} = 0$$

erfüllen. In der Vektorensprache bedeutet dies offenbar, daß die Verrückung, deren Komponenten u, v, w sind, und die mit (u, v, w) bezeichnet werden möge, sich aus dem Gradienten $(\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z)$ eines skalaren Potentials φ und aus dem Quirl eines Vektorpotentials $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$, dessen Divergenz null ist, zusammensetzt; in Formel:

$$(102) \qquad [u, v, w] = -\operatorname{Grad}(\varphi) + \operatorname{Quirl}[\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z] \quad , \qquad \operatorname{div}[\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z] = 0 \quad .$$

Nun erfüllt offenbar jede der Größen φ eine POISSONsche Gleichung, mit der kubischen Dilatation und den Drehungskomponenten als Konstanten d. h. es ist:

$$(103) \qquad \Delta\varphi = -D \quad , \qquad \Delta\varphi_x = \omega_x \quad , \qquad \Delta\varphi_y = \omega_y \quad , \qquad \Delta\varphi_z = \omega_z \quad ,$$

und folglich kann man, wenn sich ungestrichene Größen auf den wirkenden Punkt, gestrichene auf den Aufpunkt beziehen, und wenn r die Entfernung zwischen ihnen ist, setzen:

$$
(104)\quad \begin{cases} 4\pi\varphi = \displaystyle\int \frac{D'}{r}\,d\tau' \quad ; \\ 4\pi\varphi_x = -\displaystyle\int \frac{\omega_x'}{r}\,d\tau', \quad 4\pi\varphi_y = -\displaystyle\int \frac{\omega_y'}{r}\,d\tau', \quad 4\pi\varphi_z = -\displaystyle\int \frac{\omega_z'}{r}\,d\tau' \quad , \end{cases}
$$

wenn man dies noch derart spezialisiert, daß die Divergenz des Vektorpotentials null wird; dies ist der Fall, wenn man setzt:

$$
(105)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left[u'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + v'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + w'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]d\tau' \quad , \\ \varphi_x = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left[v'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - w'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right]d\tau \quad , \quad \varphi_y = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left[w'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]d\tau , \\ \varphi_z = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left[u'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau' \quad . \end{cases}
$$

Diese interessante und wichtige Darstellung verdankt man STOKES, mit der weiteren Untersuchung haben sich u. A. BETTI und DUHEM beschäftigt.

Schließlich lassen sich auch die Drillungsdeformationen in Beziehung zu einem Potential, dem Drillungspotential ψ setzen, das durch Differentiationen die Drehungskomponenten liefert:

$$
(106)\qquad \omega_x = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad , \qquad \omega_y = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad , \qquad \omega_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad ,
$$

und das, da offenbar

$$
(107)\qquad \frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z} = 0
$$

ist, die LAPLACEsche Gleichung

$$
(108)\qquad \Delta\psi = 0
$$

erfüllen muß.

5. Lösungsproblem.

Grenzbedingungen. Zu den Grundgleichungen der Elastizität sind nun noch die Grenzbedingungen hinzuzufügen, die zu gewissen Zeiten oder an gewissen Stellen zu erfüllen sind; über die zeitlichen Grenzbedingungen läßt sich allgemein nicht viel sagen, es muß das für jeden Fall formuliert werden; anders hinsichtlich der örtlichen Grenzbedingungen, die für die Oberfläche des betrachteten Körpers gelten, sei es, daß er hier an freie Umgebung, wozu auch Luft u. s. w. gerechnet werden darf, grenzt, sei es, daß er hier mit anderen elastischen Körpern zusammentrifft. Der Fall der Grenzflächen wird offenbar komplizierter als der Fall der freien Oberfläche sein und sich aus ihm ableiten lassen. Was nun die Oberfläche betrifft, so kann man sofort einen merkwürdigen Satz ableiten. Bedenkt man nämlich, daß ein Punkt, der ursprünglich der Mittelpunkt einer kleinen Kugel war, nach der Veränderung Mittelpunkt eines aus denselben Teilchen gebildeten Ellipsoids ist, so sieht man ein, daß ein Punkt, der einmal im Innern des Körpers liegt, auch immer dort verbleibt, daß also die Oberfläche stets aus denselben materiellen Teilen besteht. Auszunehmen werden nur solche, ihrem Grade und Wesen nach gewaltsame Veränderungen sein, bei denen sich jene Kugel zu einer Scheibe abflacht oder gar in einen Faden zusammengequetscht wird — Fälle,

die ohnedies aus dem Rahmen der engeren Elastizitätsvorgänge herausfallen. Ist nun

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \tag{109}$$

die Gleichung der Oberfläche, und sind $u' v' w'$ die Komponenten der Geschwindigkeit, so ist die gefundene Grenzbedingung durch die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u'\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v'\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w'\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \tag{110}$$

ausgesprochen. Man kann dieselbe nunmehr auf eine allgemeinere Form bringen, wenn man erwägt, daß der Körper in seiner Oberfläche im allgemeinen an einen anderen bewegten oder elastischen Körper grenzt. Sind dann $u_1' v_1' w_1'$ und $u_2' v_2' w_2'$ die Geschwindigkeitskomponenten für die beiden Körper und n die in xyz auf der Grenzfläche errichtete Normale, so wird

$$u_1'\cos(nx) + v_1'\cos(ny) + w_1'\cos(nz) = u_2'\cos(nx) + v_2'\cos(ny) + w_2'\cos(nz)\,, \tag{111}$$

d. h. die Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zur Grenzfläche hat in beiden Körpern denselben Wert. Dagegen können die beiden anderen Geschwindigkeitskomponenten an der Grenzfläche Sprünge erleiden. Ganz analog verhält es sich mit den Drucken; es können nämlich die Druckkomponenten an der Grenzfläche unstetig sein, es müssen aber die Normalkomponenten X_n, Y_n, Z_n stetig sein. Grenzt der elastische Körper an einen anderen, dessen Elastizitätsverhältnisse nicht in Betracht kommen, und sind XYZ die auf ein Oberflächenelement, dessen Normale die Richtung n hat, wirkenden Kraftkomponenten, so müssen für den Fall des Gleichgewichts die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} X + X_x\cos(nx) + X_y\cos(ny) + X_z\cos(nz) = 0\quad, \\ Y + Y_x\cos(nx) + Y_y\cos(ny) + Y_z\cos(nz) = 0\quad, \\ Z + Z_x\cos(nx) + Z_y\cos(ny) + Z_z\cos(nz) = 0 \end{array}\right. \tag{112}$$

erfüllt werden.

Eindeutigkeit der Lösung. Kirchhoff hat gezeigt, daß die gegebene Lösung, also die Werte uvw, die relativen Verrückungen der Teile eindeutig bestimmen, d. h. daß jedes andere Wertsystem $u_1\, v_1\, w_1$ sich von uvw nur durch Glieder unterscheidet, welche Bewegungen des Körpers als starren Ganzen darstellen. Für den Fall des Gleichgewichts ist diese eindeutige Lösung in den Gleichungen (62) oder (72) bezw. (72a), wofür auch die Gleichungen (77) eintreten können, und in den Grenzbedingungen (112) enthalten. Für den Fall der Bewegung ist sie enthalten in den Gleichungen (61) oder (76), in den Grenzbedingungen (110) bis (112) für die Oberfläche und in den zeitlichen Grenzbedingungen:

$$\left.\begin{array}{lll} u = f_1(xyz)\quad, & v = f_2(xyz)\quad, & w = f_3(xyz) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = F_1(xyz)\quad, & \dfrac{\partial v}{\partial t} = F_2(xyz)\quad, & \dfrac{\partial w}{\partial t} = F_3(xyz) \end{array}\right\}\text{für } t = 0\quad. \tag{113}$$

Der Beweis der Eindeutigkeit läßt sich auch auf heterotrope Körper ausdehnen, falls deren Heterotropie, wie es bei den in der Natur vorkommenden oder künstlich herstellbaren heterotropen Körpern der Fall ist, nur mäßig ist. Man vergleiche hierzu Arbeiten von Wesendonck, auf die übrigens in dem Artikel über die „Kristalle" noch eingegangen werden wird; ferner eine Arbeit von Cossérat.

Lösung elastischer Probleme. Im vorstehenden sind die theoretischen Grundlagen für die Behandlung elastischer Probleme gegeben; mit anderen Worten: das Problem ist allgemein formuliert. Was nun die Lösung betrifft, so fragt es sich, welche Größen gegeben sind und welche ermittelt werden sollen. In unserer

kausalen Vorstellung stellt sich uns die Sache gewöhnlich so dar, daß die Kräfte gegeben sind und die Verrückungen gesucht werden; dieses Problem erfordert die Integration der Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die vorgeschriebenen Grenzbedingungen; der letztere Umstand bringt begreiflicherweise die größten Schwierigkeiten hinein und hat zur Folge, daß man nur für verhältnismäßig einfache Konfigurationen die Aufgabe exakt oder überhaupt lösen kann; namentlich spielen hierbei die örtlichen Grenzbedingungen — die zeitlichen kommen ja wesentlich nur bei Bewegungsproblemen, nicht aber bei Gleichgewichtsproblemen in Betracht — eine große Rolle. Viel einfacher liegt die Sache im umgekehrten Falle, wenn nämlich gefragt wird, welche äußeren und inneren Kräfte man ansetzen muß, um gegebene Deformationen bezw. Verrückungen zu liefern; in diesem Falle braucht man nämlich die gegebenen Werte nur in die bereits nach den Kräften aufgelösten Gleichungen einzusetzen und erhält die letzteren unmittelbar. Jedes Problem der letzteren Art läßt sich natürlich auch als eine Lösung ersterer Art interpretieren, so daß man, wenn man recht viele und geschickt gewählte Fälle dieser Art ausrechnet, man auch reiches Material für die umgekehrte Aufgabe gewinnt. Auch ist zu bedenken, daß in der Praxis durchaus nicht der erstere Fall der ausschließlich wichtige ist; im Gegenteil, es kommt oft vor, daß die gewünschte Deformation vorgeschrieben ist und nach den sie bewirkenden Drucken gefragt wird. Im übrigen kann man in beiden Fällen, statt direkt die Gleichungen zwischen Kräften und Deformationen zu benutzen, auch schrittweise vorgehen, was zuweilen zweckmäßiger ist; d. h. man kann z. B. zuerst aus den gegebenen Verrückungen die Größen $a\,b\,c\,l\,m\,n$, dann aus diesen die Größen $X_x\,Y_y\,Z_z\,Y_z\,Z_x\,X_y$ und zuletzt die äußeren Kräfte ableiten — ebenso in dem umgekehrten Falle. Aus einem gelösten Falle kann man dann durch Multiplikation, aus zwei oder mehr gelösten Fällen durch Superposition neue Fälle zusammensetzen, insoweit dabei eben die Verhältnisse derartig bleiben, daß die Superposition noch erlaubt ist.

Was nun insbesondere die Integration der Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen betrifft, so lassen sich die Methoden dafür in zwei Klassen teilen. Bei der einen, der Reihenmethode, wird zunächst eine partikuläre Lösung der Gleichungen aufgestellt, und es werden alsdann, durch Superposition derartiger Lösungen, die sich durch verschiedene Werte gewisser Parameter unterscheiden, allgemeinere Lösungen aufgebaut, die zugleich die Grenzbedingungen erfüllen; die Natur dieser Reihen wird sich nach der Form des Körpers richten (Kugelfunktionen, BESSELsche u. s. w.). Diese Methode ist zuerst von LAMÉ und CLAPEYRON und seitdem mehrfach angewandt worden, eine große Ausdehnung hat sie aber nicht gewonnen.

Bei der anderen Methode werden die zu bestimmenden Größen durch bestimmte Integrale dargestellt, deren Elemente die Wirkung von Singularitäten darstellen, die über die Oberfläche oder durch das Innere des Körpers verteilt sind; wie man sieht, handelt es sich hier um eine Ausdehnung der in der Potentialtheorie ausgebildeten Methoden auf den komplizierteren Fall der Elastizitätstheorie — komplizierter deshalb, weil hier an die Stelle der LAPLACEschen oder der POISSONschen Gleichung andere treten, in denen die in diesen enthaltenen Ausdrücke mit anderen zusammentreten. BETTI, der die Methode zuerst ausbildete, ging dabei von einem Satze aus, den man als den BETTIschen Reziprozitätssatz bezeichnen kann, und der, wenn man zwei verschiedene Sätze von Verrückungen sowie die ihnen entsprechenden Sätze von Massen- und Flächenkräften betrachtet, aussagt: Die gesamte von den Kräften des ersten Satzes (die kinetischen Reaktionen einbegriffen) über die Verrückungen des zweiten Satzes geleistete Arbeit ist ebensogroß wie die Arbeit der Kräfte des zweiten Satzes über die Verrückungen des ersten; in Formel, wenn der eine Satz ohne, der andere mit Strichen bezeichnet wird:

$$(114)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \varrho\left[\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)u' + \left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)v' + \left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)w'\right]d\tau \\ &\qquad + \int (X_n u' + Y_n v' + Z_n w')\,ds \\ = &\int \varrho\left[\left(X' - \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right)u + \left(Y' - \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}\right)v + \left(Z' - \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}\right)w\right]d\tau \\ &\qquad + \int (X_n' u + Y_n' v + Z_n' w)\,ds \quad . \end{aligned}\right.$$

Verwandelt man hier die Glieder der linken Seite mit Hilfe des Potentials der elastischen Kräfte in ein einziges Raumintegral, so erhält man:

$$\int\left[x_x'\frac{\partial f}{\partial x_x} + y_y'\frac{\partial f}{\partial y_y} + z_z'\frac{\partial f}{\partial z_z} + y_z'\frac{\partial f}{\partial y_z} + z_x'\frac{\partial f}{\partial z_x} + x_y'\frac{\partial f}{\partial x_y}\right]d\tau \quad ;$$

dieser Ausdruck ist aber mit Rücksicht auf eine bekannte Eigenschaft quadratischer Funktionen, wie f eine ist, symmetrisch in bezug auf die beiden Sätze x_x u. s. w. und x_x' u. s. w. und somit gleich dem Raumintegral, das sich bei gleicher Behandlung der rechten Seite ergeben würde, wodurch der Satz zu einer Identität wird. — Das Reziprozitätstheorem kann man nun benutzen, um die Mittelwerte der Deformationen zu finden, die in einem Körper durch Kräfte aufrecht erhalten werden. Sind nämlich u', v', w' Verrückungen, die eine homogene Deformation ergeben, so daß die entsprechenden Druckkräfte im ganzen Körper gleichförmig sind, so nimmt die Bettische Gleichung für den Fall des Gleichgewichts die Form

$$(115)\quad \left\{\begin{aligned} &\int (x_x X_x' + y_y Y_y' + z_z Z_z' + y_z Y_z + z_x Z_z' + x_y X_y')\,d\tau \\ = &\int \varrho (X u' + Y v' + Z w')\,d\tau + \int (X_n u' + Y_n v' + Z_n w')\,ds \end{aligned}\right.$$

an, und hieraus kann man in leicht ersichtlicher Weise u', v', w' und sodann die Größen $\int x_x d\tau$ u. s. w. finden, die, wenn sie noch durch das Volumen $\int d\tau$ dividiert werden, die gesuchten Mittelwerte darstellen. So wird z. B. für einen isotropen Körper vom Volumen τ der Mittelwert von x_x gleich

$$(116)\quad \frac{1}{E\tau}\int \varrho\,[Xx - \mu(Yy + Zz)]\,d\tau + \frac{1}{E\tau}\int [X_n x - \mu(Y_n y + Z_n z)]\,ds \quad ,$$

der von y_z gleich

$$(117)\quad \frac{1}{2k_2\tau}\int \varrho\,(Yz + Zy)\,d\tau + \frac{1}{2k_2\tau}\int \varrho\,(Y_n z + Z_n y)\,ds \quad ,$$

und der der kubischen Dilatation D gleich:

$$(118)\quad \frac{1}{3k_1\tau}\int \varrho\,(Xx + Yy + Zz)\,d\tau + \frac{1}{3k_1\tau}\int X_n x + Y_n y + Z_n z)\,ds \quad ;$$

die hierin vorkommenden Konstanten E (Dehnungsmodul), k_2 (Gestaltsmodul), k_1 (Volumenmodul) und μ (Elastizitätszahl) sind teils schon oben eingeführt worden, teils wird noch in den folgenden Artikeln auf sie zurückgekommen werden. — Auf Grund dieser Ermittelungen kann man nun die Lösung elastischer Probleme nach der Methode der Singularitäten durchführen; jedoch fehlt hier der Raum, auf diese Arbeiten, an denen sich namentlich italienische Theoretiker beteiligt haben, näher einzugehen.

In nahem Zusammenhang hiermit steht auch die Boussinesqsche Theorie der lokalen Störungen, nach der die Wirkung einer an einem Punkte eines

Körpers angreifenden Kraft sehr rasch abfällt, wenn die Entfernung von diesem Punkte zunimmt; um die Wirkung in größerer Entfernung zu bestimmen, braucht man infolgedessen die Art des Angriffs der Kräfte nicht zu berücksichtigen, es kommt nur auf ihre statische Resultante und das Moment an. Auch diese Theorie ist verschiedentlich weiter ausgebildet und angewandt worden.

Endlich ist noch eine Theorie zu erwähnen, die ursprünglich von AIRY für einen besonderen Fall, nämlich den Fall, daß die Erscheinung nur von zwei Dimensionen abhängt, angegeben und später von MAXWELL verallgemeinert worden ist. Indessen hat erst IBBETSON die Theorie in einer den allgemeinen Bedingungen Genüge leistenden Weise durchgeführt. Im Falle zweier Dimensionen lassen sich nämlich die Druckkomponenten als partielle Differentialquotienten zweiter Ordnung einer Funktion darstellen, bei drei Dimensionen sind drei derartige Druckfunktionen erforderlich, und es muß zwischen ihnen ein ziemlich verwickeltes System von Differentialgleichungen bestehen. Infolgedessen werden die Anwendungen, die bei zwei Dimensionen recht bequem sind, bei drei Dimensionen sehr kompliziert; man vergleiche dazu auch eine Arbeit von MICHELL.

An die Arbeiten von BETTI und die mit den obigen Theorien im Zusammenhang stehenden knüpfen sich noch zahlreiche Untersuchungen an, die teils Verallgemeinerungen des Reziprozitätssatzes, teils neue, ihm verwandte Sätze, teils weitere Beziehungen allgemeinerer Art in deformierten Körpern betreffen; es muß aber in dieser Hinsicht auf die Literatur verwiesen werden.

Weiterer Ausbau der Theorie und des Lösungsproblems. In neuerer Zeit ist die Theorie nach verschiedenen Richtungen hin weiter ausgebildet worden, und es hat sich dabei namentlich die Anlehnung an die Potentialtheorie als fruchtbar erwiesen. Vieles hierher Gehörige ist freilich mehr von mathematischem, als von physikalischem Interesse; auch läßt sich über das meiste kaum auszugsweise berichten, und es muß daher an den folgenden Andeutungen genügen.

Die BETTIsche Methode ist von CERRUTI wesentlich vereinfacht worden; es zeigt sich nämlich, daß, wenn an der Oberfläche die Verschiebungen gegeben sind, an Stelle der bei BETTI erforderlichen vier Gruppen von drei Hilfsfunktionen deren eine ausreicht; wenn dagegen an der Oberfläche die Druckkräfte oder teils die Verschiebungen, teils die Druckkräfte gegeben sind, so kommt man meist auch mit einer einzigen, im ungünstigsten Falle aber mit drei Hilfsfunktionen aus. Dabei kann man in manchen Fällen, so dann, wenn für die Oberfläche entweder die tangentialen Verschiebungen und die normale Druckkraft oder umgekehrt gegeben ist, mit Vorteil die Transformation in krummlinige Koordinaten anwenden. — SOMIGLIANA hat die drei Verschiebungskomponenten dargestellt als Summen von einem Raum- und zwei Oberflächenintegralen; hieran knüpfen dann weitere Arbeiten von VOLTERRA, MORERA und LAURICELLA an. — Endlich gehören hierher aus neuester Zeit die Untersuchungen von COSSÉRAT und LIOUVILLE, sowie eine während des Druckes erschienene Abhandlung von KORN, in der das elastische Gleichgewichtsproblem bei gegebenen Oberflächenverrückungen mit Hilfe eines neuen Formulierungssystems ganz allgemein gelöst, nämlich die Lösung, bei gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen, in Gestalt unendlicher, aber stets — auch bei Annäherung an die Oberfläche — konvergierender Reihen gegeben wird. — Verallgemeinerungen des Reziprozitätssatzes nebst Anwendungen sind teils von BETTI selbst, teils von LÉVY, CANEVAZZI u. A. gegeben worden. — Eine in geometrischer Hinsicht eigentümliche Integrationsmethode rührt von VOLTERRA her; bei ihr denkt man sich den betrachteten Punkt als Spitze eines Kegels, die Zeit als Rotationsachse; sind nun F und F' die in den beiden Fächern der Kegelfläche liegenden Teile einer beliebigen, um die Spitze gelegten Oberfläche, und sind für sie u und v mit ihren Differentialquotienten bekannt, so kann man durch Integration über F und F' die Verschiebungen u und v in dem Punkte selbst finden; ebenso auch, wenn jene Werte nicht innerhalb, sondern außerhalb

der beiden Kegelfächer bekannt sind. Das Verfahren ist bald darauf von TEDONE zur Integration der Elastizitätsgleichungen benutzt worden. — Auch APPELL hat neuerdings eine geometrische Methode empfohlen; sie beruht auf der Ermittelung des Zusammenhanges zweier Quadriflächen, die sich als Leitfläche der Spannungen und Oberfläche der Deformationen ergeben, und auf die schon SARRAU aufmerksam gemacht hatte. — Die aus der Elektrizitätslehre bekannte Bildermethode hat namentlich SOMIGLIANA auf das elastische Problem mit Erfolg angewandt. — Über das Virial eines elastischen Körpers vergleiche man Arbeiten von FINGER und BAKKER; letzterer beweist u. a., daß, wenn an einem elastischen Körper nur an der Oberfläche äußere Kräfte angreifen, die Volumenzunahme proportional dem Virial dieser Kräfte ist. — V. FISCHER hat die Elastizitätsgleichungen in Vektorenform dargestellt; der Vorteil dieser an sich natürlich einfacheren Darstellung ist freilich deshalb begrenzt, weil man behufs quantitativer Auswertung doch wieder auf die Komponenten zurückgreifen muß. — BELTRAMI hat sich mit der Frage beschäftigt, welches der allgemeinste Körper sei, in dem sich die Verschiebungskomponenten durch ein Potential (Deformationspotential) darstellen lassen, das der bekannten Wellengleichung genügt; er nennt ein solches Medium das GREENsche Mittel, weil der Potentialausdruck die betreffende Form annimmt, und findet, daß sich die 21 Konstanten für es auf 7, bei passender Wahl des Koordinatensystems sogar auf 4 reduzieren; während im isotropen Mittel in jedem Punkte die Hauptdrucke und -dilatationen gleichgerichtet sind, haben hier die Hauptdrucke die Richtungen der Achsen eines Kegels. — POINCARÉ hat, im Hinblick auf gewisse optische Erscheinungen, den Versuch gemacht, das Potential der elastischen Kräfte zu verallgemeinern, und zwar derart, daß die Zahl der Konstanten von 21 auf 27 steigt, wobei dann freilich die Drucke X_y und Y_x einander nicht mehr gleich sind — eine Konsequenz, die von BRILLOUIN kritisiert, von POINCARÉ aber verteidigt wurde. — Die Frage, ob mit den Drucken auch die Verschiebungen im ganzen Körper stetig sein müssen, hat WEINGARTEN untersucht und einen Fall ermittelt, wo dies nicht mehr zu bejahen ist. Wenn nämlich die Spannungen im Innern des Körpers existieren, ohne daß äußere Kräfte wirken — z. B. bei einem mit Gewalt zusammengeschweißten Ringe —, so treten Diskontinuitätsflächen der Verschiebung auf; dieser Fall kann indessen, wie VOLTERRA gezeigt hat, nur bei mehrfach zusammenhängenden Körpern eintreten.

Ferner ist auf diejenigen Arbeiten wenigstens hinzuweisen, die die Aufgabe behandeln, die Thermodynamik auf die Elastizitätserscheinungen anzuwenden und überhaupt die energetischen Beziehungen zwischen Temperatur- und Formänderungen festzustellen. Hierher gehören die Darlegungen von DUHAMEL, F. NEUMANN, THOMSON u. A. über den thermischen Druck, die Arbeiten von PLANCK, SCHILLER, v. HELMHOLTZ, CELLÉRIER, DUHEM, WASSMUTH und vielen Anderen über die Thermodynamik der elastischen Körper, von VOIGT über den Unterschied zwischen isothermischen und adiabatischen Elastizitätskonstanten und mancherlei anderes; der Ort, darauf näher einzugehen, ist aber die Thermodynamik, auf die daher (vgl. Bd. 3) verwiesen sei. Dabei ergibt sich, wie CELLÉRIER gezeigt hat, die Möglichkeit einer Erweiterung der Theorie der Elastizität, von der nun zu sprechen sein wird.

Erweiterung der Theorie. Bisher wurde angenommen, daß zwischen der Veränderung und der Beanspruchung Proportionalität besteht; und es hat — abgesehen von dem konstanten Gliede, das einer dauernden Deformation oder Spannung entspricht, und von dem im Artikel „Kohäsion“ noch die Rede sein wird — bis in die neuere Zeit als ausgemacht gegolten, daß jene Proportionalität für die mäßigen, in der Theorie vorausgesetzten Beanspruchungen immer stattfinde. Neuere Versuche haben indessen — vgl. Artikel „Zug und Druck“ sowie Artikel „Biegung und Torsion“ — gezeigt, daß, wenn auch geringfügige, so doch

deutliche Abweichungen vorhanden sind, und zwar bei verschiedenen Stoffen und bei verschiedenen Arten von Beanspruchung, als Dehnung, Biegung u. s. w. Man hat daher von verschiedenen Seiten allgemeinere Ansätze für die Beziehungen zwischen Drucken und Deformationen gemacht. Man kann dabei, wie z. B. BACH getan hat, einen Exponenten zu einer der beiden Größen hinzufügen, der natürlich von eins nicht beträchtlich abweichen wird. Ferner hat BECKER den Vorschlag gemacht, die Deformation als Exponentialfunktion der Kraft selbst, also mit letzterer im Exponenten (Grundzahl e) darzustellen, wofür sich auch theoretische Begründung geben ließe. Indessen wird man zu diesen und ähnlichen Formulierungen sich nicht entschließen können, sobald man nachweisen kann, daß es vollständig ausreicht, das lineare Glied beizubehalten und nur durch ein oder vielleicht durch einige höhere Glieder zu vervollständigen; dies ist aber, wie THOMPSON, F. KOHLRAUSCH, FINGER (ausgehend vom verallgemeinerten Potential der elastischen Kräfte) und namentlich VOIGT gezeigt haben, tatsächlich der Fall. Die Zusatzglieder im Potential müssen, ebenso wie das Hauptglied

$$f = K\Theta \cdot D^2 + K D_1^2 \quad ,$$

[vgl. Formel (87), p. 526] die Eigenschaft haben, bei Koordinatentransformation ihre Gestalt nicht zu ändern, diese Eigenschaft hat aber nach einem Satze von STICKELBERGER außer D und D_1 nur noch die Größe

$$(119) \qquad D_2^3 = x_x y_y z_z + \tfrac{1}{4} y_z z_x x_y - \tfrac{1}{4}(x_x y_z^2 + y_y z_x^2 + z_z x_y^2) \quad .$$

Man erhält somit das erweiterte Potential in der Form:

$$(120) \qquad f = K\Theta \cdot D^2 + K D_1^2 + c_1 D^3 + c_2 D D_1^2 + c_3 D_2^3 \quad ,$$

wo c_1, c_2, c_3 drei neue Konstanten sind, und hieraus die Druckkomponenten:

$$(121) \quad \begin{cases} -X_x = 2K\Theta \cdot D + 2K \cdot x_x + 3c_1 D^2 + c_2(2x_x D + D_1^2) + c_3(y_y z_z - \tfrac{1}{4} y_z^2) \quad , \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ -Y_z = c_2 y_z + c_2 y_z D + c_3(\tfrac{1}{4} z_z x_y - \tfrac{1}{2} x_x y_z) \quad . \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; , \;\; \cdot \;\; \cdot \end{cases}$$

Man kann diese Formeln schließlich noch durch Annäherung vereinfachen und auf die wichtigsten Fälle (Dehnung, Biegung, Torsion, kubische Dilatation) anwenden, worüber man die folgenden Artikel vergleiche.

Lösung des Problems für bestimmte Körperformen. Die wirkliche Ausführung der Lösung der Elastizitätsgleichungen muß sich natürlich an bestimmte Körperformen halten, weil nur für solche die Grenzbedingungen sich bestimmt hinschreiben lassen. Die physikalisch interessantesten hierher gehörigen Fälle werden in den folgenden Artikeln behandelt werden, die sich mit bestimmten Arten von Beanspruchung beschäftigen, wie sie bei Körpern von bestimmter Form meist auftreten. Die allgemeineren Untersuchungen der in Rede stehenden Art mögen jedoch, da sie sich dort nicht bequem einordnen lassen, gleich hier eine mit Rücksicht auf den verfüglichen Platz und die vielfach rein mathematische Natur der Arbeiten nur kurze Erwähnung finden. Zunächst spielt eine große Rolle bei der allmählichen Entwickelung der Lösungstheorie der durch eine Ebene begrenzte, im übrigen aber unbegrenzte Körper; für diesen Fall haben zuerst LAMÉ und CLAPEYRON eine spezielle, dann BOUSSINESQ eine allgemeinere, schließlich CERRUTI die vollkommene Lösung gegeben; übrigens läßt sich auf diesen Fall auch die Bildermethode (s. oben) anwenden; andererseits lassen sich aus ihm neue Fälle, wo die Grenze eine krumme Fläche ist, ableiten. — Die Deformation einer Kugel haben LAMÉ, W. THOMSON, BORCHARDT und — nach der BETTIschen Methode — CERRUTI, sowie MARCOLONGO und ALMANSI behandelt. Mittels Polarkoordinaten stellte CHREE das Gleichgewicht einer Kugel und einer Kugelschale dar, wenn die Dichte bezw. Struktur nur radial ver-

änderlich ist; auch der Fall eines Sphäroids wird in Betracht gezogen. — Entsprechend wurde von CHREE auch der Zylinder mittels zylindrischer Koordinaten behandelt. In anderer Weise wurde das Zylinderproblem fast gleichzeitig von JÄRISCH untersucht, nämlich ausgehend von partikulären Integralen von der Exponentialform; die entsprechenden Lösungen hat für einen speziellen Fall schon THOMAE angegeben, JÄRISCH gibt mit Hilfe von Substitutionen die Verallgemeinerung. — In bezug auf Kreisplatten vergleiche man Arbeiten von LAURICELLA, ALMANSI und HADAMARD. — Eine Reihe von Abhandlungen von CHREE ist dem Ellipsoid gewidmet, zuerst dem zweiachsigen, dann dem dreiachsigen; schließlich wird auch ein heterotropes Ellipsoid betrachtet; je nach dem System der auf die Oberfläche wirkenden Kräfte läßt sich die Lösung mehr oder weniger fertig aufstellen, besonders für stark oder schwach verlängerte oder abgeplattete Formen. Auch TEDONE hat das Gleichgewicht des Rotationsellipsoids behandelt. — Endlich ist auf den Fall des Dieders hinzuweisen, das von SOMIGLIANA nach einem besonderen Verfahren, von MARCOLONGO nach der BETTI-CERRUTIschen Methode behandelt worden ist. — An diesen Andeutungen muß es genügen.

6. Zeichen und Beziehungen.

Übersicht über die Bezeichnungen der elastischen Größen. In bezug auf die Schreibweise der elastischen Variablen und Konstanten herrscht eine so große Mannigfaltigkeit, daß eine etwas umfassendere Zusammenstellung der Bedeutungen der Symbole bei den verschiedenen Autoren und der algebraischen Beziehungen zwischen den verschiedenen Größen angezeigt erscheint.

1. Die Verschiebungskomponenten werden meist, auch hier, mit u, v, w, von einigen Autoren mit ξ, η, ζ bezeichnet.

2. Die Deformationskomponenten werden bezeichnet

von	ST. VENANT	KIRCHHOFF	KELVIN	PEARSON	LOVE	AUERBACH
mit	$\delta_x\ \delta_y\ \delta_z$	$x_x\ y_y\ z_z$	$e\ f\ g$	$s_x\ s_y\ s_z$	$e_{xx}\ e_{yy}\ e_{zz}$	$x_x\ y_y\ z_z$
	$g_{yz}\ g_{zx}\ g_{xy}$	$y_z\ z_x\ x_y$	$a\ b\ c$	$\sigma_{yz}\ \sigma_{zx}\ \sigma_{xy}$	$e_{yz}\ e_{zx}\ e_{xy}$	$y_z\ z_x\ x_y$

3. Die Druckkomponenten werden bezeichnet:

von	LAMÉ	ST. VENANT	KIRCHHOFF	KELVIN	PEARSON	AUERBACH
mit	$N_1\ N_2\ N_3$	$t_{xx}\ t_{yy}\ t_{zz}$	$X_x\ Y_y\ Z_z$	$P\ Q\ R$	$xx\ yy\ zz$	$X_x\ Y_y\ Z_z$
	$T_1\ T_2\ T_3$	$t_{yz}\ t_{zx}\ t_{xy}$	$Y_z\ Z_x\ X_y$	$S\ T\ U$	$yz\ zx\ xy$	$Y_z\ Z_x\ X_y$

4. Die kubische Dilatation wird bezeichnet:

von	LAMÉ	KIRCHHOFF	VOIGT	LOVE	HELMHOLTZ	AUERBACH
mit	Θ	σ	ϑ	Δ	ω	D

5. Die Elastizitätskonstanten werden bezeichnet:

Spannung : Deformation		Deformation : Spannung	
VOIGT	AUERBACH	VOIGT	AUERBACH
c_{11} bis c_{66}	$-a_{11}$ bis a_{66}	s_{11} bis s_{66}	$-b_{11}$ bis b_{66}

6. Die beiden Elastizitätskonstanten isotroper Stoffe werden, jedoch mit verschiedener Bedeutung, bezeichnet:

von	LAMÉ[1]	Versch. Autoren[2]	KIRCHHOFF	VOIGT	v. HELMHOLTZ
mit	λ, ν	A, B oder c, c' (VOIGT)	K, Θ	$-c_{11}$, $-c_{12}$ (= A, B)	H, K (= k_1, k_2)

Für dasjenige System dieser beiden Konstanten, bei dem die eine den Volumenmodul, die andere den Gestaltmodul darstellt, sind verschiedene Zeichen (z. B. bei KELVIN k und n) in Gebrauch; in diesem Buche werden die sehr geeigneten Zeichen k_1 und k_2 benutzt, sowie als ihr Verhältnis $k_2 : k_1$ das Zeichen $\varkappa$. Als Zeichen für die beiden praktischen Konstanten, Dehnungsmodul und Elastizitätszahl (näheres über sie im folgenden Artikel) werden in Deutschland wenigstens allgemein benutzt: E und μ; das Reziproke von E, der Dehnungskoeffizient, wird hier ε genannt; bei BACH heißt er α, bei Anderen noch anders. Endlich wäre noch das Reziproke des Volumenmoduls, die Kompressibilität, zu erwähnen, für die hier der Buchstabe C benutzt wird (vgl. die Tabelle auf nächster Seite).

7. Molekulartheorie.

Die im vorstehenden dargestellte Theorie der Elastizität beruht auf der Stetigkeitshypothese und der mit ihr verknüpften direkten Anwendung infinitesimaler Methoden. In der Tat verdankt die Elastizitätslehre ihre neuere Entwickelung dieser Form der Theorie. Ursprünglich ist sie jedoch auf molekularer Grundlage aufgebaut worden, und zwar in ausgearbeiteter Form zuerst zu Anfang des vorigen Jahrhunderts. Diese Theorie ist dann verlassen worden, teils wegen der Schwierigkeit, mit ihr zu rechnen, teils, weil sie zu Beziehungen zwischen den Elastizitätskonstanten führte, die durch die Beobachtung nicht bestätigt wurden. Es war dies indessen, wie man neuerdings eingesehen hat, nicht auf die Schuld der Molekulartheorie überhaupt zu setzen, sondern lediglich auf deren spezielle, bisher durchgeführte Form; als man sie in dieser Hinsicht verbesserte, wurde jener Widerspruch leicht gehoben.

Theorie von Navier. Der erste, der die Grundgleichungen der Elastizität auf molekularer Grundlage entwickelte, war NAVIER. Seine Hypothese bezieht sich auf homogene, isotrope Medien und besteht darin, daß die Wirkung, die zwei Teilchen nach eingetretener Verrückung aufeinander ausüben, in die Richtung ihrer Verbindungslinie fällt und proportional ist der durch die Verrückung hervorgerufenen Vergrößerung der Entfernung, im übrigen aber von dieser Entfernung selbst in einer eventuell noch näher zu bestimmenden Weise abhängt. Die Bewegungsgleichungen, welche sich ergeben, unterscheiden sich von den Gleichungen (76) nur dadurch, daß die beiden Elastizitätskonstanten den Faktor ϱ (Dichte) enthalten, und daß die zweite Elastizitätskonstante $\Theta = \frac{1}{2}$ wird. Die NAVIERsche Theorie bietet also den Vorteil, daß sie nur zu einer einzigen für die verschiedenen Stoffe verschiedenen und charakteristischen Elastizitätskonstanten führt. Dies ist ihr aber nur möglich geworden durch eine zu spezielle Annahme, und hierin liegt andererseits der Mangel der Theorie. Diese Annahme ist die, daß zwei Teilchen keine Wirkung aufeinander ausüben, wenn ihre Entfernung sich nicht ändert. Es wird damit, wie man leicht einsieht, eine gewisse Klasse reiner Gestaltsänderungen (s. oben), die ebenfalls Elastizität wachrufen, ignoriert. Dazu kommt noch, daß die Theorie nicht zur Kenntnis der Druckkomponenten führt, sondern direkt die Gleichungen liefert; für die letzte der Grenzbedingungen die Gleichungen (112), muß man aber jene kennen.

Poissonsche Molekulartheorie. Diese ist wenigstens von dem zweiten Mangel frei; und zwar liefert sie Ausdrücke für die Druckkomponenten, die auch

[1] Bei LAMÉ selbst λ, μ (s. oben p. 523). — [2] Bei v. HELMHOLTZ haben A und B etwas andere Bedeutung (s. oben p. 526).

Tabelle der Beziehungen zwischen den verschiedenen Elastizitätskonstanten isotroper Körper.

(Die Größen links ausgedrückt durch die Größen oben)

	A	B	ν	λ	k_1	k_2	K	Θ	E	μ	$\varkappa$	s	C
$A = -c_{11}$	A	—	$2\nu + \lambda$		$\frac{3k_1 + 4k_2}{3}$		$2\mathrm{K}(1+\Theta)$		$\mathrm{E}\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2}$		$\left[k_1\left(1+\frac{4}{3}\varkappa\right)\right]$	—	—
$B = \begin{cases} -c_{12} \\ \lambda \end{cases}$	—	B	—	λ	$\frac{3k_1 - 2k_2}{3}$		$2\mathrm{K}\Theta$		$\mathrm{E}\frac{\mu}{1-\mu-2\mu^2}$		$\left[k_1\left(1-\frac{2}{3}\varkappa\right)\right]$	—	—
$k_1 = H$	$\frac{A+2B}{3}$		$\frac{2\nu+3\lambda}{3}$		k_1	—	$\frac{2}{3}\mathrm{K}(1+3\Theta)$		$\frac{\mathrm{E}}{3(1-2\mu)}$		—	—	$\frac{1}{C}$
$k_2 = \begin{cases} \nu \\ \mathrm{K} \end{cases}$	$\frac{A-B}{2}$		ν	—	—	k_2	K	—	$\frac{\mathrm{E}}{2}\cdot\frac{1}{1+\mu}$		—	—	—
Θ	$\frac{B}{A-B}$		$\frac{\lambda}{2\nu}$		$\frac{3k_1 - 2k_2}{6k_2}$		—	Θ	—	$\frac{\mu}{1-2\mu}$	$\frac{1}{2\varkappa} - \frac{1}{3}$	—	—
E	$\frac{(A-B)(A+2B)}{A+B}$		$\frac{\nu(2\nu+3\lambda)}{\nu+\lambda}$		$\frac{9k_1k_2}{3k_1+k_2}$		$2\mathrm{K}\frac{1+8\Theta}{1+2\Theta}$		E	—	—	$\frac{1}{s}$	—
μ	$\frac{B}{A+B}$		$\frac{\lambda}{2(\nu+\lambda)}$		$\frac{3k_1 - 2k_2}{2(3k_1+k_2)}$			$\frac{\Theta}{1+2\Theta}$	—	μ	$\frac{3-2\varkappa}{2(3+\varkappa)}$	—	—
$\varkappa$	$\frac{3(A-B)}{2(A+2B)}$		$\frac{3\nu}{2\nu+3\lambda}$		$\frac{k_2}{k_1}$		—	$\frac{3}{2(1+3\Theta)}$	—	$\frac{3}{2}\frac{1-2\mu}{1+\mu}$	$\varkappa$	—	—
s	$\frac{A-B}{(A-B)(A+2B)}$		$\frac{\nu+\lambda}{\nu(2\nu+3\lambda)}$		$\frac{3k_1+k_2}{9k_1k_2}$		$\frac{1}{2\mathrm{K}}\cdot\frac{1+2\Theta}{1+3\Theta}$		$\frac{1}{\mathrm{E}}$	—	—	s	—
C	$\frac{3}{A+2B}$		$\frac{3}{2\nu+3\lambda}$		$\frac{1}{k_1}$	—	$\frac{3}{2\mathrm{K}(1+3\Theta)}$		~~$\frac{2}{\mathrm{E}}(1+\mu)$~~ $\frac{3}{E}(1-2\mu)$		—	—	C

für heterotrope Körper gelten, die aber freilich die unbekannte Funktion der Entfernung zweier Teilchen enthalten, durch welche die Anziehung derselben aufeinander — und zwar hier im natürlichen wie im Zwangszustande — dargestellt wird. Für unkristallinische Körper fällt aber diese Funktion wegen der radialen Symmetrie heraus, und so gelangt man für solche zu Ausdrücken, die mit den Ausdrücken (72) identisch werden, wenn man $A = 3B$, also $\Theta = \frac{1}{2}$ setzt. Das Ergebnis ist also dasselbe wie bei NAVIER. Hier zeigt sich aber noch deutlicher als dort der prinzipielle Mangel dieser Theorien. Eine einfache Betrachtung zeigt nämlich, daß die einzige in den POISSONschen Ausdrücken für die Druckkomponenten vorkommende Konstante der fünfte Teil des Volumenmoduls k_1 (s. oben p. 503 ff.) ist. Die Theorie wird also der Tatsache, daß die verschiedenen Stoffe auch eine verschiedene Gestaltselastizität haben, nicht gerecht. Am auffälligsten zeigt sich dies darin, daß nach dieser Theorie das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation beim Zuge länglicher Körper (s. Artikel „Zug und Druck“) für alle Körper gleich $\frac{1}{4}$ sein müßte, während es tatsächlich nicht unbeträchtlich variabel ist; anders formuliert, es müßte, was ebenfalls nicht zutrifft, das Verhältnis der Gestalts- zur Volumenelastizität für alle Stoffe $\frac{3}{5}$ sein. — Ähnlich verhält es sich mit der fast gleichzeitig aufgestellten Theorie von CAUCHY.

Theorie von Voigt. Die genannten Bedenken haben schon POISSON selbst veranlaßt, in seiner letzten, unvollendeten Arbeit die beschränkende Annahme fallen zu lassen, daß die Teilchen nach allen Richtungen mit gleicher Stärke wirken — eine Annahme, die auch durch die weitere, daß die Teilchen klein gegen ihre Abstände und diese in allen Richtungen gleich seien, nicht sonderlich begründet, durch die Tatsachen des Aufbaues der Kristalle aber schlechthin widerlegt wird. Leider ist auch die neue Annahme POISSONS, daß die Molekularwirkung mit der Richtung variiert, von ihm nicht in der richtigen Allgemeinheit durchgeführt worden, es ist vielmehr infolge eines Trugschlusses ein irriges Resultat gewonnen worden, das wiederum mit der Erfahrung nicht übereinstimmt. VOIGT hat dies erkannt und alsdann eine eigene Molekulartheorie der Elastizität aufgestellt, die in gleicher Weise auf Kristalle wie isotrope Körper anwendbar ist. Letzteres allerdings nicht, solange man die bisher stillschweigend gemachte Vorstellung von der Natur isotroper Körper beibehält, nämlich die molekular-isotrope Vorstellung, wonach die Teilchen in allen möglichen Orientierungen aneinander gelagert sind; in diesem Falle kommt man auf den alten Widerspruch zurück. Anders, wenn man die Vorstellung der quasi-isotropen Körper einführt, d. h. von Körpern, bei denen sehr viele Teilchen immer einen äußerst kleinen Kristall, sehr viele derartige, verschieden orientierte Kriställchen aber erst einen merklichen Teil des Körpers bilden, der infolgedessen einen isotropen Eindruck macht; dann aber bleibt das Verhältnis der beiden Konstanten, wie es die Erfahrung erfordert, auch nach der Theorie ein von Stoff zu Stoff variierendes. Nun ist aber die Idee des quasi-isotropen Stoffes schon durch die Tatsache gestützt, daß alle Metalle und dichten Gesteine den betreffenden Charakter ohne weiteres erkennen lassen, und daß selbst bei Glas Spuren derartigen Charakters nachgewiesen sind.

Für einen solchen quasi-isotropen Körper kann man nun die Elastizitätskonstanten aus denen des homogenen Kristalls berechnen. Die elastischen Druckkomponenten gegen ein Flächenelement sind nämlich nach der Molekulartheorie definiert durch die Summen der Komponenten, die alle auf der einen Seite der Fläche liegenden Molekeln auf die an der anderen befindlichen ausüben. Liegen nun in einem dichten Körper dem Flächenelement Kristallfragmente in allen möglichen Orientierungen an, so müssen in ihm die Druckkomponenten durch die Mittelwerte derjenigen gegeben sein, die für den regelmäßigen Kristall aus derselben Substanz bei allen möglichen Orientierungen des Flächenelements gegen den Kristall stattfinden. Führt man die Berechnung aus, so findet man die

gewöhnlichen Formen der Druckkomponenten in isotropen Körpern, nur mit dem Unterschiede, daß die Koeffizienten, d. h. die Elastizitätskonstanten des isotropen Körpers, durch die des Kristalls gleicher Substanz ausgedrückt sind. — Die Berechnung erfolgt, indem das Potential der elastischen Kräfte f einmal in dem Koordinatensystem xyz, dann in einem gegen dieses gedrehten $\xi\eta\zeta$ ausgedrückt wird.

(122) $$2f = \sum\sum c_{mn} x_m x_n \quad , \qquad 2f = \sum\sum \gamma_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu \quad ,$$

wo rechts die Größen x bezw. ξ die sechs Deformationsgrößen darstellen. Bildet man nun für alle Lagen des zweiten Koordinatensystems die Werte der Koeffizienten γ und nimmt deren Mittelwerte, so erhält man nur drei von null und untereinander verschiedene Werte, nämlich, wenn ein Mittelwert durch eine eckige Klammer bezeichnet wird:

(123) $$\left\{ \begin{array}{l} [\gamma_{11}] = [\gamma_{22}] = [\gamma_{33}] = A \quad , \qquad [\gamma_{23}] = [\gamma_{31}] = [\gamma_{12}] = B \quad , \\ \qquad\qquad\qquad [\gamma_{44}] = [\gamma_{55}] = [\gamma_{66}] = C \quad , \end{array} \right.$$

wo also A, B, C die Elastizitätskonstanten des quasi-isotropen Mediums sind. Indem man diese nun durch die Koeffizienten c_{mn} auszudrücken sucht, findet man, daß diese nur in den Verbindungen

(124) $$c_{11} + c_{22} + c_{33} = 3\,\mathsf{A} \; , \quad c_{23} + c_{31} + c_{12} = \mathsf{B} \; , \quad c_{44} + c_{55} + c_{66} = 3\,\Gamma$$

auftreten, und es ergeben sich die Endformeln

(125) $$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{5}(3\,\mathsf{A} + 2\,\mathsf{B} + 4\,\Gamma) \quad , \\ B = \frac{1}{5}(\mathsf{A} + 4\,\mathsf{B} - 2\,\Gamma) \quad , \\ C = \frac{1}{5}(\mathsf{A} - \mathsf{B} + 3\,\Gamma) \quad . \end{array} \right.$$

Zwischen den drei Konstanten A, B, C besteht nun stets die Beziehung

(126) $$C = \tfrac{1}{2}(A - B) \quad ;$$

eine Beziehung, die jede Stetigkeits- oder Molekulartheorie ergibt. Dagegen ergibt sich die weitere Beziehung

(127) $$B = C \quad , \qquad A = 3B \quad ,$$

die mit der Konsequenz der POISSONschen Theorie identisch ist, hier nur für den Fall, daß die Molekeln des betrachteten Kristalls keine Polarität besitzen; wenn sie dagegen Polarität besitzen, so hat der aus ihnen aufgebaute quasi-isotrope Körper zwei voneinander unabhängige Elastizitätskonstanten, deren Verhältnis von Stoff zu Stoff variieren darf. — Es sei gleich hier bemerkt, daß die Beobachtungen an Kristallen und entsprechenden quasi-isotropen Stoffen, soweit sie einwandfrei durchführbar sind (vgl. Artikel „Kristallelastizität"), die Theorie gut bestätigen.

Ein Rest von Schwierigkeit bleibt immerhin insofern bestehen, als man sich nicht wird entschließen können, allen festen Körpern die gedachte Struktur zuzuschreiben — von den Flüssigkeiten und Gasen gar nicht zu reden. VOIGT hat daher nach einer weiteren Erklärung gesucht und sie in folgender Möglichkeit gefunden. Die Gleichungen, die bei der Stetigkeitstheorie die Grundlage bilden, kommen bei der Molekulartheorie zwar ebenfalls heraus, aber nur unter der beschränkenden Annahme, daß sich innerhalb des Bereichs der molekularen Wirkungssphäre die einzelnen Molekeln bei der Deformation des Körpers ebenso verhalten wie Punkte eines Kontinuums, das, neben gewissen Verrückungen und Drehungen als Ganzes, eine gleichförmige Dilatation nach drei aufeinander senkrechten Richtungen erfährt. Bei einem Kristall, der bei der Deformation das Raumgitter seiner Molekeln dem Charakter nach nicht ändert, ist diese Annahme offenbar erfüllt, ebenso auch bei einer Flüssigkeit, deren Teilchen sich nach jeder Deformation wieder zu einer richtungslosen Konfiguration umlagern. Derartige

Umlagerungen fallen aber nicht unter das Schema der Grundgleichungen, man muß daher Körper von kristallischem Charakter einerseits (das wissen wir bereits), aber auch Körper mit Fluidität andererseits von dieser Theorie ausschließen und die Gleichungen als charakteristisch für ideale „fest-elastische“ Körper ansehen. Für ideale „elastisch-flüssige“ Körper kann man dann neue Gleichungen, die gegenüber den alten gewisse Zusatzglieder enthalten, aufstellen; und schließlich kann man jeden beliebigen Körper zwischen beide Systeme interpolieren, ihm also einen bestimmten Fluiditätsgrad zuschreiben. Natürlich wird dieser Fluiditätsgrad für gewöhnliche feste Körper sehr klein sein; vielleicht aber ausreichend, um geringe Abweichungen vom POISSONschen Verhältnis, das sich durch Quasi-Isotropie nicht gut deuten läßt, darzustellen.

Theorie von Lord Kelvin. Diese Theorie, die sich an die Molekularvorstellung von BOSCOVICH und an die BRAVAISsche Raumgittertheorie anlehnt, verdient besondere Beachtung wegen des Lichtes, das sie auf die Frage der Unabhängigkeit oder Abhängigkeit der Elastizitätskonstanten iso- und heterotroper Körper voneinander wirft. Führt man nämlich ein Punktsystem mit regulärem Elementartetraeder und nur einer Art von Punkten ein, so kommt man für isotrope Körper auf die POISSONsche Relation, für Kristalle auf die Zahl von 15 Konstanten; führt man aber zwei ineinander gestellte Punktsysteme, mit anderen Worten ein aus Doppelpunkten aufgebautes Raumgitter ein, so bleiben die beiden isotropen Konstanten unabhängig, und der unsymmetrische Kristall behält 21 Konstanten. Um insbesondere Inkompressibilität, bei beliebiger Gestaltselastizität, zu erhalten, kann man sich in jedes Elementartetraeder eines schiefwinkligen Gitters noch einen Punkt hineingelegt denken, der durch vier starre Stäbe mit den Ecken verbunden ist, und nun das Tetraeder so deformieren, daß sein Volumen ein Maximum wird; wählt man dagegen das Tetraeder und die Lage des inneren Punktes beliebig, sowie jene Stäbe dehnbar, so kann man den allgemeinen Fall verwirklichen.

Kinetische Theorien. Die bisher angeführten Theorien nehmen die Molekeln der festen elastischen Körper als ruhend an oder gehen doch auf ihren Bewegungszustand und dessen elastische Konsequenzen nicht näher ein. Der Versuch, das zu tun und so eine kinetische Theorie der elastisch-festen Körper zu begründen, ist u. A. von SLOTTE gemacht worden. Bei festen Körpern bewegt sich jedes Teilchen innerhalb seines „Schwingungsraumes“ und erzeugt, wenn r der Radius des Schwingungsraumes ist, nach außen den „Wärmedruck“ $m u^2/r$, also für die Flächeneinheit nach einer bestimmten Richtung, wenn d die Dichte und $l^3 = m/d$ ist, den Wärmedruck $P = m u^2/4 r l^2$. Diese Größe muß, wie sich zeigt, nahezu den Wert des Elastizitätsmoduls darstellen, und es ergibt sich ferner eine Reihe von Beziehungen zwischen elastischen und kalorischen Größen, deren weitere Betrachtung in die Thermodynamik gehört.

Schließlich ist eine bedeutsame Arbeit von REISSNER zu erwähnen, in der der Versuch gemacht wird, die HELMHOLTZ-HERTZsche Statik monozyklischer Systeme auf die Elastizität fester Körper anzuwenden. Die Vorzüge der neuen Theorie gegenüber der alten zeigen sich freilich weniger bei den eigentlich elastischen Erscheinungen, für die ja die verbesserte Molekulartheorie ausreicht, als bei der Anwendung auf elastische Nachwirkung, bleibende Deformation, innere Reibung und namentlich auf die thermoelastischen Beziehungen, womit sich auch hier die Verweisung in die kinetische Thermodynamik rechtfertigt. Es sei aber, zur Charakterisierung des Verfahrens, wenigstens angedeutet, daß man sich ein kleines Parallepiped des Körpers ersetzt zu denken hat durch seine acht Eckpunkte nebst gewissen verborgenen Massenpunkten, daß man alsdann die Koordinaten der Punkte durch die Deformationskomponenten und schließlich die potentielle Energie des Volumenelements durch die kinetische Energie eines entsprechenden monozyklischen Systems darstellen kann; statt der Parallepipeda kann man mit gewissem

Vorteil auch Elementartetraeder wählen. Für die Elastizitätskonstanten ergeben sich, wie auch in der Stetigkeitstheorie, besondere isothermische und adiabatische Werte, die dann verglichen werden müssen u. s. w.

Literatur.

a) Lehrbücher u. s. w.

(Die Lehrbücher der Mechanik überhaupt, die meist auch einen größeren Abschnitt über Elastizität enthalten, sind hier meist nicht nochmals aufgeführt). — Anordnung alphabetisch.

A. Beer, Einleitung in die mathematische Theorie der Elastizität u. s. w. Leipzig 1869. — J. Boussinesq, Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris 1884. — A. L. Cauchy, Exercises de math. Paris 1827—29. — A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862. — Dasselbe, übersetzt und mit Anmerkungen von St.-Venant. Paris 1883. — P. Duhem, Hydrodynamique, Elasticité etc. Paris 1891. — H. v. Helmholtz, Vorlesung über die Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen, herausg. von O. Krigar-Menzel, Leipzig 1902. — Rob. Hooke, De potentia restitutiva. London 1678. — W. J. Ibbetson, Math. Theory of perfect elastic solids. Cambridge 1892. — G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik. Leipzig 1876. — M. G. Lamé, Leçons sur la théorie math. de l'élasticité des corps solides. Paris 1866. — A. E. H. Love, A treatise on the math. theory of elasticity. Cambridge 1906. — R. Marcolongo, Teoria mat. dell-equilibrio dei corpi elastici. Milano 1904. — Navier, Résistance des corps solides, 3. éd. par St.-Venant. Paris 1864. — F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität u. s. w., herausg. von O. E. Meyer. Leipzig 1885. — H. Poincaré, Leçons s. l. th. math. de l'élasticité. Paris 1892. — S. D. Poisson, Traité de mécanique. Paris 1833. — W. Thomson (Lord Kelvin), Artikel „Elasticity" in der Enc. Brit. 9. éd. 1878. — Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik, deutsch von Helmholtz und Wertheim. Braunschweig 1871. — I. Todhunter und K. Pearson, A history of the theory of elasticity etc. from Galilei to the present time, 3 Bände. Cambridge 1886—93. — W. Voigt, Elementare Mechanik. Leipzig 1889. — J. Weyrauch, Theorie elastischer Körper. Leipzig 1884. — Th. Young, A course of natural philosophy. London 1807.

b) Abhandlungen.

(In alphabetischer Anordnung der Autoren).

G. B. Airy, Rep. Brit. Ass. 1862; Trans. Roy. Soc. **153.** 49. 1863. — E. Almansi, Mém. di Torino **47.** 1897; Rend. Acc. Linc. (6) **10.** 333. 400. 1901. — Almansi und Lauricella, Atti di Torino **31.** 1896. — P. Appell, Nouv. de math. (4) **2.** 193. 1902. — F. Auerbach, Jahresber. d. schles. Ges. 1887. p. 132. — C. Bach, Z. Ver. d. Ing. **46.** 1901. — G. Bakker, Journ. de Phys. (3) **10.** 558. 1901. — G. F. Becker, Sill. Journ. (3) **46.** 337. 1893. — E. Beltrami, Nouv. Cim. (3) **29.** 241; **30.** 126; Rend. Ist. Lomb. (2) **24.** 779. 1891; Rend. Acc. Linc. (5) **1.** 141. — E. Betti, Nuov. Cim. **6** bis **10.** 1872 ff.; Proc. Lond. math. soc. **20.** 246. 1889. — C. W. Borchardt, Crelles Journ. **76.** 1873; Berl. Ber. 1873. — J. Boussinesq, C. R. **86.** 96. 1878—83; C. R. **106.** 1043. 1119. 1888. — S. Canevazzi, Il Politecnico 1889; Mem. Ist. Bol. (4) **10.** 673. 1890. — M. Cantone, Rend. Acc. Linc. (5) **4.** 1. Sem. 488; Nuov. Cim. (4) **2.** 180. 1895. — G. Cellérier, Bull. soc. math. de France **21.** 18. 1893. — V. Cerruti, Acc. Linc., mem. fis.-mat. (3) **13.** 81. 1882; Rend. Acc. Linc. **4.** 785. 1888. — E. Cesáro, Rend. Acc. Linc. **5.** 259. 1889. — C. Chree, Quart. J. Nr. 89. p. 11. 1888; Proc. Cambr. phil. soc. **6.** 115. 1887; Cambr. Phil. Trans. **14.** III. 250. 1888; **15.** III. 313. 1892; Proc. Roy. Soc. **56.** 26. 1894; **58.** 39. 1895; Quart. Journ. **108.** 338. 1895; Trans. Cambr. phil. soc. (3) **17.** 201. 1899; Proc. Cambr. phil. soc. (2) **9.** 61. 1896. — F. H. Cilley, Sill. Journ. (4) **11.** 269. 1901. — E. u. F. Cossérat, C. R. **133.** 145. 1901. — J. Dougall, Math. soc. Edinb. **16.** 1898; Trans. Edinb. soc. **41.** 1904. — Duhamel, Mém. prés. par savants étr. **5.** 1838. — P. Duhem, C. R. **136.** 139. 281. 1903; Ann. école norm. (3) **21.** 99; C. R. **138.** 541. 1904. — J. Finger, Wien. Ber. **103.** II. 163. 231. 1073. 1894. — V. Fischer, Crelles Journ. **126.** 233. 1903. — B. de Fontriolant, C. R. **109.** 216. 1889. — J. Fredholm, C. R. **131.** 875. 1900. — P. Glan (Theoretische Untersuchungen über Elastizität; größere, im Texte nicht erwähnte Folge von eigenartigen Untersuchungen) Wied. Ann. **55.** 302. 321. 432. 582; **56.** 509; **57.** 112; **59.** 155. 401; **60.** 174. 563; **63.** 230. 1895—98. — Hadamard, Ann. école norm. (3) **18.** 313. 1901. — P. Jaerisch, Mitt. math. Ges. Hamburg **3.** 202. 1895. — W. J. Ibbetson, Proc. Lond. math. soc. **17.** 296. 1887. — Lord Kelvin siehe W. Thomson. — G. Kirchhoff, Crelles Journ. **40.** 1850 und **56.** 1859 (diese Abhandlungen behandeln zwar spezielle Probleme, enthalten aber zugleich die

allgemeine KIRCHHOFFsche Formulierung). — F. KOHLRAUSCH u. E. GRÜNEISEN, Berl. Ber. 1901. p. 1086. — A. KORN, Münch. Ber. **36.** 37. 1906. — H. LAMB, Proc. Lond. math. soc. **19.** 144. 1889. — M. G. LAMÉ, Journ. de math. par LIOUVILLE **6.** 1841. — LAMÉ und CLAPEYRON, Mém. prés. à l'acad. royale **4.** — J. LARMOR, Trans. Cambr. phil. soc. **14.** 1885; Trans. R. soc. A. vol. 185. 1894. — G. LAURICELLA, Atti Acc. Linc. (5) **2.** 1. sem. 298. 1893; Nuov. Cim. (3) **36.** 173. 225. 314. 1894; (4) **1.** 87. 155. 1895; **9.** 97; **10.** 5. 1899. — L. LECORNU, Bull. soc. math. **29.** 176. 1901. — M. LÉVY, C. R. **107.** 414. 1888. — R. LIPSCHITZ, CRELLES Journ. **78.** 1874. — R. LIOUVILLE, C. R. **133.** 434. 1901. — R. MARCOLONGO, Rend. Acc. Napoli 1889 und 1891; Rend. Acc. Linc. (4) **5.** 349. 1889; (5) **11.** 1. sem. 318. 1902. — CL. MAXWELL, Trans. Edinb. soc. **26.** 1870; Scient. papers **2.** 161. — J. H. MICHELL, Proc. Lond. math. soc. **31.** 100. 124. 1899; **32.** 1901. — G. MORERA, Rend. Acc. Linc. (5) **1.** 1. sem. 137. 232. 1892. — R. F. MUIRHEAD, Nature **64.** 207. 1901. — NAVIER, Mém. de l'Acad. Paris **7.** 375. 1824. — E. PADOVA, Nuov. Cim. (3) **23.** 57. 1888. — K. PEARSON, Mess. of math. Nr. 218. p. 31. 1889. — H. POINCARÉ, C. R. **112.** 914. 1891. — S. D. POISSON, Mém. de l'inst. 1814; Mém. Acad. Paris **8.** 1828; Journ. de l'école polyt. **13.** 1831; Mém. de l'Acad. Paris **18.** 1842. — Lord RAYLEIGH, Proc. Lond. math. soc. **4.** 1873; Papers **1.** 179. — H. REISSNER, Ann. d. Phys. **9.** 44. 1902; Sitz.-Ber. math. Ges. **1.** 40. 1902. — L. DE LA RIVE, Arch. de Genève (4) **16.** 388. 1903. — B. DE SAINT-VENANT, C. R. **24.** 1874. — J. DE LIOUVILLE (2) **8.** 1863. — SARRAU, N. ann. de math. (3) **7.** 503. 1888. — K. F. SLOTTE, Öfv. Finska Vet. Soc. **35.** 1. 1893; Jub.-Schrift Helsingfors 1899. — C. SOMIGLIANA, Nuov. Cim. (3) **17.** 20. 1885—86; Ann. di mat. (2) **17.** 1889; Nuov. Cim. (3) **36.** 28. 113. 1894; Rend. Acc. Linc. (5) **11.** 145. 1902; **13.** 307. 1904; **13.** 2. sem. 129. 1904. — O. TEDONE, Rend. Acc. Linc. (5) **5.** 1. sem. 460; 2. sem. 58. 1896; Nuov. Cim. (4) **11.** 161. 1900; Ann. di mat. (3) **8.** 1903; Rend. circ. di Palermo **18.** 1904; Rend. Acc. Linc. (5) **14.** 1. sem. 76. 316. 1905. — J. THOMAE, Leipz. Ber. 1885. p. 399; 1886. p. 186. — O. THOMPSON, WIED. Ann. **44.** 555. 1891. — W. THOMSON (Lord KELVIN), Quart. Journ. math. **5.** 1855; Phil. Mag. (5) **5.** 1878; Math. a. phys. Papers **1.** 291; Trans. Roy. Soc. **153.** 1863; Papers **3.** 351; Proc. Roy. Soc. **54.** 59. 1893; Phil. Mag. (6) **3.** 95. 444. 1902; Proc. Edinb. Soc. **24.** 1902. — W. VOIGT, Abh. Gött. Ges. d. Wiss. **34.** 1. 1887; WIED. Ann. **36.** 743. 1889; **38.** 573. 1889; **48.** 674. 1893; **49.** 396. 1893; **52.** 536. 1894; DRUDES Ann. **4.** 187. 1901; Berl. Ber. 1901. p. 1266; Rapport au Congrès intern. de phys. Paris 1900. — V. VOLTERRA, Rend. Acc. Linc. (5) **2.** 1. sem. 389. 549; 1893; Atti Acc. Torino **32.** 223. 1897; Rend. Acc. Linc. (5) **14.** 1. sem. 127. 193. 1905. — A. WASSMUTH, BOLTZMANN-Festschrift p. 555. 1904. — W. WEBER, POGG. Ann. **34.** 1835; **54.** 1841. — G. WEINGARTEN, CRELLES Journ. **90.** 1881; Rend. Acc. Linc. (5) **10.** 1. sem. 57. 1901; Arch. d. Math. (3) **2.** 233. 1901. — K. WESENDONCK, WIED. Ann. **35.** 121. 1888; **36.** 725. 1889.

Zug und Druck.

Von F. AUERBACH.

1. Einleitung.

Gliederung der Elastizitätslehre. Nachdem im vorigen Artikel die allgemeine Grundlage für die Betrachtung der Elastizitätserscheinung gelegt worden ist, kann nunmehr auf diese selbst, ihre Theorie und Praxis, eingegangen werden. Die Gliederung, die man zu diesem Zwecke dem überaus reichhaltigen Material geben kann, unterliegt, da es für sie nicht eine, sondern sehr zahlreiche Direktiven gibt, in weitem Maße der Willkür. Man wird zunächst zwischen statischen und dynamischen Verhältnissen unterscheiden und hiernach eine Haupteinteilung treffen, obgleich sich vielfach die Bewegungserscheinungen ganz direkt und ungezwungen an die Gleichgewichtszustände anschließen lassen. Ferner wird man isotrope und heterotrope Stoffe getrennt untersuchen. Eine weitere Mannigfaltigkeit ergibt sich durch die Form der Körper, die elastisch beansprucht werden, namentlich durch ihren Charakter als wesentlich ein-, zwei- oder dreidimensionale Körper. Sehr wesentlich ist ferner die Art der Beanspruchung, nämlich durch Zug, Druck, Biegung, Scherung, Drillung u. s. w.; dabei kann man entweder, wie es nach der allgemeinen Theorie naheliegt, die Potentialdeformationen einerseits und die Wirbeldeformationen andererseits zusammenfassen; man kann aber auch, was in mancher Hinsicht entscheidende Vorteile für die Darstellung bietet, Zug und Druck einerseits, Biegung und Drillung andererseits vereinigen. Schließlich läßt es sich nicht grundsätzlich entscheiden, ob man überall gleich an die Vorgänge innerhalb die jenseits der Elastizitätsgrenze anschließen oder ob man lieber zuerst die gesamte Elastizitätslehre im engeren Sinne erledigen und hieran dann einen besonderen Abschnitt über die Kohäsions-, Festigkeits- und verwandten Erscheinungen anschließen solle.

Aus diesem Gewirr von Möglichkeiten kann man offenbar nur dann einen Ausweg finden, wenn man sich an die Gebote der Zweckmäßigkeit hält und insbesondere die Anordnung derart trifft, daß Trennung von Zusammengehörigem, Wiederholung von schon Gesagtem, Vorwegnahme von erst später zu Entwickelndem zwar nicht vermieden, aber doch auf das kleinste Maß beschränkt wird. Daß schließlich verschiedene Autoren in dieser Hinsicht zu verschiedenen Anordnungen kommen, ist begreiflich und wird durch einen Blick in die vorzüglichsten Gesamtdarstellungen des Gebietes bestätigt. Im folgenden sind im ganzen sieben Artikel gebildet, von denen der vorliegende der erste ist; es sind das diese:

1. Zug und Druck
2. Biegung und Torsion
3. Elastizität der Kristalle

} Elastische Statik.

4. Elastische Schwingungen }
5. Elastischer Stoß } Elastische Dynamik.
6. Elastische Nachwirkung }

7. Kohäsion, der Kürze halber als zusammenfassender Name für die Gesamtheit der Erscheinungen, welche jenseits der Elastizitätsgrenze auftreten; dieser Artikel steht also den sechs ersten als erweiterte Elastizitätslehre gegenüber.

Zug und Druck; Übersicht. Die einfachste Einwirkung auf homogene, isotrope, elastische Körper ist durch Zug und Druck, d. h. durch Kräfte, die auf den Oberflächenteilen, an denen sie angreifen, senkrecht stehen; wirken sie nach aufsen, so spricht man von Zug; wirken sie nach innen, von Druck. Das wesentliche und erste Ergebnis dieser Beanspruchung ist eine Änderung des Volumens, und zwar im ersten Falle, der Zugbeanspruchung, eine Vergrößerung des Volumens, eine Dilatation, im anderen, der Druckbeanspruchung, eine Verminderung des Volumens, eine Kontraktion oder Kompression. Bei allgemeiner Gestaltung der beanspruchten Körper wird es freilich, infolge der komplizierten Ausbreitung des Zuges und Druckes, bei der überall senkrechten Orientierung der Kräfte und Deformationen gegen die Flächen nicht sein Bewenden haben, es werden vielmehr schiefe Komponenten auftreten; man wird deshalb zweckmäßig mit typisch einfachen Fällen beginnen, wo diese Komplikation nicht eintritt — Fälle, die zugleich theoretisch und praktisch von besonderer Bedeutung sind. Am einfachsten wird sich das Problem offenbar bei Körpern gestalten, die im wesentlichen in einer einzigen Dimension stark ausgebildet sind und in eben dieser Richtung beansprucht werden, also bei Drähten, Stäben, Röhren u. s. w. Man gelangt so zu dem Falle des Längszuges und Längsdruckes, mit Längsdehnung und Längskontraktion als entsprechenden Wirkungen. Hierbei tritt nun aber noch eine zweite Wirkung auf, nämlich die Querkontraktion bezw. Querdilatation, die nun im Zusammenhange mit der ersten Wirkung zu betrachten ist. Unter Umständen kann übrigens Längsdruck praktisch noch eine andere Wirkung, nämlich eine Art von Biegung, erzeugen, die in der Technik als Knickung bezeichnet zu werden pflegt und zweckmäßig gleich hier erledigt wird. Dann kommen die zwei- und dreidimensionalen Körper an die Reihe, unter denen Kugel und Zylinder, namentlich aber Hohlkugel und Hohlzylinder ein besonderes Interesse in Anspruch nehmen. Endlich ist der Fall zu betrachten, daß zwei verschiedene Körper aufeinander drücken. Die Ergebnisse aller dieser Untersuchungen gipfeln, außer in einer Reihe von Gesetzen und Formeln, in der Bestimmung der Elastizitätskonstanten isotroper Körper, und zwar des Dehnungsmoduls, der Elastizitätszahl und des kubischen Kompressionsmoduls; und zwar nicht bloß dieser Konstanten an sich, sondern auch ihrer Abhängigkeit von einer Reihe von Einflüssen.

2. Theorie.

Längszug oder Längsdruck. Der zu beanspruchende Körper sei in einer Richtung besonders ausgedehnt, diese Richtung sei gerade, und der Querschnitt sei überall derselbe. Die Hauptrichtung sei die z-Achse, von äußeren Kräften, namentlich von der Mitwirkung der Schwerkraft werde zunächst abgesehen. Dagegen soll auf den einen Endquerschnitt ein Zug P, oder wenn P negativ ist, ein Druck wirken; auf den anderen, fest eingespannten Endquerschnitt wirkt alsdann nach dem Reaktionsprinzip ein gleicher und entgegengesetzter Zug, $-P$ bezw. P. Die Gleichungen des vorigen Artikels (62) bezw. (77) vereinfachen sich dann bedeutend. Da nämlich die Endflächen senkrecht zu den Drucken stehen, oder auch einfach aus Symmetriegründen, ist die Hauptrichtung eine Hauptdruckachse; folglich ist

$$X_y = 0 \quad , \quad X_z = 0 \quad , \quad Y_z = 0 \quad , \quad Y_x = 0 \quad , \quad Z_x = 0 \quad , \quad Z_y = 0$$

und somit

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0 \quad .$$

Es müssen also u, v, w lineare Funktionen von x, y, z sein; und da außerdem keine Drehungen stattfinden können, d. h. da

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

ist, so kann u nur x, v nur y, w nur z enthalten. Schließlich fallen in diesen Beziehungen, solange man von bleibenden Veränderungen absieht, auch die konstanten Glieder weg, und man erhält

(1) $$u = \alpha x \quad , \quad v = \beta y \quad , \quad w = \gamma z \quad .$$

Es sind also α, β, γ die linearen, und es ist $\alpha + \beta + \gamma$ die kubische Dilatation. Zu ihrer Bestimmung dienen die Grenzbedingungen. Ist etwa der Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$, die Länge $l = 2c$, so hat man:

$$\text{für } x = \pm a \quad , \quad \text{für } y = \pm b \quad , \quad \text{für } z = \pm c \quad ,$$
$$X_x = 0 \quad , \quad Y_y = 0 \quad , \quad Z_z = P \quad ,$$

also ausgeführt, wenn die Konstanten A und B (p. 523) benutzt werden:

$$(A - B)\alpha + B(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \quad ,$$
$$(A - B)\beta + B(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \quad ,$$
$$(A - B)\gamma + B(\alpha + \beta + \gamma) = P$$

und somit:

(2) $$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \dfrac{A + B}{(A - B)(A + 2B)} P \quad , \qquad D = \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{P}{A + 2B} \quad , \\ \alpha = \beta = - \dfrac{B}{(A - B)(A + 2B)} P \quad . \end{array} \right.$$

Hier interessiert zunächst der Wert der Längsdilatation; er wird, wenn man

(3) $$E = \frac{(A - B)(A + 2B)}{A + B} = 2K \frac{1 + 3\Theta}{1 + 2\Theta}$$

setzt, durch die einfache Formel

(4) $$\gamma = \frac{P}{\varepsilon}$$

bestimmt. Die Dehnung ist also dem Zuge, die Zusammenziehung dem Drucke direkt proportional. Dies ist das sogen. HOOKEsche Gesetz. Zu seiner praktischen Anwendung ist aber zweierlei zu erwägen: erstens, daß P der Zug bezw. Druck ist, d. h. die auf die Einheit des Querschnittes wirkende Kraft; will man das ziehende oder drückende Gewicht G selbst einführen, so muß man also noch durch den Querschnitt q dividieren; und zweitens, daß γ die Verlängerung bezw. Verkürzung der Längeneinheit ist; will man also die ganze Verlängerung Γ einführen, so muß man rechts mit der Länge l multiplizieren. Bei beiden Operationen ist übrigens eine stillschweigende Voraussetzung gemacht: dort, daß die Beanspruchung

sich über den ganzen Querschnitt, hier, daß die Längenänderung sich über die ganze Länge gleichförmig verteile. Man erhält hiernach:

(4a) $$\Gamma = \frac{lG}{Eq} \quad ;$$

in Worten: die Dehnung ist mit Länge und Gewicht direkt, mit Querschnitt und Modul umgekehrt proportional.

Elastizitätsmodul. Die durch die Gleichung (4) eingeführte Konstante E heißt Dehnungsmodul oder Zugmodul oder schlechthin Elastizitätsmodul, in England häufig YOUNGs Modul. Diese Konstante spielt für einseitigen Streß und Strain ganz die entsprechende Rolle wie die Masse für Kraft und Beschleunigung; sie stellt den Widerstand gegen Längsdehnung oder die Kapazität eines Stoffes für longitudinalen Zug oder Druck dar (vgl. oben p. 507). Es ist schon aus Anlaß allgemeinerer Betrachtungen auf p. 500 bemerkt worden, daß man statt des Moduls auch sein Reziprokes, den Koeffizienten, hier also den Dehnungs- oder Zug- oder Elastizitätskoeffizienten ε einführen, also

(5) $$\gamma = \varepsilon P \quad , \qquad \Gamma = \frac{\varepsilon l G}{q}$$

setzen kann, und daß jeder der beiden Ausdrücke gewisse Vorzüge hat; eine zwingende Entscheidung läßt sich weder aus theoretischen noch aus praktischen Gründen treffen, die Analogie mit der Masse spricht aber schließlich für die Wahl des Moduls.

Der Dehnungsmodul ist das Verhältnis eines kleinen Zuges zur erzeugten, ebenfalls kleinen, relativen Verlängerung; der Dehnungskoeffizient ist das Verhältnis der relativen Verlängerung zum Zuge, ebenfalls beide Größen als klein angenommen; in Formel:

(6) $$E = \frac{P}{\gamma} \quad , \qquad \varepsilon = \frac{\gamma}{P} \quad .$$

Um in diesen Ausdrücken den Nenner zu beseitigen, kann man ihn gleich eins wählen und erhält dann die Aussprüche: Dehnungsmodul ist der Zug, der die Dilatation zu eins machen würde; Dehnungskoeffizient ist die Dilatation durch den Zug eins. Diese Aussprüche haben aber natürlich nur abstrakten und formalen Sinn; in Wirklichkeit würde eine Dilatation gleich eins, d. h. eine Verlängerung auf das Doppelte, bei fast allen Stoffen nicht nur zur Überschreitung der Elastizitätsgrenze, sondern auch zur Aufhebung des Zusammenhanges führen; und ebenso würde die Dilatation durch den Zug eins im absoluten Maße so minimal sein, daß sie sich jeder Feststellung entziehen würde. Obige Aussprüche sollen also nur die in den allgemeinen Definitionen vorkommenden Divisionen schematisch als ausgeführt hinstellen. Will man trotzdem einen bequemen Nenner haben, so kann man z. B. sagen: der Modul ist das Tausendfache desjenigen Zuges, der eine Dilatation von $^1/_{1000}$ erzeugt.[1] Schließlich kann man — und das ist sogar die ursprüngliche, von YOUNG gegebene Definition — den Modul, statt als einen Zug, als eine Länge charakterisieren, nämlich als diejenige Säule derselben Substanz wie der Versuchskörper, deren Zug oder Druck auf seine Endfläche sich zum Gewichte der eine bestimmte Längenänderung erzeugenden

[1] Hierdurch erledigen sich die, dem Physiker unverständlichen Ausführungen BACHs in seinem sonst so vortrefflichen Lehrbuche: Elastizität und Festigkeit. Von zwei Größen, die im Reziprozitätsverhältnis zueinander stehen, kann unmöglich die eine natürlich, die andere widersinnig, die eine anschaulich, die andere unanschaulich sein; und wenn das Einssetzen des Nenners in dem einen Falle den Zug unbrauchbar groß macht, so muß es doch im anderen die Dehnung unbrauchbar klein machen. — Über die hinsichtlich des Gebrauchs der Ausdrücke Modul und Koeffizient herrschende Unstimmigkeit vgl. die Bemerkungen S. 500.

Säule verhält wie die Länge des Versuchskörpers zu seiner Längenänderung in dem gedachten Falle.

Querschnittsänderung und Volumenänderung. Die obigen Formeln zeigen unmittelbar, daß die Längenänderung nicht die einzige bei unserem Problem auftretende Erscheinung ist. Es tritt vielmehr zugleich eine Veränderung des Querschnittes ein, die sich auf seine beiden Dimensionen — und das gilt auch für einen anderen als rechteckigen Querschnitt — gleichmäßig verteilt und ebenfalls mit dem Längszuge proportional ist. Der charakteristische Koeffizient der Änderung einer Querdimension ist aber nicht der Dehnungsmodul, sondern eine andere Kombination der beiden Elastizitätskonstanten. Es liegt daher nahe, das Verhältnis beider Änderungen zu bilden, indem man die Änderung einer Querdimension durch die der Längsdimension dividiert; man erhält alsdann:

(7) $$-\mu = -\frac{B}{A+B} = -\frac{\Theta}{1+2\Theta} \quad .$$

Wie man sieht, ist dieses Verhältnis negativ, d. h. einer Längsdilatation entspricht eine Querkontraktion, einer Längskontraktion eine Querdilatation. Es ist das ohne weiteres begreiflich, da doch die Querschnittsänderung eine Reaktion gegen die Änderung der Längsdimension ist. Im übrigen ist das Verhältnis, ebenso wie der Modul, eine Kombination der beiden Elastizitätskonstanten des Stoffes; und man kann daher an Stelle von A und B oder K und Θ auch geradezu E und μ als die beiden das elastische Verhalten eines isotropen Stoffes charakterisierenden Konstanten betrachten. Ihre Dimensionen sind offenbar:

(8) $$[E] = l^{-1} t^{-2} m \quad , \qquad [\mu] = 1 \quad ;$$

μ ist also eine reine Zahl; es ist daher zweckmäßig, diese Größe (und zwar ihren positiven Wert) als Elastizitätszahl zu bezeichnen. Durch Dehnungsmodul und Elastizitätszahl ist also ein isotroper Stoff vollständig charakterisiert. Während dem Modul prinzipielle Grenzen nicht gesteckt sind, kann sich die Elastizitätszahl, wie auch ein Blick auf die Tabellen weiter unten lehrt, nur zwischen den Grenzen null und einhalb bewegen.

Was endlich die mit der Längsbeanspruchung verknüpfte Volumenänderung betrifft, so ist sie, wie man sieht, durch die Kombination $A + 2B$ bestimmt; sie ist immer von gleichem Zeichen wie P, d. h. Zug bringt stets Vergrößerung, Druck stets Verkleinerung des Volumens hervor; ein Ergebnis, das als der einfache Ausdruck für das Prinzip anzusehen ist, daß die Reaktion den Hauptvorgang nicht an Größe übertreffen kann. Die Konstante $A + 2B$ kann man als Volumenmodul bei einseitiger Beanspruchung bezeichnen; wie sich dieser zu dem eigentlichen Volumenmodul k_1 (bei allseitiger, gleichförmiger Beanspruchung, vgl. p. 503) verhält, ergibt sich durch Einsetzen des Wertes aus der großen Tabelle (p. 539: es wird nämlich

(9) $$D = \frac{P}{3k_1} \quad ,$$

d. h. die Volumenänderung bei einseitiger Beanspruchung ist ein Drittel von der bei allseitiger Beanspruchung; nach dem für kleine Änderungen gültigen Superpositionsprinzip war dies vorauszusehen.

Von den beiden Grenzwerten von D ist der eine, nämlich $\alpha = \beta = 0$, $D = \gamma$ ohne Bedeutung. Der andere, nämlich

(10) $$D = 0$$

tritt offenbar ein, wenn $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}\gamma$, also

(11) $$\mu = \tfrac{1}{2}$$

ist; denn für kleine Änderungen ist $(1+\gamma)(1-\frac{1}{2}\gamma)(1-\frac{1}{2}\gamma)=0$. Der betreffende feste Körper verhält sich dann also wie eine ideale tropfbare Flüssigkeit, er ist inkompressibel, die versuchte Volumenänderung durch Längsbeanspruchung wird durch die Querreaktion gerade aufgehoben. — Die obige Beziehung besteht aber, wie gesagt, nur für kleine Änderungen. Für größere entspricht der Konstanz des Volumens nicht mehr der Wert $\mu=\frac{1}{2}$, sondern der durch die Gleichung

(12) $$\mu=\frac{1}{\gamma}\left(1-\sqrt{\frac{1}{1+\gamma}}\right)$$

bestimmte; es ist also beispielsweise

für $\gamma=$	0,001	0,01	0,03	0,1	0,5	1	2
$\mu=$	0,4995	0,496	0,489	0,466	0,367	0,293	0,211

Für beliebige kubische Dilatation wird die Beziehung zwischen γ, μ und D, solange die Veränderung klein bleibt:

(13) $$D=\gamma(1-2\mu)\quad,\qquad \mu=\frac{1}{2}-\frac{D}{2\gamma}$$

und allgemein:

(14) $$D=(1+\gamma)(1-\mu\gamma)^2-1\quad,\qquad \mu=\frac{1}{\gamma}\left(1-\sqrt{\frac{1+D}{1+\gamma}}\right)\quad.$$

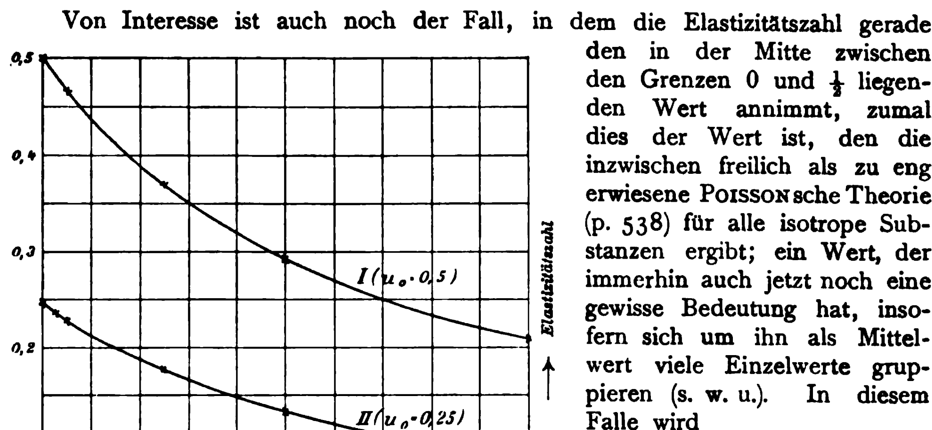
Bezeichnet man schließlich den Wert von μ für kleine Veränderungen mit μ_0, so wird

(15) $$\mu=\frac{1}{\gamma}\left(1-\sqrt{\frac{1+\gamma-2\gamma\mu_0}{1+\gamma}}\right)\quad.$$

Von Interesse ist auch noch der Fall, in dem die Elastizitätszahl gerade den in der Mitte zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ liegenden Wert annimmt, zumal dies der Wert ist, den die inzwischen freilich als zu eng erwiesene POISSONsche Theorie (p. 538) für alle isotrope Substanzen ergibt; ein Wert, der immerhin auch jetzt noch eine gewisse Bedeutung hat, insofern sich um ihn als Mittelwert viele Einzelwerte gruppieren (s. w. u.). In diesem Falle wird

(16) $$D=\frac{1}{2}\gamma\quad,$$

d. h. die Querreaktion macht gerade die Hälfte der Primärwirkung aus. Auch hier wird man übrigens den Wert $\frac{1}{4}$ nur für kleine Änderungen, also als Wert von μ_0 anzusehen haben; der allgemeine Wert von μ ergibt sich dann aus der Formel (15), und es wird z. B.



Figur 165.

für $\gamma =$	0,001	0,01	0,05	0,1	0,5	1	2
$\mu =$	0,2498	0,248	0,240	0,230	0,174	0,133	0,092

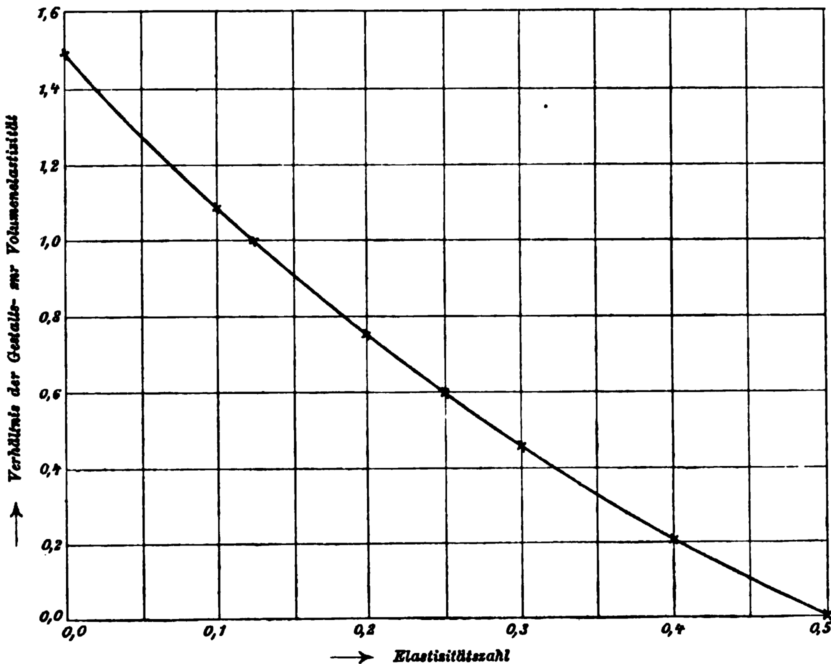
Besonderes Interesse nimmt die Beziehung zwischen μ und $\varkappa$, dem Verhältnis der Gestaltselastizität k_2 zur Volumenelastizität k_1 in Anspruch; beides sind reine Zahlen, und es ist (vgl. die Tabelle auf p. 539) für kleine Veränderungen:

(17) $$\mu = \frac{3 - 2\varkappa}{2(3 + \varkappa)} \quad , \qquad \varkappa = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - 2\mu}{1 + \mu} \quad .$$

Es ist also z. B.

für $\mu = 0$	0,1	0,125	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
$\varkappa = \frac{3}{2}$	1,09	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	0,46	0,21	0

In Figur 165 sind die beiden, für $\mu_0 = 0{,}5$ und $\mu_0 = 0{,}25$ gültigen μ-Kurven (Abszisse: relative Dehnung), in Figur 166 die Kurve der $\varkappa$ als Funktion der μ dargestellt.



Figur 166.

Wahrer und üblicher Modul. Schließlich ist noch auf folgenden Punkt aufmerksam zu machen. In der Formel für E kommt der Querschnitt des Versuchskörpers vor; und zwar pflegt man darunter den Querschnitt im natürlichen Zustande, also vor der Längenänderung zu verstehen. Mit dieser ist nun aber, wie wir wissen, eine Querschnittsänderung verknüpft, und im Zwangszustande wirkt die Kraft nicht mehr auf q, sondern auf den veränderten Querschnitt q'. Man muß demnach, um den wahren Dehnungsmodul E' zu erhalten,

(18) $$\gamma = \frac{G}{q' E'} = \frac{P}{(1 - 2\mu\gamma) E'}$$

setzen und findet somit

$$(19) \qquad E' = \frac{P}{\gamma(1-2\mu\gamma)} = \frac{E}{1-2\mu\gamma} = \frac{E}{1-2\mu\frac{P}{E}} \quad .$$

Der wahre Modul ist, wie man sieht, größer als der übliche, und zwar um einen Betrag, der nicht immer relativ derselbe, sondern desto größer ist, erstens, je größer, bei einem und demselben Material, die Beanspruchung, zweitens und drittens, bei verschiedenen Materialien, je kleiner der Modul und je größer die Elastizitätszahl ist. Um hiernach Werte von E zu erhalten, die sich den wahren Werten E' möglichst nähern, muß man jedenfalls mit kleinen Längenänderungen operieren. — Bei Messungen bei verschiedenen Temperaturen kommt dann noch die thermische Ausdehnung in Betracht. Die „wahren" Werte des Moduls werden auch als „korrigierte" bezeichnet.

In etwas anderer Weise führt neuerdings SCHILLER[1] die Dimensionsänderungen in die Formeln für E ein, und zwar für einen stabförmigen Körper, wenn l_1 und l_2 zwei Längen, P_1 und P_2 die zugehörigen Züge sind und q_1 der Querschnitt ist:

$$E\left[\left(1-\frac{l_1}{l_2}\right)^{2\mu}\right] = 2\mu\cdot\frac{P_2-P_1}{q_1} \quad ,$$

speziell für $\mu = \frac{1}{2}$ (weiche Körper)

$$E\cdot\frac{l_2-l_1}{l_2} = \frac{P_2-P_1}{q_1} \quad ;$$

entsprechend für zweidimensionale Gestalt (r_1, r_2 Radien):

$$E\left[\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{3\mu-1}{1-\mu}}\right] = (3\mu-1)\frac{P_2-P_1}{q_1} \quad ,$$

speziell für $\mu = \frac{1}{2}$:

$$E\cdot\frac{r_2-r_1}{r_2} = \frac{P_2-P_1}{2q_1} \quad .$$

Modul der reinen Längsdehnung. Der bisher betrachtete Modul ist charakteristisch für den Vorgang, bei dem sich die Länge in einem bestimmten und die Querdimension im entgegengesetzten Sinne verändert; diese letztere Änderung ist eine automatische Folge der ersteren. Es erhebt sich nun aber die Frage, wie sich die Längenänderung gestaltet, wenn man durch geeignete Mittel eine gleichzeitige Querschnittsänderung verhindert. Die Größe, die alsdann das Verhältnis der Beanspruchung zur Längenänderung angibt, wird man als Modul der reinen Längenänderung bezeichnen dürfen, und dieser wird von dem YOUNGschen Modul nicht unwesentlich abweichen. Hierfür geben nun die allgemeinen Gleichungen (72) des vorigen Artikels den nötigen Anhalt. Es ist nämlich im vorliegenden Falle dv/dy und dw/dz gleich null, somit reduziert sich D auf du/dx, und es wird:

$$(20) \qquad X_x = -2K(1+\Theta)\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \qquad Y_y = Z_z = -2K\Theta\frac{\partial u}{\partial x}$$

oder, wenn man statt K und Θ Volumen- und Gestaltsmodul k_1 und k_2 einführt, die Längsdilatation mit γ, die Längsbeanspruchung mit P, die zur Verhinderung der Querschnittsänderung in jeder der beiden Querdimensionen erforderliche Be-

[1] L. SCHILLER, Ann. d. Phys. **22**. 204. 1907.

anspruchung — sie ist bei Zug ebenfalls Zug, bei Druck ebenfalls Druck — mit Q bezeichnet:

(21) $$P = (k_1 + \tfrac{4}{3} k_2)\gamma \quad , \qquad Q = (k_1 - \tfrac{2}{3} k_2)\gamma \quad .$$

Es ist also der Modul E' der reinen Längenänderung

(22) $$E_0 = k_1 + \tfrac{4}{3} k_2 = \frac{1-\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)} E \quad ,$$

und die erforderliche Querbeanspruchung, ausgedrückt in Bruchteilen der Längsbeanspruchung

(23) $$Q = \frac{k_1 - \frac{2}{3} k_2}{k_1 + \frac{4}{3} k_2} P = \frac{\mu}{1-\mu} P \quad .$$

Um erkennen zu können, wie sich E_0 zu E verhält, kann man beide in der Form

(24) $$E = k_1 + \frac{8 k_1 k_2 - 3 k_1^2}{3 k_1 + k_2} \quad , \qquad E_0 = k_1 + \frac{4 k_1 k_2 + \frac{4}{3} k_2^2}{3 k_1 + k_2}$$

schreiben; man sieht dann, daß E_0 erheblich größer als E, also die reine Längenänderung erheblich kleiner als die mit Querreaktion verknüpfte ist. So wird z. B. für $\mu = \frac{1}{4}$, also $k_2 = \frac{3}{5} k_1$

(25) $$E = \tfrac{3}{2} k_1 \quad , \qquad E_0 = \tfrac{9}{5} k_1 \quad , \qquad \text{also} \quad E_0 = \tfrac{6}{5} E \quad ,$$

und zugleich wird in diesem Falle die notwendige Querbeanspruchung

(26) $$Q = \tfrac{1}{3} P \quad ;$$

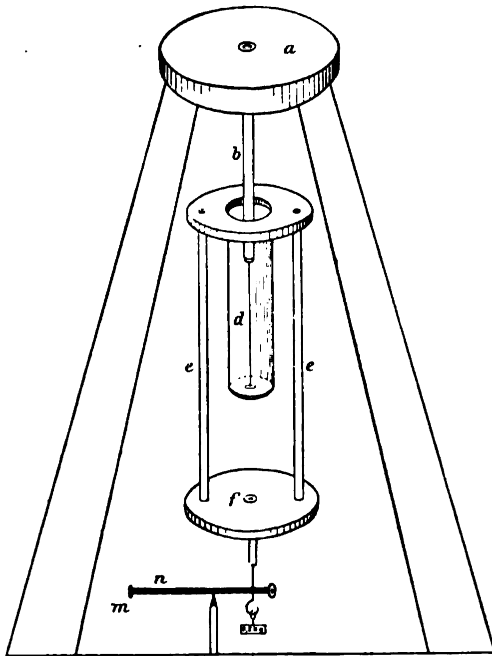
für andere Werte von μ ergeben sich entsprechend andere Verhältnisse.

3. Methoden; Hookesches Gesetz.

Experimentelle Methoden. Die Versuche über Längszug und Längsdehnung bezw. Längsdruck und Längenverkürzung zylindrischer Körper sind schon sehr alt. Mit Erfolg hat sie zuerst ROBERT HOOKE angestellt; viel später folgte THOMAS YOUNG, wiederum viel später WERTHEIM; er war es, der die Methodik zuerst exakt durcharbeitete. Seitdem ist das Verfahren einerseits in wissenschaftlich-exakter Hinsicht weiter vervollkommnet, anderseits für praktische Zwecke vereinfacht und in der Konstruktion besonderer Apparate bezw. Maschinen für Zug- und Druckspannungen festgelegt worden. Auf diese technische Seite der Frage kann hier nicht näher eingegangen werden, über die wissenschaftliche Methode sind aber einige kurze Bemerkungen zu machen.

Der Draht oder Faden, der Zugversuchen unterworfen werden soll, wird an seinem oberen Ende mit Hilfe eines an einem festen Pfeiler angebrachten Armes zwischen zwei Backen oder auch, zum Teil sogar vorteilhafter, in anderer, mehr peripherisch gleichförmiger Weise festgeschraubt. Das untere Ende wird auf irgend eine Weise so armiert, daß man mit Bequemlichkeit Gewichte anhängen und wieder abnehmen kann; um dies möglichst ohne Erschütterungen und sonstige Gefahren für die Exaktheit der Versuche tun zu können, hat man neuerdings vielfach Quecksilber oder eine andere Flüssigkeit benutzt, die man in geeigneter Weise in ein an den Versuchskörper angehängtes Gefäß eingießt bezw. wieder ausgießt, wobei man sehr bequem ganze Reihen auf- und absteigender Belastungsreihen erzielen kann. Offenbar muß übrigens der Draht oder Faden vor Beginn der eigentlichen Versuche schon mit einem gewissen Gewichte belastet werden, das eben ausreicht, um ihn gut zu strecken, d. h. in geradlinige Form zu bringen; das betreffende Belastungsgewicht bleibt dann bei den Rechnungen

unberücksichtigt. Die Länge l und der Querschnitt q des Drahtes werden gemessen, entweder direkt mit Maßstab bezw. Dickenmesser, oder jene mit dem Kathetometer, dieser indirekt durch Berechnung aus Länge, Gewicht und spezifischem Gewicht, was aber nur bei genauer Kenntnis oder besonderer Ermittelung dieser Daten genauer wird als die direkte, an verschiedenen Stellen wiederholte Dickenmessung. Die durch eine bestimmte Belastung erzeugte Verlängerung wird kathetometrisch oder durch einen Übertragungs- und Vergrößerungsmechanismus gemessen; über alle diese Messungen sei auf den Artikel „Messung von Raum- und Zeitgrößen" verwiesen. Natürlich muß, außer der Verlängerung, auch die Wiederverkürzung nach der Entlastung gemessen werden. Dabei zeigt sich nun, daß Verlängerung und Wiederverkürzung nicht gleich groß sind, auch wenn die Belastung genügend klein ist, um dauernde Verlängerungen auszuschließen. Es liegt das, worauf im Artikel „Elastische Nachwirkung" zurückzukommen sein wird, daran, daß der Versuchskörper sich der Beanspruchung erst allmählich anpassen muß; man erreicht das, indem man den Zyklus des Be- und Entlastens mehrere Male wiederholt, wobei man dann sehr bald zu geschlossenen Zykelwerten gelangen wird (vgl. auch in diesem Artikel w. u.). — Die Temperatur ist während der Versuche nach Möglichkeit konstant zu erhalten und mit einiger Genauigkeit zu bestimmen; für feinere Zwecke muß man deshalb den ganzen Apparat in ein geschlossenes Luftbad tauchen. Besondere Vorrichtungen sind natürlich erforderlich, wenn die Messungen bei höheren oder bei mehreren sehr verschiedenen Temperaturen durchgeführt werden sollen; es kann aber hierauf nicht im einzelnen eingegangen werden.



Figur 167.

Für feinere Zwecke genügt die kathetometrische Messung der Verlängerung nicht; man kann dann dieselbe durch eine Hebelübertragung vergrößern. Derartige Apparate haben u. A. Katzenelsohn[1] und Angenheister[2] konstruiert; der letztere ist in Figur 167 schematisch dargestellt. Die Belastung des Drahtes d erfolgt hier durch eine komplizierte Übertragung (Bodenplatte, Aluminiumzylinder, oberer Ring, Gestänge e, Grundplatte f, Haken); die Messung durch den Hebel n und den Spiegel m. — Ferner sei auf den Apparat von Lermantow[3] hingewiesen, bei dem die Verlängerung durch ein Kügelchen auf einen Spiegel übertragen und zugleich durch einen besonders gestalteten Rahmen mit Hebel die Festlegung des Körpers während der Änderung der Belastung ermöglicht wird, so daß letztere in aller Ruhe und ohne Gefahr für den Versuchskörper vorgenommen werden kann.

Besondere Kunstgriffe zur genaueren Messung der Verlängerung sind wiederholt, meist aber nicht mit besonderem Erfolge angewandt worden. Eine Aus-

[1] N. Katzenelsohn, Inaug.-Diss. Berlin 1887. — [2] G. Angenheister, Drudes Ann. 11. 191. 1903. — [3] W. W. Lermantow, vgl. O. Chwolson, Lehrb. d. Physik 1. 703. —

nahme macht z. B. die Interferenzmethode von SHEAKESPEAR[1]. Es werden, statt eines, drei Drähte untersucht; sie verbinden eine obere und eine untere Scheibe, zwei weitere Scheiben, die zur Sicherung des Parallelismus dienen, werden von Klemmen getragen, die an den Drähten angebracht sind, und zwar die eine dicht unter der ersten, die andere dicht über der unteren Hauptscheibe. Von der Mitte der dritten Scheibe hängt ein am Ende mit einem Prisma aus Glas versehener Stab herab, während die vierte Scheibe auf ihrer Mitte einen Spiegel trägt; zwischen der unteren Prismen- und der oberen Spiegelfläche werden die Interferenzstreifen erzeugt, die sich bei der Belastung verschieben. Diese letztere erfolgt durch Wasserabfluß aus einem Gefäß, in dem der Belastungskörper schwimmt, die Schwingungen werden durch ein Flügelkreuz gedämpft. Die Längenänderung kann bis auf 0,00003 mm bestimmt werden. Verschiedene Temperaturen lassen sich in einem doppelwandigen Gehäuse mittels Dämpfen und Luftpumpe hervorbringen.

Schließlich sei auf den Vorschlag FOURNELS[2] hingewiesen, an den Draht einen Eisenstab zu hängen und diesen mit einer Stromspule zu umgeben; der elektromagnetische Zug stellt dann eine leicht variierbare und exakt meßbare Belastung des Drahtes dar.

Bei den Versuchen über Längsdruck, also Längenverkürzung ist das Verfahren insofern abzuändern, als es sich hier meist um viel dickere Versuchskörper, nämlich um Stäbe handelt, und als die Verkürzung hier meist noch wesentlich kleiner ist, als dort die Verlängerung. Das dilatometrische Verfahren, namentlich in der ABBEschen Form (p. 101) dürfte sich hier ganz besonders empfehlen; eine besondere Ausgestaltung desselben liegt aber nicht vor.

Von besonderer Wichtigkeit ist es bei dickeren Versuchskörpern noch, die Anordnungen derart zu treffen, daß mit Sicherheit alle Längsfäden des Stabes gleichmäßig vom Druck oder Zug getroffen werden; durch eine möglichst innige und zentrale Verbindung des Stabes mit dem Gewichte wird das am besten erreicht. Anderenfalls ist die Verteilung der Spannung über den Querschnitt, wie Prüfungen ergeben haben, oft viel ungleichförmiger als man meist denkt.

Schließlich ist zu erwähnen, daß für die Zwecke der Demonstration, zur Entwickelung der Gesetze u. s. w. zahlreiche Schulapparate konstruiert worden sind, von denen beispielsweise die von PIERRE, THOMASSET, PERARD und GRIMSEHL[3] erwähnt seien.

Gesetze der Längsbeanspruchung; Hookesches Gesetz. Nach den angedeuteten Methoden sind nun die folgenden Gesetze ermittelt worden, und zwar im wesentlichen schon von den ältesten Beobachtern, namentlich von ROBERT HOOKE: 1. Die Längenänderung ist dem beanspruchenden Gewichte direkt proportional. Man nennt dieses Gesetz häufig das HOOKEsche Gesetz, weil es von HOOKE zuerst, und zwar in der Form „Ut tensio sic vis" ausgesprochen worden ist.[4] Es gilt natürlich nur bis zu einer gewissen Belastungsgrenze (vgl. jedoch w. u.); darüber hinaus wächst die Längenänderung stärker als die Beanspruchung. — 2. Die Längenänderung ist bei gegebener Beanspruchung mit der Länge des beanspruchten Körpers proportional. — 3. Bei einem und demselben Körper verteilt sie sich gleichmäßig auf seine einzelnen Längenteile (durch Anbringung von Marken in gleichen Abständen des Drahtes leicht festzustellen). — Die Gesetze 2.

[1] G. A. SHAKESPEAR, Phil. Mag. (5) **47**. 539. 1899. — [2] P. FOURNEL, Journ. de Phys. (4) **4**. 26. 1905. — [3] V. PIERRE, WIED. Ann. **22**. 141. 1884 (Abbildung auf Tafel I, Figuren 8 bis 10). — THOMASSET, vgl. PERARD, Revue des mines 1879. — E. GRIMSEHL, Ztschr. f. phys. u. chem. Unter. **16**. 260. 1903. — [4] Die Auffindung des Gesetzes fand schon 1660 statt; aber erst 1676 machte sie HOOKE unter dem Anagramm ceiiinosssttuu und erst 1678 in dem Buche „De potentia restitutiva" öffentlich bekannt. Früher wurde auch der Holländer 's GRAVESANDE in diesem Zusammenhange genannt; das beruhte aber auf einem Irrtume.

und 3. stehen offenbar in nahem Zusammenhange miteinander, und man kann bis zu einem gewissen Grade den einen als eine Konsequenz des anderen betrachten. — 4. Die Längenänderung ist bei gegebener Gesamtbeanspruchung dem Querschnitte der beanspruchten Zylinder umgekehrt proportional. — Die Sätze 2. und 4. finden in der Theorie ihren einfachen Ausdruck dadurch, daß von vornherein nicht die Gesamtverlängerung und die Gesamtbeanspruchung, sondern die lineare Dilatation, d. h. die Längenänderung der Längeneinheit, und die „Beanspruchung“, d. h. die Beanspruchung für die Querschnittseinheit, kurz gesagt, die Begriffe Strain und Streß (p. 497) in die Formeln eingeführt werden. — 5. Die Längenänderung ist für alle Längsfäden des Zylinders die gleiche, d. h. die Verschiebung eines Querschnittes verteilt sich über seine Punkte gleichmäßig (dieser Satz setzt die exakte Längsbeanspruchung voraus und ist alsdann so gut wie selbstverständlich). — 6. Die Längenänderung ist ceteris paribus für Körper aus verschiedenem Stoffe verschieden, diese Verschiedenheit findet in dem Längs- oder Elastizitätsmodul ihren Ausdruck. — 7. Die Längenänderung ist ceteris paribus auch bei einem und demselben Stoffe verschieden bei verschiedenen Temperaturen; mit anderen Worten: der Modul eines Stoffes ist eine Funktion der Temperatur. — 8. Der Modul hängt von dem besonderen Zustande und der Vorgeschichte des Materials ab.

4. Der Elastizitätsmodul.

Im folgenden sind die Modulwerte für verschiedene Stoffe und unter verschiedenen Umständen zusammengestellt. Dabei ist folgendes zu bemerken. Im absoluten Maße ist der Modul in Dynen pro Quadratzentimeter auszudrücken; es hat sich aber hier das praktische Maßsystem hartnäckig erhalten, und man drückt demnach den Modul in kg* (p. 44), d. h. in Kilogewichten aus und bezieht ihn außerdem, statt auf das Quadratzentimeter, auf das Quadratmillimeter. Zur Umrechnung der unten folgenden Zahlen in absolutes Maß muß man also mit

$$981 \cdot 1000 \cdot 100$$

(für Mitteleuropa) multiplizieren, wofür man auch sagen kann: man muß mit 10 zur achten multiplizieren und dann zwei Prozent abziehen. So wird z. B. der Elastizitätsmodul des Bessemerstahls

$$E = 207 \cdot 10^{10} \quad ,$$

also reichlich zwei Milliarden. — Was die Genauigkeit der folgenden Zahlen betrifft, so ist sie im allgemeinen keine beträchtliche, bei den meisten Zahlen wird man ein Prozent des Wertes schon als die Grenze bezeichnen müssen; erst in neuerer Zeit sind für einige Stoffe wirklich exakte Zahlen gewonnen worden. Es liegt das aber nur zum Teil in der unvollkommenen Methodik, zum wesentlichen aber darin, daß die meisten Stoffe sich nicht ohne Schwierigkeiten exakt definieren lassen.

Elastizitätsmodul der Metalle. Das zuletzt Gesagte gilt in besonderem Maße von der wichtigsten Gruppe von Stoffen, den Metallen; es zeigt sich das ja auch auf anderen Gebieten, z. B. bei der elektrischen Leitfähigkeit, aber nirgends in so hohem Grade wie hier. Es macht einen beträchtlichen Unterschied aus, ob das Metall gezogen oder gegossen, hart oder weich, gelöscht oder angelassen ist, und bei einigen Metallen, namentlich bei Eisen und Stahl, hat jede Varietät ihren besonderen Modul. Unter diesen Umständen kommt den meisten älteren Angaben nur ungefähre Bedeutung zu, und erst in neuerer Zeit hat man mit der Angabe von Werten für bestimmt definierte Metalltypen den Anfang

gemacht. Die folgende Tabelle enthält in alphabetischer Folge eine Auswahl aus dem reichen Beobachtungsmaterial; der Name des Autors ist beigefügt, die

Elastizitäts~~zahl~~modul der Metalle.

Metall	Zustand	E	Autor
Aluminium	gezog.	7540	Katzenels.
		7200	Slotte
		7462	Meyer
	gegoss.	6570	Voigt
	weich	6716	Angenhstr.
	hart	7074	„
Blei		1556	Amagat
	gezog.	1803	Wertheim
	angel.	1727	„
		1493	Schaefer
Bronze		9194	Pscheidl
„ (88:12)	gegoss.	10600	Voigt
Cadmium	gegoss.	7070	Voigt
Deltametall		11697	Amagat
Eisen	gezog.	19024	Katzenels.
		20869	Wertheim
		21450	Pisati
	gezog.	20500	Baumeister
		19385	Slotte
	angel.	20794	Wertheim
	Fluß-	21740	Thomas
		21300	Wagner
	Guß-	11718	Pscheidl
		12800	Voigt
	soft	15750	Gray u. s. w.
Stahl	gezog.	18810	Wertheim
	angel.	17280	„
	Guß-	19555	„
		18490	Pisati
		20400	Voigt
		20395	Amagat
		20560	Wagner
	Bessem.	21136	Pscheidl
	Puddel	21112	„
	mild	21700	Gray u. s. w.
		19380	Weston
	s. weich	20705	Mercadier
	halbw.	20910	„
	hart	20600	„
		21360	Tomlinson
	Silber-	19810	Searle
	weich	18875	Angenhstr.
	gehärtet	18206	„
	— —	s. u.	Benedicks
Gold	gezog.	9800	Katzenels.
		8131	Wertheim
	angel.	5585	„
	gegoss.	7580	Voigt
	gezog.	8630	Meyer
Kupfer		12145	Amagat
	gezog.	12140	Kohlrausch
		12400	Searle
		12550	Slotte
Kupfer		12240	Angenhstr.
	angel.	10520	Wertheim
	gegoss.	10850	Voigt
	„	10800	Kiewiet
	galvan.	12300	Benedicks
Magnesium	gegoss.	4260	Voigt
Messing		10851	Amagat
		9930	Baumeister
		9810	Kohlrausch
	gezog.	8944	Katzenels.
	gezog.	10200	Searle
		8548	Wertheim
		10450	Gray
		10640	Weston
(6 : 4)	gegoss.	9220	Voigt
Neusilber		13300	Gray
		12094	Pscheidl
	gezog.	11449	Katzenels.
		11550	Searle
Nickel		22790	Cantone
		21680	Meyer
		20300	Voigt
	gezog.	23950	Searle
		23544	Schaefer
Nickelstahl	5½ %	19900	Mercadier
	25 %	18600	„
Palladium	angel.	9709	Wertheim
		11284	Schaefer
Phosphorbronze		12010	Searle
Platin	gezog.	17187	Katzenels.
		15989	Slotte
		17044	Wertheim
		16225	Tomlinson
		16926	Winkelmann
	angel.	15518	Wertheim
		16020	Meyer
Silber	gezog.	7010	Katzenels.
		7357	Wertheim
	angel.	7140	„
	gegoss.	7790	Voigt
	„	7597	Angenhstr.
Wismut	gegoss.	3190	Voigt
Zink	gezog.	8734	Wertheim
	gegoss.	10300	Voigt
		10477	Kiewiet
Zinn	gezog.	4148	Wertheim
		5410	Voigt
	gegoss.	1700	Hess
	gewalzt	4768	Kiewiet
	„	4100	Hess

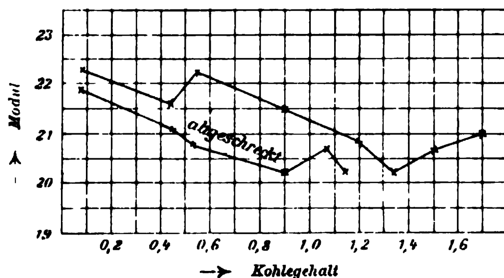
Literatur ist in der Anmerkung[1] zusammengestellt. Die Temperatur ist bei diesen Bestimmungen fast durchweg Zimmertemperatur, d. h. etwa 15° C gewesen, bei einigen etwas höher, bis zu 20°, was nach dem Gesagten nicht viel ausmacht. Übrigens ist nur ein Teil der Zahlen durch wirkliche Zug- oder Druckversuche, der Rest aber nach anderen, später zu besprechenden Methoden gewonnen worden; dort wird auch darauf eingegangen werden, ob und inwieweit die verschiedenen Methoden verschiedene Werte liefern; jedenfalls hätte die Auseinanderreißung der Zahlen zur Unübersichtlichkeit geführt.

Wie man aus dieser Zusammenstellung entnimmt, bestehen ziemlich beträchtliche Unterschiede in den Werten des Moduls; der größte Wert ist etwa das 16-fache des kleinsten. Die Reihenfolge der reinen Metalle hinsichtlich ihrer Dehnungselastizität ist etwa folgende:

Nickel	Kupfer	Silber	Zinn
Eisen	Zink	Cadmium	Wismut
Platin	Gold	Magnesium	Blei
Palladium	Aluminium		

Ein Parallelismus oder eine anderweitige Beziehung zu sonstigen physikalischen Eigenschaften der Metalle ist nicht ersichtlich, ebensowenig zu den Atomgewichten; in letzterer Hinsicht vergleiche man jedoch einen Abschnitt im folgenden Artikel. — Im gezogenen Zustand ist der Modul fast durchweg größer als im angelassenen oder gegossenen; insbesondere ist der Wert für Gußeisen sehr niedrig gegenüber den Werten für gezogene oder gestählte Sorten.

Nicht so einfach liegen die Verhältnisse beim Stahl, und es hat den Anschein, als könne man hier nur für ganz bestimmt charakterisierte Sorten exakte Angaben machen. Es genüge daher, hier eine der neuesten Arbeiten als Beispiel anzuführen, die sich auf Stahl von Gysinge in Schweden bezieht und von Benedicks sehr sorgfältig durchgeführt worden ist. Die Ergebnisse sind in Figur 168 veranschaulicht; die Abszissen bedeuten den Kohlegehalt in Prozenten, die Ordinaten den Modul in Tausenden, und zwar für abgeschreckten und nicht abgeschreckten Stahl. Wie man sieht, nimmt E mit wachsendem Kohlegehalt ab, über 1,3 % aber, wie es scheint, wieder zu, was wohl auf die Existenz einer zweiten Kohleverbindung hindeutet; bei abgeschrecktem Stahle ist der Verlauf parallel, aber die Werte von E sind kleiner; auch entsprechende Mengen von Silicium oder Nickel drücken den Modul herab.[2]



Figur 168.

[1] E. H. Amagat, C. R. 108. 1199. 1889; Journ. de Phys. (2) 8. 197. 358. 1889. — G. Angenheister, Drudes Ann. 11. 188. 1903. — M. Baumeister, Wied. Ann. 18. 578. 1883. — M. Cantone, Rend. Acc. Linc. 5. 79. 1889. — Gray, Blyth und Dunlop, Proc. Roy. Soc. 67. 180. 1900. — H. Hess, Drudes Ann. 8. 405. 1902. — S. Katzenelsohn, Inaug.-Diss. Berlin 1887. — J. Kiewiet, Göttinger Inaug.-Diss. Leipzig 1886. — F. Kohlrausch und Loomis, Pogg. Ann. 141. 481. 1871. — E. Mercadier, C. R. 113. 33. 1891. — G. S. Meyer, Wied. Ann. 59. 668. 1896. — G. Pisati, Nuov. Cim. (3) 4. 152; 5. 34. 135. 1878. — W. Pscheidl, Wien. Ber. (II.) 79. 114. 1879. — Cl. Schaefer, Drudes Ann. 5. 220. 1901; 9. 665. 1124. 1902. — G. Searle, Phil. Mag. (5) 49. 193. 1900. — Slotte, Acta Soc. Fenn. 26. 1899; 29. 1900. — P. A. Thomas, Drudes Ann. 1. 282. 1900; Inaug.-Diss. Jena 1899. — W. Voigt, Wied. Ann. 48. 674. 1893. — O. Wagner, Inaug.-Diss. Jena 1903. — A. Wertheim, Ann. chim. phys. (3) 12. 385. 1844; 23. 52. 1849; auch Pogg. Ann. Erg.-Bd. 2. 1. 1848; Pogg. Ann. 78. 391. 1849. — Weston, Phys. Review 8. 297. 1899. — A. Winkelmann, Wied. Ann. 63. 117. 1897. — [2] C. Benedicks, Rech. s. l'Acier au Carbone, Inaug.-Diss. Upsala 1904; insbesondere Kap. 4. p. 53 ff.

KIEWIET hat in der vorstehend angeführten Arbeit auch Legierungen von Kupfer mit Zink und Zinn, mit verschiedenen Prozentanteilen der beiden Komponenten, untersucht, aber keine allgemeinen Gesetzmäßigkeiten gefunden; so geht z. B. der Modul der Kupfer–Zinnlegierungen vom Werte 12300 für reines Kupfer auf 9730 bei 10 % Zinn herunter, steigt auf 11863 bei 33 % Zinn, geht dann weiter herunter u. s. w.; für gleiche Anteile der Komponenten ist er allerdings 8605, also ziemlich genau der Mittelwert der beiden Werte für die reinen Metalle.

Die neueste Arbeit, die hier in Betracht kommt, ist die von ANGENHEISTER. Für Legierungen von Silber und Kupfer (a Äquivalente Cu auf 1 Äquivalent Silber) fand er

$$a = 0 \quad 0{,}01 \quad 0{,}1 \quad 1 \quad 10 \quad \infty$$

$$E = 7597 \quad 7292 \quad 8190 \quad 8563 \quad 11448 \quad 12240 \quad ,$$

also, von dem zweiten Werte abgesehen, dauernde Zunahme (vgl. dagegen bei Torsion).

Ferner ergab sich für ROSES Metall 2510, für WOODsches 2486.

Elastizitätsmodul der Gläser. Eine zweite wichtige Klasse von Körpern sind die Gläser. Sie wurden in früherer Zeit nur sehr einseitig und ungenügend definiert, so daß die betreffenden Werte von E, auch wenn sie vielleicht hinreichend exakt bestimmt waren, keine allgemeinere Bedeutung haben. Es werden daher wenige Angaben genügen:

Glas	E	Autor	Glas	E	Autor
Fensterglas von St. Quirin	7919	WERTHEIM u. CHEVANDIER	Fürther Glas	7425	PSCHEIDL
Spiegelglas von Cirey	7015		Belgisches Glas	7515	
Kristallglas von Valéry	6890		Böhmisches Glas	7535	
Kristallglas von Baccarat	5477		Glas	7692	KIEWIET
Grünliches Glas	6470	VOIGT	Glas	6702	KOWALSKI
			Glasröhren	6277 bis 7023	CANTONE

Werte von allgemeinerer Bedeutung, aus denen sich wissenschaftliche Schlüsse ziehen ließen, konnte man erst erwarten, nachdem durch das auf ABBES Initiative entstandene, von SCHOTT gegründete und geleitete Glaswerk in Jena Gläser von genau bekannter und sehr mannigfaltiger Zusammensetzung zur Verfügung gestellt waren. Diese Gläser haben nun WINKELMANN und SCHOTT untersucht und folgendes gefunden (die erste Spalte gibt die Fabriknummer, die zweite die ungefähre Zusammensetzung, die genaue ist in der Abhandlung selbst oder in dem Buche von HOVESTADT nachzusehen):

Nr.	Charakter	E	Nr.	Charakter	E
665	—	8170	714	Natronkalikalksilikat	6570
1269	Barytborosilikat	7970	270	Baryttonerdephosphat	6330
627	Natronkaliborosilikat	7970	2154	Kalibleisilikat	6100
1973	Kalibarytzinksilikat	7420	370	Kalizinksilikat	5850
16 III	Natronkalkzinksilikat	7400	500	Sehr schweres Bleisilikat	5490
1450	Natronborosilikat	7300	658	Bleitonerdeboratsilikat	5470
S 219	Kalitonerdephosphat	6780	S 208	Schwerstes Bleisilikat (80 %)	5090
278 III	—	6640	S 196	Tonerdeborat mit Natron u. Baryt	4700
709	Natronzinksilikat	6630			

Wie man sieht, kommen auch hier große Unterschiede vor, der größte Wert verhält sich zum kleinsten fast wie 2 : 1. Auch sieht man sofort, daß gewisse chemische Bestandteile bestimmten Einfluß ausüben, nämlich den Modul hinauftreiben oder hinabdrücken. Versucht man demgemäß die einzelnen Bestandteile

mit linearen Koeffizienten in den Ausdruck für den Modul einzuführen, so erhält man für diese Koeffizienten die folgenden Werte:

Na_2O	K_2O	B_2O_3	Al_2O_3	SiO_2	PbO	As_2O_5	BaO
100	71	20	160	65	47	40	100

ZnO	MgO	P_2O_5	CaO
15	600	38	100

Obgleich diese Koeffizienten natürlich nur sehr ungefähre Bedeutung haben, reichen sie doch hin, um die Moduln der Gläser bis auf höchstens 8 % Fehler darzustellen. Man kann auch, wie dies WINKELMANN später getan hat, Gruppen bilden und erhält dann entsprechende Übereinstimmung.

Schließlich sei auf eine Mitteilung von W. LUDWIG hingewiesen.[1]

Elastizitätsmodul von Hölzern. Diese gehören streng genommen nicht hierher, da sie nicht isotrop sind; da sie aber auch in dem Artikel über die Kristalle schlecht unterzubringen sind und überdies nur ein untergeordnetes wissenschaftliches Interesse darbieten, sollen einige Werte gleich hier mitgeteilt werden; sie rühren von WERTHEIM und CHEVANDIER her; von anderen Bestimmungen seien die von BAUSCHINGER erwähnt.[2] Die hier angeführten Zahlen gelten für 20 % Feuchtigkeit.

Dehnungsmodul von Hölzern.

Holzart	axial	radial	tangential	Holzart	axial	radial	tangential
Pappel	517	73	39	Erle	1108	98	59
Fichte	564	98	29	Tanne	1113	95	34
Eiche	921	189	130	Esche	1121	111	102
Buche	980	270	159	Ulme	1165	123	63
Birke	997	81	155	Akazie	1262	—	—
Ahorn	1021	157	73				

Wie zu erwarten, ist die Elastizität in der Achsenrichtung bei weitem am größten; außerdem ist sie in der Tangentialrichtung meist kleiner als in der Radialrichtung; das Verhältnis der drei Moduln ist aber für die verschiedenen Hölzer sehr verschieden. Austrocknung erhöht die Elastizität und zwar für 1 % Feuchtigkeitsverlust etwa um $^1/_2$—1 %. Neuerdings hat BAUSCHINGER für zahlreiche Holz- und Steinarten E bestimmt.

Andere Stoffe. Sonst kommen noch die Gesteine und einzelne andere Materialien in Betracht; da auch für sie das technische Interesse überwiegt, möge eine kleine Auswahl genügen. Auch einige Mineralien sind, nach Messungen von DRUDE und VOIGT, beigefügt, und zwar im isotropen, sogen. dichten Zustande (wegen des weiteren vgl. man im Artikel „Elastizität der Kristalle").[3]

[1] A. WERTHEIM und CHEVANDIER, C. R. **20.** 1637. 1845. — W. PSCHEIDL, Wien. Ber. **79.** 114. 1877; **86.** 115. 1882. — M. CANTONE, Rend. Acc. Linc. **4.** 220. 292. 1888. — W. VOIGT, WIED. Ann. **15.** 497. 1882. — J. KIEWIET, ibid. **29.** 650. 1886. — J. v. KOWALSKI, ibid. **36.** 307. 1889; **39.** 155. 1890. — A. WINKELMANN und O. SCHOTT, ibid. **51.** 697. 1894. — A. WINKELMANN, ibid. **61.** 115. 1897. — W. LUDWIG, Phys. Ztschr. **1.** 124. 1899. — H. HOVESTADT, Jenaer Glas, Jena 1900. p. 160 ff. — [2] A. WERTHEIM und CHEVANDIER, C. R. **23.** 1846. — M. BAUSCHINGER, Mitt. Mech.-techn. Lab. d. techn. Hochschule München 1883—1888. — [3] F. AUERBACH, DRUDES Ann. **3.** 116. 1900. — C. BACH, Elastizität und Festigkeit, 4. Aufl. Berlin 1902. p. 64 ff.; daselbst auch die Literatur zu den zahlreichen Originalabhandlungen des Verfassers. — C. V. BOYS, Phil. Mag. (5) **30.** 116. 1890. — P. v. BJERKÉN, WIED. Ann. **43.** 817. 1891. — P. DRUDE u. W. VOIGT, ibid. **42.** 537. 1891. — H. HESS, DRUDES Ann. **8.** 405. 1902. — R. KOCH, WIED. Ann. **25.** 438. 1885. — M. REUSCH, POGG. Ann. **121.** 573. 1864. — F. A. SCHULZE, DRUDES Ann. **14.** 384. 1904. — SEGEL, Phys. Ztschr. **1.** 126. 1899. — R. THRELFALL, Phil. Mag. (5) **30.** 99. 1890. — R. TROWBRIDGE, SILL. Journ. (3) **29.** 349. 1885.

Stoff	E	Autor	Stoff	E	Autor
Baryt	5910	DRUDE u. VOIGT	Knochen . . .	1600	
Borsäure . . .	2030	AUERBACH	Kohle	1500—260(	
Eis (Mittelwert) .	276	HESS	Lithographenstein	5888	DRUDE u. VOIGT
	236	REUSCH	Marmor . . .	2600	
	665	KOCH	Opal	3880	DRUDE u. VOIGT
	670	TROWBRIDGE		3800	AUERBACH
Elfenbein . . .	900	CICCONE [1]	Paraffin . . .	170	SEGEL
Feuerstein . . .	7597	DRUDE u. VOIGT	Quarz	6900	AUERBACH
Fischbein . . .	600		Quarzfäden . .	6238	SCHULZE
Flußspat . . .	10450	DRUDE u. VOIGT		5180	THRELFALL
Gelatine . . .	0,02	BJERKÉN		6000	BOYS
Gips	360		Sandstein . . .	630	
Granit	2450	BACH	Schiefer . . .	1000	
Kalkstein . . .	1900		Wachs	51	SEGEL
Kautschuk . .	0,02—0,8		Zement	2170—4570	BACH

Eine große Anzahl von Gesteinen hat neuerdings NAGAOKA untersucht, und diese Untersuchungen sind dann von KUSAKABE fortgesetzt worden. Der eigentliche Zweck der Arbeiten war seismischer Natur, hier interessieren nur die gefundenen Modulwerte, die durch Biegung (siehe den folgenden Artikel) erhalten wurden. Es muß hier eine ganz kleine Auswahl genügen (absolute Werte, dividiert durch 10^{10}):

Archaische Gesteine		**Mesozoische Gesteine**	
Chloritschiefer	122, 147	Sandstein	9,1, 7,1, 11,2
Serpentin	66, 59, 33		
		Tertiäre Gesteine	
Paläozoische Gesteine		Ryolith-Tuff	19,3, 7,8
Tafelspat	106, 83		
Kalkstein	86, 74	**Diluvium**	
Marmor	70, 55, 33	Tuff	28,0, 14,4, 3,3
Granit	42, 22,5, 10,9	Andesit	44,9, 13,7, 6,2

Für jedes Gestein sind mehrere, an verschiedenen Stücken gefundene Werte angegeben, und man sieht, daß sie ganz enorm verschieden sind, so enorm, daß man von einem, ein Material charakterisierenden Modul kaum reden kann. Höchstens läßt sich der Schluß ziehen, daß die jüngeren Gesteine meist einen kleineren Modul haben, als die älteren.[2]

Stellt man schließlich einige typische Vertreter aus allen Gruppen zusammen und fügt einige von AUERBACH (s. w. u.) indirekt ermittelte Werte, sowie die während der Korrektur dieses Bogens bekannt gewordenen Messungen von GRÜNEISEN[3] für Iridium und Rhodium (die höchsten, die bekannt sind) hinzu, so erhält man folgende Übersicht:

[1] CICCONE u. CAMPANILE, Riv. scient.-ind. **23**. 247. 1891 (Original mir unzugänglich, die in Beibl. **16**. 327 angegebene Zahl nicht verständlich). — [2] H. NAGAOKA, Phil. Mag. (5) **50**. 53. 1900. — S. KUSAKABE, Tokyo K. **2**. 197. 1904; Publ. Earthquake Comm. Nr. 22 B. p. 27. 1906. — [3] E. GRÜNEISEN, Ztschr. f. Instrumentenk. 1907. p. 38.

Iridium	52500	Gold	9000	Holz ‖, Maximum	1250
Korund	52000	Glas, Maximum	8200	Elfenbein	900
Topas	29000	Glas, Mittel	6500	Sandstein	800
Rhodium	28000	Glas, Minimum	4700	Holz ‖, Minimum	500
Beryll	23000	Zinn	4500	Eis	300
Stahl	21000	Wismut	3200	Paraffin	170
Platin	16500	Marmor	3000	Wachs	50
Kupfer	12000	Granit	2400	Kautschuk, Maximum	0,8
Bergkristall	10300	Blei	1500	Gelatine	0,02

Elastisch abnorme Stoffe. Einige Stoffe verhalten sich, wie schon früher bemerkt wurde, in elastischer Hinsicht ganz abnorm, insofern sie schon durch kleine Kräfte stark gedehnt werden und schon durch die Einwirkung einer verhältnismäßig kleinen Kraft eine bleibende Dehnung erfahren. Der Dehnungsmodul E ist also bei ihnen sehr klein, das Grenzgewicht G ist ebenfalls sehr klein, aber bei weitem nicht in demselben Maße; das Verhältnis beider, $G/E = V$, d. h. die Grenzdehnung, die nach den obigen Tabellen bei den Metallen sehr klein ist, fällt also hier sehr beträchtlich aus. Dieser große Wert von V ist es, welcher den in Rede stehenden Stoffen im Sprachgebrauch eine sehr große Elastizität[1] beigelegt hat (siehe oben p. 501).

Am sorgfältigsten ist in dieser Hinsicht Kautschuk untersucht worden. Erleichtert wird die Untersuchung durch die Größe der eintretenden Verlängerungen, erschwert durch den Umstand, daß kaum zwei Kautschukfäden sich gleich verhalten, sowie durch den zweiten, daß der Bereich der elastischen Vollkommenheit, also auch der der Existenz eines konstanten Moduls E ein sehr beschränkter ist. Natürlich ist es hier von besonderer Wichtigkeit, den wahren oder korrigierten Modul (p. 551) anzugeben; hierfür hat u. A. LUNDAL eine bequeme Formel angegeben. Die konstantesten und exaktesten Versuche rühren von VILLARI[2] und von RÖNTGEN[3] her. VILLARI ging in der Dehnung sehr weit, nämlich bis zum vier- bis siebenfachen der ursprünglichen Länge. Er fand, daß drei verschiedene Moduln zu unterscheiden sind. 1. Ein kleiner und ziemlich konstanter Modul $E = 0{,}07$ bis 0,10, gültig für Kräfte bis etwa zur Verdoppelung der Länge; 2. ein Übergangsmodul, zunehmend von 0,1 bis 300; 3. ein großer und ziemlich konstanter Modul $E = 300$ bis 350, gültig etwa vom Vierfachen der ursprünglichen Länge an. Im Gegensatz zu VILLARI beschränkte sich RÖNTGEN absichtlich auf kleine Dehnungen, indem er einmal überhaupt nur bis zu einer Verlängerung um ein Drittel der ursprünglichen Länge ging, überdies aber E stets als das Verhältnis eines kleinen Gewichtszuwachses zu dem erzeugten Verlängerungszuwachs auffasste, wobei letzterer immer nur 2 bis 5 % der ursprünglichen Länge betrug. Es fanden sich für E Werte zwischen 0,076 und 0,128, und als Mittelwert $E = 0{,}103$, also etwas mehr als bei VILLARI. Dagegen etwas weniger, nämlich $E = 0{,}068$, fand KURZ.[4]

Auch RUSSNER[5] beschränkte sich auf kleine Kräfte und nahm dementsprechend auf die kleinen Dimensionsänderungen bei der Berechnung keine Rücksicht. Seine Ergebnisse sind, soweit sie hierher gehören, die folgenden (Temperatur 17—20°):

Sorte	Modul	
	für die kleinste Kraft	für die größte Kraft
rein, roh	0,050	0,044
schwarz, vulkanisiert	0,049	0,044
grau, vulkanisiert	0,25	0,22
schwarzer Schlauch	0,87	0,83

[1] F. AUERBACH, Jahresb. B. d. schles. Ges. 1887. p. 132. — [2] E. VILLARI, POGG. Ann. **143**. 88. 1871. — [3] W. C. RÖNTGEN, ibid. **159**. 601. 1876. — [4] KURZ, Rep. d. Physik **22**. 511. 1887. — [5] J. RUSSNER, WIED. Ann. **43**. 533. 1891. — Ferner vgl. A. MALLOCK, Pr. Roy. Soc. **46**. 233. 1889. — J. MC GREGOR u. W. MACDONALD, Proc. N. Scot. Inst. Sc. **10**. 28. 1899.

Die Unterschiede zwischen beiden Reihen sind kaum groß genug, um beachtet zu werden. Auch BJERKÉN[1] fand, obgleich er sein Kautschukband bis zur vierfachen Länge dehnte, bei allen Belastungen ungefähr den gleichen Wert, nämlich $E = 0,095$ im Mittel (Schwankungen zwischen 0,08 und 0,11). Ferner ist eine sehr sorgfältige Untersuchung von LUNDAL[2] anzuführen. Die Belastung und Dehnung des Kautschukstabes erfolgte in einem Apparat, durch den in sinnreicher Weise alle Fehlerquellen möglichst ausgeschlossen wurden; namentlich diente ein mit dem Kautschukstabe in eigentümlicher Weise gekoppelter Messingstab zur Kompensation. Als Wert des Moduls, korrigiert wegen der Dimensionsänderungen, ergab sich für reines Kautschuk $E = 0,10$, für Kautschuk mit 133 % absorbierten Paraffinöls $E = 0,055$. Sodann sei auf eine Arbeit von SCHEDD und INGERSOL[3] verwiesen, in der gezeigt wird, daß E mit wachsendem Zuge erst etwas abnimmt, dann konstant bleibt und schließlich stark wächst. Die neuesten Messungen an Kautschuk verdankt man O. FRANK[4]; er findet im Mittel (ohne leicht ersichtliches Gesetz für die Differenzen)

$$E = 76 \cdot 10^6 \text{(abs.)} = 0,089 \text{ (praktisch)} \quad .$$

Ein anderer Stoff von abnormem Verhalten ist die Gelatine bezw. Leimgallert bezw. ihre festen Lösungen mit Glyzerin und Wasser; namentlich sind hier die Arbeiten von MAURER[5], BJERKÉN[6] und FRAAS[7] zu nennen. Aus den Zahlen von BJERKÉN ergibt sich als Modul etwa 0,01 für kleine Belastungen, für größere allmählich auf 0,02 steigend. Den letzteren Wert fand auch MAURER für eine Lösung von 1 Teil Gelatine, 1 Teil Glyzerin und 2 Teile Wasser. FRAAS fand für verschiedene Präparate folgende Werte (die Moduln aus den von ihm angegebenen Koeffizienten berechnet):

Reine Gelatinelösung, 10 % . .	0,003	20 %ige Lösung mit 5 % Salz . .	0,008
„ „ 20 . .	0,011	„ „ „ 15 % „ . .	0,005
„ „ 30 . .	0,019	„ „ „ Glyzerin . . .	0,011
„ „ 40 . .	0,023	„ „ „ Rohrzucker . .	0,011
„ „ 50 . .	0,047	„ „ „ Gummiarabikum	0,011

In guter Übereinstimmung hiermit stehen die neuesten Versuche von LEICK[8], der mit reinster weißer, teils harter, teils weißer Gelatine von den Höchster Farbwerken arbeitete, sie in Wasser löste und dann zu Tafeln von 10 · 6 · 1,6 cm erstarren ließ. Er fand für verschiedene Konzentration folgende Modulwerte in Hundertausendsteln:

a) harte Sorte			b) weiche Sorte		
c	E	$E:c^2$	c	E	$E:c^2$
10,0	242	2,4	12,6	295	1,9
18,6	978	2,8	20,7	619	1,4
30,0	1545	1,7	31,7	1189	1,2
45,0	2944	1,5	45,6	2327	1,1

Wie man sieht, ist das Verhältnis $E:c^2$ in erster Näherung konstant, was sich auf Grund molekularer Vorstellungen in leicht ersichtlicher Weise verstehen läßt; in zweiter Näherung nimmt es mit steigender Konzentration etwas ab. Durch Zusatz von KCl, NaCl, LiCl, $CaCl_2$, $MgCl_2$ wird der Modul bedeutend herab-

[1] P. v. BJERKÉN, WIED. Ann. **43.** 917. 1891. — [2] A. E. LUNDAL, ibid. **66.** 741. 1898. — [3] J. C. SCHEDD u. R. L. INGERSOL, Phys. Rev. **19.** 107. 1904. — [4] O. FRANCK, Ann. d. Phys. **21.** 602. 1906. — [5] R. MAURER, WIED. Ann. **28.** 628. 1886. — [6] P. v. BJERKÉN, l. c. — [7] E. FRAAS, WIED. Ann. **53.** 1074. 1894. — [8] E. LEICK, DRUDES Ann. **14.** 139. 1904.

gesetzt, Na_2SO_4 ist ohne Einfluß, Glyzerin und Rohrzucker wirken erhöhend; als Beispiele dienen folgende Reihen:

KCl-Gehalt in Prozent	0	5	10	15	20	
Modul E	715	532	284	229	165	
Glyzerin in Kubikzentimeter . .	0	10	20	30	40	60
Modul E	653	685	730	844	887	1182

Auf die Eigenschaften von Kautschuk und Gallerte wird noch wiederholt zurückzukommen sein.

Zu den abnormen Körpern gehören schließlich auch die künstlich zusammengesetzten, z. B. die Ketten, Netze und Gewebe. Über die Dehnung von Ketten existiert eine sehr eingehende Theorie von WINKLER, die dann von PEARSON[1] in einigen Punkten berichtigt und ergänzt wurde. Es ist hier zunächst das Verhalten eines einzelnen Kettengliedes zu untersuchen, das schon an sich, je nach Form u. s. w., merkwürdig genug ist; bei dem Aufbau der Gesetze für die Kette treten dann begreiflicherweise neue Abnormitäten auf; es kann jedoch hier darauf nicht eingegangen werden. Hinsichtlich der Gewebe sei noch auf eine Arbeit von TRESCA hingewiesen.[2]

Einfluß der Temperatur auf den Elastizitätsmodul. Unter den Bedingungen, die ihren Einfluß auf den Modul geltend machen, ist die Temperatur am wichtigsten. Daß bei normalen Stoffen der Dehnungsmodul, also der Widerstand gegen Längsbeanspruchung mit steigender Temperatur abnimmt, wird durch alltägliche Erfahrungen nahegelegt und durch exakte Messungen bestätigt. Das Gesetz und der Betrag dieser Abnahme ist aber bei verschiedenen Stoffen verschieden; bei einigen genügt eine lineare Formel, also ein einziger Temperaturkoeffizient, bei andern ist das nicht der Fall. — Was zunächst die Metalle betrifft, so liegen hierüber Untersuchungen vor von WERTHEIM, KOHLRAUSCH und LOOMIS, PISATI, KATZENELSOHN, KIEWIT, TOMLINSON, MILLER, WINKELMANN, THOMAS, CL. SCHÄFER, SUTHERLAND, GUILLAUME, SHAKESPEAR, NOYES, WASSMUTH und viele andere[3]; einige dieser Arbeiten betreffen zwar Biegungsversuche, können aber für den Modul ebenfalls herangezogen werden. Die Ergebnisse, zu denen WERTHEIM, der älteste Beobachter kam, sind folgende:

Metall	Dehnungsmodul			Metall	Dehnungsmodul		
(angelassen)	15° C	100° C	200° C	(angelassen)	15° C	100° C	200° C
Blei . . .	1727	1630	—	Platin . .	15518	14178	12964
Gold . . .	5584	5408	5482	Eisen . .	20794	21877	17700
Silber . . .	7140	7274	6374	Gußstahl .	19561	19014	17926
Kupfer . . .	10519	9827	7862	Engl. Stahl .	17278	21292	19278

KATZENELSOHN berechnete aus seinen Versuchen den linearen Temperaturkoeffizienten und erhielt für ihn folgende aufsteigende Werte:

[1] E. WINKLER, Civilingenieur **4.** 132. 1858. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prag 1867. — K. PEARSON, in: TODHUNTER und PEARSON, Hist. of Elasticity etc. **2.** 422 ff. — [2] A. TRESCA, C. R. **95.** 1215. 1882. — Vgl. auch die technische Literatur. — [3] WERTHEIM, Ann. chim. phys. (3) **12.** 385. 1844. — F. KOHLRAUSCH u. E. H. LOOMIS, POGG. Ann. **141.** 481. 1870. — G. PISATI, Gazz. chim. ital. **7.** 1. — S. KATZENELSOHN, Inaug.-Diss. Berlin 1887. — J. KIEWIT, Gött. Inaug.-Diss. 1886. — H. TOMLINSON, Phil. Mag. (5) **23.** 245. 1887. — A. v. MILLER, in zahlreichen Mitteilungen in den Münch. Ber. 1882—89. — A. WINKELMANN, WIED. Ann. **63.** 117. 1897. — G. A. SHAKESPEAR, Phil. Mag. (5) **47.** 539. 1899. — M. CHILTON NOYES, Phys. Rev. **3.** 432. 1896. — P. A. THOMAS, Inaug.-Diss. Jena 1899. — CL. SCHÄFER, DRUDES Ann. **5.** 220. 1901. — W. SUTHERLAND, ibid. **8.** 474. 1902. — A. WASSMUTH, ibid. **13.** 182. 1904; Phys Ztschr. **6.** 755; Wien. Ber. **115.** 223. 1906.

Metall	E	Abnahme in Proz. zwisch. 0 u. 100°	Metall	E	Abnahme in Proz. zwisch. 0 u. 100°
Platin	17187	0,89	Messing . . .	8914	4,21
Eisen	19024	2,33	Silber	7010	3,97
Gold	9800	2,92	Aluminium . .	7540	19,5
Neusilber . . .	11449	3,48			

Die von SLOTTE für verschiedene Temperaturen gemessenen Moduln sind in der nun folgenden Tabelle zusammengestellt:

Aluminium		Eisen		Kupfer I		Kupfer II		Platin	
t	E	t	E	t	E	t	E	t	E
6	7478	8,4	19687	10	12507	10	12931	4	16210
11	7330	20,4	19385	20	12393	20	12711	10	15989
20	7200	30	19226	30	12274	30	12507	30	14711
30	7082	40	19137	40	12099	50	12286	50	13947
40	6974	50	19037	50	11859	70	12065	70	13759
50	6794	60	19004	60	11576				
60	6698								
70	6606								

GRAY, BLYTH und DUNLOP fanden folgende negativen Temperaturkoeffizienten in millionteln:

Eisen, weich	Kupfer (Handels-)	Kupfer (gezog.)	Messing	Neusilber	Stahl (mild)
136	155	436	373	397	247

Werte von ähnlichen Beträgen fand auch SHAKESPEAR. Dagegen erhielt CHILTON NOYES, der die Erwärmung der Drähte durch hindurchgeschickte Ströme hervorrief (der Strom an sich und der Magnetismus hatten keinen nachweisbaren Einfluß), weit größere Koeffizienten, nämlich (Temperaturgrenzen 20 und 80 bis 180 Grad) in millionteln für Stahl (Klavierdraht) 460, für Silber 820, für Kupfer im Mittel aus sehr verschiedenen Zahlen 1020.

Endlich fand ganz neuerdings WASSMUTH auf einem indirekten Wege (siehe Artikel „Biegung und Drillung"):

Platin	1,07	Nickel	3,25	Silber	7,48
Palladium . . .	2,05	Kupfer	3,59	Aluminium . .	19,98
Stahl	2,64	Gold	4,09	Zink	34,9

Wie man aus diesen Tabellen entnimmt, nimmt der Dehnungsmodul mit steigender Temperatur bei allen Metallen ab (die einzige bei WERTHEIM sich findende Ausnahme hat sich neuerdings nicht bestätigt); aber die lineare Darstellung ist nicht durchweg möglich, die Abnahme erfolgt vielmehr in einigen Fällen mit steigender Temperatur immer schneller.

Für einzelne Metalle sowie für Legierungen liegen noch zahlreiche Spezialuntersuchungen vor. Ein großer Teil von ihnen beschäftigt sich begreiflicherweise mit Eisen und Stahl. So fand z. B. PISATI folgendes (nächste Seite).

Der Modul nimmt also beim Eisen allmählich immer schneller ab, d. h. der Temperaturkoeffizient wächst, und zwar ganz erheblich, so daß er bei 300° etwa siebenmal so groß ist wie bei 20°. Beim Stahl wächst er anfangs auch, bleibt aber sehr bald konstant, so daß man zwischen 100 und 300 Grad die Änderung als linear betrachten kann.

Auf die Arbeiten von MILLER und THOMAS kann nicht näher eingegangen werden; die von ihnen gefundenen Werte des Temperaturkoeffizienten haben nur

individuelle Bedeutung und können sie nach dem Obigen auch nur haben (vgl. auch weiter unten).

Temp.	E (Eisen)	Temp.-Koeff.	Temp.	E (Stahl)	Temp.-Koeff.
0	21483	—	0	18518	—
20	21441	0,00010	20	18481	0,00010
40	21391	12	40	18439	12
60	21336	13	60	18391	13
80	21227	25	80	18325	18
100	21212	27	100	18232	26
120	21121	21	120	18151	23
140	20981	34	140	18085	18
160	20802	42	160	18013	20
180	20625	41	180	17925	24
200	20458	39	200	17820	29
220	20267	47	220	17720	28
240	20021	60	240	17636	24
260	19723	75	260	17550	25
280	19439	72	280	17462	25
300	19175	69	300	17372	26

Auch bei Platin ist die Abnahme nach WINKELMANN eine beschleunigte; es ist nämlich die prozentische Abnahme zwischen 20 und 100° 2,01; zwischen 20 und 200° 4,60; zwischen 20 und 300° 7,22 und zwischen 20 und 400° 9,87. Dabei kommt in Betracht, daß diese Temperaturen, auch die höchste von ihnen, noch außerordentlich weit von der Erweichungstemperatur entfernt sind.

Messungen über den Modul bei der Temperatur der flüssigen Luft (— 186°) hat zuerst DEWAR angestellt; er fand für leicht (unter 200°) schmelzende Metalle eine kolossale Zunahme von E, nämlich auf das Mehrfache des Wertes für Zimmertemperatur. Nicht entfernt so erheblich ist die Zunahme begreiflicherweise bei höher schmelzenden Metallen. So fand BENTON für Kupfer und Stahl folgende Verhältnisse[1]:

$$\text{Kupferdraht:} \quad E(-186^0) = 1{,}180\,E \quad ,$$

$$\text{Stahldraht:} \quad E(-186^0) = 1{,}087\,E \quad .$$

Ferner fand CL. SCHÄFER für Temperaturen von + 20° abwärts bis — 186° folgende Zunahmen des Moduls in Prozenten für 100 Grad Temperaturunterschied (aufsteigend geordnet):

Platin	0,732	Nickel	2,463	Silber	7,65
Palladium . . .	1,979	Kupfer	3,627	Aluminium . .	21,32
Eisen	2,250				

Was die Legierungen betrifft, so sei zunächst die folgende, von ANGENHEISTER für die schon oben erwähnten Cu-Ag-Legierungen gewonnene Tabelle wiedergegeben; a sind die Äqu. Cu auf 1 Äqu. Ag, ΔE ist die, aus Beobachtungen bei + 20° und — 186° (flüssige Luft) berechnete Änderung von E auf 100° Temperaturintervall:

a	0	0,01	0,1	1	10	∞
ΔE	— 6,80	— 6,71	— 5,51	— 4,84	— 3,94	— 3,02

Die Abnahme ist also ganz stetig. Ferner finden sich in der schon genannten Arbeit von KIEWIET Angaben über Kupfer—Zink und Kupfer—Zinnlegierungen;

[1] R. DEWAR, Proc. Roy. Inst. Great-Britain 1893 (dem Ref. nicht zugänglich). — J. R. BENTON, Phys. Review 16. 17. 1903.

der Temperaturkoeffizient, der sich ergab, zeigt kein leicht ersichtliches Gesetz; er ändert sich mit dem Mischungsverhältnis teils parallel, teils mit erheblichen Abweichungen, und einige Legierungen haben sogar einen Temp.-Koeff., der entschieden kleiner ist als der jedes der beiden Bestandteile; so hat man z. B. folgende Reihe:

Cu:Sn	100:0	90:10	67:33	50:50	41:59	0:100
Temp.-Koeff.	7,5	6,3	3,2	9,9	10,9	37,8

Solche Legierungen zeigen also ein elastisches Verhalten, das ihrem elektrischen ganz entspricht; und es liegt die Frage nahe, ob es, wie dort, so auch hier vielleicht Legierungen gebe, deren Modul von der Temperatur unabhängig ist. Für Nickeleisen, das sich bekanntlich auch in magnetischer Hinsicht sehr merkwürdig verhält (vgl. Bd. 5), ist das nach GUILLAUME[1] wirklich der Fall. Wie GUILLAUME schon früher gefunden hatte, nimmt der Modul des Stahles mit wachsendem Gehalt an Nickel bis zu 20% Nickel ab, dann bis 22% auf einen Zwischenwert zu, dann bis zu 36%, wo das Minimum liegt, ab, und nunmehr fortwährend zu bis zu dem Werte für reines Nickel. Sodann hat PERRET unter GUILLAUMEs Leitung den Temperaturkoeffizienten zwischen 0 und 30, für einige Legierungen zwischen -15 und $+15^0$ C bestimmt, indem er die betreffende Legierung als Spirale eines Chronometers benutzte und für die Berechnung die thermische Ausdehnung der Legierung und die Temperaturformel des Chronometers zugrunde legte. In der Formel

$$E = E_0 [1 + \alpha t + \beta t^2] \tag{27}$$

ergaben sich dann für die beiden Koeffizienten folgende Werte:

% Ni	E	$\alpha \cdot 10^6$	$\beta \cdot 10^6$
22	19670	− 394	—
26,2	18500	− 51	− 0,95
27,9	18060	+ 104	− 1,72
30,4	15960	+ 389	—
35	15040	+ 464	—
44,5	16400	− 44	+ 0,62

Wo β nicht angegeben ist, ist es klein gegen α, also die Temperaturkurve wenig gekrümmt. Das Maximum von E würde bei der zweiten Legierung bei -27^0, bei der dritten bei $+30^0$ liegen, während die letzte Legierung bei $+35^0$ ein Minimum von E hat. Diese beiden letzten Legierungen haben hiernach ihren ausgezeichneten Punkt so ziemlich bei gewöhnlicher Temperatur, so daß für sie E praktisch als unabhängig von der Temperatur gelten kann; diese Legierungen, mit 27 bezw. 44% Nickel, eignen sich also sehr gut zu Uhrfedern, Stimmgabeln u. s. w. (ihr thermischer Ausdehnungskoeffizient ist freilich von normaler Größenordnung). — Auf die weiteren interessanten Eigentümlichkeiten der Nickelstähle, besonders auf ihre Einteilung in reversible und irreversible, kann hier nicht eingegangen werden.

Auch für die Gläser liegen mehrere Untersuchungen über die Änderung des Moduls mit der Temperatur vor, nämlich von AMAGAT, KIEWIET, v. KOWALSKI, WINKELMANN, WANDERSLEB u. A.[2] Die von WINKELMANN beziehen sich auf die schon oben angeführten Glassorten, wenn auch nicht genau auf die-

[1] CH. ED. GUILLAUME, C. R. **124.** 753. 1897; **136.** 303. 356. 498. 1903. Les appl. des aciers au nickel etc. Paris 1904. — [2] E. AMAGAT, C. R. **110.** 1246. 1890 und an anderen Stellen. — J. KIEWIET, l. c. — J. v. KOWALSKI, WIED. Ann. **39.** 155. 1890. — A. WINKELMANN, ibid. **61.** 105. 1897. — E. WANDERSLEB, DRUDEs Ann. **8.** 367. 1902.

selben Schmelzen. Die Erwärmung wurde bis nahe an die Erweichungstemperatur getrieben, also im günstigen Falle bis auf 500°. Die Gläser ergaben sämtlich eine Abnahme des Moduls mit steigender Temperatur, d. h. das Verhältnis $E(t):E(20)$ war stets kleiner als eins; um wieviel, zeigt folgende Tabelle, in der nur die Nummer, nicht aber der Charakter der Gläser wiederholt ist (vgl. oben); alle Zahlen sind mit 10^4 multipliziert:

Nr.	100°	200°	300°	400°	500°
1299	49	134	232	339	433
627	142	319	496	678	—
1973	51	167	320	501	—
16 III	50	191	417	682	—
1450	1	11	38	85	195
709	132	338	566	807	—
714	382	747	1162	1576	—
270	45	194	431	746	—
2154	9	122	492	—	—
370	125	281	437	593	—
500	27	206	627	—	—
658	0	8	76	361	—
S 196	225	506	787	—	—

Ein Blick auf die Tabelle zeigt, daß die Abnahme keine gleichförmige und daß sie für die verschiedenen Gläser nicht dem gleichen Gesetz unterworfen ist; das eine Glas überholt das andere sozusagen. Man muß deshalb entweder mehrere Koeffizienten einführen oder, wofür sich WINKELMANN entschieden hat, zwar sich mit einem Gliede begnügen, dieses aber mit einem Exponenten versehen, so daß alsdann jedes Glas durch einen Temperaturkoeffizienten und einen Temperaturexponenten charakterisiert ist. Ein deutlicher Einfluß der chemischen Bestandteile ist im allgemeinen nicht wahrzunehmen; nur so viel läßt sich vermuten, daß das gleichzeitige Auftreten größerer Mengen Na_2O und K_2O die Änderung des Moduls mit der Temperatur begünstigt, daß aber der Eintritt der Borsäure in diesem Falle wieder abschwächend wirkt.

Eine Sonderstellung hatten, wie WINKELMANN fand, zwei Antimon enthaltende Gläser inne, insofern bei ihnen der Zugmodul mit wachsender Temperatur zunahm; er schloß diese beiden Gläser daher zunächst von der Mitteilung aus, veranlaßte aber WANDERSLEB, der Sache näher zu treten. Dieser fand nun bei vier von sechs untersuchten antimonhaltigen Gläsern die Anomalie bestätigt, zwei andere dagegen zeigten völlig normales Verhalten. Ob dies an dem verschiedenen Antimongehalt liegt, der vielleicht einen periodischen Einfluß auf das Verhalten des Glases ausübt, oder daran, daß die vier ersten Gläser Borsäure enthielten, die beiden anderen nicht, ließ sich nicht mit Sicherheit entscheiden. Im übrigen ließ sich auf die beiden normalen Gläser die WINKELMANNsche Exponentialformel, auf die vier anomalen eine reziprok-quadratische Formel anwenden. Die Maxima aller vier anomalen Kurven liegen bei etwa 200° und sind rund 2% größer als die Werte bei 15°.

Es bleibt nun noch das Verhalten des Kautschuks bei verschiedenen Temperaturen zu besprechen. Schon frühzeitig sind hier Anomalien gefunden worden, und es ist z. B. eine leicht zu machende Wahrnehmung, daß bei Kautschukstreifen und zum Teil auch bei Darmseiten die Tonhöhe in höherer Temperatur nicht sinkt, sondern steigt; dasselbe muß also auch vom Elastiziätsmodul gelten, wie es auch u. A. SCHMULEWITSCH bestätigt fand. Andererseits fand allerdings EXNER auf Grund der Schallgeschwindigkeit das entgegengesetzte Resultat; die Frage mußte also direkt geprüft werden, und zwar durch direkte statische Dehnungsversuche. Die beiden sorgfältigsten und umfangreichsten Arbeiten hierüber liefern nun freilich entgegengesetzte Resultate. RUSSNER einerseits hatte schon 1882

eine ganz normale Abnahme von E mit t gefunden, und bei neueren Versuchen bestätigte sich ihm das. Er arbeitete mit sehr kleinen Beanspruchungen und glaubte deshalb von einer Korrektion der Werte, wohl mit Recht, absehen zu dürfen; er fand folgendes:

Sorte	t	E (kleinste Kraft)	E (größte Kraft)
rein, roh	19	0,050	0,044
	45	0,027	0,024
schwarz, vulkanisiert	21	0,049	0,044
	60	0,043	0,039
grau, vulkanisiert	20	0,25	0,22
	43	0,21	0,20
schwarzer Schlauch	17	0,87	0,83
	43	0,87	0,88

Die Abnahme ist also beim reinen Kautschuk sehr beträchtlich, bei den vulkanisierten Sorten gering, und nur beim Schlauch, vermutlich wegen seiner Anisotropie, nicht nachweisbar.

Andererseits hat LUNDAL eine entschiedene Zunahme von E mit der Temperatur festgestellt; er fand nämlich folgende Werte von $10^9/E$ im absoluten Maße (p Belastung):

Reiner Kautschuk $p = 20{,}3$ g		Reiner Kautschuk $p = 30{,}3$ g		Reiner Kautschuk $p = 40{,}3$ g	
t	$10^9/E$	t	$10^9/E$	t	$10^9/E$
3,0	105,2	3,3	100,6	5,1	100,8
17,3	100,4	18,3	95,5	18,6	95,7
34,4	95,9	34,3	91,3	35,1	92,1
45,0	93,6	45,0	89,2	45,3	90,9
58,2	91,2	59,2	87,0	61,1	87,9
70,3	90,1	72,3	85,9		

Ähnlicher Verlauf ergab sich auch bei Kautschuk, der 133,5 % Paraffinöl und bei solchem, der 68,9 Paraffin absorbiert hatte. Durchweg findet also eine Zunahme von E mit t statt, und zwar um 8 bis 12 % zwischen 2 bis 5 Grad einerseits und 50 bis 60 Grad andererseits. — Da sich LUNDAL selbst nicht über die Resultate RUSSNERS und über die Gründe ihres Widerspruches mit den seinigen ausspricht, ist die Frage, wenn auch die Anomalie des Temperaturkoeffizienten des Kautschuks sehr wahrscheinlich ist, doch noch nicht endgültig geklärt.[1]

Endlich seien noch die folgenden, von SEGEL[2] ermittelten Modulwerte für Paraffin und Wachs angeführt; sie nehmen begreiflicherweise mit steigender Temperatur sehr stark ab:

Paraffin

t	5,7	7,4	11,0	16,0	17,9	20,2	23,0
E	223,4	210,4	192,0	164,1	151,0	140,0	127,4

[1] RUSSNER und LUNDAL (l. c.). Daselbst auch die ältere Literatur. In neuester Zeit finden auch SCHEDD und INGERSOL (l. c.) eine Zunahme von E, wenn auch nur in geringem Maße. — [2] SEGEL, Phys. Ztschr. 1. 126. 1899.

Wachs

t	11,5	14,8	19,4
E	59,1	51,7	46,6

Wegen der theoretischen Beziehungen des Elastizitätsmoduls zu thermischen Beziehungen ist auf späteres zu verweisen.

5. Ergänzungen.

Einfluß der Zeit und der Wiederholung der Versuche. Die Gewinnung brauchbarer Werte für den Modul und seiner Temperaturkoeffizienten ist nicht so leicht, wie man vielleicht annehmen möchte; und zwar deshalb, weil sich mehrere Umstände sehr unliebsam geltend machen und zur Folge haben, daß man ohne ihre Elimination ganz schwankende und falsche Werte erhalten kann. Der erste dieser Einflüsse ist die Zeit, d. h. die Dauer der Beanspruchung, die, selbst im Bereiche der elastischen Vollkommenheit, einen Einfluß auf die Veränderung hat; das Nähere hierüber wird in dem Artikel über die elastische Nachwirkung gesagt werden. Ein anderer Umstand, der mit jenem nicht außer Zusammenhang steht, ist die Änderung der Zahlen bei Wiederholung der Versuche, und zwar sowohl bei wiederholter Beanspruchung und Entlastung (Änderung des Moduls) als auch bei wiederholter Erwärmung und Abkühlung (Änderung des Moduls und seines Temperaturkoeffizienten). Dabei zeigt sich, daß gerade die ersten Versuche nicht maßgebend sind, insofern der Endzustand von dem Ausgangszustand verschieden ist, und insofern jeder der ersten Versuche einen anderen Wert liefert; erst nach einer gewissen Anzahl von Versuchen, die man hiernach als „tote" zu betrachten hat, gelangt man zu wirklichen Zyklen und damit zu konstanten und brauchbaren Werten. v. MILLER[1], der diese Vorgänge zuerst eingehend studiert hat, unterscheidet deshalb zwischen dem „primären" und dem „sekundären" Modul E_s, welcher letztere nach 4—5facher Dehnung und Verkürzung eintritt und sich weit gesetzmäßiger verhält als der primäre; so ist z. B. allgemein seine Abhängigkeit von der Temperatur, allerdings erst nach mehrstündiger Erwärmung und Abkühlung, durch die Formel

$$E_s = (E_s)_0 (1 - \gamma t) \tag{28}$$

bestimmt, d. h. seine Abnahme ist mit der Temperatur proportional. Einige von v. MILLER gefundene Zahlenwerte sind folgende:

Metall	$(E_s)_0$	γ	Metall	$(E_s)_0$	γ
Platin	19668	0,000364	Zink	10551	0,00330
Eisen	18813	376	Blei	2553	470
Silber	7349	778	Messing . . .	10670	047
Kupfer. . . .	13035	998	Neusilber . . .	13945	065

Für Platin liegt noch eine besondere Untersuchung von WINKELMANN (l. c.) vor; die Erwärmung wurde bis etwa 400° geführt; es fand sich:

Vor jeder Erwärmung	16926
Nach mehrfachen Erwärmungen und Abkühlungen .	18380
Nach langer Pause ohne weitere Erwärmungen . .	17508
Nach erneuter Erwärmung	17950
Nach längerer Pause	17958

Der letzte Wert, der von dem ursprünglichen erheblich verschieden ist, zeichnet sich also durch Konstanz aus und ist in gewissem Sinne als Normalwert

[1] A. v. MILLER, l. c., besonders Münch. Ber. 1886. p. 707.

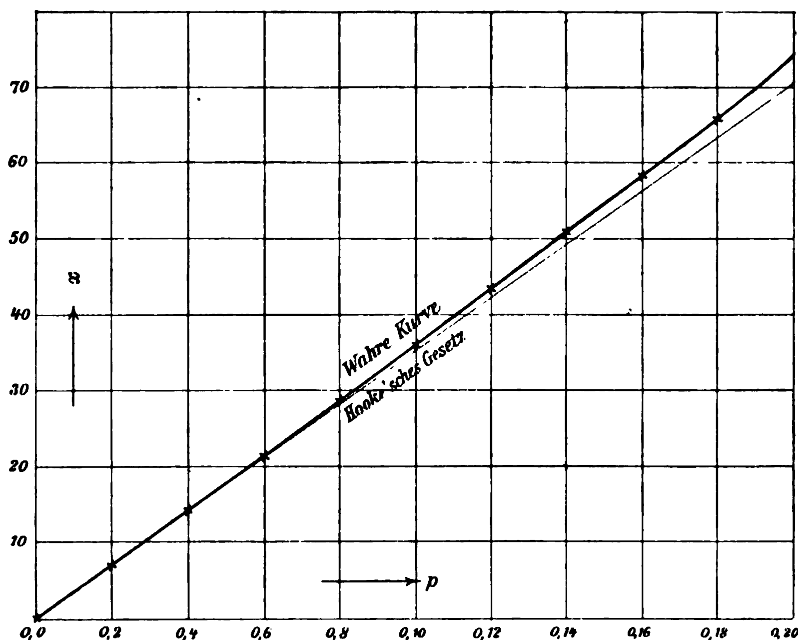
zu betrachten. WINKELMANN hatte schon vorher die Erscheinung auch bei Gläsern konstatiert: der Wert von E nach der Erwärmung war zuerst beträchtlich größer als vorher, nahm dann für wiederholte Erwärmungen einen konstanten Wert an, dieser aber näherte sich bei längerer Pause in der Beanspruchung allmählich wieder dem Ausgangswert. — WANDERSLEB (l. c.) hat dies weiter verfolgt; er unterscheidet zwischen Normalzustand und Akkommodationszustand, in letzterem ist E um 1 bis 2 % größer. Dieser, nach dem Erwärmen auftretende Zustand ist aber sehr labil; er läßt sich z. B. durch den Kunstgriff einer angeschlagenen Stimmgabel, deren Schwingungen auf den Versuchskörper übertragen werden, in kurzer Zeit in den Normalzustand überführen. — Bei einigen Stoffen kehrt sich sogar der Temperaturkoeffizient des Moduls mit der Wiederholung geradezu um, er ist z. B. bei der oder den ersten Erwärmungen positiv, wird dann aber negativ, d. h. normal. — Hierher gehört auch der von ANGENHEISTER geführte Nachweis, daß, wenn man Metalle bei gleicher Temperatur in verschiedene Dichtezustände zu bringen vermag, diesen auch verschiedene Moduln, und zwar in gleichsinnigem Verhältnis, entsprechen; der Unterschied zwischen gegossenen und gezogenen Metallen steht hiermit jedenfalls in nahem Zusammenhange. — Jedoch verbietet es der Raum, auf diese und ähnliche Fragen hier näher einzugehen.

Abweichungen vom Hookeschen Gesetz. Die strenge Gültigkeit des HOOKEschen Gesetzes für kleine und selbst mäßige Beanspruchungen ist lange Zeit hindurch fast allgemein stillschweigend angenommen worden. Aber schon um die Mitte des vorigen Jahrhunderts hatte HODGKINSON die Veränderlichkeit der Dilatation für Gußeisen festgestellt, BAUSCHINGER hatte das bestätigt, und BACH hat alsdann zahlreiche Materialien daraufhin untersucht und überall Abweichungen konstatiert. In den Kreisen der Physiker ist aber die Aufmerksamkeit auf die Frage erst durch eine, von F. KOHLRAUSCH angeregte Arbeit von J. O. THOMPSON gelenkt worden. Da es sich voraussichtlich um sehr kleine Beträge handelte, mußte man die Versuchsbedingungen sehr sorgfältig auswählen. Insbesondere muß der Draht möglichst lang sein; er darf ferner keine Knickungen und Krümmungen haben, da diese sonst bei den ersten, kleinsten Belastungen gestreckt werden und somit bei weiterer Belastung eine Zunahme des Moduls vortäuschen — man vergleiche unter anderem eine Arbeit von STRADLING —; man muß ferner die Temperatur sehr konstant erhalten, die Temperaturänderung durch den Vorgang selbst aber in Rechnung ziehen; endlich ist auf die elastische Nachwirkung, soweit sie sich nicht eliminieren läßt, Rücksicht zu nehmen. Alles das wurde erreicht durch Beobachtung in einem Turme, Anwendung von 23 m langen, von vornherein gestreckten Drähten und Hinzufügung eines zweiten, konstant belasteten Drahtes als Thermometer; es wurden dünne Drähte benutzt, zur Kontrolle aber auch dicke herangezogen. Als Beispiel sei die folgende, auf Messing bezügliche Tabelle angeführt, die das Mittel aus 10 Messungsreihen enthält, und bei der der Referent zu den vom Verfasser angegebenen Werten der Belastung p und der Verlängerung x noch die Überschüsse der letzteren über die Proportionalwerte hinzugefügt hat:

p (kg)	x	+	+ (%)
0,2	7,111	0,000	0,0
0,4	14,272	0,050	0,3
0,6	21,488	0,155	0,7
0,8	28,770	0,326	1,2
1,0	36,119	0,564	1,2
1,2	43,554	0,888	2,0
1,4	51,076	1,299	2,6
1,6	58,679	1,791	3,1
1,8	66,341	2,342	3,5

Zur Veranschaulichung diene Figur 169, sie zeigt, daß die Abweichung von der Proportionalität klein, aber ganz deutlich und gesetzmäßig ist.

Ähnlich verlaufen die Reihen bei den anderen Metallen. Da somit die HOOKEsche Formel $x = ap$ nicht genügt, läge es am nächsten, eine zweigliedrige



Figur 169.

Formel $x = ap + bp^2$ anzuwenden; da dann aber die Darstellung noch nicht sonderlich genau wird, ist der Verfasser gleich zur dreigliedrigen Formel

$$x = ap + bp^2 + cp^3 \tag{29}$$

übergegangen, die dann auch in der Tat die Versuche bis auf ganz kleine Differenzen darstellt. Die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Werte der drei Konstanten sind für die verschiedenen Metalle die folgenden:

Metall	a	b	c
Messing . . .	35,4385	0,5358	0,1487
Kupfer . . .	27,578	0,3193	0,0538
Stahl . . .	35,2725	0,5725	− 0,0525
Silber . . .	39,4030	0,3905	− 0,0313

Die Zahlen haben natürlich nur relative Bedeutung — $b:a$ und $c:a$. Der Umstand, daß die Reduktion auf den veränderten Querschnitt nicht vorgenommen ist, in Verbindung mit der Tatsache, daß c bei zwei Metallen positiv, bei den beiden anderen negativ ist, läßt vermuten, daß vielleicht doch eine zweigliedrige Formel ausreicht, um die Abweichung vom HOOKEschen Gesetze darzustellen.

Besonders beträchtlich ist die Abweichung vom HOOKEschen Gesetz nach Versuchen von G. S. MEYER (l. c.) bei Aluminium; ein etwa 20 m langer Draht ergab nämlich bei folgenden Belastungen die darunter stehenden Dehnungen

Belastung .	0,00	0,10	0,20	0,25	0,30
Dehnung . .	0,00	6,43	13,12	16,61	20,13

was sich durch die Formel

$$(30) \qquad \gamma = 62{,}863\,p + 14{,}312\,p^2$$

gut darstellen läßt; der Koeffizient von p^2 ist also hier fast ein Viertel von dem von p.

In technischen Kreisen hatte namentlich BACH die Frage bereits einer eingehenden Untersuchung unterzogen und ebenfalls für zahlreiche Stoffe erhebliche Abweichungen von der Proportionalität gefunden. So ergab sich z. B. für Gußeisen die folgende Reihe:

Spannung . .	166	333	499	666	832	998
Dehnung . .	7,60	15,88	24,60	33,42	42,34	51,31
Plus	—	0,68	1,80	3,02	4,34	5,71

BACH wählt zur Darstellung dieser Abweichungen nicht die algebraische mit mit mehreren Gliedern, er zieht vielmehr nach einem Vorschlage vor SCHÜLE die Beibehaltung nur eines Gliedes, aber unter Hinzufügung eines von eins verschiedenen Exponenten vor, so daß er die Formel

$$(31) \qquad x = a\,p^m$$

erhält. Für die Exponenten m, die hier das wesentliche Interesse darbieten, ergibt sich unter anderem für

Gußeisen (Zug)	1,066
Gußeisen (Druck) . . .	1,393
Kupfer (Zug)	1,093
Granit	1,109 bis 1,374
Zement	1,09

Die Exponentialformel hat gegenüber der trinomischen den Vorzug größerer Einfachheit, der binomischen gegenüber den, daß sie die Versuche teilweise besser darstellt. Sie hat aber den großen Nachteil, daß sie mit der Theorie, auch mit einer ad hoc erweiterten, in keinem Zusammenhang steht, und daß sie, worin sich dies am deutlichsten zu erkennen gibt, auch für noch so kleine Beanspruchungen nicht zur Form des HOOKEschen Gesetzes führt. Unter diesen Umständen ist es dankenswert, daß ganz neuerdings GRÜNEISEN die Frage nochmals in Angriff genommen hat, und zwar in der Weise, daß er für dieselben Proben desselben Materials, nämlich Gußeisen, die von BACH für starke Beanspruchungen untersucht worden waren, Beobachtungen bei ganz kleinen Zugkräften und entsprechend kleinen Dehnungen (gemessen nach einem optischen Interferenzverfahren) anstellte, die dann noch durch akustische Messungen ergänzt wurden. Dabei erwies sich nun, zur Herstellung der Brücke zwischen beiden Versuchsreihen, die SCHÜLE-BACHsche Formel als unbrauchbar, die algebraische dagegen, und zwar in der für den Modul selbst einfachsten Form, als sehr brauchbar, und zugleich zeigte sich, daß wirklich für ganz kleine Kräfte nicht nur die Proportionalität erfüllt ist, sondern auch Zug und Druck gleichwertig sind. Man kann daher für den Elastizitätsmodul die Formel

$$(29\text{a}) \qquad E = \frac{dp}{dx} = E_0 - c\,p$$

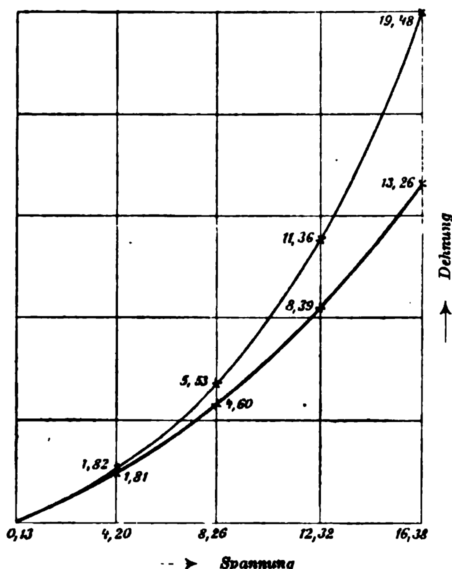
aufstellen, woraus durch Integration die allerdings kompliziertere Formel für die Dehnung

$$(29\text{b}) \qquad x = \frac{1}{c} \lg \frac{E_0}{E_0 - c\,p}$$

hervorgeht; für die Konstante c ergibt sich, wenn p in kg : qcm gerechnet wird, für die beiden Gußeisensorten der Wert 923 bezw. 505 (bei $E_0 = 10603$ bezw. 14019).

Die Gleichung für E ist, wie es scheint, zuerst von HARTIG aufgestellt worden. — Ferner sei auf eine Arbeit von MEHMCKE hingewiesen, in der die verschiedenen Formeln kritisch beleuchtet werden.

Im übrigen ist noch auf einen Punkt hinzuweisen, der von fast allen Beobachtern übereinstimmend entschieden wird, so z. B. von MILLER und von BACH: die Abweichungen vom HOOKEschen Gesetz sind bei dem oder den ersten Zyklen wesentlich größer als bei den späteren, d. h. der normale oder sekundäre oder stationäre Modul ist viel annähernder von der Beanspruchung unabhängig, als der anfängliche. Zur Veranschaulichung diene eine, neueren Versuchen von BACH entnommene, graphische Darstellung (Figur 170), die sich auf Zugbeanspruchung von Sandstein bezieht, und zwar die schwache Linie für erstmalige, die starke für spätere Belastung; wie man sieht, sind zwar hier die Abweichungen überhaupt wesentlich größer als bei THOMPSON; relativ aber weist die zweite Kurve sowohl geringere Höhen (größeren Modul) als auch geringere Krümmung (geringere Veränderlichkeit des Moduls mit der Belastung) auf. — Wie die allgemeine Theorie der Abweichung von der Proportionalität gerecht wird, ist bereits oben (p. 535) auseinandergesetzt worden.[1]



Figur 170.

Sobald man sich der Elastizitätsgrenze nähert, geht die hier betrachtete Anomalie natürlich in eine weit stärkere über; darüber näheres im Artikel „Kohäsion".

Man kann die Abweichung des Moduls von der Proportionalität noch anders ausdrücken, indem man sagt: der Modul hängt von dem Spannungszustand des Stabes ab. Von diesem Gesichtspunkte sind mehrere Versuchsreihen ausgeführt worden, auf deren Ergebnisse nach dem Obigen nicht eingegangen zu werden braucht. Nur für Kautschuk sei erwähnt, daß nach den übereinstimmenden Resultaten von MALLOCK, sowie von MACGREGOR und MACDONALD der Modul bei wachsender Belastung bis zu einem Minimum — bei etwa einviertel Verlängerung — abnimmt und dann wieder zunimmt.[2]

Einfluß des Eigengewichts. Eine weitere Abweichung von den einfachen Verhältnissen entsteht dadurch, daß außer dem ziehenden oder drückenden Gewicht stets noch in entsprechendem Sinne das Eigengewicht des beanspruchten Körpers wirkt. In vielen Fällen und für manche Zwecke wird es zwar zu vernachlässigen sein; bei einigermaßen schweren Versuchskörpern und für alle exakten Zwecke ist das aber nicht mehr der Fall. Die Sache läge sehr einfach, wenn

[1] J. O. THOMPSON, WIED. Ann. **44.** 555. 1891. — A. MILLER, Münch. Ber. **1.** 1885; Abh. bayr. Akad. d. Wiss. **2.** 15. 3. Abt. 1886; p. 16. 3. Abt. 1888; WIED. Ann. **45.** 191. 1892. — G. STRADLING, WIED. Ann. **41.** 332. 1890. — C. BACH, Ztschr. Ver. d. Ing. 1888. p. 193. 221. 1089; 1895. 489; 1896. 1381; 1897. 1; besonders aber p. 8; Mitt. über Forschungsarbeiten Heft 1. p. 24; Ztschr. Ver. d. Ingenieure 1901. — R. MEHMKE, Ztschr. Math. u. Phys. **42.** 327. 1897. — E. HARTIG, Ziv.-Ing. **39.** 113. 425. 1893. — E. GRÜNEISEN, Verh. phys. Ges. 1906. p. 469. — Wegen der Arbeit von KOHLRAUSCH u. GRÜNEISEN vgl. den nächsten Artikel. — [2] A. MALLOCK, Proc. Roy. Soc. **46.** 233. 1889. — J. MACGREGOR u. W. MACDONALD, Proc. Nova Scotia Inst. **10.** 28. 1899.

es sich hier um einen konstanten Zusatz zu der Belastung handelte; offenbar wirkt aber das Eigengewicht auf die verschiedenen Querschnitte des Körpers verschieden, und infolgedessen ist jetzt die Verlängerung bezw. Verkürzung nicht mehr für gleiche Strecken dieselbe, nämlich für die Längeneinheit nicht mehr $\varepsilon P/q$, sondern

$$(v) = \frac{\varepsilon P}{q} + \frac{1}{q}\int_z^l s\,q\,dz = \frac{\varepsilon P}{q} + s(l-z) \quad , \tag{32}$$

wo z der Abstand der möglichst klein gewählten Einheitsstrecke (z. B. 1 mm) vom festen Ende und s das spezifische Gewicht ist; und folglich wird durch Integration die Verlängerung bezw. Verkürzung des ganzen Stabes, wenn noch der Modul E an Stelle von $1/\varepsilon$ eingeführt wird und p das Gewicht des Stabes ist,

$$v = \frac{l}{Eq}\left(P + \frac{1}{2}p\right) \quad . \tag{33}$$

Wie man sieht, kommt zu dem Gewicht P noch das halbe Eigengewicht des Stabes hinzu. Es kann auch der Fall vorkommen, daß das Eigengewicht dem Belastungsgewicht entgegenwirkt, nämlich wenn ein Zug von oben oder ein Druck von unten ausgeübt wird; man hat dann oben — statt + zu schreiben und findet dann als Spezialfall, daß der Stab seine natürliche Länge beibehält, wenn die Belastung gerade gleich dem halben Eigengewicht ist.

Da hiernach die Spannung in verschiedenen Querschnitten eines Stabes verschieden ist, so entsteht die Frage, wie man bei einem Stabe die Querschnittsgröße der Länge nach variieren lassen muß, damit die Spannung überall dieselbe T sei. Die Antwort liegt in der Formel

$$q = \frac{P}{T} \cdot e^{\frac{s}{T}(l-z)} \quad , \tag{34}$$

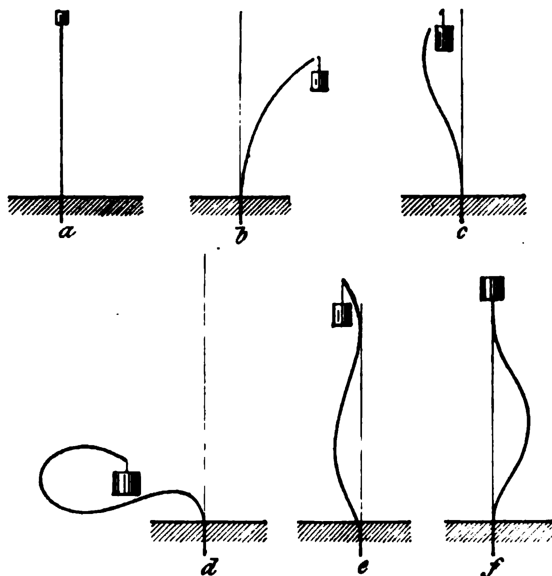
d. h. bei armithmetischem Fortschreiten vom freien Ende müssen die Querschnitte geometrisch zunehmen.[1]

Ungleichförmige Belastung. Wenn der beanspruchte Stab größeren Querschnitt hat und die Belastung nicht am ganzen Endquerschnitt gleichförmig angreift, so treten natürlich seitliche Kräfte und Deformationen auf, und das Problem gehört nicht mehr hierher. Eine Ausnahme macht vielleicht der Fall, daß die Belastung immer noch radial symmetrisch angreift, z. B. in bestimmten konzentrischen Ringen u. s. w. Da solche Fälle für die Praxis nicht unwichtig sind, finden sie in der technischen Literatur vielfache Behandlung; auch sei auf eine Abhandlung von FILON[2] verwiesen.

Biegung durch Druck. Wenn ein unten fest eingelassener Stab am oberen Ende belastet wird, so kann prinzipiell nur eine Längskompression resultieren. Tatsächlich aber kann unter gewissen Umständen der Stab auch gebogen werden, wie man aus alltäglichen Wahrnehmungen weiß, und diese Erscheinung ist für die Praxis sogar überaus wichtig. Daß unter der Wirkung einer Belastung die vertikale, geradlinige Gestalt eines Stabes eine Gleichgewichtslage desselben ist, ist einleuchtend, weil kein Grund zu einer Abweichung nach irgend einer Seite hin vorhanden ist; aber es kann dieses Gleichgewicht je nach den Umständen stabil oder labil sein; und im letzteren Falle wird die leiseste zufällige Ablenkung oder Erschütterung genügen, um den Stab jene Lage für immer aufgeben und eine neue Gleichgewichtslage annehmen zu lassen, welche nunmehr

[1] A. CLEBSCH, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipz. 1862. p. 356. — [2] L. FILON, Proc. Roy. Soc. 68. 353. 1901.

die stabile ist. Dem Resultat nach gehört die Erscheinung nicht hierher, sondern in die Lehre von der Biegung; die erzeugende Anordnung ist aber ein axialer Druck, und deshalb sollen die wichtigsten Ergebnisse der Theorie, die namentlich von SAALSCHÜTZ, sowie von Technikern[1] ausgeführt worden ist, hier angegeben werden. Wird der Querschnitt des Stabes beliebig angenommen und mit W sein Trägheitsmoment für die durch den Schwerpunkt gehende, zur Biegungsebene senkrecht vorausgesetete Hauptachse bezeichnet, so ergibt sich: Für P (Belastung) $< \frac{\pi^2 W E}{4 l^2}$ ist die vertikale Lage (Figur 171 *a*) die einzige stabile Gleichgewichtslage, der Stab kehrt nach zufälligen Abweichungen wieder in dieselbe zurück. Der Maximalwert von P, bei welchem dies noch eintritt, heiße P_0. Für $P > \frac{\pi^2 W E}{4 l^2}$, also $P > P_0$ ist die vertikale Lage labil, dafür aber die Lage (Figur 171 *b*) stabil. Ist $P > 9 P_0$, so gibt es noch eine zweite stabile Gleichgewichtslage von der Form der Figur 171 *c*. Für $P > 25 P_0$ gibt es noch eine dritte (Fig. 171 *d*) u. s. w. Dagegen ist eine Lage von der Form Figur 171 *e* keine Gleichgewichtslage, wohl aber gibt es zwischen den oben angeführten noch weitere, falls das obere Ende des Stabes dem Zwange unterworfen ist, in der ursprünglichen Achse zu bleiben; für $P > 16 P_0$ z. B. die Form Figur 171 *f*. Am wichtigsten ist der erste, durch Figur 171 *b* dargestellte Fall. In demselben bestehen folgende Beziehungen zwischen der Belastung, der Neigung des an das freie Ende grenzenden Stabelementes α und dem Krümmungsradius ϱ_0 an der Wurzel:



Figur 171.

$P/P_0 =$	1,015	1,064	1,152	1,293	1,518	1,884	2,541	4,029	9,116
$\alpha =$	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	176°
$\varrho_0/l =$	1,819	0,902	0,593	0,435	0,337	0,268	0,212	0,161	0,105

Für diese Fälle sind in Figur 172 die Formen des Stabes dargestellt, in Figur 173 in analoger Weise für einige andere der Figur 171 entsprechende Fälle.

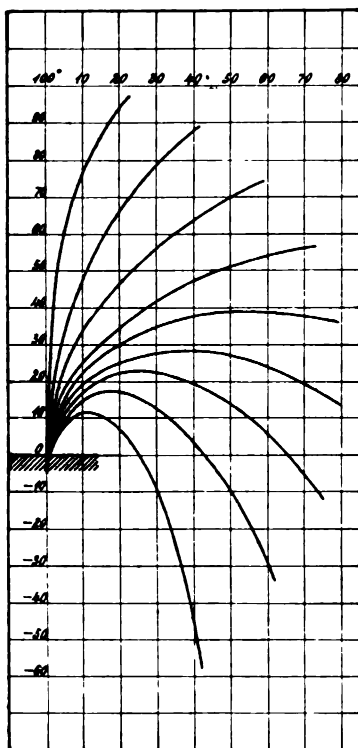
In der obigen Betrachtung ist freilich die Frage, inwieweit das betreffende Material die Biegung in die verschiedenen Formen aushält, nicht berührt. Die Techniker bezeichnen diejenige Belastung, die über die unter den gegebenen Umständen mögliche stabile Gleichgewichtsfigur hinausführt, als **Knickbelastung**, die Erscheinung selbst als **Knickung**; diese Frage gehört aber in den Artikel „Kohäsion". Beispielsweise sei angeführt, daß nach BACH für einen 850 mm langen, 3,5 mm dicken Stahldraht bei 0,4 kg Belastung die seitliche Ausweichung

[1] M. SAALSCHÜTZ, Der belastete Stab. Leipz. 1880. — C. BACH, Elastizität und Festigkeit. 4. Aufl. p. 249. — Vgl. ferner die technische Literatur (GRASHOF, ENGESSER, KÜBLER, KRIEMLER, PILGRIM u. A.).

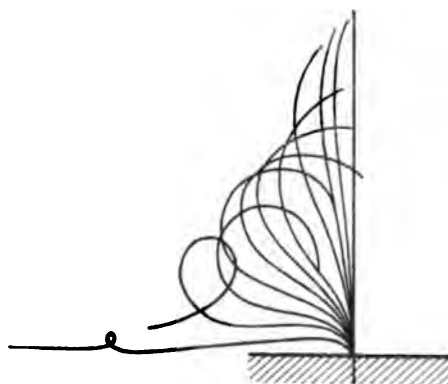
des freien Endes 25 mm beträgt, daß dagegen bei der Belastung von 1,1 kg die Stabilität schon überschritten ist.

Hierzu ist noch eine Untersuchung von LOVE[1] zu erwähnen. Bezeichnet man jedes Stück des Stabes zwischen zweien seiner Schnittpunkte mit der Vertikallinie seiner Beanspruchung als eine Bucht, so kann der Stab jede ungerade Anzahl von Buchten bilden, und diese Reihe geht desto höher hinauf je länger der Stab ist. Die Untersuchung der Kräfte in den verschiedenen Gleichgewichtsformen führt auf elliptische Integrale und zeigt, daß das Gleichgewicht um so weniger stabil ist, je größer die Zahl der Buchten ist.

In der Technik wird vielfach die „RONDELETsche Regel" benutzt; sie bestimmt, zunächst für Holzbalken, die größte Längsbelastung, bei der noch keine



Figur 172.



Figur 173.

seitliche Ausbiegung eintritt, als Funktion der Länge l und der kleinsten Querschnittsdimension c; nach dieser Regel hat BARRÉ die Formel

$$P = \frac{4,2}{0,93 + 0,00185\,(l/c)^2}$$

berechnet. Eine andere Formel hat RANKINE, eine dritte, nämlich:

$$P = -\,552\left(\frac{c}{l}\right)^2 + 191,5\,\frac{c}{l} - 1,134$$

MALTÉZOS angegeben. Letzterer zeigt auch, daß seine parabolische Formel mit veränderten Werten der Konstanten auch auf Metallträger anwendbar ist.[2]

Verwandt mit dem vorliegenden Problem und zugleich mit dem der Mitwirkung des Eigengewichts bei der Längsänderung ist ferner das Problem der Biegung eines vertikalen Balkens oder einer Säule durch ihr Eigengewicht, wenn das untere Ende fest, das obere frei ist. GREENHILL und FITZGERALD[3] haben das Problem nach etwas verschiedenen Methoden gelöst und zwar für beliebige Rotationskörper, deren Querschnitt also in der Tiefe z unter der Spitze ein Kreis

[1] A. E. H. LOVE, Proc. Lond. math. Soc. **24.** 156. 1893. — [2] C. MALTÉZOS, C. R. **120.** 826. 1895. — [3] A. G. GREENHILL, Cambr. phil. Soc. 1881. p. 65. — M. F. FITZGERALD, Phil. Mag. (5) **33.** 428. 1892.

vom Radius $r = a \cdot z^m$ und das Gewicht des darüber stehenden Teiles $W = b \cdot z^n$ ist. Gesucht wird die größtmögliche Höhe des Balkens, bei der selbst am unteren Ende noch keine Biegung durch das Eigengewicht eintritt. Ist c die kleinste Wurzel einer gewissen BESSELschen Funktion und k eine Konstante, die sich durch a, b, m, n, E bestimmt, so ergibt sich

$$H = \left(\frac{c}{k}\right)^{\frac{2}{n - 4m + 2}} .$$

Für eine zylindrische Säule wird $m = 0$ und $n = 1$; für eine konische wird $m = 1$ und $n = 3$; für ein Rotationsparaboloid wird $m = \frac{1}{2}$, $n = 2$. Für einen zylindrischen oder konischen Mast, der an der Basis den Durchmesser $2a$ hat, ist H proportional mit a zur Potenz $^2/_3$. Ein zylindrischer Fichtenmast von 6 Zoll Durchmesser darf z. B. 89,5 Zoll hoch sein. Für Stahl findet sich die maximale Höhe, wenn u das Verhältnis der Höhe zum Durchmesser ist:

$8{,}1 \cdot 10^6/u^2$ bei Stahlröhren

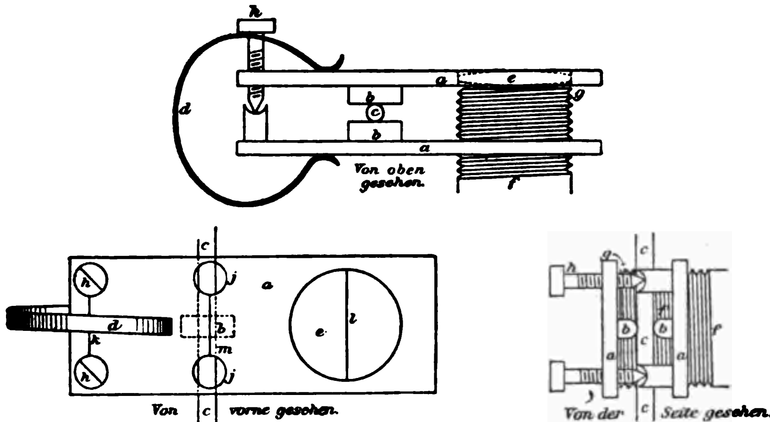
$4 \quad \cdot 10^6/u^2$ bei runden Stahlstäben.

Eine Stahlröhre, die 100 mal so lang wie dick ist, darf z. B. 800 englische Fuß hoch sein. — Die Formeln können, außer auf Bautechnik und verwandtes, auch auf die Stabilität von Bäumen angewandt werden.

6. Querkontraktion und Elastizitätszahl.

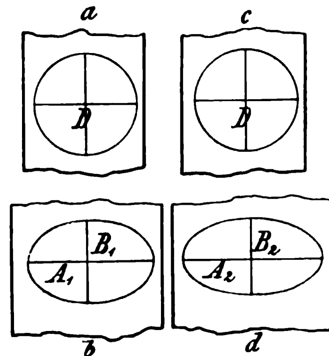
Querkontraktion. Methodik. Daß Zug und Druck nicht nur die Länge, sondern auch den Querschnitt der Körper, auf die sie wirken, ändern, läßt sich in manchen Fällen schon mit dem bloßen Auge wahrnehmen. Die exakte Messung der Queränderung ist hingegen bei den meisten Stoffen mit großen Schwierigkeiten verknüpft, und erst in neuester Zeit, namentlich von BAUSCHINGER zu einem befriedigenden Grade von Genauigkeit geführt worden. Derselbe bedient sich dabei im wesentlichen zweier sehr feiner Fühlhebel, die so kombiniert sind, daß man Längen- und Querschnittsänderung gleichzeitig, und zwar mit Spiegel und Fernrohr ablesen kann; es läßt sich auf diese Weise $^1/_{5000}$ mm noch mit Sicherheit messen. Eine andere Methode wandte CAGNARD-LATOUR an, indem er den Stab oder Draht mit einer engen Wasserröhre umgab, oben nicht fest, sondern an einem Wagebalken aufhing und, bei festem unterem Ende, durch Anbringung von Gewichten an dem anderen Wagebalken dehnte; durch die Dehnung änderte sich auch der Querschnitt und somit der Wasserspiegel, so daß, wenn letzterer beobachtet wurde, die Querschnittsänderung berechnet werden konnte. Man sieht leicht ein, daß diese Methode — auch abgesehen von sekundären Übelständen, z. B. dem Anhaften von Wasser an dem herausgezogenen Drahtstück — keine große Genauigkeit zuläßt. Ähnlich, aber doch etwas günstiger ist die Anordnung, deren sich WERTHEIM bediente. Er nahm nämlich an Stelle der Stäbe Röhren, füllte diese mit Wasser, maß die Längenänderung direkt an der Röhre, außerdem aber durch Beobachtung des Wasserniveaus die Änderung des Hohlraumes. Letztere setzt sich aus der Längen- und der Querschnittsänderung zusammen; und da erstere direkt gemessen war, läßt sich letztere ableiten. Die Methode der Röhren ist dann später auch mit Anwendung kubischer Beanspruchung vielfach, so von CANTONE, verwertet worden (s. w. u.). — Die CAGNARD-LATOURsche Methode ist neuerdings von CARDANI durch Anwendung elektromagnetischer Dehnung und einer U-Röhre exakt gestaltet worden. — Andererseits ist das direkte Verfahren der Messung der Querkontraktion neuerdings durch Vervollkommnung des Übertragungsmechanismus

weiter ausgebildet worden. So benutzt STROMEYER eine dunkle Glasplatte und ein rechtwinkliges Glasprisma in geeigneten Führungen, derart, daß sich ihr Abstand um eine der Querkontraktion gleiche Strecke ändert; bei dem älteren Apparat bewegten sich beide Körper, bei dem neueren bewegt sich die Platte gegen das feste Prisma. Beobachtet wird die Zahl der vorübergehenden Interferenzstreifen, die durch einen das Prisma durchsetzenden und von der Platte reflektierten Strahl erzeugt werden. Das Verfahren wird auf dicke Stäbe mit gutem Erfolg angewandt. Auch BENTON benutzt das Interferenzprinzip, macht es aber auch auf Drähte anwendbar (Figur 174). Zwei scharnierartig miteinander an der



Figur 174.

einen Seite verbundene Glasplatten werden an den zwischen ihnen herabhängenden Draht mittels einer Feder angepreßt, aber nicht direkt, sondern durch zwei innerseits angelötete abgerundete Stahlschneiden. Die eine Platte enthält eine Linse, die andere eine rückwärts geschwärzte Glasplatte, durch die Querkontraktion wird die Zahl der Interferenzringe vermehrt. — Auch MORROW benutzt zwei den Draht berührende Schraubenspitzen, im übrigen aber einen durch Scharnier verbundenen festen Teil sowie Ablesung durch zwei an den beiden Teilen angebrachte Spiegel; die Skalenablesung beträgt aber das 2800fache der Querkontraktion. — Endlich sind die Methoden zu nennen, die auf der Biegung oder Drillung von Versuchskörpern beruhen, und die vielleicht die bisher zuverlässigsten Resultate geliefert haben. Sie werden im nächsten Artikel erwähnt werden.[1]



Figur 175.

Für stark dehnbare Stoffe, wie Kautschuk und Leimgallert, kann man natürlich die Änderung der Querdimension, im Zusammenhang mit der der Längsdimension, auch direkt messen. Das Verfahren ist zuerst von RÖNTGEN[2] wissenschaftlich präzisiert worden. Auf einem 1500 mm langen Stabe mit quadratischem Querschnitte von 30 mm Dicke

[1] BAUSCHINGER, Zivil-Ingenieur **25.** 44. 82. 1879. — CAGNARD-LATOUR, Ann. chim. phys. **36.** 384. 1827; POGG. Ann. **12.** 516. — P. CARDANI, Phys. Ztschr. **4.** 449. 1903. — W. WERTHEIM, Ann. chim. phys. (3) **23.** 52. 1849; POGG. Ann. **78.** 381. — M. CANTONE, Rend. Acc. Linc. **4.** 220. 292. 1888. — C. E. STROMEYER u. W. KENNEDY, Proc. Roy. Soc. Lond. **55.** 373. 1894. — J. R. BENTON, DRUDEs Ann. **3.** 477. 1900; Phys. Review **12.** 36. 1901. — J. MORROW, Phil. Mag. (6) **6.** 417. 1903; Proc. phys. Soc. **18.** 582. 1903. —
[2] W. C. RÖNTGEN, POGG. Ann. **159.** 601. 1876.

wurde, als er durch das Gewicht P_1 gedehnt war, mit dem Rande einer Röhre ein Kreis vom Durchmesser D geprägt (Figur 175 *a*); nach Entfernung von P_1 verwandelte sich der Kreis in eine Ellipse $A_1 B_1$ (Figur 175 *b*). Bei einem um die kleine Größe p größeren Gewicht P_2 wurde entsprechend aus dem Kreise (Figur 175 *c*) die gestrecktere Ellipse $A_2 B_2$ (Figur 175 *d*). Es ergibt sich alsdann die Verhältniszahl μ aus der Gleichung

$$\mu = \frac{A_2 - A_1}{B_1 - B_2} \cdot \frac{B_1 + B_2}{A_1 + A_2} \quad (35)$$

Man kann natürlich schon aus einem Versuche μ berechnen, hat aber so den Vorteil, den Wert von μ, welcher kleinen Änderungen entspricht, zu erhalten.

Ergebnisse. Aus den zahlreichen Versuchen über die Querkontraktion ergibt sich zunächst folgendes: 1. Der Längsdehnung entspricht stets eine Querkontraktion, der Längskontraktion eine Querdilatation; mit anderen Worten: Zug erzeugt stets Querkontraktion, Druck stets Querdilatation. Die Elastizitätszahl μ, definiert als das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation, ist also stets positiv, weil Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind. — 2. Die relative Änderung des Querschnitts ist (abgesehen von gewissen anomalen Fällen) stets kleiner als die relative Längenänderung; mit anderen Worten: Zug erzeugt stets Volumenzunahme, Druck stets Volumenabnahme. Da sich die Konstante μ nicht auf den Querschnitt, sondern auf eine lineare Dimension desselben bezieht, so ergibt sich für kleine Änderungen — und erst recht für große —: die Elastizitätszahl ist stets kleiner als $^1/_2$. — Beide Gesetze stimmen mit der Theorie (p. 546) überein. — Ausnahmen vom zweiten Gesetz hat BAUSCHINGER[1] bei kolossalen Drucken für Eisen und Stahl konstatiert. Beim Druck trat ein Minimum des Volumens für Gußeisen bei 2900 Atm., für Schmiedeeisen bei 2200 Atm. ein: für Schmiedeeisen nahm alsdann das Volumen bis über den ursprünglichen Wert zu (bis zu 2300 Atm. um 0,001628), dann wieder ab, erreichte bei 2437 Atm. wieder den ursprünglichen Wert und nahm dann weiter ab. Beim Zug zeigte Gußeisen kein Maximum, wohl aber Schmiedeeisen und Bessemerstahl; bis über die Elastizitätsgrenze hinaus wuchs bei letzterem das Volumen (bis 8098 Atm. um 0,001114); dann erfolgte plötzlich ein Umschlag zur Volumenverminderug um 0,001818. — 3. Zwischen den Grenzen 0 und $^1/_2$ ist der Wert der Elastizitätszahl von Stoff zu Stoff verschieden; die Werte gruppieren sich zwar für zahlreiche Stoffe um den Wert $^1/_4$ als Mittelwert herum, z. B. für Gläser; für andere aber weichen sie auch im Mittel, und bei allen Stoffen im einzelnen mehr oder weniger erheblich von $^1/_4$ ab, sie gehen bis zu 0,18 herunter und bis zu 0,5 herauf. Dabei ist in neuester Zeit derartige Sorgfalt auf das Material verwandt worden, daß die Annahme, die Abweichungen könnten ganz oder großenteils auf den Mangel an Isotropie zu schieben sein, ausgeschlossen erscheint. Die POISSONsche u. s. w. Theorie (p. 539) findet also keine Bestätigung, nach der VOIGTschen (p. 540) kommt den meisten Elementen (Molekeln) isotroper Stoffe eine nicht unerhebliche Polarität zu.

Werte der Elastizitätszahl. Im folgenden sind die wichtigeren Bestimmungen von μ zusammengestellt, und zwar der Reihe nach 1. für einfache Metalle, 2. für Legierungen, 3. für Gläser, 4. für dichte Mineralien, 5. für andere Stoffe. Die Werte gelten für kleine Beanspruchung und Veränderung.

[1] BAUSCHINGER, Zivil-Ingenieur **25**. 44. 82. 1879.

1. Einfache Metalle.

Metall	μ	Beobachter	Mittel	Metall	μ	Beobachter	Mittel
Aluminium . .	0,359	Schaefer	0,36	Kupfer, elektr. .	0,250	Voigt	0,25
	0,363	Cardani		Nickel	0,325	Benton	0,33
Blei	0,375	Mallock		Palladium . .	0,228	Schaefer	0,22
	0,428	Amagat	0,42	Platin	0,215	„	0,21
	0,431	Schaefer		Silber	0,363	Schaefer	0,38
Eisen	0,310	Everett			0,396	Angenhstr.	
	0,304	Baumeister		Stahl, hart . .	0,294	Kirchhoff	
	0,243	Littmann			0,294	Okatow	
	0.272	Katzenels.			0,296	Schneebeli	
	0,253	Mallock	0,28		0,276	Benton	
	0,288	Benton			0,283	Stromeyer	
	0,263	Morrow		Stahl, weich . .	0,304	Okatow	0,29
	0,321	Cardani			0,269	Amagat	
Kupfer . . .	0,348	Mallock			0,253	Mallock	
	0,329	Amagat			0,333	Goetz	
	0,322	Stromeyer			0,290	Stromeyer	
	0,341	Benton	0,34		0,276	Morrow	
	0,327	Morrow		Zink	0,205	Mallock	0,27
	0,382	Angenhstr.			0,331	Schaefer	
	0,374	Cardani					

2. Legierungen.

Legierung	μ	Beobachter	Mittel	Legierung	μ	Beobachter	Mittel
Bronze . . .	0,414	Benton	0,36	Messing	0,331	Benton	0,37
	0,314	Stromeyer		Münzmetall . .	0,332	Stromeyer	0,34
Deltametall . .	0,333	Benton	0,33		0,341	Morrow	
Lipowitzmetall .	0,452	Schaefer	0,45	Neusilber . . .	0,371	Benton	0,37
Manganbronze .	0,346	Stromeyer	0,35	Nickelin . . .	0,403	„	0,40
Messing . . .	0,387	Kirchhoff		Nickelstahl, $5^1/_2$ %	0,330	Mercadier	0,33
	0,420	Baumeister		Roses Metall . .	0,471	Angenhstr.	0,47
	0,420	Katzenels.	0,37	Woodmetall . .	0,489	Schaefer	0,49
	0,315	Wertheim			0,482	Angenhstr.	
	0,331	Amagat					

3. Gläser.

a) nach älteren Messungen

Cornu . . 0,224 bis 0,258
Everett . . 0,229
Cantone . 0,246 bis 0,264
Voigt . . 0,208 bis 0,213

b) Jenaer Gläser

nach Straubel (wegen des Charakters der Gläser vgl. oben p. 559)

geordnet nach der Größe von μ

665	0,319	*S* 219	0,235
S 196	0,274	16 III	0,228
1299	0,271	709	0,226
370	0,261	2154	0,222
S 208	0,261	714	0,221
270	0,253	627	0,213
1973	0,352	278 III	0,208
658	0,250	1450	0,197
500	0,239		

4. Dichte Mineralien nach Drude und Voigt.

Flußspat	0,221
Lithographenstein . . .	0,251
Baryt, grau	0,273
Baryt, rötlich	0,288
Feuerstein	0,079*)
Opal	0,060*)
Obsidian I	0,171
Obsidian II	0,185

5. Verschiedene Stoffe.

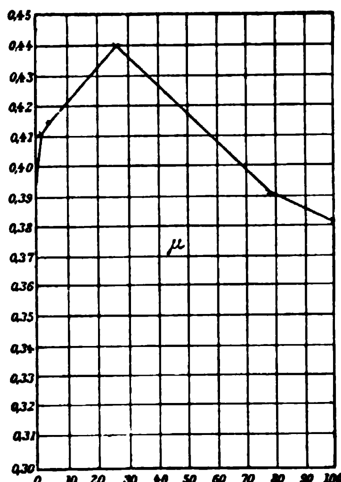
Borsäure . .	Straubel	0,28
Ebonit . . .	Mallock	0,39
Kautschuk .	Verschaffelt	0,47
Kork . . .	Mallock	0,00
Leimgallert .	Verschaffelt	0,50
Paraffin . .	Mallock	0,50
Selen . . .	Schaefer	0,45
Stuck . . .	Mallock	0,18

*) Korrigiert nach Wied. Ann. **44.** 169. 1891.

Ein Blick auf diese Zahlen ergibt unter anderem folgendes: Die Zahlen für die Metalle und Legierungen liegen fast sämtlich über 0,25, und zum Teil sehr beträchtlich; erhebliche Ausnahmen bilden nur die Zahlen für Palladium und Platin sowie die MALLOCKsche Zahl für Zink, die mit Rücksicht auf die neuere, weit größere SCHAEFERsche Zahl angezweifelt werden muß. Bildet man für die drei Gruppen der einfachen Metalle, der Legierungen uud der Gläser Durchschnittswerte, so erhält man:

für 10 einfache Metalle . . .	0,311
für 11 Legierungen	0,387
für 17 Jenaer Gläser	0,243

Während also die Gläser im Durchschnitt etwa der POISSONschen Hypothese entsprechen, erhebt sich die Durchschnittszahl schon für die einfachen, noch mehr aber für die zusammengesetzten Metalle über den durch sie geforderten Wert.



Figur 176.

Auf die Zahlen von DRUDE und VOIGT ist noch besonders hinzuweisen. Sie sind auf dem Umwege über Dehnungs- und Drillungsmodul und über die Konstanten A und B vom Verfasser berechnet, nach der Formel $\mu = B/(A+B)$. Sie weichen fast sämtlich merklich von $^1/_4$ ab, zwei von ihnen aber, die Zahlen für Opal und Feuerstein in ganz kolossalem Maße; es sind überhaupt die bei weitem kleinsten bisher festgestellten Werte der Elastizitätszahl. Welche Schlüsse sich hieraus auf die Frage der Quasi-Isotropie und des kryptokristallinischen Aufbaues der Körperelemente ziehen lassen, muß im Original nachgelesen werden.

Die Beziehung der μ-Werte zur chemischen Zusammensetzung der betreffenden Körper ist ebenfalls mehrfach untersucht worden; von ANGENHEISTER für einige Legierungen, von STRAUBEL für Gläser. ANGENHEISTER findet für Ag-Cu-Legierungen folgendes:

Cu : Ag	0	0,01	0,1	1	10	∞
μ	0,396	0,410	0,414	0,439	0,391	0,382

Diese interessante Reihe ist in Figur 176 graphisch dargestellt; wie man sieht, nimmt μ erst über den Wert für jedes der beiden reinen Metalle hinaus zu und dann wieder ab (die Abzisse ist der Cu-Gehalt in Volumenprozenten). — Für Gläser hat STRAUBEL die Ermittelung von Konstanten für die Grundbestandteile versucht, ist aber dabei auf große Schwierigkeiten gestoßen, weil die Berechnung sehr labil ist. Am besten haben sich noch die folgenden Konstanten bewährt:

SiO	BO	ZnO	PbO	AlO	BaO	NaO
0,1533	0,2840	0,3460	0,2760	0,1750	0,3560	0,4310
KO	CaO	PO	SbO	MgO	AsO	MnO
0,3969	0,4163	0,2147	0,2772	0,2500	0,2500	0,2500

Der mittlere Fehler ist etwa 2 %, der größte etwa 6 %. Die Zahlen beziehen sich übrigens auf Gewichtseinheiten; ob eine Darstellung nach Volumeneinheiten vielleicht günstiger wäre, bleibt dahingestellt.

Einfluß der Temperatur. Auch dieser ist mehrfach untersucht worden, und es hat sich allgemein, wenn überhaupt eine Änderung, eine Zunahme von μ

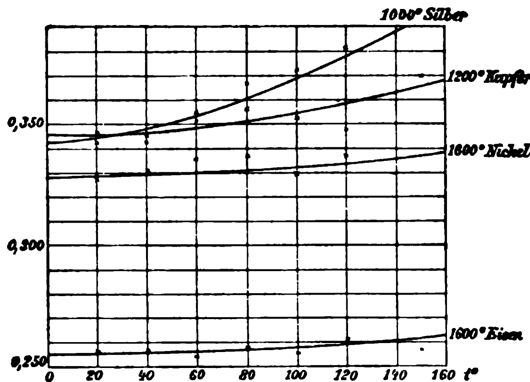
mit steigender Temperatur herausgestellt. So fand KATZENELSOHN eine prozentische Zunahme zwischen 0 und 100°:

für	Aluminium	Eisen	Gold	Messing	Neusilber	Platin	Silber
um	15,7	3,7	2,5	3,9	3,4	5,5	12,2

Ferner fand BOCK folgende Werte der Elastizitätszahl bei verschiedenen Metallen und Temperaturen:

Temperatur	Hartstahl	Kupfer	Silber	Nickel
20°	0,256	0,340	0,337	0,332
40	0,257	0,346	0,346	0,331
60	0,255	0,355	0,352	0,336
80	0,258	0,355	0,366	0,337
100	0,257	0,352	0,372	0,330
120	0,261	0,357	0,381	0,337
150	0,259	0,370	—	—

Man erkennt überall, außer beim Hartstahl, eine deutliche Zunahme; zur besseren Veranschaulichung dient die graphische Darstellung in Figur 177. —



Figur 177.

Ferner fand SCHAEFER für Selen bei 20° rund 0,45, bei 80° aber bereits 0,48. — Endlich fand ANGENHEISTER für ROSEsches Metall

bei — 186°: 0,277 bei — 36°: 0,399 bei + 20°: 0,471 ,

wie man sieht, eine gewaltige Zunahme.

Volumenänderung bei der Längsdehnung. Die Beziehung zwischen der Längenänderung, der Querkontraktion und der Volumenänderung ist bereits besprochen worden. Bei der Längsdehnung wird das Volumen vergrößert, bei der Längskontraktion verkleinert. Der relative Betrag der Volumenänderung aber wird offenbar wesentlich durch den Wert von μ bedingt sein (vgl. p. 549 ; und der interessanteste Grenzfall ist der, wo das Volumen geradezu ungeändert bleibt, μ also, für kleine Änderungen, gleich $\frac{1}{2}$ ist. Dieser Fall ist, wie wir wissen, annähernd für Kautschuk und Gelatine erfüllt; hierüber hat z. B. P. v. BJERKÉN folgende zusammengehörige Wertreihen ermittelt — die erste Spalte gibt die Belastung, die zweite die Länge, die dritte die Elastizitätszahl, die letzte das relative Volumen:

Kautschuk				Gelatine			
p	l	μ	v	p	l	μ	v
5	44,2	—	—	0	50,5	—	—
105	54,5	0,403	1,012	100	55,0	0,525	0,989
205	73,7	0,318	1,035	200	60,5	0,430	1,003
305	105,0	0,243	1,051	300	66,2	0,411	0,997
405	140,0	0,192	1,080	400	72,0	0,375	1,006
505	171,0	0,164	1,091	500	77,0	0,365	0,998
605	190,0	0,148	1,118	600	81,8	0,343	1,003
705	203,0	0,141	1,121	700	85,5	0,338	0,993
805	213,5	0,134	1,141	800	90,0	0,321	1,000
905	220,0	0,130	1,156	900	93,5	0,315	0,993
1005	227,0	0,125	1,193	1000	97,5	0,302	0,999
				1100	101,5	0,293	0,996

Wie man sieht, ist bei Kautschuk die Konstanz des Volumens nur in erster Annäherung erfüllt, in Wahrheit steigt es bis zu 20 $^0/_0$, entsprechend ist auch μ_0 merklich von 0,5 verschieden. Bei Gelatine dagegen ist μ_0 tatsächlich gleich $\frac{1}{2}$ (daß es sogar etwas größer ist, dürfte keine Bedeutung haben); und das Volumen bleibt hier völlig konstant (Mittelwert aller v gleich 0,998, d. h. innerhalb der Fehlergrenzen gleich eins). Damit und durch weitere Arbeiten von FRAAS, FRANCK und SCHILLER sind die entsprechenden, bereits von RÖNTGEN (für Kautschuk) und MAURER (für Gelatine) erhaltenen Resultate endgültig gesichert. Die neuesten Zahlen für μ_0, d. h. die Elastizitätszahl des Kautschuks für kleine Deformation sind:

FRANCK 0,46 } Mittel 0,47 (s. o.).
SCHILLER 0,48 }

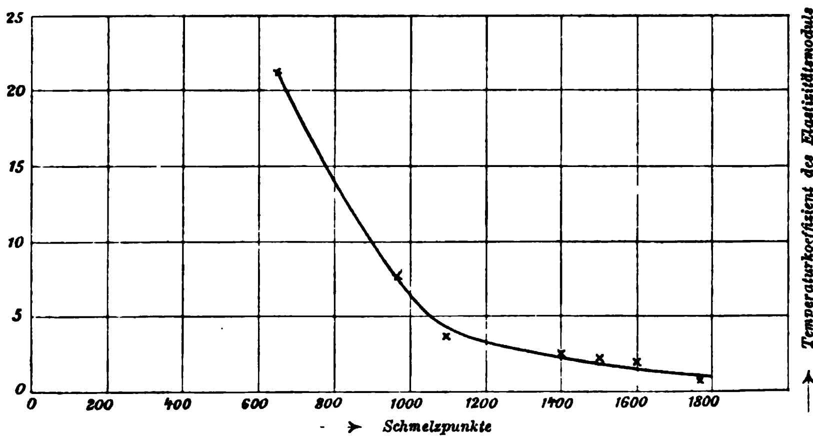
Die betrachteten Körper haben also das Bestreben, ihr Volumen beizubehalten; anders ausgedrückt: ihr Volumenmodul ist sehr groß gegen ihren Gestaltsmodul. Bei den übrigen Stoffen ist das Verhältnis der Gestalts- zur Volumenelastizität endlich und sein Wert $\varkappa$ läßt sich — vgl. oben p. 551 — aus dem Werte von μ ableiten. So ergeben sich beispielsweise für einige der von STRAUBEL untersuchten Jenaer Gläser folgende Werte des Verhältnisses $\varkappa$:

Nr.	665	S 196	270	S 219	714	1450
$\varkappa$	0,41	0,53	0,59	0,64	0,69	0,76

Thermische Beziehungen. Nach dem Vorstehenden nimmt mit wachsender Temperatur 1. der Modul im allgemeinen ab, 2. die Elastizitätszahl zu, d. h. die Queränderung stärker zu als die Längsänderung, und somit 3. die Volumenänderung ab. Es liegt nahe, diese Abhängigkeit in Beziehung zum thermischen Verhalten der betreffenden Stoffe zu setzen, und man wird dabei sofort an den thermischen Ausdehnungskoeffizienten denken. Dieser hängt nämlich, wie Beobachtungen ergeben haben, von der Spannung der betreffenden Körper ab; und aus thermodynamischen Erwägungen folgt, daß der Koeffizient dieser Änderung und der Temperaturkoeffizient des Elastizitätsmoduls entgegengesetztes Vorzeichen haben müssen. GRAETZ hat allerdings gezeigt, daß diese von DAHLANDER zuerst präzisierte Beziehung nur unter einer gewissen Voraussetzung gilt, daß vielmehr im allgemeinen noch ein Zusatzglied auftritt, das jene Beziehung trüben kann; es hat sich aber herausgestellt, daß das Zusatzglied tatsächlich kaum eine Rolle spielt. Hiernach muß nun, da bei normalen Körpern, z. B. bei Metallen, der thermische Ausdehnungskoeffizient, wie DAHLANDER nachgewiesen hat, mit wachsender Spannung zunimmt, für diese Stoffe der Dehnungsmodul mit wachsender Temperatur abnehmen; das wird durch die Beobachtung (s. oben)

bestätigt. Von besonderem Interesse aber ist auch hier wieder der Kautschuk; hier nimmt nämlich nach Versuchen von JOULE der thermische Ausdehnungskoeffizient mit wachsender Spannung nicht nur stetig ab, er geht dabei sogar, und zwar schon bei relativ geringer Belastung, von positiven Werten durch null zu negativen Werten über, die dann bei zunehmendem Zuge immer größer werden. Es muß also, wenn die gedachte Beziehung richtig sein soll, der Dehnungsmodul mit wachsender Temperatur zunehmen. Das thermische Verhalten wäre dann so aufzufassen, daß sich der Kautschuk mit wachsender Temperatur in Wahrheit wie alle Körper ausdehnt, daß aber das gleichzeitige Wachsen des Elastizitätsmoduls eine Zusammenziehung vortäuscht. Nun stehen den Ergebnissen, zu denen SCHMULEWITSCH, LUNDAL, SCHEDD u. A. gelangten, und die in einer Zunahme von E mit t gipfeln, lediglich die entgegengesetzten Resultate von RUSSNER gegenüber; die Frage dürfte also im Sinne der Theorie erledigt sein. Immerhin ist es möglich, daß die gedachte Beziehung durch Hinzufügung anderer Einflüsse korrigiert werden müßte. — Übrigens besteht die in Rede stehende Beziehung bis zu einem gewissen Grade nicht bloß für das Vorzeichen, sondern auch für die Größe des thermischen Ausdehnungskoeffizienten: je größer dieser, desto größer ist nämlich vielfach auch der Temperaturkoeffizient des Moduls; ein Blick auf die obigen Tabellen lehrt, daß und inwieweit diese Regel erfüllt wird. Das Nähere gehört aber in die Thermodynamik. — Neuerdings hat WASSMUTH auch bei Hartgummi, freilich nur bei einigen der untersuchten Stäbe, eine Zunahme von E mit steigendem t gefunden.

Eine andere Beziehung ist die zum Härtezustand, zur Erweichungs- und zur Schmelztemperatur der Körper. Daß eine eindeutige, wenn auch



Figur 178.

nur auf die Reihenfolge bezügliche Beziehung zwischen Härte und Modul z. B. für die Metalle nicht besteht, lehrt ein Blick auf die Tabellen, obwohl gewisse Andeutungen in dieser Richtung vorhanden sind. Auch ein von AUERBACH für Jenaer Gläser unternommener Versuch, die Reziprozität zwischen Elastizitätszahl und Härte zu statuieren, hat sich nicht allgemein bewährt; es handelt sich hier offenbar nur um einen von mehreren Faktoren. Was den Schmelzpunkt betrifft, so zeigt die beistehende, nach den SCHAEFRRschen Messungen entworfene Kurve (Abszissen : Schmelztemperaturen, Ordinaten : Temperaturkoeffizienten des Moduls), daß eine inverse Beziehung zweifellos besteht: je niedriger der Schmelzpunkt, desto größer der Temperaturkoeffizient. Am meisten Interesse beansprucht aber das Verhalten der Elastizitätszahl. Im folgenden habe ich zunächst einige Metalle mit ihren Schmelzpunkten Θ und ihren Elastizitätszahlen nach aufsteigen-

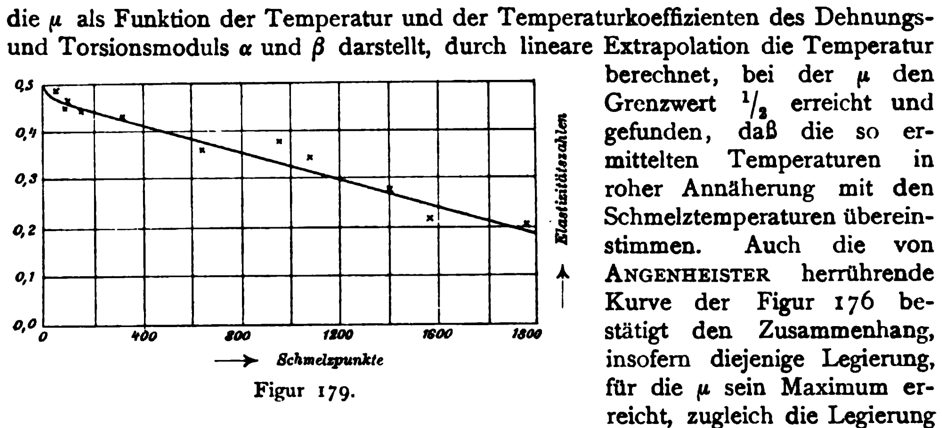
der Reihe der ersteren geordnet; und man sieht, daß die μ, von dem ohnehin verdächtigen Werte für Zink abgesehen, eine im allgemeinen stetig absteigende Reihe bilden:

Metall	Θ	μ	Metall	Θ	μ
WOODsches Metall .	65	0,49	Aluminium . . .	645	0,36
Lipowitzmetall . .	75	0,45	Silber	970	0,38
ROSEsches Metall .	95	0,47	Kupfer	1090	0,34
Selen	125	0,45	Eisen	1400	0,28
Blei	327	0,42	Palladium	1575	0,22
Zink	412	(0,27)	Platin	1765	0,21

Zur Veranschaulichung diene die graphische Darstellung in Figur 179. — Ferner hat SCHAEFER aus der Formel

$$1 + \mu(t) = (1 + \mu(20)) \frac{1 - \alpha(t - 20)}{1 - \beta(t - 20)} , \tag{36}$$

die μ als Funktion der Temperatur und der Temperaturkoeffizienten des Dehnungs- und Torsionsmoduls α und β darstellt, durch lineare Extrapolation die Temperatur berechnet, bei der μ den Grenzwert $^1/_3$ erreicht und gefunden, daß die so ermittelten Temperaturen in roher Annäherung mit den Schmelztemperaturen übereinstimmen. Auch die von ANGENHEISTER herrührende Kurve der Figur 176 bestätigt den Zusammenhang, insofern diejenige Legierung, für die μ sein Maximum erreicht, zugleich die Legierung mit dem niedrigsten Schmelpunkt ist. Indessen haben die Versuche von ANGENHEISTER doch gezeigt, daß die lineare Extrapolation nicht allgemein zu den Schmelzpunkten führt, und zwar, wie die folgende kleine Tabelle zeigt, auch nicht annähernd:



Figur 179.

	Ag	Leg. I	Leg. II	Leg. III	Leg. IV	Cu
Temperatur, bei der $\mu = \frac{1}{3}$ wird . .	565	551	558	434	860	1190
Schmelztemperatur	970	—	931	850	—	1100

es ist also entweder die gedachte Beziehung auch nicht annähernd allgemein erfüllt, oder, was wahrscheinlicher ist, die lineare Extrapolation ist auch nicht annähernd erlaubt.

Übrigens beweist der Fall des Kautschuks, für den der Grenzwert bei gewöhnlicher Temperatur nahezu erreicht ist, daß es außer dem der Schmelzung sich nähernden bezw. erweichenden Typus des festen Körpers noch einen zweiten Typus, dessen Vertreter eben der Kautschuk ist, gibt, bei dem von „Erweichung" im Sinne der Annäherung an den Schmelzpunkt nicht die Rede sein kann, und der doch auch durch den Grenzwert der Elastizitätszahl ausgezeichnet ist; es sind das eben Stoffe, die zwar fest, aber an sich weich und im Zusammenhang hiermit ebenfalls nahezu inkompressibel sind. Man kommt hier fast in die Versuchung, von einem besonderen, natürlich zunächst nur in diesem beschränkten Sinne geltenden Aggregatzustandstypus zu sprechen.

Endlich sei noch auf zwei, die Beziehung zwischen Elastizität und Wärme betreffende Probleme hingewiesen. Das erstere ist das Problem der elastischen Wirkungen der Temperatur und des durch sie erzeugten thermischen Druckes, wovon schon auf p. 609 die Rede war. Es muß in dieser Hinsicht auf die Entwickelungen in FR. NEUMANNS Vorlesungen über Elastizität, p. 107 und auf die dort gegebenen Beispiele verwiesen werden. Das andere ist die Erscheinung der Abkühlung eines Körpers bei der Dehnung (entsprechend Erwärmung bei der Zusammenziehung); aus ihr läßt sich der Temperaturkoeffizient des Dehnungsmoduls berechnen, und es findet z. B. WASSMUTH für Eisen auf diese Weise 0,000241, also einen mit den direkten gut übereinstimmenden Wert. Kautschuk verhält sich auch in dieser Hinsicht anomal; jedoch gehört das Nähere in die Thermodynamik.[1]

7. Kubische Beanspruchung.

Die bisher betrachteten Fälle waren insofern außerordentlich einfach, als der beanspruchte Körper eine Hauptdimension besaß, während die beiden anderen Dimensionen nur eine sekundäre Rolle spielten. Das wird bei zwei- oder dreidimensionalen Körpern natürlich ganz anders; hier spielt jede der drei Dimensionen eine Rolle für sich, und durch ihr Zusammenwirken entstehen sehr verwickelte Vorgänge. Insbesondere wird hier, auch wenn die Beanspruchung wiederum vom Charakter von Zügen oder Drucken ist, doch im allgemeinen nicht bloß Dilatation und Kontraktion, sondern zugleich auch Biegung und Drillung auftreten, womit die Erscheinung aus dem hier gegebenen Rahmen heraustritt. Es gibt aber eine Reihe von Fällen, in denen Drillung nicht auftritt und Biegung entweder ebenfalls nicht auftritt oder doch in einer Form, die sich aus der Betrachtung der Dilatationen der einzelnen Teile von selbst ergibt.

Zweidimensionale Fälle. Um zunächst den Schritt von einer zu zwei Dimensionen zu machen, sei das Problem der elastischen Platten, ihres Gleichgewichts unter der Wirkung reiner Zug- und Druckkräfte erwähnt; diese Kräfte müssen, wenn keine Biegung aus der Plattenebene heraus erfolgen soll, in die Richtung dieser Ebene fallen. Probleme dieser Art sind u. A. von CLEBSCH,

---

[1] Literatur zur Elastizitätszahl und zu den thermischen Beziehungen: E. H. AMAGAT, C. R. **108.** 1199. 1889; Journ. de Phys. **8.** 197. 358. 1889; Ann. chim. phys. (6) **22.** 95. 1891. — G. ANGENHEISTER, DRUDES Ann. **11.** 188. 1903. — F. AUERBACH, WIED. Ann. **53.** 1000. 1894; DRUDES Ann. **3.** 116. 1900. — BAUMEISTER, WIED. Ann. **18.** 578. 1883. — P. v. BJERKÉN, ibid. **43.** 817. 1891. — A. BOCK, ibid. **52.** 609. 1894. — J. R. BENTON, DRUDES Ann. **3.** 471. 1900; Phys. Rev. **12.** 36. 1901. — H. BOUASSE, Journ. de Phys. (4 **2.** 490. 1903. — M. CANTONE, Rend. Acc. Linc. **4.** 220. 292. 1888; Rend. Acc. Lomb. (2) **31.** 1898; Nouv. Cim. (5) **6.** 91. 1903. — P. CARDANI, Phys. Ztschr. **4.** 449. 1903. — M. CORNU, C. R. **69.** 333. 1869. — J. DAHLANDER, Öfv. Wet. Akkad. Vörh. 1871. p. 703; POGG. Ann. **145.** 147. 1872. — P. DRUDE u. W. VOIGT, WIED. Ann. **42.** 537. 1891. — EVERETT, Trans. Roy. Soc. 1867. p. 129; Proc. Roy. Soc. **15.** 356. 1867; **16.** 248. 1868. — E. FRAAS, WIED. Ann. **53.** 1074. 1894. — O. FRANCK, Ann. d. Phys. **21.** 602. 1906. — GOETZ u. KURZ, Rep. d. Phys. **22.** 511. 1886. — L. GRAETZ, WIED. Ann. **28.** 354. 1886. — J. P. JOULE, Trans. Roy. Soc. **149.** 107. 1860. — G. KIRCHHOFF, POGG. Ann. **108.** 369. 1859; Ges. Abhandl. p. 316. — N. KATZENELSOHN, Inaug.-Diss. Berlin. 1887. — A. E. LUNDAL, WIED. Ann. **66.** 741. 1898. — A. MALLOCK, Proc. Roy. Soc. **29.** 157. 1879; **46.** 283. 1889; **49.** 380. 1891. — R. MAURER, Inaug.-Diss. Heid. 1886; WIED. Ann. **28.** 628. 1886. — J. MORROW, Phil. Mag. (6) **6.** 417. 1903; Proc. phys. soc. **18.** 582. 1903. — OKATOW, POGG. Ann. **119.** 11. 1863. — W. C. RÖNTGEN, ibid. **159.** 601. 1876. — J. RUSSNER, WIED. Ann. **43.** 533. 1891. — CL. SCHAEFER, DRUDES Ann. **9.** 1124. 1902. — L. SCHILLER, Ann. d. Phys. **22.** 204. 1907. — H. SCHNEEBELI, POGG. Ann. **140.** 589. 1870. — SCHMULEWITSCH, ibid. **144.** 280. 1871. — R. STRAUBEL, WIED. Ann. **68.** 369. 1899. — T. E. STROMEYER, Proc. Roy. Soc. **55.** 373. 1894. — W. VOIGT, WIED. Ann. **48.** 674. 1893; **49.** 719. 1893; DRUDES Ann. **4.** 187. 1901. — A. WASSMUTH, BOLTZM.-Festschr. 555. 1904.

HERTZ, MICHELL, WILSON und LOVE durchgearbeitet worden. Hier muß eine ganz kurze Andeutung genügen. Für eine dünne Platte läßt sich der Vorgang zerlegen in eine gleichförmige Ausdehnung und eine Deformation ohne mittlere Ausdehnung; für die Art und Verteilung dieser Deformation ist natürlich die Verteilung der gegebenen Randkräfte maßgebend. Übrigens ist hier wie überall bei verwickelteren elastischen Problemen (vgl. p. 531) die Aufgabe, die Drucke zu bestimmen, die gegebene Randverschiebungen erzeugen, leichter als die, die Verschiebungen infolge gegebener Drucke zu ermitteln; ersterer Fall wird z. B. von CLEBSCH exakt gelöst, dieser nur angenähert. Am einfachsten gestaltet sich begreiflicherweise die Anwendung auf eine kreisförmige Platte. Hier führt man Polarkoordinaten ein, es treten die bekannten BESSELschen Sinus- und Kosinusfunktionen auf, und die Verschiebungen lassen sich als Reihen darstellen, die nach Potenzen des Radiusvektors (den Radius gleich eins gesetzt) fortschreiten, und deren Koeffizienten bestimmte Kombinationen jener BESSELschen Funktionen sind; entsprechende Reihen ergeben sich für die diese Verschiebungen erzeugenden Druckkräfte, wozu dann noch der die gleichförmige Ausdehnung erzeugende überall normal wirkende Zug P kommt; in Formeln, wenn

$$N = u \cos p + v \sin p \tag{37}$$

die gegebene Verschiebung eines Randpunktes mit der Normalenrichtung p ist und zur Abkürzung

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\,d\varphi \quad , \qquad C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} N \cos n\varphi\, d\varphi \quad , \qquad S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} N \sin n\varphi\, d\varphi \tag{38}$$

gesetzt wird:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \quad C\cos\varphi \quad + \left[C_1 + (C_2\cos\varphi + S_2\sin\varphi)\frac{r}{a} + (C_3\cos 2\varphi + S_3\sin 2\varphi)\frac{r^2}{a^2} + \dots\right] \\ v &= C\sin\varphi\left(\frac{r}{a}\right) + \left[S_1 + (S_2\cos\varphi - C_2\sin\varphi)\frac{r}{a} + (S_3\cos 2\varphi - C_3\sin 2\varphi)\frac{r^2}{a^2} + \dots\right] \end{aligned}\right. \tag{39}$$

$$\left\{\begin{aligned} P &= \frac{EC}{a(1-\mu)} \\ X &= \frac{E}{a(1+\mu)}\left[(C_2\cos\varphi + S_2\sin\varphi) + 2\,(C_3\cos 2\varphi + S_3\sin 2\varphi)\frac{r}{a} + \dots\right] \\ Y &= \frac{E}{a(1+\mu)}\left[(S_2\cos\varphi - C_2\sin\varphi) + 2\,(S_3\cos 2\varphi - C_3\sin 2\varphi)\frac{r}{a} + \dots\right]. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Dies muß als Beispiel genügen; im übrigen ist auf die zitierten Arbeiten zu verweisen; bei der zuletzt genannten Abhandlung von BOGGIO handelt es sich übrigens um das Problem der elastischen Membran, an deren Umfang Kräfte angreifen, die in ihrer Ebene liegen; die Lösung gelingt für den Kreis und solche Formen, die sich auf einen Kreis konform abbilden lassen.[1]

Schließlich ist auf ein zweidimensionales Problem wenigstens kurz hinzuweisen, das oben für eine Dimension behandelt wurde, nämlich die Biegung durch Druck. Wirken nämlich auf ein Platte Randdrucke, so wird sie, statt sich stark zusammen-

[1] A. CLEBSCH, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862, insbesondere p. 148 bis 181 (§ 39 bis 44). — H. HERTZ, Ztschr. f. Math. u. Phys. **28.** 1883; Ges. Werke **1.** 283. — J. MITCHELL, Proc. math. soc. **32.** 35. 1900; **34.** 134. 1902. — A. E. H. LOVE, Treat. on the math. Th. of Elasticity. 2. ed. Cambr. 1906. p. 201 bis 216. — T. BOGGIO, Atti Torino **35.** 145. 1900; Nuov. Cim. (4) **12.** 170. 1900. — CH. CARUS-WILSON, Phil. Mag. (5) **29.** 503. 1890.

zuziehen, lieber nach einer Seite ausweichen, also eine Biegung erfahren, sie wird sich, wie man sagt, ausbeulen oder ausbauchen. Dem exakten Studium des Phänomens stehen natürlich hier größere Schwierigkeiten im Wege als bei Stäben, auch ist das reale Interesse hier nicht so beträchtlich; es sei aber als Beispiel der Behandlung eine Arbeit von BRYAN zitiert, die sich auf eine rechteckige Platte bezieht und zeigt, daß sich auf der Platte ein System rechteckiger Runzeln ausbildet, deren Größe und Gestalt von Druck und Plattengestalt abhängt; mit befeuchtetem Papier, das über zwei Lineale gespannt wird, kann man die Erscheinung gut beobachten.[1]

Zylinder und Kugel. Von dreidimensionalen Körpern sind natürlich am wichtigsten Zylinder und Kugel, allgemeiner noch Hohlzylinder und Hohlkugel; aus diesen gehen jene hervor, wenn der innere Radius gleich null gesetzt wird. Beginnen wir mit dem Hohlzylinder.

Der innere Radius sei r, der äußere R, der Zug von innen p, der von außen P; endlich wirke auf die beiden ringförmigen Endflächen der Zug Π. Setzt man alsdann, unter z die Achsenrichtung verstanden,

$$(41) \qquad \sqrt{x^2+y^2}=s \quad , \quad u=\varrho x \quad , \quad v=\varrho y \quad , \quad w=w \quad ,$$

so nehmen die Elastizitätsgleichungen (p. 524) die Form

$$(42) \qquad \frac{d^2 w}{dz^2}=0 \quad , \quad \frac{d^2\varrho}{ds^2}+\frac{3}{s}\frac{d\varrho}{ds}=0$$

an, und folglich sind die Lösungen

$$(43) \qquad w=\gamma z \quad , \quad \varrho=\alpha+\frac{\beta}{s^2} \quad ,$$

wobei sich für die Konstanten $\alpha\beta\gamma$ aus den Grenzbedingungen (p. 547), unter Benutzung der LAMÉschen Form des Elastizitätskonstanten ν und λ (p. 523 u. 539) die Werte

$$(44) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2\nu}\frac{2\nu+\lambda}{2\nu+3\lambda}\left(\frac{PR^2-pr^2}{R^2-r^2}-\frac{\lambda}{2\nu+\lambda}\Pi\right) \quad , \\ \beta &= \frac{1}{2\nu}(P-p)\frac{R^2 r^2}{R^2-r^2} \quad , \\ \gamma &= \frac{1}{\nu}\frac{\nu+\lambda}{2\nu+3\lambda}\left(\Pi-\frac{\lambda}{\nu+\lambda}\frac{PR^2-pr^2}{R^2-r^2}\right) \end{aligned}\right.$$

ergeben. Damit sind uvw bestimmt, und ferner wird die räumliche Dilatation

$$(45) \qquad D=\frac{du}{dx}+2\varrho+s\frac{d\varrho}{ds}=2\alpha+\gamma=\frac{1}{2\nu+3\lambda}\left(\Pi+2\frac{PR^2-pr^2}{R^2-r^2}\right) \quad .$$

Bei der Anwendung dieser Formeln können teilweise Spezialisierungen vorgenommen werden. Handelt es sich z. B. um Dehnungsversuche an Röhren (p. 578), so wird $P=0$ und $p=0$, folglich die relative Längsdehnung γ und die räumliche Dilatation D, die hier gleichzeitig auch die des inneren Hohlraumes ist:

$$(46) \qquad \gamma=\frac{\nu+\lambda}{\nu}\frac{\Pi}{2\nu+3\lambda} \quad , \quad D=\frac{\Pi}{2\nu+3\lambda} \quad ,$$

woraus nach Beobachtung von γ, D und Π sich ν und λ berechnen lassen. Ein zweiter Spezialfall ist der, wo $P=0$ und Π dadurch bestimmt ist, daß der Zylinder beiderseits durch unelastische Endplatten geschlossen ist, die dadurch,

[1] G. H. BRYAN, Rep. Brit. Assoc. 1890. p. 742.

daß der innere Druck p (in den obigen Formeln $-p$) auf sie mitwirkt, auf die Mantelfläche einen Zug Π nach der Gleichung $\pi(R^2 - r^2)\Pi = \pi r^2 p$ ausüben. Man hat also hier den Fall eines geschlossenen Hohlzylinders unter innerem Druck und findet

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha = \gamma = \frac{1}{2\nu + 3\lambda}\,\frac{r^2}{R^2 - r^2}p \quad , \qquad \beta = \frac{1}{2\nu}\,\frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2}p \quad , \\ &D = 2\left(\alpha + \frac{\beta}{s^2}\right) + \gamma = \left(\frac{3}{2\nu + 3\lambda} + \frac{1}{\nu}\,\frac{R^2}{r^2}\right)\frac{r^2}{R^2 - r^2}p \quad . \end{aligned}\right.$$

Man kann nun auch leicht die drei Hauptdehnungen in axialer, radialer und tangentialer Richtung direkt hinschreiben und erhält, wenn man noch statt ν und λ die anschaulicheren Konstanten E und μ einführt:

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma = \frac{1 - 2\mu}{E}\,\frac{r^2}{R^2 - r^2}p \quad , \\ &\gamma_r = \frac{1 - 2\mu}{E}\,\frac{r^2}{R^2 - r^2}p - \frac{1 + \mu}{E}\,\frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2}\cdot\frac{p}{s^2} \quad , \\ &\gamma_t = \frac{1 - 2\mu}{E}\,\frac{r^2}{R^2 - r^2}p + \frac{1 + \mu}{E}\,\frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2}\cdot\frac{p}{s^2} \quad , \\ &D = \left(\frac{3(1 - 2\mu)}{E} + \frac{2(1 + \mu)}{E}\,\frac{R^2}{r^2}\right)\frac{r^2}{R^2 - r^2}p \quad ; \end{aligned}\right.$$

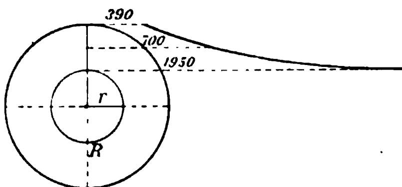
man sieht — was man schwerlich von vornherein vermutet hätte —, daß γ_t am größten ist; und ferner, daß zwar γ konstant ist, γ_r und γ_t aber (wegen des Faktors R^2/s^2 im zweiten Gliede) von außen nach innen zunehmen und dort ihre Maxima (γ_r ein negatives) erreichen. Dasselbe gilt also auch von der Beanspruchung des Materials, deren Komponenten einfach γE, $\gamma_r E$, $\gamma_t E$ sind. Zur Veranschaulichung diene folgendes Beispiel, das dem Buche von BACH entnommen ist: $r = 4$, $R = 20$ cm, $p = 1200$ kg/cm, $\mu = 0{,}3$; dann wird an der Innenfläche:

$$\gamma\cdot E = 91 \quad , \qquad \gamma_r\cdot E = 1766 \quad , \qquad \gamma_t\cdot E = 1950\ \text{kg} \quad ,$$

in der Mitte . . . . $\gamma_t\cdot E = 700$ kg ,

außen . . . . $\gamma_t\cdot E = 390$ kg ,

dieser Abfall von $\gamma_t\cdot E$ ist in Figur 180 graphisch dargestellt. Die Anstrengung ist hiernach außen nur ein Fünftel innen; für praktische Zwecke wird also das nach außen gelegene Material nur sehr schlecht ausgenützt, und es hat wenig Zweck, die Wandstärke über ein gewisses Maß zu steigern. — Ähnliche Entwickelungen lassen sich anstellen, wenn umgekehrt nur äußerer Druck P wirkt, p also null ist.



Figur 180.

Für eine Hohlkugel ergeben sich die Formeln ganz ähnlich, nur fallen hier die Glieder mit Π weg, dafür treten die r, statt in der zweiten, in der dritten Potenz auf. Man hat hier

$$(49)\qquad s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \qquad u = \varrho x \quad , \qquad v = \varrho y \quad , \qquad w = \varrho z \quad ,$$

die einzige Differentialgleichung lautet

(50) $$\frac{d^2\varrho}{ds^2} + \frac{4}{s}\frac{d\varrho}{ds} = 0 \quad ,$$

und die Lösung ist

(51) $$\varrho = A + \frac{B}{s^3} \quad ,$$

wo

(52) $$A = \frac{1}{2\nu + 3\lambda}\frac{PR^3 - pr^3}{R^3 - r^3} \quad , \qquad B = \frac{P - p}{4\nu}\frac{R^3 r^3}{R^3 - r^3} \quad ;$$

endlich wird

(53) $$D = \frac{3}{2\nu + 3\lambda}\frac{PR^3 - pr^3}{R^3 - r^3} \quad .$$

Die kubische Kompressibilität C, d. h. das Verhältnis der Volumenänderung zu dem allseitigen Drucke, der sie erzeugt, sowie der mit C reziproke Volumenmodul k_1 (s. oben p. 549) ergibt sich hiernach folgendermaßen

für den Zylinder:

(54) $$C = \frac{3}{2\nu + 3\lambda} = \frac{3D}{\Pi + 2\frac{PR^2 - pr^2}{R^2 - r^2}} \quad , \qquad k_1 = \frac{1}{C} = \frac{\Pi + 2\frac{PR^2 - pr^2}{R^2 - r^2}}{3D} \quad ,$$

für die Kugel

(55) $$C = \frac{3}{2\nu + 3\lambda} = D\frac{R^3 - r^3}{PR^3 - pr^3} \quad , \qquad k_1 = \frac{1}{C} = \frac{1}{D}\frac{PR^3 - pr^3}{R^3 - r^3} \quad .$$

Neuere Untersuchungen. In neuerer Zeit sind über Zylinder und Kugel mehrere Arbeiten erschienen, von denen einige mehr mathematisches Interesse haben, einige aber wenigstens kurz zu erwähnen sind. So hat AMAGAT die folgenden, aus der Theorie sich ergebenden Sätze experimentell geprüft und bestätigt gefunden, Sätze, die sich auf zwei Hohlzylinder von demselben Material, gleicher Länge und gleichem Inneren, aber verschiedenem äußeren Radius R bezw. R' beziehen: 1. Die Änderung des inneren Volumens durch gleichzeitigen Innen- und Außendruck ist für beide Zylinder die gleiche. 2. Wirkt nur Außendruck, so verhalten sich die Änderungen der Hohlräume wie $R^2[R'^2 - r^2] : R'^2[R^2 - r^2]$. 3. Dasselbe Verhältnis haben die Änderungen der äußeren Volumina bei reinem Innendrucke. 4. Bei jedem der beiden Zylinder für sich ist die Änderung des inneren Volumens durch Außendruck ebensogroß wie die Änderung des äußeren Volumens durch Innendruck. — Auch FRANKLIN hat die Theorie der Hohlzylinder unter Zug und Druck weitergeführt und ist zu Formeln gelangt, welche die älteren als spezielle Fälle enthalten. — SACERDOTE wendet die obigen allgemeinen Formeln auf Hohlzylinder und Hohlkugeln an, deren Wandstärke sehr klein gegenüber den Radien ist; die Rechnung vereinfacht sich in diesem Falle dadurch, daß die Deformation additiv zusammengesetzt werden kann aus den beiden, welche eintreten, wenn das eine Mal der äußere Druck auf beide Flächen, das andere Mal die Differenz der Drucke auf die Innenfläche wirkt (beim Zylinder kommt noch die Deformation infolge des Druckes auf die Grundflächen hinzu). — Hat man es mit dickwandigen Gefäßen zu tun, so kann man doch auf gewisse konzentrische Schichten die obige Betrachtung anwenden und dann über die verschiedenen integrieren. — Ganz allgemein hat CERRUTI das Problem der Hohlkugel angegriffen, und zwar unter Anwendung seiner allgemeinen Lösungsmethode (siehe Artikel „Elastizität im allgemeinen“,

p. 534); und zwar sowohl das inverse wie das direkte Problem (gegebene Verschiebungen oder gegebene Kräfte); das erstere, bekanntlich leichtere Problem wird zuerst ohne, sodann auch mit Massenkräften gelöst; das andere zuerst unter der Annahme, daß die auf jede der beiden Oberflächen wirkenden Kräfte sich selbst das Gleichgewicht halten, eine Annahme, die dann fallen gelassen wird und durch Superposition gewisser Glieder zur allgemeinen Lösung führt. — Von C. v. SZILY rühren Zugversuche an Röhren her, die gleichzeitig innerlich auf Flüssigkeitsdruck beansprucht wurden, der bis zu 200 Atmosphären gesteigert wurde. Es ergab sich die strenge Gültigkeit des Superpositionsprinzips, der innere Druck verminderte die Querkontraktion in erheblichem Maße, besonders an der inneren Oberfläche.

Endlich sei ein von THOMAE behandeltes und gelöstes Problem angeführt: die Deformation eines homogenen Kreiszylinders unter der Wirkung seiner eigenen Schwere (wegen des Falles eines sehr dünnen Zylinders vergleiche man oben p. 574; hier handelt es sich aber um den Kreiszylinder von endlicher Dicke). Zur Vereinfachung wird dabei angenommen, daß nicht nur die untere, auf einer festen Ebene ruhende Endfläche, sondern auch die obere Endfläche eben bleibe, eine Annahme, die bei mäßiger Dicke (relativ zur Höhe) von selbst annähernd erfüllt ist, für noch dickere Zylinder aber zwangsweise erfüllt werden müßte (später wird dann diese Bedingung fallen gelassen). Nennt man die axiale Verschiebung w (Achse z), die radiale rs, wo r der Radiusvektor ist (Radius R), also s das „radiale Verschiebungsmaß", so handelt es sich um die Angabe von s und w als Funktionen von r und z; diese Angabe erfolgt durch die Formeln (ϱ Dichte, λ, ν Elastizitätskonstanten, l Länge, C' eine Konstante, s. u.):

$$(56)\qquad \begin{cases} s = \lambda C' + \dfrac{\lambda \varrho g l}{\nu(\lambda+\nu)\pi^2} \sum \cos \dfrac{(2n+1)\pi z}{l} \cdot S_n \quad , \\ w = \dfrac{z(z-l)\varrho g}{2(\lambda+2\nu)} - 2 z C'(\lambda + 2\nu) - \dfrac{2\lambda \varrho g l^2}{\nu(\lambda+2\nu)\pi^3} \sum \sin \dfrac{(2n+1)\pi z}{l} W_n , \end{cases}$$

wo die S_n und W_n gewisse Kombinationen BESSELscher Funktionen sind, und die Reihen für das Innere des Zylinders stets konvergieren; hierzu kommt dann noch eine entsprechende Formel für den Druck auf die Grundfläche. Der Gesamtdruck auf die Endflächen wird:

$$(57)\qquad \begin{cases} \text{unten:} \quad -8\nu(\lambda+\nu)R^2\pi C' - \tfrac{1}{2}\varrho g l R^2 \pi \quad , \\ \text{oben:} \quad +8\nu(\lambda+\nu)R^2\pi C' - \tfrac{1}{2}\varrho g l R^2 \pi \quad ; \end{cases}$$

wird also der Druck oben null, so wird der unten gleich dem Gewicht des Zylinders. Das radiale Verschiebungsmaß ist unten bezw. oben:

$$(58)\qquad s_{(z=l)}^{(z=0)} = \lambda C' \pm \frac{\lambda \varrho g}{\nu(\lambda+2\nu)\pi^2} \sum S_n \quad ,$$

also wegen S_n Funktion von r; dagegen ist es in der Mittelebene konstant, nämlich $\lambda C'$, und hiermit erhält C' seine physikalische Bedeutung. Wäre λ, also auch die Elastizitätszahl gleich null, so wäre auch $s = 0$, und

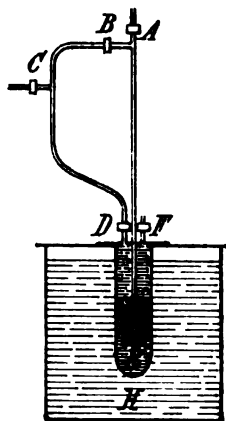
$$(59)\qquad w = \frac{z(z-2l)\varrho g}{4\nu} \quad .$$

Ist dagegen Querdilatation vorhanden, aber r und R so klein, daß die erste Annäherung genügt, so erhält man:

$$(60)\qquad s = \frac{\lambda \varrho g(l-z)}{8\nu(\lambda+\nu)} \quad , \qquad w = \frac{\varrho g(\lambda+2\nu)}{8\nu(\lambda+\nu)} \cdot (z^2 - 2zl) \quad ;$$

es hat also w lediglich einen anderen Faktor erhalten. Die Gleichung für s bedeutet offenbar, daß sich in diesem Falle der Zylinder einfach in einen abgestumpften Kegel verwandelt hat; im allgemeinen Falle wird dagegen die Oberfläche geschweift, und ihre Leitlinie hat in der Mittelebene einen Wendepunkt. — Auf die weiteren Untersuchungen THOMAES kann hier nicht eingegangen werden.[1]

Kompressibilität und Volumenmodul. Zur Ermittlung der kubischen Konstante C bezw. k_1 sind Vollkörper aus experimentellen Gründen wenig geeignet, und man bedient sich daher hierzu gewöhnlich hohler Körper, insbesondere hohler Zylinder und hohler Kugeln, oder einer Kombination beider, nämlich hohler Zylinder mit zwei halbkugeligen Enden. REGNAULT[2] benutzte demgemäß den durch die Figur 181 schematisch dargestellten Apparat. G ist das Gefäß aus dem zu untersuchenden Material; es ist oben mit einer langen Kapillare versehen, bis zu einem bestimmten Punkte derselben mit Wasser gefüllt und in einem ebenfalls mit Wasser gefüllten Behälter befindlich, den wiederum ein größerer, lediglich der Konstanz der Temperatur dienender Behälter umgibt. Bei geschlossenem Hahn B läßt man aus einem Reservoir komprimierte Luft auf dem Wege CD auf das Wasser wirken; das Gefäß und somit auch sein Hohlraum verkleinert sich dann um einen Betrag, den man berechnen kann, wenn man das Ansteigen des Wassers in der Kapillare mißt. Mit Benutzung der Formeln (54) und (55) bezw. geeigneter Kombinationen derselben erhält man C oder k_1. — In neuerer Zeit ist die REGNAULTsche Methodik von verschiedenen Experimentatoren, unter denen namentlich AMAGAT, RÖNTGEN und SCHNEIDER, sowie VOIGT zu nennen sind, abgeändert und vervollkommnet worden. Übrigens spielt der so herausgebildete Apparat, das Piezometer, schon seit OERSTED noch eine umgekehrte Rolle, nämlich zur Bestimmung der Kompressibilität von Flüssigkeiten. Hier wirkt (s. Art. „Hydrostatik“) auf das Gefäß, welches die zu untersuchende Flüssigkeit aufnimmt, der gleiche Druck von innen und außen, man hat also für den Fall der Kugel $p = P$, für den Fall des Zylinders $p = P = \Pi$ zu setzen und erhält somit in beiden Fällen die kubische Kompression



Figur 181.

$$-D = \frac{3p}{2\nu + 3\lambda} .$$

Hierin kommen die Größen R und r nicht mehr vor, d. h. D ist von der Wanddicke des Gefäßes nicht abhängig. Hierdurch wird die von OERSTED gehegte Ansicht, daß die Kompression für sehr dünnwandige Gefäße zu vernachlässigen sei, widerlegt, und die Ansicht von COLLADON und STURM gerechtfertigt, daß man durch Versuche mit dem Piezometer nicht die Kompressibilität der Flüssigkeit, sondern den Überschuß derselben über die Kompressibilität des Gefäßmaterials, und umgekehrt, wenn es sich, wie hier, um die Kompressibilität des festen Körpers handelt, nicht diese, sondern ihre Differenz gegen die der Flüssigkeit mißt. Man nennt diese Größe die scheinbare Kompressibilität; aus ihr kann man die wahre berechnen, wenn man die der Flüssigkeit kennt, was

[1] E. H. AMAGAT, C. R. **106**. 479. 1888; Ann. chim. phys. (6) **22**. 95. 1891. — W. S. FRANKLIN, Phys. Review **9**. 176. 1900. — P. SACERDOTE, Journ. de Phys. (3) **7**. 516. 1898; (3) **8**. 209. 1899. — V. CERRUTI, Rend. Acc. Linc. **5**. II. 189. 1889; Nuov. Cim. (3) **33**. 97. 145. 202. 259. 1893. — C. V. CZILY, Zugversuche. Budapest 1901. — J. THOMAE, Leipz. Ber. 1885. p. 399; 1886. p. 186. — [2] V. REGNAULT, Mém. de l'Acad., p. 21. 1847.

für Wasser und mehrere andere Flüssigkeiten bis zu genügender Genauigkeit der Fall ist. Man kann aber, wenn man mit zwei festen Körpern und derselben Flüssigkeit operiert, auch die Differenz der scheinbaren Kompressibilitäten der beiden festen Materialien ermitteln, und diese ist offenbar zugleich die Differenz ihrer wahren Kompressibilitäten.

Im folgenden sind die wichtigeren Zahlenwerte der Kompressibilität, in millionteln pro Atmosphäre, zusammengestellt; es sei aber bemerkt, daß einige von ihnen indirekt, nämlich aus Dehnungs- und Drillingsmodul (s. w. u.) abgeleitet wurden.

Substanz	$C \cdot 10^6$	Beobachter	Substanz	$C \cdot 10^6$	Beobachter
Baryt . . .	1,93	VOIGT	Messing . . .	1,07	REGNAULT
Bergkristall . .	2,675	„		0,958	AMAGAT
Beryll . . .	0,747	„	Pyrit	1,14	VOIGT
Blei	2,761	AMAGAT	Stahl	0,68	AMAGAT
Deltametall .	1,021	„	Steinsalz . .	4,2	VOIGT
Flußspat . .	1,20	VOIGT		5,0	RÖNTGEN u. SCHNEIDER
Glas	1,67	REGNAULT			
	2,197	AMAGAT	Sylvin . . .	7,45	VOIGT
	2,92	BUCHANAN		5,6	RÖNTGEN u. SCHNEIDER
Kristallglas . .	2,405	AMAGAT			
Kupfer . . .	1,23	REGNAULT	Topas . . .	0,61	VOIGT
	0,857	AMAGAT	Turmalin . .	0,113	„

Wie man sieht, ist die Genauigkeit der Messungen keine große; denn auch für wohldefinierte Stoffe wie Steinsalz und Sylvin weichen die Werte verschiedener Autoren um 20—30% voneinander ab.

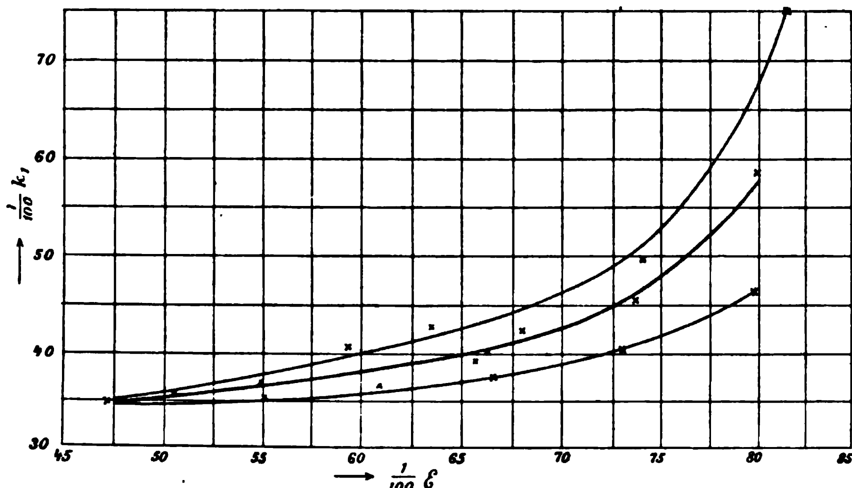
Ferner seien die Werte von k_1 angeführt, die STRAUBEL aus seinen μ-Bestimmungen und den WINKELMANNschen E-Bestimmungen für Gläser berechnet hat:

Nr.	k_1	Nr.	k_1	Nr.	k_1
665	7520	S 219	4260	370	4080
1299	5800	278 III	3790	500	3510
627	4630	709	4030	658	3650
1973	4990	714	3920	S 208	3550
16 III	4580	270	4270	1893	3070
1450	4020	2154	3660	S 196	3470

Wie man sieht, schwanken die Werte zwischen den Extremen 7520 und 3070 kg/qmm, aber der Gang ist dem des Dehnungsmoduls (nach dem die Gläser geordnet sind) nicht parallel; man darf vielleicht aus den Zahlen schließen, daß ZnO, BaO und P_2O_3 den Kompressionswiderstand erhöhen, daß ihn dagegen Sb_2O_3 und PbO erniedrigen. Demgemäß steigt zwar, wie die Figur 182 — Abszissen E, Ordinaten k_1 — zeigt, im großen ganzen k_1 mit E an, im einzelnen aber liegen die Punkte von der Mittelkurve zum Teil weit ab, und man muß sie durch eine obere und eine untere Grenzkurve ergänzen; jener entsprechen große, dieser kleine Werte der Elastizitätszahl.

Was die Abhängigkeit unserer Größe von besonderen Verhältnissen betrifft, so hat AMAGAT bei Versuchen, die sich bis zu 2000 Atm. Druck erstreckten, gefunden, daß dabei nur eine ganz geringfügige Abnahme von C erfolgt, die vielleicht nicht einmal über die Beobachtungsfehler hinausgeht. Der Einfluß des Härtens und Ausglühens ist nicht einheitlich, so daß hier auf nähere Angaben verzichtet werden muß.

Ganz neuerdings findet MALLOCK aus Versuchen an dünnwandigen Röhren eine Abnahme von k_1 durch Anlassen, und zwar bei Stahl und Messing eine geringe, bei Kupfer eine beträchtliche. Man vergleiche hierzu jedoch eine Kritik

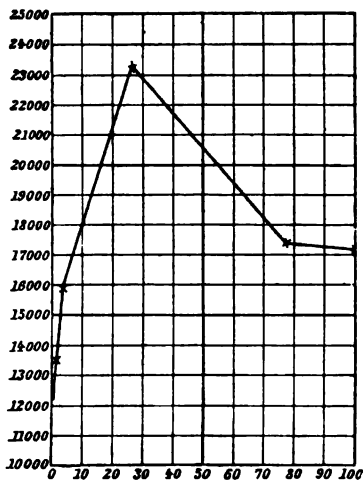


Figur 182.

von CHREE. Ferner hat ANGENHEISTER aus seinen früher erwähnten Messungen an Ag-Cu-Legierungen auch die Werte des Volumenmoduls abgeleitet und, wie die Figur 183 veranschaulicht, gefunden, daß dieser ebenso wie die Elastizitätszahl ein Maximum für eine mittlere Legierung aufweist. — Endlich ist noch der **Einfluß der Temperatur** von Interesse. In der Formel

(61) $$k_1 = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

nimmt mit steigender Temperatur sowohl der Zähler wie der Nenner ab (s. o.), und es kommt darauf an, welcher von ihnen stärker abnimmt; nimmt man einmal an — was vielfach in erster Annäherung der Fall ist —, daß die Temperaturkoeffizienten von E und μ gleich groß sind, so wird für $\mu < \frac{1}{4}$ der Zähler, für $\mu > \frac{1}{4}$ der Nenner stärker abnehmen, d. h. es wird für Stoffe, deren $\mu < \frac{1}{4}$ ist, der Volumenmodul mit steigender Temperatur abnehmen, wie dies auch E tut, für Stoffe mit größerem dagegen wird er sich abnorm verhalten und zunehmen. In der Tat ist das nach leicht anzustellenden Berechnungen — direkte Messungen scheinen nicht vorzuliegen — für mehrere Metalle, namentlich aber für Legierungen der Fall; so ergibt sich für eine von KATZENELSOHN untersuchte Ag-Cu-Legierung bei 20° 11022, bei 120° aber schon 19016; und für ROSEsches Metall nach ANGENHEISTER bei −186°: 2519, bei −36° aber schon 4196. Ferner ergeben sich als Temperaturkoeffizienten der Ag-Cu-Legierung zwischen −186° und Zimmertemperatur die folgenden positiven Zahlen pro 100°:



Figur 183.

Ag	Leg. I	Leg. II	Leg. III	Leg. IV	Cu
3,20	2,69	5,47	8,65	1,82	1,52

also für die mittleren Legierungen weit höhere Koeffizienten als für die reinen Metalle.

Ein besonderes Verhalten zeigt auch in dieser Hinsicht der Kautschuk, über dessen kubische Kompressibilität namentlich AMAGAT, MALLOCK und LUNDAL Untersuchungen angestellt haben. Absolute Angaben sind hier nur von geringem Werte, da sich verschiedene Sorten sehr verschieden verhalten. Wohl aber ist die von LUNDAL festgestellte Tatsache von Interesse, daß die Kompressibilität des Kautschuks in hohem Grade vom Drucke abhängt, daß sie nämlich, wenn jener steigt, stark abnimmt; die folgende Tabelle läßt das im einzelnen erkennen:

Druck (Atm.) . .	0,615	1,188	1,699	2,280	2,776
Kompressibilität . .	9,54	9,25	9,04	8,82	7,83
Druck (Atm.) . .	3,227	3,834	4,323	4,940	5,386
Kompressibilität . .	7,44	6,73	6,13	5,65	5,21

Diese Zahlen lassen sich sehr gut durch die Formel

(62) $$C = 10{,}063 - 0{,}7060\,p - 0{,}0333\,p^2$$

darstellen; die Abnahme mit steigendem Druck ist also eine beschleunigte. — An Röhren und Bällen hat MALLOCK noch eigentümliche Erscheinungen wahrgenommen; beim Hineintreiben von Flüssigkeit wächst nämlich der Durchmesser bis zu einer gewissen Grenze, dann aber weitet sich die Wandung zwar noch stärker aus, der innere Druck nimmt aber ab, und während der Ball kugelig bleibt, erhält die Röhre Ausbauchungen. Man kann dieses Verhalten verstehen, wenn man die Wandung als dünn und inkompressibel betrachtet, und man kann dann auch jenen Grenzzustand berechnen; bei der Kugel ist für ihn $r = 1{,}73\,r_0$, bei der Röhre $l = 1{,}58\,l_0$ und $r = 1{,}815\,r_0$.

Schließlich ist einleuchtend, daß, wenn man die Kompressibilität eines Körpers bestimmt hat, man durch Vergleich derselben mit der Dehnbarkeit, oder, was dasselbe ist, durch Vergleich von k_1 mit E, die Elastizitätszahl μ für diesen Körper rückwärts ermitteln kann. Es ist nämlich, durch ν und λ ausgedrückt:

$$k_1 = \frac{1}{3}(2\,\nu + 3\,\lambda)\quad,\qquad E = \nu\,\frac{2\,\nu + 3\,\lambda}{\nu + \lambda}\quad,\qquad \mu = \frac{\lambda}{2\,(\nu + \lambda)}\quad,$$

also

(63) $$\mu = \frac{1}{2} - \frac{E}{6\,k_1}\quad.$$

Der Gleichheit von E und k_1 entspricht z. B. der Wert $\mu = \frac{1}{3}$, der Beziehung $E = \frac{3}{2}k_1$ der Wert $\mu = \frac{1}{4}$, der Beziehung $E = \frac{1}{2}k_1$ der Wert $\mu = \frac{5}{12} = 0{,}42$ u. s. w. In neuester Zeit hat CANTONE derartige Bestimmungen mit Hohlzylindern durchgeführt, die er einmal dem äußeren Drucke P_1, sodann dem inneren Drucke P_0 aussetzte. Die beiden Gleichungen

(64) $$\delta V = -\frac{5 - 4\,\mu}{E}\,\frac{R_1^{\,2}\,V P_1}{R_1^{\,2} - R_0^{\,2}}\quad,\qquad \delta L = \frac{1 - 2\,\mu}{E}\,\frac{R_0^{\,2}\,L P_0}{R_1^{\,2} - R_0^{\,2}}$$

ergeben dann direkt E und μ, wenn im ersteren Falle das Volumen V und seine Änderung δV, im zweiten Falle die Länge L und ihre Änderung δL beobachtet wird. Die Zahlenergebnisse s. o. p. 559 u. 581.

Ferner hat AMAGAT mittels eines Differentialpiezometers die Kompression δV

einer Kautschukkugel mit der $\delta V'$ einer gleich großen Bronzekugel verglichen und beide nicht sehr verschieden gefunden; da nun in der Formel

$$(65) \qquad 2\mu = 1 - (1 - 2\mu')\frac{E'}{E}\cdot\frac{\delta V}{\delta V'}$$

E' (Modul des Kautschuks) sehr klein gegen E (Modul der Bronze) ist, ergibt sich $\mu = \frac{1}{2}$.

Die Kompressionsverhältnisse von Gefäßen finden auch anderweitig vielfache Anwendung, so auf die Theorie der Zylinder zum Aufbewahren abnormer Stoffe (feste oder flüssige Kohlensäure, flüssige Luft u. s. w.) und auf die Veränderungen der Thermometerkugel durch den Druck des Quecksilbers. Diese Anwendungen gehören aber teils in die Technik, teils in die Thermometrie.[1]

8. Druck zweier Körper aufeinander.

Berührungsproblem. Theorie von Hertz. Die Frage, wie sich zwei Körper, die aufeinander drücken, gegenseitig deformieren, ist zwar von technischer Seite schon mehrfach auch in theoretische Formeln gebracht worden; indessen konnten diese nur angenäherte Gültigkeit beanspruchen und waren überdies mit unbekannten Erfahrungskoeffizienten behaftet. Erst Heinrich Hertz hat eine exakte Lösung des Problems gegeben.

Solange kein Druck wirkt, berühren sich die Körper in einem Punkte, dieser sei der Koordinatenanfang, die gemeinsame Tangentialebene die xy-Ebene, also die z-Achse die Normale und zugleich die Druckrichtung. Es genügt offenbar, die Umgebung des Berührungspunktes zu betrachten, da hier die Spannungen sehr groß sind gegen die sonstigen und daher auch nur in sehr geringem Maße von den außerhalb auftretenden Kräften abhängen. In erster Annäherung, solange man jeden der Körper für sich betrachtet, kann man ihre Oberfläche mit der gemeinsamen Tangentialebene zusammenfallen lassen; in zweiter, sobald es nämlich auf den Zwischenraum der beiden Körper ankommt, reicht es aus, in der Entwickelung der Flächengleichungen die quadratischen Glieder in x und y beizubehalten. Der Abstand gegenüberliegender Punkte wird dann ebenfalls eine homogene Funktion zweiten Grades sein; und da bei geeigneter Drehung des Koordinatensystems die Produkte xy herausfallen, kann man jenen Abstand $e = Ax^2 + By^2$ setzen, wo A und B beide positiv sind. Die Kurven $e =$ const sind daher ähnliche Ellipsen, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Die Aufgabe ist nun die, eine solche Form für die Druckfläche und ein solches System von Verschiebungen und Spannungen in ihr und in ihrer Nähe anzugeben, daß 1. den Elastizitätsgleichungen genügt wird, und zugleich die Spannungen in großer Entfernung von der Druckfläche verschwinden; 2. in den beiden Oberflächen die Tangentialkomponenten der Drucke überall verschwinden; 3. in der Oberfläche auch der Normaldruck außerhalb der Druckfläche verschwinde, innerhalb aber Druck und Gegendruck gleich seien, und so groß, daß das Integral über die ganze Druckfläche dem gegebenen Gesamtdrucke gleich wird; 4. der infolge der

[1] Literatur zur Kompressibilität: E. H. Amagat, C. R. **107.** 618. 1888; **108.** 727 u. 1199. 1889; Journ. de Phys. (2) **8.** 197. 358. 1889; Ann. chim. phys. (6) **22.** 95. 1891. — Buchanan, Proc. Edinb. Soc. **10.** 697. 1880. — M. Cantone, Rend. Acc. Linc. **4.** 220. 292. 1888. — A. E. Lundal, Akad. Afhandl. Upsala 1897; Wied. Ann. **66.** 745. 1898. — A. Mallock, Proc. Roy. Soc. **46.** 233. 1889; **49.** 458. 1891; **74.** 50. 1904. — (C. Chree, ibid. **74.** 518. 1905.) — V. Regnault, Mém. Inst. **21.** 329; Mém. de l'Acad. **26.** 229. 1847. — W. C. Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. **34.** 531. 1888. — R. Straubel, ibid. **68.** 369. 1899. — W. Voigt, ibid. **31.** 479. 1887; **34.** 981. 1888; **36.** 642. 1888; **41.** 712. 1890; **48.** 674. 1893.

Verschiebungen geänderte Abstand der Oberflächen null werde in der Druckfläche und positiv bleibe außerhalb derselben; in Formel, wenn α die durch den Druck verursachte Annäherung der entfernten Teile und $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$, $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ das System der Verschiebungen der näheren Teile relativ zu den entfernteren ist, dann soll innerhalb der Druckfläche $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2$, außerhalb aber die linke Größe größer als die rechte sein.

Diese sämtlichen Bedingungen lassen sich nur durch ein einziges System von Verschiebungen befriedigen, und es ist HERTZ gelungen, es ausfindig zu machen. Als Druckfläche diene eine Ellipse, koaxial mit denen e = const, aber länglicher als diese. Es sei u die positive Wurzel der kubischen Gleichung

(66) $$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{u} = 1 \quad ,$$

und P sei das Potential eines unendlich abgeplatteten, gravitierenden, die Druckfläche ausfüllenden Ellipsoids, das die LAPLACEsche Gleichung befriedigt und durch die Formel (p der Gesamtdruck):

(67) $$P = \frac{3p}{16\pi}\int\limits_u^\infty \frac{1 - \dfrac{x^2}{a^2+\lambda} - \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} - \dfrac{z^2}{\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\lambda}}\,d\lambda$$

dargestellt wird; es ist dann bekanntlich u eine der elliptischen Koordinaten des Punktes xyz, sie ist konstant in gewissen mit der Druckellipse konfokalen Ellipsoiden und null in allen ihr unendlich nahe gelegenen Punkten. Endlich seien Π_1 und Π_2 zwei auf den einen bezw. anderen Körper bezügliche Funktionen, nämlich

(68) $$\Pi_1 = -\frac{1}{K_1}\left(zP - \frac{1}{1+2\Theta_1}\int\limits_0^\infty P\,dz\right) \;,\quad \Pi_2 = -\frac{1}{K_2}\left(zP - \frac{1}{1+2\Theta_2}\int\limits_0^\infty P\,dz\right),$$

wo K und Θ die KIRCHHOFFschen Elastizitätskonstanten der Körper (p. 523) sind. Die beiden Π nehmen allerdings unendliche Werte an, aber es kommt nur auf ihre Differentialquotienten an, und diese sind endlich; ferner ergibt sich für ihr Δ, d. h. die Summe ihrer zweiten Differentialquotienten die einfache Beziehung:

(69) $$\Delta\Pi_1 = -\frac{2}{K_1}\frac{dP}{dz} \quad , \qquad \Delta\Pi_2 = -\frac{2}{K_2}\frac{dP}{dz} \quad .$$

Schließlich soll zur Abkürzung die Elastizitätskonstante

(70) $$\vartheta = \frac{2(1+\Theta)}{K(1+2\Theta)}$$

eingeführt werden, die zwischen $3/E$ und $4/E$ liegt und z. B. für $\mu = \frac{1}{4}$ den Wert $32/9E$ annimmt. Alsdann sind die allen Bedingungen genügenden Verschiebungssysteme die folgenden:

(71) $$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{d\Pi_1}{dx} \;, & \eta_1 = \dfrac{d\Pi_1}{dy} \;, \quad \zeta_1 = \dfrac{d\Pi_1}{dz} + 2\vartheta_1 P \\ \xi_2 = \dfrac{d\Pi_2}{dx} \;, & \eta_2 = \dfrac{d\Pi_2}{dy} \;, \quad \zeta_2 = \dfrac{d\Pi_2}{dz} - 2\vartheta_2 P \end{cases}$$

und daraus die kubische Dilatation (Verdichtung):

(72) $$D_1 = -\frac{2}{K_1(1+2\Theta_1)}\frac{dP}{dz}, \quad D_2 = -\frac{2}{K_2(1+2\Theta_2)}\frac{dP}{dz}.$$

Die drei ersten Bedingungen werden ohne weiteres erfüllt, die vierte, wenn man die Halbachsen der Ellipse a und b in geeignete Beziehung zu dem Gesamtdruck p und den Konstanten A und B bringt. Diese letzteren müssen aber selbst erst physikalisch festgelegt werden, und das geschieht durch Einführung der Hauptkrümmungen ϱ_{11} und ϱ_{12} der einen und ϱ_{21} und ϱ_{22} der anderen Oberfläche (reziproke Krümmungsradien) sowie des Winkels ω zwischen den Ebenen von ϱ_{11} und ϱ_{21}; es wird dann:

(73) $$\begin{cases} 2(A+B) = \varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22} \\ 2(A-B) = -\sqrt{(\varrho_{11}-\varrho_{12})^2 + 2(\varrho_{11}-\varrho_{12})(\varrho_{21}-\varrho_{22})\cos 2\omega + (\varrho_{21}-\varrho_{22})^2}. \end{cases}$$

Es ist nun bequem, einen Hilfswinkel τ durch die Gleichung

(74) $$\cos\tau = -\frac{A-B}{A+B}$$

einzuführen, so daß

(75) $$2A = (\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})\sin^2\frac{\tau}{2}, \quad 2B = (\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})\cos^2\frac{\tau}{2}$$

wird, und das Achsenverhältnis b/a mit k zu bezeichnen; die Achsen a und b sind dann durch die Gleichungen:

(76) $$\begin{cases} \frac{1}{a^3}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)^3(1+k^2)}} = \frac{4\pi}{3p}\frac{\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22}}{\vartheta_1+\vartheta_2}\sin^2\frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{b^3}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\left(1+\frac{z^2}{k^2}\right)^3(1+z)^2}} = \frac{4\pi}{3p}\frac{\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22}}{\vartheta_1+\vartheta_2}\cos^2\frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

bestimmt, wo die Integrale nur von τ abhängen und, mit den anderen τ-Größen zu i_1 und i_2 verbunden, aus der von HERTZ berechneten kleinen Tabelle

(77)

$\tau =$ 90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
$i_1 =$ 1,000	1,128	1,284	1,486	1,754	2,136	2,731	3,778	6,612	∞
$i_2 =$ 1,000	0,893	0,802	0,717	0,641	0,567	0,493	0,408	0,319	0

genügend genau entnommen werden können; damit wird schließlich:

(78) $$a = i_1\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}}, \quad b = i_2\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}}.$$

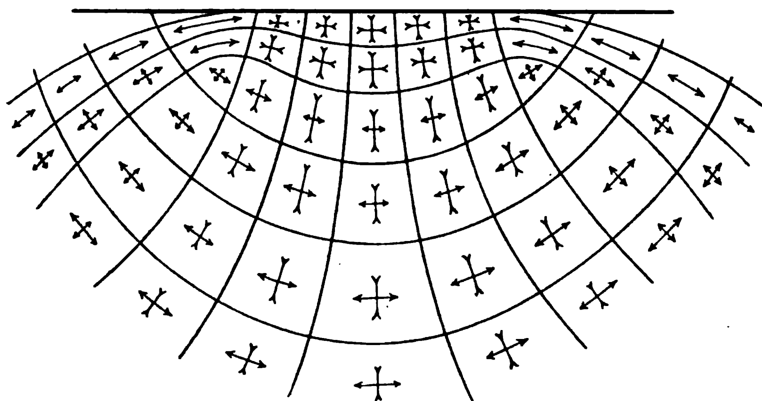
Ferner wird die Annäherung

(79) $$\alpha = \frac{3p}{8\pi}\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{a}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)(1+z^2)}},$$

woraus sich durch Trennung der den Gliedern ϑ_1 und ϑ_2 entsprechenden Teile die „Einsenkungen“ der beiden Körper ergeben; und endlich der Normaldruck in der Druckfläche

$$(80) \qquad Z_z = \frac{3p}{2ab\pi}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad .$$

Resultate. Aus diesen Formeln lassen sich folgende Sätze ableiten: 1. Bei bestimmtem Achsenverhältnis sind die Lineardimensionen der Druckellipse proportional der dritten Wurzel aus dem Drucke und aus dem Mittel der Konstanten ϑ sowie umgekehrt proportional der dritten Wurzel aus dem Mittelwerte der vier Krümmungen der beiden Flächen. — 2. Die Gestalt (Exzentrizität) der Druckellipse hängt von dem Lageverhältnis der Krümmungen der beiden Körper gegeneinander ab. — 3. Der Inhalt der Druckellipse ist unter sonst gleichen Umständen desto größer, je länglicher ihre Gestalt ist; denkt man sich also den einen Körper um die gemeinsame Normale gedreht, so wird die Druckfläche am größten in der Lage, in der sie am gestrecktesten wird. — 4. Die Einsenkung ist, von einem von der Gestalt der Druckfläche abhängigen Zahlenfaktor abgesehen, proportional mit der $^1/_3$-Potenz des Druckes, mit der $^2/_3$-Potenz der Konstanten ϑ und mit der Kubikwurzel aus



Figur 184.

der Krümmung. Wird eine der Krümmungen sehr groß, so wird es auch die Einsenkung (Eindringung von Kanten und Spitzen). — 5. Die Druckfläche ist in weiterer Annäherung keine Ebene, sondern eine Fläche zweiten Grades, die zwischen den beiden ursprünglichen Körperoberflächen liegt und derjenigen des Körpers mit dem größeren Modul ähnlicher ist. — 6. Der Normaldruck nimmt vom Rande der Druckfläche, wo er null ist, nach dem Gesetze der Ordinaten eines Ellipsoids zu bis zur Mitte, wo er anderthalbmal so groß ist wie der durchschnittliche Druck in der Druckfläche. — 7. Die seitlichen Spannungen im Nullpunkte sind ebenfalls Drucke, aber kleiner als der Normaldruck. — 8. Die Drucke und Spannungen an anderen Stellen der Oberfläche sowie im Innern lassen sich nicht in geschlossener Form angeben; ein ungefähres Bild gibt indessen die Figur 184, in der einander zugekehrte Pfeile Druck, abgekehrte Zug bedeuten. Wie man sieht, ist das oberste Stück des Körpers, das ursprünglich eine Erhöhung bildete, wie ein Keil in den Körper hineingepreßt, von ihm aus pflanzen sich die Drucke nach den verschiedenen Richtungen fort und gehen dabei zum Teil in seitliche, zum Teil auch in direkte Züge, d. h. Spannungen, über; daß infolgedessen bei genügender Steigerung des Druckes Sprünge auftreten, gehört nicht hierher (vgl. Art. „Kohäsion").

Weiterführung der Rechnung. Zwei Kugeln. Die HERTZsche Theorie ist verschiedentlich, so von HUBER und FRIESENDORFF weitergeführt worden. Die Spezialisierung der Formeln für die beiden wichtigsten Körperformen, Kugel und Zylinder, hat zum Teil schon HERTZ vorgenommen; HUBER hat dann ge-

zeigt, daß man für diesen Fall die Spannungen und Verschiebungen ganz allgemein in relativ einfacher Form darstellen kann. Im übrigen liegt der Schwerpunkt dieser Untersuchungen in dem Nachweis, daß und in welcher Weise die Theorie hinfällig wird, sobald die Elastizitätsgrenze überschritten wird; hierüber ist auf den Artikel „Kohäsion", Abschnitt Härte, zu verweisen.

Für zwei Kugeln wird die Druckfläche ein Kreis, also

$$(81)\quad \begin{cases} a = b \quad , \qquad x^2 + y^2 = s^2 \quad , \\ 2u = s^2 + z^2 - a^2 \pm \sqrt{(s^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2} \quad , \\ P = \dfrac{3p}{16\pi a^2}\left[\dfrac{z}{a}\left(a^2 + z^2 - \dfrac{s^2}{z}\right)\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\sqrt{u}} + \dfrac{s^2\sqrt{u}}{a^2+u} - \dfrac{2z^2}{\sqrt{u}}\right] \quad . \end{cases}$$

Damit erhält man nun für die Dilatation außerhalb der Druckfläche

$$(82)\qquad D = \frac{3p}{\pi a^2}\,\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\,z\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right]$$

und in der Druckfläche

$$(83)\qquad D_0 = -\frac{3p}{\pi a^2}\,\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\,\frac{\sqrt{a^2-s^2}}{a} \quad .$$

Ferner werden die Hauptdrucke außerhalb, aber nahe der Druckfläche

$$(84)\qquad X_x(Y_y) = \pm\frac{3p}{2\pi a^2}\,\frac{1-2\mu}{3}\,\frac{a^2}{s^2} \quad , \qquad Z_z = \frac{3p}{2\pi a^2}\,\frac{\sqrt{a^2-s^2}}{a} \quad ,$$

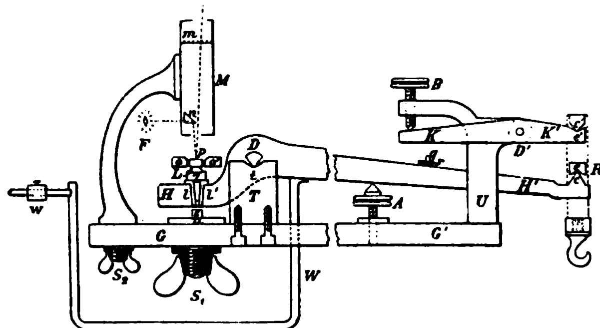
dagegen innerhalb (Z_z wie oben) für $x = 0$:

$$(85)\qquad X_x = \frac{3p}{2\pi a^2}\left\{\frac{1-2\mu}{3}\,\frac{a^2}{s^2}\left[1 - \left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2-s^2}\right)^3\right] + \frac{2\mu}{a}\sqrt{a^2-s^2}\right\} \text{ u. s. w.}$$

Schließlich wird

$$(86)\qquad a = \sqrt[3]{\frac{3p}{16}\,\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{\varrho_1+\varrho_2}} \quad , \qquad \alpha = \frac{3p}{16a}(\vartheta_1+\vartheta_2) \quad .$$

Versuche von Auerbach. Zur Prüfung der Theorie hat, nachdem schon HERTZ einige Vorversuche angestellt hatte, AUERBACH einen besonderen Apparat



Figur 185.

konstruiert, der in Figur 185 in seinen wesentlichen Teilen schematisch dargestellt ist. Die beiden sich drückenden Körper sind die Linse L und die Platte p (an ihre Stelle kann natürlich eine zweite Linse, mit der Krümmung

nach unten, treten); die Platte ist in den Rahmen $o o'$ fest eingelassen, die Linse dagegen sitzt mittels des Zapfens Z in dem einen Arme eines Hebels, dessen andrer Arm am Ende (rechts) belastet werden kann, wodurch die Linse von unten an die Platte angedrückt wird; das Gewicht w dient zum Ausgleich, der Hilfshebel KK' zu Vorsichtszwecken bei der Belastung, das Mikroskop M zur Beobachtung der Berührungserscheinungen zwischen den als durchsichtig angenommenen Körpern. Infolge der optischen Anordnung erscheint der Berührungspunkt als ein schwarzer, von Ringen umgebener Punkt, bei der Belastung geht er in einen schwarzen Fleck über, dessen Durchmesser sehr genau gemessen werden kann. Auf undurchsichtige Stoffe ist das Verfahren in dieser Art nicht anwendbar; da aber diese Stoffe häufig vollkommen plastisch sind, kann man hier die Druckfläche, die nach Aufhebung der Belastung bestehen bleibt, nach Herausnahme aus dem Apparat nachträglich messen. Dabei zeigt sich für alle spröden Stoffe zunächst die Beziehung (d Durchmesser)

(87) $$q = \frac{p}{d^3} = \text{const}$$

bestätigt, wie die folgenden Beispiele beweisen (Einheiten willkürlich):

Glas

p	d	$1000\,q$
227	8,9	321
354	10,5	306
554	12,1	313
754	13,5	307
954	14,6	306
1354	16,4	307
1925	18,7	294
3177	22,1	294
4547	24,6	306

Quarz

p	d	$1000\,q$
754	12,4	396
1254	15,0	371
1677	17,0	342
2677	19,6	356
3677	21,6	368
4800	23,7	361

Dagegen nimmt bei plastischen Stoffen, z. B. Steinsalz oder Kupfer, der Quotient q mit wachsendem Drucke ganz gewaltig ab; eine Tatsache, die offenbar nicht mehr hierher gehört, vielmehr eine Folge der Überschreitung der Elastizitätsgrenze ist (vgl. Art. „Kohäsion“ in dem Abschnitt über Plastizität). — Ebenso findet das Gesetz Bestätigung, wonach d mit der Kubikwurzel aus der Krümmung proportional sein soll (am einfachsten aus Versuchen mit Linse und ebener Platte, weil hier nur eine einzige der Größen ϱ übrig bleibt), d. h. wonach, wenn r der Krümmungsradius $(1/\varrho)$ ist, das Produkt

(88) $$r q = \text{const}$$

sein muß:

Glas

r	1	4	12
q	463	116,5	39,1
rq	463	466	469

Quarz

r	1	4	12
q	846	212,2	70,4
rq	846	849	845

Endlich und hauptsächlich können die Versuche dazu dienen, die Werte der für die hier vorliegende Art der Beanspruchung charakteristischen Elastizitätskonstanten zu bestimmen; es ist die Größe

(89) $$E' = \frac{E}{1-\mu^2} \quad ,$$

die man als „Eindringungsmodul" bezeichnen kann; ihr Reziprokes wäre entsprechend der Eindringungskoeffizient. Einige von AUERBACH ermittelten Werte von E' sind folgende (in kg/qmm):

Korund (Achse)	52800	Gläser	Barytborosilikat	8190
Topas (⊥ Basis)	29700		Borosilikat	7600
Beryll (Mittel)	22600		Kalisilikat	7110
Apatit (Hauptachse)	14500		Flint	5950
Quarz ( )	10620		Schwerstes Flint	5590
Flußspat (⊥ Okt.)	10010		Natrontonerdeborat	4975
Kalkspat (⊥ Spaltfläche)	9360			
Adular (⊥ Basis)	8460			

Die Zahlen sind offenbar nur um kleine Bruchteile größer als die entsprechenden Dehnungsmoduln, die Differenz ist desto größer, je größer die Elastizitätszahl, sie beträgt nämlich

für	$\mu =$ 0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
Prozent	2	4	6	9	13

Die Berechnung von E' aus E (nach Dehnungs- oder Biegungsversuchen) und μ (aus Querkontraktions- oder Querbiegungsversuchen) führt zu Werten, die mit den direkt ermittelten nur annähernd übereinstimmen.

Was schließlich die Annäherung der sich berührenden und drückenden Körper bezw. die Größe der Einsenkung betrifft, so ist sie ebenfalls gemessen worden, aber noch nicht mit entscheidendem Erfolg. Das beweisen insbesondere die sehr gründlichen Beobachtungen von LAFAY, deren Zweck ein metronomischer war, nämlich die Gewinnung eines Anhalts dafür, wie sich die sphärischen Enden von Normalstäben durch Druck ändern, und bei denen deshalb das hauptsächliche Augenmerk auf die Abplattung bezw. Einsenkung, d. h. die Größe α gerichtet war. Sie wurde nach der FIZEAUschen Interferenzmethode gemessen, indem sowohl mit dem festen als auch mit dem an einem zweiarmigen Hebel angebrachten Druckkörper je ein Spiegel verbunden war, zwischen denen die Interferenzerscheinung auftrat; je nachdem es sich um Linse und Platte oder um zwei Linsen handelte, war die besondere Anordnung eine andere. Auf die Einzelheiten kann hier nicht eingegangen und es muß deshalb auch auf die Kritik der Versuche verzichtet werden. Das Ergebnis ist insofern sehr eigentümlich, als sich die Beziehung: α proportional mit der $^2/_3$-Potenz von p, zwar für größere, aber nicht für kleinere Beanspruchungen bestätigt fand, also gerade in dem Falle versagte, für den die HERTZsche Theorie einwandfrei ist; zweitens insofern dieses Gesetz sich gerade bei stark gekrümmten Linien annähernd, bei schwach gekrümmten aber gar nicht bewährte, also wieder in dem Falle versagte, für den die Theorie exakt ist; endlich drittens, insofern bei Versuchen mit zwei verschiedenen Stoffen, wenn das Material von Platte und Linse vertauscht wurde, die Annäherung zwei verschiedene Werte annahm, worüber die Theorie nichts besagt. Ein Teil dieser Widersprüche ist wohl auf den Umstand zurückzuführen, daß auf die Plastizität der Stoffe, die sich doch schon bei den Versuchen von AUERBACH als entscheidend erwies, nicht die gehörige Rücksicht genommen wurde, wie denn überhaupt LAFAY die vorangegangene experimentelle Literatur nicht kennt oder nicht benutzt. Unter diesen Umständen sind ergänzende, die Einsenkung betreffende Versuche als wünschenswert zu bezeichnen.

Auf die Untersuchung von LÜBECK über die Umformung einer elastischen Kugel durch Zusammendrücken zwischen zwei starren, glatten oder rauhen Ebenen sowie auf die experimentellen Arbeiten von STRIEBECK und SCHWINNING (siehe auch Artikel „Kohäsion") kann hier nur hingewiesen werden.

Zylinder. Nächst der Kugelform interessiert noch die zylindrische. Wenn zwei Kreiszylinder aufeinander drücken, so ist die Druckfläche im allgemeinen

eine Ellipse, geht aber in den beiden Grenzfällen paralleler und senkrecht gekreuzter Achsen in einen Parallelstreifen bezw. in einen Kreis (bei gleichem Material) über. Die Formeln hat HERTZ angegeben, er sowie FÖPPL und SCHWERD haben darüber auch einige Beobachtungen angestellt, letztere, indem sie die sich berührenden Oberflächen von Metallzylindern berußten und die Rußflecke ausmaßen; die Versuche bestätigen die Theorie.

Ferner ist eine Arbeit von HERTZ zu nennen, die die Verteilung der Drucke in einem Kreiszylinder zum Gegenstand hat, auf dessen Mantel beliebige, aber auf der Achse senkrechte und von ihrer der z-Richtung unabhängige Drucke wirken. Von den Formeln läßt sich eine relativ einfache Anwendung machen auf eine zwischen zwei parallelen Ebenen zusammengedrückte Walze. Ist nämlich die x-Richtung die Druckrichtung (Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte), so ist der Normaldruck in einem von diesen um r bezw. r' entfernten Punkte:

$$N_n = -\frac{P}{R\pi} + \frac{2P}{\pi}\left(\frac{\cos rx \cos^2 rn}{r} + \frac{\cos r'x \cos^2 r'n}{r'}\right) .$$

Für die x- und y-Achse fallen die Richtungen der Hauptdrucke mit den Achsenrichtungen zusammen, und man erhält:

für die x-Achse:

$$X_x = \frac{P}{R\pi}\,\frac{3R^2 + x^2}{R^2 - x^2} , \qquad Y_y = -\frac{P}{R\pi} ,$$

für die y-Achse:

$$X_x = \frac{P}{R\pi}\,\frac{3R^4 - 2R^2y^2 - y^4}{R^4 + 2R^2y^2 + y^4} ,$$

$$Y_y = -\frac{P}{R\pi}\left(\frac{R^2 - y^2}{R^2 - y^2}\right)^2 .$$

Im Mittelpunkte ist der Druck in der x-Richtung $6/\pi$-mal so groß, wie wenn sich der gegebene Druck P gleichförmig über den Querschnitt verteilte.[1]

Schließlich leuchtet es ein, wie mannigfach die praktischen Anwendungen sind, die von dem Phänomen der Einsenkung bezw. des Eindringens zu machen sind. Namentlich kommen die hierauf beruhenden Fehler bei allen denjenigen Messungen in Betracht, bei denen Spitzen oder Schneiden, auch von mehr oder weniger abgerundeter Form, auf Ebenen oder Hohlflächen ruhen und gegen sie drücken, also bei Maßstäben, Pendeln, Wagen, Ketten, Stellschrauben, Walzen u. s. w. Man muß den betreffenden Fehler, wo man ihn nicht durch besondere Anordnungen vermeiden kann, auf Grund der obigen Beziehungen annähernd zu berechnen versuchen.[2]

Ausgedehnter Körper. Verwandt mit dem behandelten Problem ist in gewissem Sinne noch ein anderes, dessen praktische Anwendung freilich in einer

---

[1] H. HERTZ, CRELLEs Journ. **92.** 156; Verh. Berl. phys. Ges. 1882. p. 67; Verh. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbefleißes 1882. p. 441; Ztschr. f. Math. u. Phys. **28.** 125. 1883; Ges. Werke **1.** 155. 183. 1895. — F. AUERBACH, Gött. Ber. 1890. Dezbr.; WIED. Ann. **43.** 61. 1891; **45.** 262. 1892; **53.** 1000. 1894; **58.** 357. 1896; DRUDEs Ann. **3.** 108. 116. 1900. — A. FÖPPL, WIED. Ann. **63.** 103. 1897. — F. M. SCHWERD, Mitt. mech.-techn. Labor. München Heft 25. 1897. — STRIBECK, Ztschr. Ver. d. Ing. **45.** 1901. — SCHWINNING, ibid. — A. LAFAY, Ann. chim. phys. (7) **23.** 1. 1901. — M. T. HUBER, DRUDEs Ann. **14.** 153. 1904. — TH. FRIESENDORFF, Theorie der Berührung fester elastischer Körper. Hab.-Schr. St. Petersb. 1905 (russisch). — C. BACH, Elast. u. Fest., 4. Aufl. p. 160 ff. — G. LÜBECK, Progr. Friedr. Werder-Gymn. Berlin 1889. — [2] Man vergleiche unter anderen eine Arbeit von M. BRILLOUIN, Ann. chim. phys. (7) **13.** 231. 1898.

ganz anderen Richtung zielt. Gemeint ist das Problem der Deformation eines ausgedehnten, durch eine Ebene begrenzten Körpers durch Drucke, die in irgend welcher Verteilung auf diese Oberfläche wirken; die Anwendung bezieht sich auf den Erdkörper, dessen Oberfläche allerdings eine Kugelfläche, aber mit sehr großem Radius, also in großen Stücken als eben anzusehen ist. Nachdem das Problem von Boussinesq, Cerruti u. A. allgemein angegriffen worden war, hat zuerst G. H. Darwin einen bestimmten Fall der Rechnung unterworfen, nämlich den, wo der Druck in abwechselnden, geraden, parallelen Streifen groß und klein ist; Anwendungen machte er sodann auf die Wirkung von Gebirgen, Kontinenten und Tälern sowie von abwechselnd hohem und niedrigem Luftdruck auf die Erde, insbesondere auf die Lotlinie. Später hat Chree diese Untersuchung fortgesetzt. Um den wirklichen Verhältnissen beim Luftdruck näher zu kommen, hat ganz neuerdings Nagaoka den Fall behandelt, daß die Druckkonfiguration kreisförmig ist. Dabei ergibt sich nicht bloß, wie dort, eine vertikale, sondern auch eine horizontale Deformation, nach dem Kreiszentrum hin gerichtet. Auf alle diese Arbeiten kann aber hier nur eben hingewiesen werden.[1]

[1] G. H. Darwin, Trans. Roy. Soc. p. 173. 1882; Phil. Mag. Dez. 1882. — C. Chree, Phil. Mag. **43.** 173. 1897. — H. Nagaoka, Publ. of the Earthquake-Comm. Nr. 22 B. Tokyo 1906.

Biegung und Drillung.

Von F. AUERBACH.

1. Allgemeine Theorie.

Einleitung. Während im vorangegangenen Artikel Zug- und Druckbeanspruchungen untersucht wurden, deren Wirkung in ein- oder allseitiger Längenänderung, im ersteren Falle verbunden mit sekundärer Queränderung, bestand, sollen nunmehr Beanspruchungen ins Auge gefaßt werden, deren Wirkung in einer Verzerrung der Teile besteht, also in einer Verbiegung oder Verdrehung. Das ist das gemeinsame der beiden Phänomene Biegung und Torsion, während sie im übrigen sogar in einem gewissen Gegensatze zueinander stehen, insofern nämlich die Biegung, nicht aber die Torsion eine Potentialdeformation (vgl. p. 529) ist, und insofern die Biegung durch dieselbe Konstante wie die Dehnung, nämlich durch den gewöhnlichen Längsmodul charakterisiert wird, während für die Torsion eine neue Größe, der Torsionsmodul, auftritt, der sich allerdings mit einer uns schon bekannten, prinzipiellen Konstanten, dem reinen Gestaltsmodul, als identisch erweist. — Im ersten, allgemeinen Teile des Artikels wird die Deformation der Körper ganz allgemein behandelt, und es stellen sich Biegung und Drillung als Bestandteile dieser Deformation heraus; dabei ist ein Unterschied zwischen endlich dicken und unendlich dünnen Körpern zu machen. Im zweiten Teile wird alsdann die Biegung, im dritten die Torsion im speziellen behandelt; der letzteren ist die Scherung, über die nicht viel wissenschaftlich Interessantes zu sagen ist, voranzuschicken.

Elastisches Gleichgewicht prismatischer Körper. Die Anwendung der allgemeinen Elastizitätsgleichungen auf beliebige elastische Vorgänge an beliebigen Körpern führt zu so großen Schwierigkeiten, daß es erforderlich ist, gewisse vereinfachende Annahmen zu machen, und es kommt nur darauf an, daß diese Annahmen so gewählt werden, wie sie praktisch häufigen und wichtigen Fällen entsprechen. Eine derartige Annahme ist die der Kleinheit der Veränderungen, wenigstens wenn man sich auf Körper von sämtlich endlichen Dimensionen beschränkt, und demgemäß Körper vom Charakter dünner Stäbe oder dünner Platten, bei denen größere Veränderungen tatsächlich vorkommen, für eine besondere Untersuchung (s. u.) reserviert. Zweitens haben die Körper, um deren elastische Erscheinungen es sich handelt, häufig prismatische oder zylindrische Gestalt, mit Endflächen, die auf der Achse senkrecht stehen. Drittens darf man oft von der Wirkung von Massenkräften, namentlich der Schwere, und von Druckkräften, welche auf die Mantelfläche wirken, absehen, braucht also nur Drucke auf die Endflächen in Betracht zu ziehen. Endlich soll, was ebenfalls häufig vorkommt, ein Punkt der einen Grundfläche so befestigt sein, daß das zugehörige

Körperelement sich weder verschieben noch drehen kann. Unter diesen Voraussetzungen ist es DE ST. VENANT[1] gelungen, das Problem für isotrope Stoffe zu lösen, allerdings nicht direkt, indem er den zu gegebenen Drucken gehörigen Gleichgewichtszustand ermittelte, sondern umgekehrt, indem er die zur Herstellung gegebener Gleichgewichtszustände erforderlichen Drucke bestimmte.

Ist der feste Punkt Anfangspunkt, die z-Achse Körperachse, so sind die (nicht sämtlich voneinander unabhängigen) Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}=0\,, \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}=0\,, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\mu\dfrac{\partial w}{\partial z}\quad, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$$

die zur Bestimmung der Verrückungskomponenten $u\,v\,w$ dienenden Grundgleichungen des Problems, wie sie sich aus den allgemeinen Elastizitätsgleichungen (76) (p. 524) ergeben. Für den festen Punkt gelten die Grenzbedingungen

$$(2)\quad \begin{cases} u=0\quad, \qquad v=0\quad, \qquad w=0\quad, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=0\quad, \qquad \dfrac{\partial w}{\partial x}=0\quad, \qquad \dfrac{\partial w}{\partial y}=0\quad; \end{cases}$$

für die Grenzflächen, wenn der Winkel zwischen der x-Achse und der Normale eines Oberflächenpunktes mit λ bezeichnet wird, die Grenzbedingungen

$$(3)\quad X_x\cos\lambda+X_y\sin\lambda=0\,, \quad Y_x\cos\lambda+Y_y\sin\lambda=0\,, \quad Z_x\cos\lambda+Z_y\sin\lambda=0\,,$$

deren erste beiden durch die Annahme

$$X_x=X_y=Y_y=0$$

befriedigt werden; dabei wirkt alsdann zwischen den einzelnen Längsfasern des Körpers überhaupt kein Druck, sie sind ganz voneinander unabhängig.

Die Behandlung dieser Grundgleichungen führt zu folgenden Endformeln:

$$(4)\quad \begin{cases} u=-\mu\{a_0x+\tfrac{1}{2}a_1(x^2-y^2)+a_2xy+z[\tfrac{1}{2}b_1(x^2-y^2)+b_2xy]\} \\ \qquad +cyz+dz-\tfrac{1}{2}a_1z^2-\tfrac{1}{6}b_1z^3\quad, \\ v=-\mu\{a_0y+a_1xy-\tfrac{1}{2}a_2(x^2-y^2)+z[b_1xy-\tfrac{1}{2}b_2(x^2-y^2)]\} \\ \qquad -cxz+ez-\tfrac{1}{2}a_2z^2-\tfrac{1}{6}b_2z^3\quad, \\ w=z(a_0+a_1x+a_2y)+\tfrac{1}{2}z^2(b_1x+b_2y)-xy(b_1y+b_2x)+\Omega\quad, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} Z_z=-E[a_0+a_1x+a_2y+z(b_1x+b_2y)]\quad, \\ X_z=-\dfrac{E}{2(1+\mu)}\left[-\dfrac{b_1}{2}[\mu x^2+(2-\mu)y^2]-b_2(2+\mu)xy+cy+d+\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\right] \\ Y_z=-\dfrac{E}{2(1+\mu)}\left[-b_1(2+\mu)xy-\dfrac{b_1}{2}[\mu y^2+(2-\mu)x^2]-cx+e+\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\right]. \end{cases}$$

Hierin sind d und e Konstanten, die durch die Form des Querschnittes ihre Bestimmung finden, a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c willkürliche Konstanten, welche die

---

[1] ST. VENANT, De la Torsion des prismes, avec des consid. s. leur flexion, Mém. des Sav. Etr. **14.** 233. 1855; Mém. s. l. flexion des prismes, LIOUV. Journ. (2) **1.** 1856. — Eine eingehende Darstellung des Problems gibt auch CLEBSCH, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862. p. 70 ff.

und y, die sich für eine gegebene Querschnittsform aus den Gleichungen:

$$
(6)\quad \begin{cases}
\text{allgemein:} \qquad \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0 \quad , \\[2ex]
\text{für} \quad x = y = z = 0 \ , \quad \Omega_0 = 0 \ , \quad \left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0 = 0 \quad , \\[2ex]
\text{und für die Peripherie eines Querschnittes:} \\[1ex]
\qquad \left[-\dfrac{b_1}{2}\left[\mu x^2 + (2-\mu) y^2\right] - b_2 (2+\mu) x y + c y + d + \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}\right] \cos \lambda \\[2ex]
\quad + \left[-b_1 (2+\mu) x y - \dfrac{b_2}{2}\left[\mu y^2 + (2-\mu) x^2\right] - c x + e + \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}\right] \sin \lambda = 0
\end{cases}
$$

bestimmt. Setzt man schließlich in den Ausdrücken für X_z Y_z Z_z einmal $z = 0$, dann $z = l$ (Länge des Prismas) und kehrt die Vorzeichen um, so erhält man die äußeren Kräfte, die man auf die Grundflächen des Prismas wirken lassen muß, um den angegebenen Zustand herzustellen.

Spezielle Fälle. Die Form der Ausdrücke für die Verrückungen und die Drucke zeigt, daß man die Veränderung, die das Prisma erfahren hat, betrachten kann als zusammengesetzt aus sechs speziellen Veränderungen, oder, da a_1 und a_2, b_1 und b_2 ganz symmetrisch vorkommen, aus vier speziellen Veränderungen:

1. Ist nur a_0 von null verschieden, so findet man $d = 0$, $e = 0$, $\Omega = 0$, $X_z = 0$, $Y_z = 0$ und ferner

$$
(7)\qquad Z_z = E a_0 \quad , \qquad u = -\mu a_0 x \quad , \qquad v = -\mu a_0 y \quad , \qquad w = a_0 z \quad .
$$

Es ist dies der oben bereits behandelte Fall des axialen Zuges bezw. der von ihm erzeugten Längsdehnung und Querkontraktion.

2. Wenn nur c von 0 verschieden ist, so erhält man, wenn man ξ und η statt x und y vermöge der Gleichungen

$$
x = \xi + \frac{e}{c} \quad , \qquad y = \eta - \frac{d}{c} \quad ,
$$

einführt:

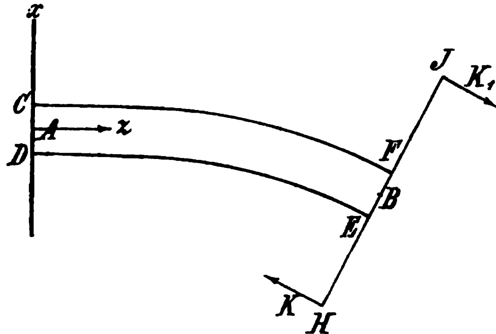
$$
(8)\quad \begin{cases}
\qquad u = c \eta z \quad , \qquad v = -c \xi z \quad , \qquad w = \Omega \quad , \\[2ex]
\qquad \left(c \eta + \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}\right) \cos \lambda + \left(-c \xi + \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}\right) \sin \lambda = 0 \quad , \\[2ex]
Z_z = 0 \, , \quad X_z = -\dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(c \eta + \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}\right) , \quad Y_z = -\dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(-c \xi + \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}\right) .
\end{cases}
$$

Jeder Querschnitt wird hier um einen gewissen, mit seinem Abstand von der festen Endfläche proportionalen Winkel gedreht, außerdem aber, da w mit x und y variiert, auch noch gewölbt, und zwar werden, da w von z unabhängig ist, alle Querschnitte in derselben Weise gewölbt. Dieser elastische Vorgang heißt Torsion oder Drillung (s. w. u.).

3. Wenn nur a_1 von 0 verschieden ist, so findet man

$$
(9)\quad \begin{cases}
\quad d = 0 \quad , \quad e = 0 \quad , \quad \Omega = 0 \quad , \quad X_z = 0 \quad , \quad Y_z = 0 \quad , \\
\text{dagegen} \qquad\qquad Z_z = -E a_1 x \quad , \\
\quad u = -\frac{1}{2} a_1 \left[\mu (x^2 - y^2) + z^2\right] \quad , \quad v = -a_1 \mu x y \quad , \quad w = a_1 x z \quad .
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen, und ebenso die ganz entsprechenden, die sich ergeben, wenn nur a_2 von 0 verschieden ist, stellen eine gewisse Art von Biegung dar, die man **Biegung erster Art** nennen kann. Man denke sich einen Stab $CDEF$ (Figur 186) mit der einen Endfläche CD gegen die xy-Ebene gestützt, so daß der mittelste Punkt A, zugleich Anfangspunkt der Koordinaten, fest ist ($u = 0$, $v = 0$, $w = 0$), alle übrigen Punkte dieser Endfläche aber wenigstens in der xy-Ebene bleiben müssen ($w = 0$). Mit der anderen Endfläche sei in ihrem Mittelpunkt B ein Hebel HJ verbunden, an dem das Kräftepaar KK_1 in der xz-Ebene angreift. Das Ergebnis ist die in den obigen Gleichungen ausgesprochene Biegung.



Figur 186.

4. Macht man endlich alle Konstanten, ausgenommen b_1, zu null, so erhält man folgende Gleichungen:

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
Z_z &= - E b_1 x z \quad , \\
X_z &= - \frac{E}{2(1+\mu)} \left[- \frac{b_1}{2} \left(\mu x^2 + (2-\mu) y^2 \right) + d + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] \quad , \\
Y_z &= - \frac{E}{2(1+\mu)} \left[- b_1 (2+\mu) x y + e + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] \quad , \\
u &= - \tfrac{1}{2} \mu b_1 z (x^2 - y^2) + d z + \tfrac{1}{6} b_1 z^3 \quad , \\
v &= - \mu b_1 x y z + e z \quad , \\
w &= \tfrac{1}{2} b_1 x (z^2 - 2 y^2) + \Omega \quad ,
\end{aligned}
\right.
$$

wo Ω sich durch die aus (6) durch Spezialisierung hervorgehenden Gleichungen bestimmt. Diese Deformation, und ebenso die analoge, die entsteht, wenn nur b_2 beibehalten wird, ist eine **Biegung der zweiten Art** und, wie man sieht, von sehr verwickeltem Charakter.

Die Biegung, wie sie in der Praxis durch angehängte oder aufgelegte Gewichte hervorgerufen wird (s. w. u.), stimmt mit keiner der beiden hier abgeleiteten Arten von Biegungen völlig überein.[1]

Für die die Deformationen erzeugenden äußeren Kräfte führen die abgeleiteten Formeln näherungsweise und unter der Voraussetzung, daß der Querschnitt des Körpers symmetrisch gegen beide Querachsen sei, zur Zerlegung in die Komponenten

$$
(11)\qquad X = E b_1 T_2 \quad , \qquad Y = E b_2 T_1 \quad , \qquad Z = E a_0 q \quad ,
$$

und in die Drehungsmomente

$$
M_x = E(a_2 T_1 + b_2 T_2 z) \quad , \qquad M_y = - E(a_1 T_2 - b_1 T_1 z) \quad ,
$$

$$
(12)\qquad M_z = \frac{E}{2(1+\mu)} [- c(T_1 + T_2) + N) \quad ,
$$

[1] Über die Bestimmung von Ω für bestimmte Querschnittsformen s. CLEBSCH, l. c. p. 99 ff., wo auch gezeigt wird, daß man, solange der Querschnitt beliebig bleibt, zwar nicht Ω, wohl aber die Größen

$$
\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial \Omega}{\partial y} dq \quad ,
$$

allgemein angeben kann.

wo q der Querschnitt, T_1 und T_2 die Hauptträgheitsmomente, also

$$(12a)\quad \begin{cases} q = \int dx\, dy \quad , \quad T_1 = \int y^2\, dx\, dy \quad , \quad T_2 = \int x^2\, dx\, dy \\ \text{und endlich} \\ N = \int \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) dx\, dy \end{cases}$$

ist; hierin liegt das folgende Ergebnis: Die in der Längsrichtung des prismatischen Körpers wirkende Kraftkomponente erzeugt eine reine Dehnung, die beiden anderen Komponenten wirken bei den beiden zueinander senkrechten Biegungen der zweiten Art mit; das Drehungsmoment um die Längsachse erzeugt Torsion; die beiden anderen Dehnungsmomente wirken bei Biegungen sowohl der ersten wie der zweiten Art mit.

Schließlich sind noch einige Bemerkungen zur Ergänzung und Fortbildung der Theorie von de Saint-Venant und Clebsch zu machen. Zunächst die, daß die von Clebsch abgeleiteten Differentialgleichungen nicht die allgemeinsten sind, weil in ihnen eine Konstante b gleich null gesetzt ist, die, wie Voigt[1] gezeigt hat, nicht allgemein null gesetzt werden darf, da sie mit den Konstanten b_1 und b_2 in einer Beziehung steht; richtig ist es nur, wenn der Schwerpunkt des Querschnittes der als Befestigungspunkt definierte Koordinatenanfang ist, eine Annahme, die allerdings später gemacht wird. Ferner hat sich in neuerer Zeit eine ganze Reihe von Autoren mit der Darstellung und dem Ausbau der Theorie beschäftigt; es muß genügen, hier die neueste einschlägige Arbeit von K. Soecknick anzuführen, in der auch die Ausdehnung auf heterotrope Körper gemacht wird.[2]

Andere Probleme des elastischen Gleichgewichts. Das de St. Venantsche Problem bezieht sich, wie bemerkt, nur auf prismatische Körper und zieht nur Drucke auf die Endflächen in Betracht. Es sind nun seitdem auch einige andere einschlägige Probleme teils gelöst, teils behandelt worden; sie können hier nur in Kürze aufgeführt werden.

1. Gleichgewicht kurzer zylindrischer Körper, also mäßig dicker Platten, auf die — gerade umgekehrt wie bei St. Venant — nur in den Mantelflächen Kräfte wirken. Dieses Problem ist von Clebsch[3] allgemein behandelt und, teils näherungsweise allgemein, teils für spezielle Querschnittsformen (Kreisplatte) und für spezielle Deformationen (Ausdehnung, Biegung) durchgeführt worden (siehe auch unten bei „Biegung von Platten").

2. Gleichgewicht prismatischer bezw. zylindrischer Körper, auf deren Grundflächen und Mantelflächen Kräfte wirken. Behandelt einerseits von Pochhammer[4] mit Anwendung auf Vollzylinder, Hohlzylinder, gekrümmte Zylinder u. s. w.; andererseits von Mathieu[5], unter der Voraussetzung, daß die Endflächen sich auf feste Wände stützen, und daß die Mantelfläche Normaldrucke erfährt.

3. Gleichgewicht der Kugelschale, einerseits behandelt von Lamé[6], zuerst ohne, dann mit Hinzunahme von Massenkräften (Schwerkraft, Zentralattraktion, Zentrifugalkraft, wenn die Kugel rotiert), andererseits von Sir W. Thomson[7] und

[1] W. Voigt, Wied. Ann. **34.** 1024. 1888. — [2] K. Soecknick, Progr. Königsberg 1904/05. — [3] A. Clebsch, Theorie der Elastizität für Körper. Leipzig 1862. p. 148. — [4] L. Pochhammer, Unters. über das Gleichgewicht des elastischen Stabes. Kiel 1879. — [5] E. Mathieu, Journ. de l'Éc. polytechn. 1881 und C. R. **80.** 1272. 1880. — Siehe auch E. Padova, Nuov. Cim. (3) **10.** 102. 1882. — [6] M. G. Lamé, Liouvilles Journ. p. 19. 1854. und Leçons s. l. coordonnées curvilignes. Paris 1859. p. 299. — [7] W. Thomson, Phil. Trans. **153.** (2) 583. 1864.

im Anschluß an seine Entwickelung von R. HOPPE[1]; endlich nach einer Methode, die der LAMÉschen ähnlich ist, aber auch den Übergang zur Dynamik, d. h. zu elastischen Schwingungen gestattet, von JAERISCH.[2]

4. Gleichgewicht von Rotationskörpern, von WANGERIN[3] gelöst. Im Anschluß an LAMÉ wird zuerst die Schale behandelt, die von exzentrischen Kugeln begrenzt ist, sodann Kreisring und Rotationsellipsoid; schließlich wird gezeigt, daß die Gleichungen für einen beliebigen (homogenen isotropen) Rotationskörper sich integrieren lassen, wenn die Lösung der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ für diesen Körper bekannt ist; damit ist das elastische Problem auf das einfachere Potentialproblem zurückgeführt. Auch dieses Problem ist von JAERISCH im oben schon angedeuteten Sinne erweitert worden.[4]

Endliche Formänderung eines sehr dünnen Stabes. Bei Körpern, die eine oder zwei sehr kleine Dimensionen haben, werden im allgemeinen, selbst wenn die Verschiebungen jedes Volumenelements in sich selbst nach wie vor sehr klein bleiben, die Verschiebungen der einzelnen Elemente sich doch in der Weise addieren, daß die räumliche Verschiebung eines Elements beträchtlich wird. Tatsächlich werden aber hier auch die inneren Verschiebungen eines Elements für sich größer werden können, als bei einem nach allen Richtungen erheblich ausgedehnten Körper. Aus beiden Gründen ist das Problem für sich zu behandeln; seine Lösung verdankt man KIRCHHOFF.[5]

Die Methode beruht auf der Erwägung, daß die inneren Verschiebungen eines sehr kleinen Körpers nur abhängig sind von den auf seine Oberfläche, nicht aber von den auf sein Inneres wirkenden Kräften, vorausgesetzt, daß die letzteren nicht sehr groß gegen die ersteren sind. Darf man also auch die Formeln (4) nicht auf den ganzen Stab anwenden, so darf man dies doch für jeden einzelnen Teil desselben tun; und indem man alsdann das Prinzip der Kontinuität von Teil zu Teil hinzuzieht, gelangt man zu den Formeln für den ganzen Stab. Um diesen Gedanken auszuführen, führt man zwei Koordinatensysteme ein, ein im Raume festes, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt des festen Stabendes, dessen ζ-Achse die Schwerpunktlinie (Achse) des Stabes ist, und dessen ξ- und η-Achse in die Richtungen der Hauptachsen der Querschnitte fallen, alles vor der Deformation gedacht; und ein anderes, dessen Anfangspunkt ein Punkt P der Achse, im Abstand s vom festen Punkte P_0 ist, und dessen Achsen xyz entsprechend wie die des ersten liegen, nur diesmal alles im deformierten Zustand oder, was dasselbe ist, im Körper fest gedacht. Ein nahe bei P gelegener beliebiger Punkt des Stabes habe vor der Deformation die Koordinaten xyz, nachher $x + u$, $y + v$, $z + w$, so daß uvw seine relativen Verschiebungen gegenüber P sind; letzterer Punkt aber habe im ersten System die Koordinaten $\xi\eta\zeta$. Ferner seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Kosinus der neun Winkel zwischen den Achsen beider Systeme, σ die relative Änderung des Achsenelements ds, infolgedessen

$$(13) \qquad \frac{d\xi}{ds} = \alpha_3(1+\sigma) \quad , \qquad \frac{d\eta}{ds} = \beta_3(1+\sigma) \quad , \qquad \frac{d\zeta}{ds} = \gamma_3(1+\sigma) \quad ,$$

und zur Abkürzung werde gesetzt

[1] R. HOPPE, Quart. Journ. of math. **9.** 318. 1871. — [2] P. JAERISCH, CRELLES Journ. **88.** 131; Mitt. math. Ges. Hamburg 1886. **1.** 155. — In derselben Weise wird dann auch das Gleichgewicht des Kreiszylinders ganz allgemein behandelt; ibid. p. 167. — [3] A. WANGERIN, Über das Gleichgewicht elastischer Rotationskörper. Progr. Sophien-R. Sch. Berlin 1873. — [4] P. JAERISCH, CRELLES Journ. **104.** 177. 1889; Mitt. mat Ges. Hamburg 1889. **1.** 275. — An die Stelle obiger Potentialgleichung tritt hier die allgemeine $\Delta u + a^2 u = 0$. — Über den Fall des Kegels siehe noch MEISSNER, Inaug.-Dissert. Tübingen 1882. — [5] G. KIRCHHOFF, CRELLES Journ. **56.** 1858; Ges. Abh. p. 285 und Mechanik. p. 407.

$$
(14)\quad \begin{cases}
\alpha_3 \dfrac{d\alpha_2}{ds} + \beta_3 \dfrac{d\beta_2}{ds} + \gamma_3 \dfrac{d\gamma_2}{ds} = \dfrac{d\alpha'}{ds} = p \quad , \\
\alpha_1 \dfrac{d\alpha_3}{ds} + \beta_1 \dfrac{d\beta_3}{ds} + \gamma_1 \dfrac{d\gamma_3}{ds} = \dfrac{d\beta'}{ds} = q \quad , \\
\alpha_2 \dfrac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2 \dfrac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2 \dfrac{d\gamma_1}{ds} = \dfrac{d\gamma'}{ds} = r \quad .
\end{cases}
$$

Die Kontinuität findet dann ihren Ausdruck in den Gleichungen

$$
\frac{\partial u}{\partial z} = -ry + qz \quad , \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -pz + rx \quad , \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -qx + py + \sigma \quad ;
$$

andererseits liefern die Gleichungen (4), wenn man, was bis auf einen Ausnahmefall erlaubt ist, die mit b_1 und b_2 behafteten höheren Glieder vernachlässigt, für jedes Element die Gleichungen

$$
\frac{\partial u}{\partial z} = cy - a_1 z + d \quad , \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -cx - a_2 z + e \quad , \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad .
$$

Die Vergleichung führt zunächst zu dem Ergebnis:

$$
d = e = 0 \ , \quad \frac{d\alpha'}{ds} = a_2 \ , \quad \frac{d\beta'}{ds} = -a_1 \ , \quad \frac{d\gamma'}{ds} = -c \ , \quad \sigma = a_0 \quad ;
$$

es liefert also σ die Ausdehnung, $d\gamma'/ds$ die Torsion, $d\beta'/ds$ und $d\alpha'/ds$ die Biegungen der ersten Art in der xz- und der yz-Ebene. Mit Hilfe der Gleichungen (11) bis (12a) und wenn man noch zur Abkürzung

$$
\frac{T_1 + T_2 - \dfrac{N}{c}}{2(1+\mu)} = T_0
$$

setzt, erhält man somit

$$
(15)\qquad \sigma = \frac{Z}{Eq} \ , \quad \frac{d\alpha'}{ds} = \frac{M_x}{ET_1} \ , \quad \frac{d\beta'}{ds} = \frac{M_y}{ET_2} \ , \quad \frac{d\gamma'}{ds} = \frac{M_z}{ET_0} \quad .
$$

Nunmehr erhält man unmittelbar die Gleichgewichtsbedingungen, indem man zum Ausdruck bringt, daß für jedes Stabteilchen die Kräfte und Momente sich gegenseitig zerstören müssen. Wirken ausschließlich auf die Grundflächen Kräfte, und bestehen diese nur in Kräftepaaren und einer Axialkraft C, so lautet das Endergebnis für isotrope Stäbe:

$$
(16)\quad \begin{cases}
T_1 \dfrac{dp}{ds} + (T_0 - T_2) q r - \dfrac{\gamma_2 C}{E} = 0 \quad , \\
T_2 \dfrac{dq}{ds} + (T_1 - T_0) r p + \dfrac{\gamma_1 C}{E} = 0 \quad , \\
T_0 \dfrac{dr}{ds} + (T_2 - T_1) p q = 0 \quad .
\end{cases}
$$

Für beliebige Stäbe kann man die Gleichungen in übersichtlicher Form aufstellen, indem man vermöge der Gleichungen

$$
M_x = \frac{\partial f}{\partial p} \ , \qquad M_y = \frac{\partial f}{\partial q} \ , \qquad M_z = \frac{\partial f}{\partial r} \ , \qquad Z = \frac{\partial f}{\partial \sigma}
$$

das elastische Potential des Stabes (p. 525) einführt; sie lauten dann:

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial f}{\partial p} = r\dfrac{\partial f}{\partial q} - q\dfrac{\partial f}{\partial r} + C\gamma_2 \quad , \\ \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial f}{\partial q} = p\dfrac{\partial f}{\partial r} - r\dfrac{\partial f}{\partial p} - C\gamma_1 \quad , \\ \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial f}{\partial r} = q\dfrac{\partial f}{\partial p} - p\dfrac{\partial f}{\partial q} \quad . \end{cases}$$

Kinetische Analogie der elastischen Deformation. Vergleicht man diese Gleichungen mit denen für die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt [s. Art. „Dynamik", p. 348, Gleichung (120 u. 121)], so sieht man, daß sie mit ihnen völlig übereinstimmen, wenn man dort als wirkende Kraft die Schwerkraft einführt, so daß $M_z = 0$ wird, an die Stelle der Zeit t den Abstand s eines Stabquerschnitts vom festen Querschnitt und an die Stelle der kinetischen Energie K die potentielle f setzt. Diese analytische Übereinstimmung ist von KIRCHHOFF entdeckt worden; HESS[1] hat sie alsdann benutzt, um mit Hilfe des Rotationsproblems das elastische Problem eingehend zu behandeln. Dabei entspricht jeder Spezialisierung des einen Problems eine analoge Spezialisierung des anderen. Dem Falle, daß dort die Schwere nicht wirkt oder der Schwerpunkt zugleich der feste Punkt ist, entspricht hier der Fall, daß keine Axialkraft wirkt, also $C = 0$ ist, d. h. der Fall der gleichzeitigen Biegung und Torsion des dünnen Stabes. Den Winkelgeschwindigkeiten um die drei Hauptachsen des Körpers dort entsprechen hier die Torsion um die Längsachse und die Biegungen um die beiden Querachsen. Wie sich dort ein Bild für die Drehung durch das Abrollen zweier Kegel gewinnen läßt, so können hier aus den Größen von Biegung und Drillung zwei windschiefe Flächen erzeugt werden, durch deren sukzessives Aufeinanderbiegen die Überführung des geraden und ungedrillten Stabes in seinen gebogenen und gedrillten Zustand versinnlicht wird. Nur ist das elastische Problem mannigfaltiger als das dynamische, weil hier die drei Fälle zu unterscheiden sind, daß der Widerstand gegen Drillung im Vergleich zu den beiden Biegungswiderständen der kleinste, mittelste oder größte ist; aus demselben Grunde erhält man auch mannigfaltigere Spezialfälle durch Gleichsetzen beider Biegungswiderstände, eines Biegungs- und eines Drillungswiderstandes, aller drei Widerstände u. s. w. Ein anderer Fall, in dem das Rotationsproblem gelöst worden ist, ist der, daß die Schwere wirkt, der Körper aber ein Rotationskörper ist und der feste Punkt auf der Figurachse liegt, d. h. der Fall des Kreisels; demselben entspricht hier die Biegung und Drillung eines dünnen Stabes mit zwei gleichen Widerständen, auf dessen freies Ende eine Kraft und ein um die Hauptachse ungleichen Widerstands drehendes Kräftepaar einwirkt; dabei ist wieder zu unterscheiden, ob die beiden gleichen Widerstände Biegungswiderstände sind oder ob einer von ihnen der Drillungswiderstand ist. Besonders einfach und zugleich wichtig ist der Spezialfall, der dort zum ebenen Pendel, hier zur Biegung des isotropen Stabes in einer Ebene führt; die Gleichungen (16) geben dann als einzige Grundgleichung, wenn φ die Neigung des Elements ds ist,

$$(18)\qquad E T_2 \frac{d^2\varphi}{ds^2} = C \sin\varphi \quad .$$

Die Anwendung der Formeln des Rotationsproblems auf das elastische führt noch nicht zur vollständigen Lösung des letzteren, man muß vielmehr, um

[1] W. HESS, Münch. Ber. 1883. p. 82; Math. Ann. **23.** 181. 1884; **25.** 1. 1885.

tegrationen

$$(19) \qquad \xi = \int \alpha_3 \, ds \quad , \qquad \eta = \int \beta_3 \, ds \quad , \qquad \zeta = \int \gamma_3 \, ds$$

ausführen. Es können hierfür, indem im übrigen auf HESS verwiesen wird, nur zwei Spezialfälle angeführt werden.

Erster Fall: Ebene Deformation. Der erste Fall ist der der einfachen Biegung in einer Ebene; er entspricht (s. oben) dem des ebenen Kreispendels. Durch einmalige Integration der Gleichung ergibt sich

$$(20) \qquad C \cos\varphi + \frac{1}{2} E T \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \text{const}$$

und durch Umkehrung, so daß nicht φ als Funktion von s, sondern s als Funktion von φ dargestellt wird, sowie durch nochmalige Integration:

$$(21) \qquad s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{c - \frac{2C}{ET} \cos\varphi}} \quad ,$$

wo c eine Konstante ist. Zur Diskussion der verschiedenen möglichen Fälle eignet sich am besten die Einführung JACOBIscher elliptischer Funktionen. Der Winkelgeschwindigkeit beim Pendel entspricht hier die Krümmung des Stabes, den Umkehrpunkten des Pendels entsprechen, wenn sie vorhanden, Inflexionspunkte der Kurve, die der Stab bildet; der rotatorischen Bewegung des Pendels (p. 383) entspricht also eine Stabform ohne Inflexionspunkte, so daß man dem Stabe entlang immer in gleichem Sinne (z. B. im Uhrzeigersinne) fortschreitet; dagegen entspricht der schwingenden Bewegung des Pendels eine Stabform mit Inflexionspunkten, so daß man längs des Stabes abwechselnd im Uhrzeigersinne und gegen ihn fortschreitet. Im ersten Falle setze man

$$(22) \qquad \frac{1}{2} ET \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = C \cos\varphi + C\left(1 + 2\,\frac{1 - k^2}{k^2}\right) \quad ,$$

wo k ein echter Bruch ist, oder, mit k als Modul und $u = k^{-1} s \sqrt{\frac{C}{ET}}$ als Argument JACOBIscher Funktionen:

$$(23) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{C}{ET_2}}\, dn(u) \quad , \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = sn(u) \quad ,$$

so daß, wenn I (gewöhnlich mit E bezeichnet), das elliptische Integral zweiter Gattung ist, sich die Koordinaten ξ und η mittels der Gleichungen

$$(24) \qquad \xi = k \sqrt{\frac{C}{ET}} \left[\left(1 - \frac{2}{k^2}\right) u + \frac{2}{k^2} I\, am(u)\right] \quad , \qquad \eta = -\frac{2}{k} \sqrt{\frac{C}{ET}}\, dn(u)$$

durch u ausdrücken. ξ ist die Kraftrichtung, und die Konstanten sind passend gewählt. Die Kurve besteht aus einer Reihe von Schleifen, Figur 187, in deren Doppelpunkten man sich die Stabpunkte praktisch natürlich dicht übereinander liegend zu denken hat; alle Schleifen liegen auf derselben Seite; jede Schleife entspricht einer Umdrehung des Pendels. Nimmt man also nur eine einzige Schleife, deren Enden beiderseits in die Unendlichkeit auslaufen (Figur 188), so hat man den Grenzfall des weder rotierenden noch schwingenden, sondern dem höchsten Punkte sich asymptotisch nähernden Pendels (p. 384); es ist das die schon 1692 von JAKOB BERNOUILLI behandelte elastische Linie. — In dem anderen Falle, mit Inflexionspunkten, schreibe man die Gleichung (20) in der Form

(25) $$\frac{1}{2} ET\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + C(\cos\alpha - \cos\varphi) = 0 \quad ,$$

wo α der Wert von φ für $s = 0$ ist, führe JACOBIsche Funktionen mit

(26) $$u = s\sqrt{\frac{C}{ET}} \quad , \qquad k = \sin\frac{\alpha}{2}$$

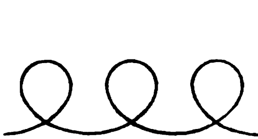
ein, und man erhält, wenn K die reelle Viertelperiode der elliptischen Funktionen ist:

(27) $$\frac{d\varphi}{du} = 2\,k\,cn(u+K) \quad , \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = k\,sn(u+K) \quad ,$$

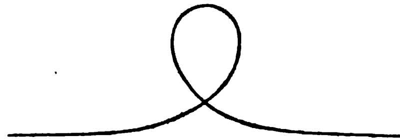
und hieraus die Koordinaten

(28) $$\xi = \sqrt{\frac{C}{ET}}\left[-u + 2\{Iam(u+K) - Iam K\}\right], \quad \eta = -2k\sqrt{\frac{C}{ET}}\,cn(u+K).$$

Je nach dem Werte von α erhält man verschiedene Typen der elastischen Kurve: für ganz kleine Amplituden des Pendels hier wie dort eine Sinuslinie



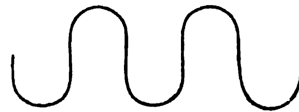
Figur 187.



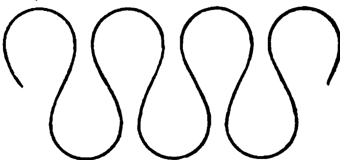
Figur 188.



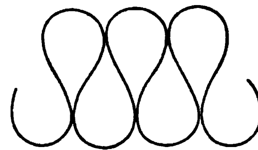
Figur 189.



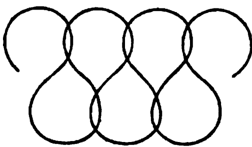
Figur 190.



Figur 191.



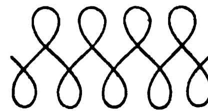
Figur 192.



Figur 193.



Figur 194.



Figur 195.

(Figur 189); für größere die Form der Figur 190, wobei die Kurve die Achse senkrecht schneidet; dann kommen der Reihe nach die Typen der Figur 191 (Ösen), Figur 192 (sich berührende Ösen) und Figur 193 (sich schneidende Ösen), bis schließlich in Figur 194 alle Schleifen sich decken; das tritt etwa bei $\alpha = 130^0$ ein. Wird es noch größer, so erhält man Schleifen, die abwechselnd auf der einen und anderen Seite der Achse liegen, z. B. den Typus der Figur 195; und

ebenso zusammendrückt, und wenn man dabei die Forderung stellt, daß jeder ursprünglich auf der Achse senkrechte Querschnitt auch nach der Deformation auf ihr senkrecht bleibe, so ist das Ergebnis eine Biegung des Stabes nach unten, und für kleine Biegungen (Figur 199) verhält sich, wenn hierbei die elastische Kurve als Kreisbogen betrachtet wird (sonst muß man jedes Stück des Stabes für sich betrachten), der Krümmungsradius ϱ zur Dicke des Stabes b in der Krümmungsebene wie die ursprüngliche Länge des Stabes L zu dem durch die Deformation hervorgerufenen Längenunterschied zwischen der obersten und untersten Schicht, in Formel

(75) $$\varrho : b = L : 2\lambda$$

(λ Verlängerung der obersten Schicht). Ferner kann man in die obigen Biegungsformeln die Verlängerung Γ nach der Formel (vgl. Artikel „Zug und Druck", das dortige K ist hier P)

(76) $$\Gamma = \frac{PL}{Eq}$$

einführen und so die Biegung mit der Dehnung vergleichen; die Formel für die Mitte bei festen Enden und rechteckigem Querschnitt [Gleichung (67)] wird dann z. B.

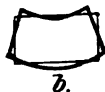
(77) $$S = \frac{L^2}{4b^2} \cdot \Gamma \quad ,$$

d. h. das Verhältnis $S : \Gamma$ ist nur vom Verhältnis $L : b$ abhängig.

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann, die elementaren Biegungsgesetze aus den entsprechenden Gesetzen von Zug und Druck ableiten.

Querbiegung. Da die Biegung mit einer Längenänderung der einzelnen Schichten verknüpft ist, die letztere aber zugleich eine Querdeformation dieser Schichten bedingt (siehe Artikel „Zug und Druck", p. 549), so folgt, daß auch die Längsbiegung von einer Querbiegung begleitet ist. Wie dort der Längsdehnung eine Querkontraktion und umgekehrt entspricht, so entspricht hier einer Längsbiegung mit der Konvexität nach unten eine Querbiegung mit der Konvexität nach oben. Ist z. B. ein Stab von rechteckigem Querschnitt mit beiden Enden nach unten gebogen (Figur 200 *a*), so erhält der Querschnitt gleichzeitig die Form, die in Figur 200 *a* durch die Schattierung, in Figur 200 *b* noch besonders dargestellt ist; die obere und untere Grenzfläche werden dadurch antiklastische oder sattelartige Flächen[1], die Seitenflächen geneigte Ebenen; mit einem Kautschukstab kann man dies dem bloßem Auge sehr deutlich sichtbar machen. Die Querkrümmung steht, wie die obigen Betrachtungen sowie die ST. VENANTschen Ausdrücke für v und w in den Gleichungen (9) lehren, zur Längskrümmung (abgesehen vom umgekehrten Zeichen) im Verhältnis μ, d. h. im Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation. Bei der weiteren Untersuchung dieser Erscheinung und der Biegung überhaupt hat man zu unterscheiden, in welchen Größenverhältnissen ϱ, a und b (Krümmungsradius, Breite





Figur 200.

[1] THOMSON u. TAIT, Theoret. Physik I. 96.

und Dicke) zueinander stehen; namentlich treten, wenn ϱ nicht sehr groß gegen a und b, oder wenn a groß gegen b und ϱ nicht sehr groß im Vergleich zur dritten Proportionale zu b und a ist, Abweichungen von der normalen Theorie und demgemäß auch abweichende Erscheinungen auf.

Auf diese, zuerst von THOMSON und TAIT angeschnittene Frage ist dann LAMB näher eingegangen und hat gezeigt, daß man, auch wenn b gegen a sehr klein ist, doch für beliebige Werte der Größe $a^2/b\varrho$ eine Lösung konstruieren kann, wenn man die Annahme, die Mittelfläche erfahre keine Ausdehnung oder Zusammenziehung, fallen läßt; es muß aber an dieser Andeutung genügen.[1]

Experimentelle Untersuchung der Biegung von Stäben. Das Material wird in die für die Versuche vorgesehene Form gebracht, also in Stab- oder Draht- oder Streifenform. Die Querdimensionen müssen überall gleich groß sein und müssen sehr sorgfältig bestimmt werden; namentlich gilt das für die Dicke, d. h. die in die Biegungsebene fallende Querdimension, da diese in der dritten Potenz in die Formeln eingeht, ein bei ihrer Bestimmung gemachter Fehler sich also verdreifacht; man muß entweder sehr gute Dickenmesser anwenden und den Mittelwert aus sehr vielen Bestimmungen an verschiedenen Stellen nehmen, oder indirekte (optische u. s. w.) Methoden anwenden oder, bei Kreisquerschnitt, den Querschnitt durch Wägung und Benutzung des spezifischen Gewichts berechnen, was aber voraussetzt, daß die Probe wirklich das benutzte spezifische Gewicht hat. Diejenigen Enden des Stabes, welche fest sein sollen, werden in Schraubstöcke eingeklemmt oder in Wandung eingegipst oder dergleichen; diejenigen Enden, die bloß unterstützt werden sollen, werden auf Lager auf- oder in leichte Rinnen eingelegt; in manchen Fällen soll auch die Mitte festgelegt werden und die Enden frei bleiben; hierüber und über mancherlei anderes wird man von Fall zu Fall Bestimmungen treffen. Die Biegung erfolgt entweder durch Druckschrauben oder, in allen Fällen, wo das biegende Moment bekannt sein soll, durch Gewichte; die zu ihrer Aufnahme dienende Schale wird an der betreffenden Stelle — meist Mitte oder Enden — mittels Hülse und Haken angehängt; in besonderen Fällen wird man künstliche Methoden anwenden, z. B. Aufgießen von Quecksilber oder elektromagnetischen Zug u. s. w. Das vollständige Problem besteht in der Feststellung der ganzen von dem Stabe angenommenen Kurve, die man zu diesem Zwecke entweder in ihren einzelnen Teilen ausmißt oder graphisch oder photographisch aufnimmt, um dann die Messungen an dem Bilde vornehmen zu können. Meist handelt es sich nur um die Messung der Senkung der belasteten Stelle (die meist größer sein wird als die irgend einer anderen Stelle), man nennt diese Größe häufig den „Biegungspfeil“. Um ihn genau zu bestimmen, mißt man entweder kathetometrisch oder mittels einer Mikrometerschraube und einer Spitze, in die diese ausläuft, indem man sie stets in derselben Weise mit der gesenkten Stabstelle in Berührung bringt; oder endlich man wendet die Methode von Spiegel und Skale an, wobei man unmittelbar allerdings nicht die Senkung, sondern die durch die Biegung erzeugte Neigung der Stabstelle, an der der Spiegel angebracht ist, erhält. Es hat sich gezeigt, daß diese Neigungsmessung der direkten Senkungsmessung für die meisten Zwecke weitaus vorzuziehen ist, und sie ist deshalb auch am besten wissenschaftlich durchgebildet worden.

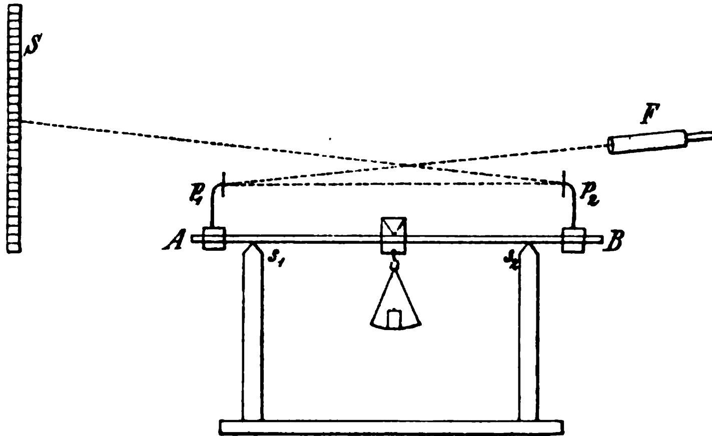
Am empfindlichsten ist wohl das von KÖNIG beschriebene Verfahren, bei welchem man das Bild der vertikal, ein wenig seitwärts von der Stabrichtung aufgestellten Skala (Figur 201) durch einen am entgegengesetzten Stabende angebrachten Spiegel, von diesem wiederum ein Bild durch den am anderen Stabende angebrachten Spiegel entwirft, und dieses Bild in dem hinter dem ersten

[1] THOMSON u. TAIT, Theoret. Physik, § 717. — H. LAMB, Mem. and Proc. Manch. Phil. Soc. (4) 3. 216. 1889.

Spiegel aufgestellten Fernrohr beobachtet; ist dann D der Abstand zwischen der Skala und dem Spiegel p_2, d der Abstand zwischen beiden Spiegeln und v die Verschiebung des Skalenbildes im Fernrohr, so hat man

(78) $$v = \frac{3}{2} \frac{PL^2(2D + d)}{Eab^3} \quad .$$

Die KÖNIGsche Methode ist später mehrfach, u. A. von WINKELMANN und SCHOTT angewandt worden und hat durch diese in zwei Richtungen Ergänzungen erfahren. Erstens setzt die obige Formel voraus, daß der auffallende Strahl sehr nahezu horizontal sei; bei Anwendung kleineren Schneidenabstands (bei WINKEL-



Figur 201.

MANN und SCHOTT nur 100 mm gegen 500 bei KÖNIG), wie er aus Materialgründen meist gewählt werden muß, ist das aber, da der Strahl bei dem ersten Spiegel vorbei muß, nicht mehr erreichbar. Es muß dann eine kleine Korrektion angebracht werden, und zwar wird, wenn α die Neigung des Strahles gegen die Horizontale ist:

(79) $$v = \frac{3L^2}{ab^3} \cdot \frac{P}{E + P\operatorname{tg}\alpha} \left(D[1 + \operatorname{tg}^2\alpha] + \frac{d}{2} \right) \quad ;$$

da somit P/v nicht mehr konstant ist, wird die Rechnung immerhin etwas weitläufig. Man kann das umgehen, wenn man den Strahl am ersten Spiegel nicht oben, sondern rein seitlich vorbeigehen läßt, so daß der an ihm reflektierte Strahl den zweiten Spiegel unter dem kleinen Inzidenzwinkel β trifft; dann besteht die Korrektion sehr einfach darin, daß man die beobachtete Skalenverschiebung v durch die korrigierte

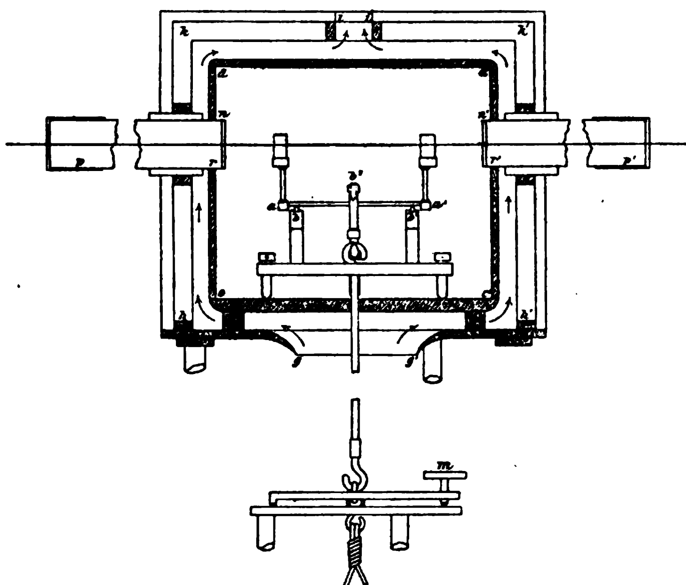
$$v' = \frac{v}{\cos\beta}$$

ersetzt; richtet man es so ein, daß der Strahl an dem ersten Spiegel nur eben vorbei kann, und ist e die Breite des Spiegels, so ergibt sich β aus der Gleichung

$$\sin\beta = \frac{e}{2d} \quad .$$

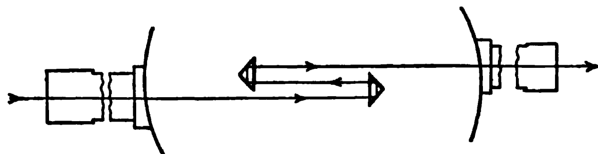
Da bei den in Rede stehenden Versuchen $d = 110$ mm, $e = 15$ mm war, so wird $\cos\beta = 0{,}99765$, der Einfluß der Korrektion also nur knapp $^1/_4$ Prozent. — Zweitens handelt es sich um die Anpassung des Apparats an die Erfordernisse, wie sie sich für die Messung bei hohen Temperaturen geltend machen. Die

Heizvorrichtung ist aus der Figur 202 zu ersehen; *cc'* ist eine Eisenplatte, *dd'* eine Kupferplatte, beide sind durch einen Kupferzylinder verbunden; Wandung und Deckel sind mit Asbestpappe umgeben, der äußere Mantel *hkh'k'* ist doppelwandig und aus Eisenblech; der Lauf der Heizgase ist durch Pfeile angedeutet. —



Figur 202.

Sehr schwierig gestaltete sich die Spiegelfrage: die von ihnen gelieferten Bilder wurden durch die Hitze sehr schnell unleserlich. Es wurden deshalb an Stelle der Spiegel Glasprismen benutzt, in der seither durch die Zeißfeldstecher sehr bekannt gewordenen Anordnung, Figur 203, zu welchem Zwecke allerdings die

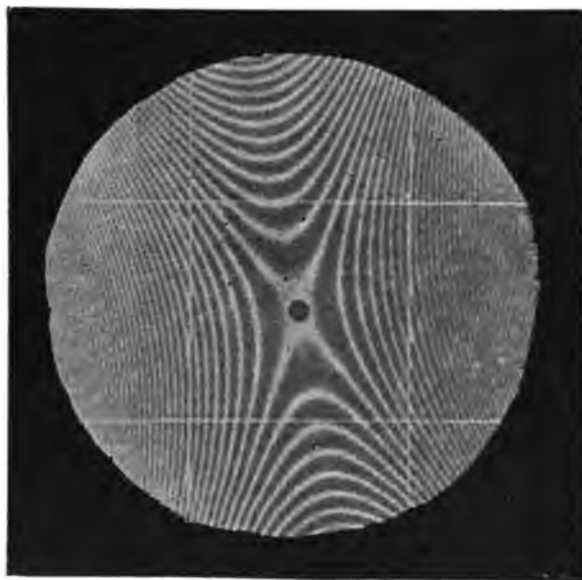


Figur 203.

beiden Rohre *pp'* etwas gegeneinander verschoben werden mußten. Da nunmehr nur Glas zur Anwendung kam, sowie mit Rücksicht auf die totale Reflexion und die gute Politur der abschließenden Glasplatten *nn'* ergaben sich jetzt tadellose Bilder.

Ferner ist die **optische Interferenzmethode** zu nennen, die von Cornu zuerst ersonnen, von Koch u. A. benutzt, aber erst von Straubel auf die Höhe exakter Messung gebracht ist. Bringt man über die Oberfläche eines ursprünglich horizontalen, durch Kräfte an den Enden durchgebogenen Streifens aus durchsichtigem Material eine ebene Glasplatte, so beobachtet man, da der Streifen in der Umgebung des Berührungspunktes eine Sattelfläche bildet, ein Interferenzliniensystem in der Gestalt von Hyperbeln, und diese erlauben, aus ihren geometrischen Konstanten Schlüsse auf die Biegungsverhältnisse zu ziehen: durch Messung der Abstände der Interferenzstreifen in der Stabrichtung erhält man die Biegung, durch entsprechende Messung in der Querrichtung die Querbiegung, durch Vergleichung beider das Verhältnis der beiden Biegungen, letzteres aber direkter und zuverlässiger durch Bestimmung des Asymptotenwinkels der Hyperbeln.

sondern nur um relative Bestimmungen handelt, besser durch Schrauben. An Stelle der oberen planparallelen Platte wird zur Vermeidung von Reflexen besser eine schwach keilförmige benutzt. Die Ausmessung der Hyperbeln erfolgt mit einem Dilatometer, sei es direkt, sei es auf zu diesem Zwecke hergestellten Photogrammen, von denen Figur 204 eine Anschauung gibt (Kopie nach STRAUBEL). Schließlich sei erwähnt, daß die Flächen vor der Biegung gut eben sein müssen, weil sonst der Winkel nicht konstant bleibt, sondern sich mit der Belastung einseitig ändert. STRAUBEL hat die Methode auch auf undurchsichtige, SEGEL sogar auf weiche Stoffe (Paraffin und Wachs) angewandt.



Figur 204.

Endlich ist auf die polariskopischen Methoden wenigstens kurz hinzuweisen, die in der Optik näher untersucht werden, und bei denen man die Deformationen durchsichtiger Stäbe in ihren einzelnen Längs- und Querteilen durch Beobachtung der Polarisationserscheinungen, eventuell unter Hinzuziehung der Doppelbrechung, verfolgen kann. Es muß genügen, hier auf eine Arbeit von WILSON hinzuweisen, bei der dieses Verfahren auf die Biegung von Stäben angewandt wird, sowie auf eine interessante Methode, die SIEDENTOPF im Anschluß an HÖNIGSBERG ersonnen hat, durch Beobachtung mit rotierenden Nicols, die neutrale Schicht an beanspruchten, insbesondere gebogenen Körpern durchsichtiger Natur direkt sichtbar zu machen und zu photographieren.

Bei allen Versuchen über Biegung ist ferner, wie überhaupt bei allen elastischen Untersuchungen, das zeitliche Moment in Betracht zu ziehen, d. h. man muß sich darüber klar werden, ob es mit Rücksicht auf den Zweck der Untersuchung angezeigt erscheint, die Belastung vorsichtig oder mit Entschiedenheit vorzunehmen, die Senkung sofort oder erst nach einiger Zeit abzulesen u. s. w.; allgemeines läßt sich hierüber nicht gut sagen, man findet aber in der experimentellen Literatur eingehende Erörterungen über diese Fragen. — Schließlich muß man, um zu einfachen Gesetzen zu kommen, die Biegung in mäßigen Größen halten und die Versuche symmetrisch anordnen, d. h. nicht bloß mit auf-, sondern auch mit absteigender Biegung arbeiten und die etwaigen Differenzen durch Mittelwertbildung beseitigen.[1]

Gesetze der Biegung von Stäben. Die auf eine der erwähnten Arten

[1] G. KIRCHHOFF, Ges. Abhandl. p. 316. — W. PSCHEIDL, Rep. d. Phys. **19.** 178. 1883. — A. KÖNIG, WIED. Ann. **28.** 108. 1886. — A. WINKELMANN u. O. SCHOTT, ibid. **51.** 697 1894. — A. WINKELMANN, ibid. **61.** 104. 1897. — M. A. CORNU, C. R. **69.** 333. 1869. — R. KOCH, WIED. Ann. **5.** 251. 1878. — R. STRAUBEL, ibid. **68.** 369. 1899 (vgl. auch ibid. **64.** 794. 1898). — M. S. SEGEL, Physik. Ztschr. **1.** 126. 1899. — C. A. CARUS WILSON, Phil. Mag. (5) **32.** 481. 1891. — O. HÖNIGSBERG, Ztschr. öst. Ing.-Ver. 1904. Nr. 11. — H. SIEDENTOPF, ibid. 1906. Nr. 33. — A. WASSMUTH, WIED. Ann. **13.** 182. 1904 (gleichförmige Biegung); Physik. Ztschr. **6.** 755. 1905; Wien. Ber. **115.** 223. 1906 (Abkühlung).

durchgeführten Versuche haben zur Bestätigung der wichtigsten Resultate der Biegungstheorie geführt, insbesondere haben sich folgende einfache Gesetze ergeben:

1. Der Biegungspfeil ist dem biegenden Gewicht proportional.

2. Der Biegungspfeil ist dem Elastizitätsmodul des Materials umgekehrt proportional.

3. Der Biegungspfeil ist dem Kubus der Länge proportional.

4. Der Biegungspfeil ist von der Größe des Querschnitts und zwar von seiner Breite und Höhe in verschiedenem Maße abhängig. Mit der Breite (senkrecht zur Biegungsebene) ist er einfach umgekehrt proportional, wobei die biegende Gesamtkraft als gegeben angenommen ist; bei gegebener biegender Kraft pro Einheit der Breitendimension ist die Biegung also von der Breite unabhängig (vgl. das Entsprechende bei der Dehnung, wo es sich aber auf beide Querdimensionen, also auf die dehnende Kraft pro Einheit des Querschnitts bezieht). — Von der Höhe des Querschnitts (in der Biegungsebene) ist der Biegungspfeil dagegen in weit stärkerem Maße abhängig, er ist nämlich mit ihrem Kubus umgekehrt proportional; scheidet man hiervon, indem man die biegende Kraft pro Einheit der Höhendimension als gegeben ansieht, eine Potenz aus, so bleibt immer noch ein selbständiger Einfluß des Quadrats der Höhe übrig, der offenbar den Einfluß des Trägheitsmoments des Querschnitts darstellt.

5. Der Biegungspfeil ist von der Form des Querschnitts abhängig, nämlich mit seinem Trägheitsmoment umgekehrt proportional. Er ist also beim Kreis mit der vierten Potenz des Radius, beim Quadrat mit der vierten Potenz der Seite, beim Ring mit der Differenz der vierten Potenzen der Radien u. s. w. umgekehrt proportional. Außerdem kommen noch für jede Form typische Zahlenfaktoren hinzu. So wird z. B. bei gleicher Größe des Querschnitts der quadratische Stab im Verhältnis von $3:\pi$ schwächer gebogen als der runde Stab, und ein Stab mit rechteckigem Querschnitt wird ebenso stark gebogen wie ein runder mit gleich großem Querschnitt, wenn die Dicke zur Höhe sich wie $3:\pi$ verhält. Aus den obigen Beziehungen ergeben sich durch Kombination noch folgende interessante Sätze: Werden, bei gleichbleibender Breite, Länge und Höhe des Stabes in gleichem Maße gesteigert, so bleibt die Biegung absolut gleich groß; werden dagegen, bei gleichbleibendem Querschnitt, wiederum Länge und Höhe in gleichem Maße gesteigert, so wird die Biegung in gleichem Maße größer, d. h. die neue Konfiguration ist der alten ähnlich. Anders ausgedrückt: Bei gleichbleibender, auf die Breiteneinheit wirkender Kraft bleibt bei gleichmäßiger Vergrößerung der Stabdimensionen die Biegung sich gleich; bei gleicher, auf die Querschnittseinheit bezogener Kraft dagegen bleibt sich die Biegung ähnlich. Es gilt das aber nur für die Belastungsstelle; die Kurve selbst wird spezifisch anders.

6. Der Biegungspfeil am freien Ende, wenn das andere fest ist, der Biegungspfeil in der Mitte, wenn die Enden aufgestützt sind, und der Biegungspfeil in der Mitte, wenn die Enden fest sind, verhalten sich bei gleicher Stablänge wie $4:\frac{1}{4}:\frac{1}{16}$ (also wie $64:16:1$).

7. Der Widerstand gegen Biegung verhält sich in allen obigen Fällen reziprok wie die Senkung und ist außerdem dieser umgekehrt proportional.

8. Die Gestalt des Stabes hängt von der Versuchsanordnung und von der besonderen Art der Beanspruchung (durch Kraft oder Kräftepaar) ab. Bei einem freien oder zwei lose aufgestützten Enden kann die Kurve in erster Annäherung, wenn ein relativ nur kurzes Stück derselben ausgebildet ist, entweder ein Kreis („Kreisbiegung") oder eine Parabel sein; bei fest eingeklemmten Enden wird sie eine Kurve dritter Ordnung mit zwei Inflexionspunkten.

9. Mit der Längsbiegung ist eine dem Vorzeichen nach entgegengesetzte, d. h. nach oben konkave, der Größe nach schwächere Querbiegung verknüpft, die im übrigen ganz entsprechenden Gesetzen unterliegt, und deren Verhältnis zur Längsbiegung für kleine Beanspruchungen daher konstant ist.

10. Die Biegung ist mit einer Dehnung der oberen und einer Zusammenziehung der unteren Schichten verknüpft; im gebogenen Zustande befinden sich also jene im Zustande der Spannung, diese in dem des Druckes. Dehnung und Spannung sind mit dem Abstande von der Mittellinie proportional.

Bestimmung von Modul und Elastizitätszahl aus Biegungsversuchen. Nach dem Gesagten existiert ein besonderer Biegungsmodul nicht, bezw. seine Einführung ist, mit Rücksicht auf seine offensichtige einfache Beziehung zum Dehnungsmodul, überflüssig. Dagegen werden sich ebendeshalb Biegungsversuche sehr gut dazu eignen, den Elastizitätsmodul zu bestimmen, sie werden sogar gegenüber den direkten Dehnungsversuchen mancherlei Vorteile haben, so den, daß man nicht mit so langen Proben des Materials zu arbeiten braucht und demgemäß auch mit kleineren Räumlichkeiten ausreicht. In der Tat sind zahlreiche, vielleicht die meisten und exaktesten Bestimmungen von E durch Biegung erzielt worden, und zwar durch die verschiedensten der oben erwähnten Anordnungen, ein freies, zwei lose oder zwei feste Enden. Der letzte Fall ist sogar der älteste, er hat unter dem Namen der 's GRAVESANDEschen Methode[1] eine Rolle gespielt und hat noch in neuerer Zeit zu lebhaften Diskussionen Anlaß gegeben. Die Theorie dieses Falles ist von KIRCHHOFF (Vorl. 29, § 3) streng entwickelt worden aus der Gleichung

$$\frac{d^4x}{dz^4} = h^2 \frac{d^2x}{dz^2} \quad , \tag{80}$$

wo h eine gewisse, von Querschnitt, Trägheitsmoment und geometrischer Konfiguration abhängige Konstante ist; die Lösung ist natürlich exponentiell, aber von sehr verwickelter Form. Es müssen daher große Vernachlässigungen vorgenommen werden, und auch dann setzt sie noch die Kenntnis der Dehnung voraus, die mit der Biegung verknüpft ist. Nachdem sich in der Tat gezeigt hatte, daß die Anwendung der direkten Formel nicht zu brauchbaren Werten führt, hat man eine Differentialformel benutzt, die angeblich für dünne Drähte genau sein soll, und die nach einer Angabe in älteren Auflagen von KOHLRAUSCHs Leitfaden der praktischen Physik

$$E = \frac{L^3}{8q} \frac{\frac{p'}{s'} - \frac{p}{s}}{s'^2 - s^2} \tag{81}$$

lautet ($p\,s$ und $p'\,s'$ zwei zusammengehörige Wertepaare von Gewicht und Senkung). Die Formel ist insofern sehr eigentümlich, als sie zur Bestimmung einer Größe führen soll, die auf der Proportionalität von Beanspruchung und Veränderung beruht, während sie doch gerade für diesen Fall überhaupt nur den Wert null liefert. Die Formel kann also nur zu einer indirekten Bestimmung auf Grund des wachsenden Biegungswiderstandes eines beiderseits festgeklemmten Stabes führen, — man vergleiche hierzu z. B. Versuche von STRADLING —, entbehrt aber doch zu sehr der exakten Begründung und ist deshalb auch aus dem Buche von KOHLRAUSCH wieder verschwunden.

Es bleiben die anderen Methoden übrig, und unter diesen nimmt die KÖNIGsche, namentlich in der WINKELMANNschen Vervollkommnung, die erste Stelle ein. Die obigen Formeln sind dann einfach nach E aufzulösen, und es erübrigt sich weiteres darüber zu sagen.

---

[1] Wegen der sogenannten 's GRAVESANDEschen Methode ('s GRAVESANDE selbst hat sie in diesem Sinne nicht benutzt, er hat nur einige angenäherte Gesetze aufgestellt) vgl. A. OBERBECK, WIED. Ann. **37.** 529. 1889. — E. TACKE, Inaug.-Diss. Greifswald 1889. — G. STRADLING, WIED. Ann. **41.** 330. 1890. — In neuester Zeit ist die Methode wieder aufgenommen worden von C. H. LEES und R. E. GRIME, Phil. Mag. (6) **9.** 258. 811. 1905.

In entsprechender Weise ist die CORNU-STRAUBELsche Methode in vorzüglichem Maße zur Messung des Verhältnisses der Querbiegung zur Längsbiegung, also der Elastizitätszahl, geeignet. Es können hierzu entweder Abstandsmessungen an den Interferenzstreifen dienen oder, bequemer und besser, die Messung des Asymptotenwinkels der Hyperbeln. Ist dieser 2φ, und wählt man denjenigen der beiden Winkel, der die zur Biegungsebene Senkrechte enthält, so hat man einfach:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \mu \quad ; \tag{82}$$

wählt man den anderen, so erhält man statt μ offenbar $1/\mu$. In bezug auf die Einzelheiten ist auf die Arbeit von STRAUBEL zu verweisen.

Die durch Biegungsversuche gefundenen Werte von E und μ unterscheiden sich nicht stärker von den durch Dehnung gewonnenen, als diese oder jene unter sich, die Identität ist damit bewiesen. Das Material ist denn auch schon in den Tabellen des vorigen Artikels mit verwertet worden. Nur sei bei dieser Gelegenheit noch folgendes bemerkt. Der Modul E hängt natürlich, auch aus Biegungsbeobachtungen abgeleitet, von der Temperatur t ab, und dem entspricht nach der thermodynamischen Reziprozität eine Temperaturänderung durch Biegung. WASSMUTH (a. a. O.) hat diese Abkühlung experimentell nachgewiesen und daraus rückwärts dE/dt berechnet, in guter Übereinstimmung mit den direkt ermittelten Werten (s. oben p. 564).

Abweichung vom Hookeschen Gesetz. Nachdem sich bei der Dehnung Abweichungen von der Proportionalität zwischen Beanspruchung und Dehnung gezeigt haben (p. 571), müssen sich solche bei der Biegung natürlich auch feststellen lassen; denn beide stellen dasselbe, nämlich eine Abnahme des Moduls mit wachsender Beanspruchung dar. Die älteren Versuche dieser Art fielen aber negativ aus, und auch WESTON konnte keine Abweichung von der Proportionalität feststellen, obgleich er seine Stahl-, Kupfer- und Messingstäbe bei aufgelegten Enden in der Mitte einmal durch sehr kleine Gewichte — 0,5 bis 2 g —, dann durch relativ sehr große — 50 bis 200 g — bog; er erhielt in beiden Reihen Werte des Moduls, die sich nur um Größen innerhalb der Beobachtungsfehler unterschieden. Erfolg haben erst die Versuche von F. KOHLRAUSCH und GRÜNEISEN gehabt, und durch diese wurde zugleich noch eine weitere Frage entschieden. Die Versuche wurden nämlich angestellt in der ausgesprochenen Absicht, zu entscheiden, ob man jene Abweichung durch Beihaltung des linearen und Hinzufügung eines zweiten Gliedes darstellen könne oder ob man zu einer Exponentialformel nach BACH seine Zuflucht nehmen müsse. Es hat sich gezeigt, daß das erstere der Fall ist. Wenn nämlich kleine Biegungen den Kräften proportional gefunden werden, so spricht das — von einem sehr unwahrscheinlichen Falle, betreffend das Verhalten der gedehnten und der zusammengezogen Fasern abgesehen — gegen das Exponentialgesetz. Die Stäbe wurden hochkant gelegt (Höhe 20, Breite 2 mm), die Enden lose aufgelegt, beobachtet wurde die Neigung eines Spiegels. Für Schmiedeeisen ergab sich Proportionalität, für Schiefer ebenfalls; für Messing genügte ein ganz kleines quadratisches Korrektionsglied. Für Gußeisen war die Abweichung, wie bei der Dehnung, erheblicher; an einem 922 mm langen Stabe wurden für die Belastungen x die Senkungen y gemessen:

x	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20	50 g
y	0,47	0,93	2,36	4,78	9,59	24,1	48,3	97,4	248,1 mm
y/x	4,70	4,65	4,72	4,78	4,80	4,82	4,83	4,87	4,96

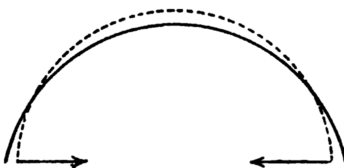
Wie man sieht, findet für kleine Kräfte deutliche Proportionalität, alsdann merkliches Wachsen statt; letzteres läßt sich völlig genügend darstellen, wenn man zu dem linearen Gliede eines mit der $^3/_2$-Potenz von x hinzufügt (ein

quadratisches dürfte auch nicht viel größere Fehler ergeben). Auch die Versuche von BACH selbst werden zum Teil durch die algebraische Formel besser dargestellt als durch die exponentielle. — In theoretischer Hinsicht entsteht nun freilich eine neue Schwierigkeit. Die von VOIGT entwickelte erweiterte Theorie (p. 536), die ein Potential dritten Grades zugrunde legt, führt nämlich zwar für die Dehnung, nicht aber für die Biegung zu Abweichungen von der Proportionalität; um diese zu erhalten, müßte man also noch Glieder vierten und eventuell höheren Grades aus den Invarianten der Deformationen bilden; die Ausführung der bezüglichen, begreiflicherweise schwierigen Integrationen ist aber zwecklos, solange die Beobachtungen nicht zur Bestimmung aller Konstanten ausreichen.

Bei Gesteinen und ähnlichen Stoffen scheint die Abweichung von der Proportionalität zum Teil nicht unbeträchtlich zu sein. Es sei in dieser Hinsicht beispielsweise auf die auch sonst sehr reichhaltigen Versuche von KUSAKABE über die Biegung einiger dreißig Gesteinsarten hingewiesen. Bei ihnen nimmt der Modul schon für kleine Biegungen deutlich ab, erreicht ein Minimum und wächst dann wieder.[1]

Übrigens hat neuerdings MORROW auch Abnormitäten hinsichtlich der Querbiegung aufgefunden, und zwar bei einem an den Enden lose aufgelegten, in der Mitte belasteten Stabe von rechteckigem Querschnitt. Die Zu- und Abnahme der Querschnittsbreite an gleich hoch über und unter der Mittelfläche gelegenen Stellen ergab sich nicht als gleich, und die Differenz wuchs mit der Belastung; bei stärkeren Belastungen war auch die Querdilatation der Mittelfläche nicht mehr null. Schließlich hat MORROW die Frage, ob und inwieweit die Querdilatation proportional ist der an derselben Stelle zum Querschnitt normalen Kraft, in der Weise direkt geprüft, daß er Eisenstäbe von kreisförmigem Querschnitt in Richtung der Längsachse dehnte oder zusammendrückte; es stellte sich nicht in allen Fällen eine genaue Proportionalität heraus.

Biegung ursprünglich gekrümmter Stäbe. Diese Frage ist schon oben berührt worden. Ein reines Biegungsproblem liegt nur dann vor, wenn die ursprüngliche Kurve von einfacher Krümmung ist und die Biegung in der Ebene dieser Krümmung erfolgt. Es ist das der oben bereits erwähnte Spezialfall; des näheren auf das allgemeine Problem einzugehen, verbietet der Mangel an Raum.[2] Es ist aber wenigstens der einfachste und wichtigste Fall, nämlich der des kreisförmig gebogenen Stabes kurz zu erwähnen. Am einfachsten gestalten sich die Dinge natürlich für Biegung in der Kreisebene und für eine Querschnittsform, bei der eine Hauptachse in diese Ebene fällt. Ist B das Biegungsmoment, r der Kreisradius, Θ der Polarwinkel für irgend einen Stabpunkt und 2α, d. h. $\Theta = -\alpha$ bis $\Theta = +\alpha$ die Spannweite des Kreisbogens, sind ferner u und v die Verrückungen in radialer Richtung nach innen bezw. in tangentialer Richtung nach wachsendem Θ, und sind endlich U und V die entsprechenden Kraftkomponenten, so hat man, unter der Voraussetzung, daß die Mittellinie unausgedehnt bleibt, die Grundgleichungen:



Figur 205.

$$(83) \qquad u = \frac{dv}{d\Theta} \quad , \quad \frac{B}{r^3}\left(\frac{d^6v}{d\Theta^6} + 2\frac{d^4v}{d\Theta^4} + \frac{d^2v}{d\Theta^2}\right) = r\left(\frac{dU}{d\Theta} - V\right) \quad .$$

Diese Formel ist von LAMB aufgestellt und auf einige Fälle angewandt worden. Greifen z. B. an den Enden kleine Kräftepaare L an, so bleibt der

[1] S. KUSAKABE, Tokyo K. **2.** 142. 1904. — C. BACH, vgl. oben p. 573. — F. KOHLRAUSCH und E. GRÜNEISEN, Berl. Ber. 1901. p. 1086. — Vgl. auch C. BACH, Ztschr. Ver. d. Ing. **46.** 1901. — C. P. WESTON, Phys. Rev. **8.** 297. 1899. — J. MORROW, Proc. Roy. Soc. **73.** 13. 1904. — [2] Vgl. die zitierten Arbeiten von KIRCHHOFF, CLEBSCH und HESS.

Stab kreisförmig, aber der Radius wird um den Bruchteil Lr/B verkleinert, der Spannwinkel entsprechend vergrößert. Greifen an den Enden entgegengesetzte Kräfte R an, so wird:

$$v = -\frac{r^3 R}{B}\Theta\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\Theta\right) \quad . \tag{84}$$

Man vergleiche hierzu Figur 205. — Hat man einen vollen Kreis, und greifen an diametral gegenüberliegenden Stellen kleine und entgegengesetzt gleiche Kräfte X an, so findet man, natürlich für beide Hälften ganz symmetrisch (diesen Fall hat schon SAINT-VENANT behandelt):

$$v = -\frac{r^3 X}{B}\left[\frac{\Theta}{\pi} - \frac{1}{2}\left(1 - \cos\Theta - \frac{1}{2}\Theta\sin\Theta\right)\right] \quad , \tag{85}$$

und hieraus u durch Differentiation; insbesondere beträgt die Verkürzung des Druckdurchmessers

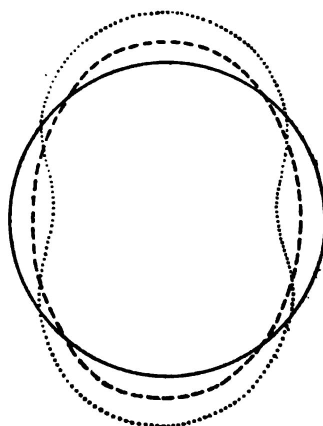
$$\frac{\pi^2 - 8}{4\pi}\,\frac{r^3 X}{B} \tag{86}$$

und die Verlängerung des darauf senkrechten Durchmessers

$$\frac{4 - \pi}{2\pi}\,\frac{r^3 X}{B} \quad , \tag{87}$$

also das Verhältnis der „Querdilatation" zur „Längskontraktion":

$$\mu' = \frac{8 - 2\pi}{\pi^2 - 8} = 0{,}92 \quad . \tag{88}$$



Figur 206.

Für größere Kräfte gilt die Formel natürlich nicht mehr, auch geht alsdann der Stab aus der Ellipsenform, die er annähernd angenommen hatte, in eine neue mit Einschnürungen an den Druckstellen über (Figur 206).[1]

Ein anderer Fall ist der eines aufgehängten und durch sein eigenes Gewicht V gebogenen Kreisringes; man findet:

$$v = -V\frac{r^3}{8\pi B}\left[(\Theta - \pi)^2\sin\Theta - 4(\Theta - \pi)(1 - \cos\Theta) - \pi^2\sin\Theta\right] \quad ; \tag{89}$$

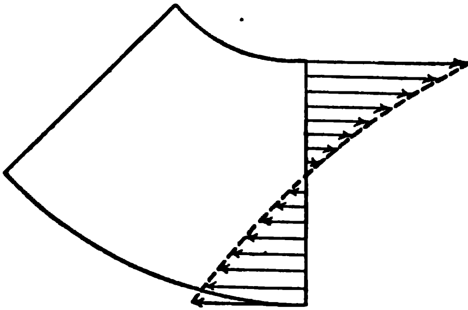
die Verlängerung des vertikalen und die Verkürzung des horizontalen Durchmessers ist halb so groß, wie wenn das ganze Gewicht im tiefsten Punkte angriffe. — Diese und andere Fälle sind besonders wichtig für die Anwendung auf Bögen, Kettenglieder u. s. w.

Für gekrümmte Stäbe mit größerem Querschnitt erhebt sich nun weiter die Frage, ob hier die Annahme, die Mittellinie bleibe unausgedehnt, noch zutreffe. Die Rechnung ergibt nämlich, wenn man sie in der gewohnten Weise durchführt, daß das hier nicht mehr der Fall ist, und daß folglich auch die Spannungen hier zu beiden Seiten der Mittelachse nicht mehr proportional mit dem Abstande zunehmen, sondern nach der konkaven Seite rascher, nach der konvexen langsamer, wie das die Figur 207, die mit der früheren Figur 198 zu vergleichen ist, andeutet. In neuerer Zeit hat freilich FÖPPL die Ansicht ver-

---

[1] DE SAINT-VENANT, C. R. **17.** 1843. — H. LAMB, Proc. Lond. math. Soc. **19.** 365. 1888. — M. BRESSE, Rech. s. l. résist etc. Paris 1854. — E. WINKLER (Ketten), Ziv.-Ing. **4.** 1858.

treten, daß man auch für den krummen Stab die einfach proportionale Spannungsverteilung beibehalten könne; dann muß man aber zugleich annehmen, daß sich die ursprünglich ebenen Querschnitte wölben. Hierzu haben nun sowohl BACH einerseits als FÖPPL andererseits Versuche angestellt, die sie verschieden deuten: BACH schiebt die wirklich beobachtete S-förmige Wölbung der Querschnitte auf die bei den FÖPPLschen Versuchen neben der Biegung mitwirkende Schubkraft sowie eventuell auf den zum Teil bleibenden Charakter der Deformation, der die Elastizitätsgrenze übersteigt. BACH bleibt also dabei, daß man für krumme Stäbe die symmetrische Formel durch ein Zusatzglied ergänzen müsse. Dieses Zusatzglied rechnet er für verschiedene Querschnittsformen und in Abhängigkeit von dem ursprünglichen Krümmungsradius des Stabes aus und macht alsdann zahlreiche Anwendungen.[1]



Figur 207.

Biegung einer Platte. Theorie von Kirchhoff. Nächst dem Stabe interessiert naturgemäß am meisten die Platte, und zwar wie dort der gerade Stab, so hier die ebene Platte. Dieses Problem hat denn auch eine lange und merkwürdige Geschichte. Die erste Lösung stellte SOPHIE GERMAIN auf; sie ging aber von einer unrichtigen Differentialgleichung und, nachdem sie diese (auf Veranlassung von LAGRANGE) berichtigt hatte, von unrichtigen Grenzbedingungen aus; sie nahm nämlich an, daß bei einer Platte die Summe der beiden Hauptkrümmungen dieselbe Rolle spiele wie die Krümmung beim Stabe, demgemäß setzte sie die Biegungsarbeit proportional mit dem Integral jener Summe über die Oberfläche; durch KIRCHHOFF wurde nachgewiesen, daß diese Annahme zu Widersprüchen führt. Dann hat POISSON Grenzbedingungen aufgestellt auf Grund der Annahme, daß die am Rande angreifenden Kräfte und Kräftepaare gleich den aus dem Strain hervorgehenden Kräften und Kräftepaaren sein müssen. KIRCHHOFF zeigte, daß damit das Problem überbestimmt ist, und daß man die Zahl der Grenzbedingungen um eine erniedrigen muß, nämlich von fünf auf vier oder von drei auf zwei (je nach der Formulierung). KIRCHHOFF selbst ging von den beiden Annahmen aus, daß die Elemente der Mittelfläche ungedehnt bleiben (entsprechend wie die Elemente der Mittellinie beim Stabe), und daß die ursprünglich geraden und zur Mittelfläche normalen Linienelemente es auch nach der Biegung bleiben. Hiervon ausgehend, konnte er die potentielle Energie der gebogenen Platte durch die Krümmungen der Mittelfläche ausdrücken und daraufhin die Grundgleichung und die Grenzbedingungen aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit ableiten. — Nicht lange nachher schlug dann GEHRING den direkten Weg ein und behandelte die Platte ganz analog wie man früher den Stab behandelt hatte, aber unter Vermeidung der älteren Fehler; seine Rechnung wurde von KIRCHHOFF vervollkommnet und damit der prinzipielle, allgemeine Teil der Aufgabe zum Abschluß gebracht.[2]

Die Platte sei unendlich dünn, d. h. begrenzt von zwei parallelen, einander überall unendlich nahe gelegenen Oberflächen; die Dicke sei $2h$. Ferner seien

---

[1] Vgl. C. BACH, Elast. u. Fest. 4. Aufl. p. 468 ff. Daselbst auch die Literatur. —
[2] SOPHIE GERMAIN, Recherches sur la théorie des surfaces élastiques. Paris 1821. — S. D. POISSON, Mém. Acad. Paris 8. 1829. — M. CAUCHY, Exercices de math. 3. 1828. — G. KIRCHHOFF, CRELLES Journ. 40. 1850; Ges. Abh. p. 237; Vorlesg. p. 450. — GEHRING, Inaug.-Diss. Berlin 1860.

die Dilatationen überall unendlich klein, woraus indessen noch nichts über die Krümmung der Platte folgt, die man sich vielmehr als endlich vorzustellen hat. Die Grundgleichung wird dann durch Formulierung des einfachen Satzes erhalten, daß die Variation des Moments der gegebenen Kräfte gleich der Variation des über den ganzen Raum integrierten Potentials f der elastischen Kräfte, also der Größe F (p. 525) ist. Man hat also, wenn M das Moment der Kräfte, $d\tau$ ein Element des Raumes, λ_1, λ_2, λ_3 das System der Hauptdilatationen ist und K und Θ die KIRCHHOFFschen Elastizitätskonstanten sind:

$$\delta M = K\delta\int d\tau\,[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2] \quad .$$

Drückt man jetzt $d\tau$ durch das Element df der Mittelfläche und das Element der auf ihr senkrechten Linie dz, ferner die Hauptdilatationen durch die Änderung q des Abstands z eines Punktes von der Mittelfläche durch die Biegung ($q = z - z'$) sowie durch die beiden Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 aus, so erhält man die allgemeine Grundgleichung

$$\delta M = \frac{2}{3}\varepsilon^3 K\delta\int df\left[\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{\Theta}{1+\Theta}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)^2\right] \quad , \tag{90}$$

die noch keine Voraussetzung über die Größe der Deformation macht. Beschränkt man sich nun auf den Fall, daß die Platte sich nur unendlich wenig aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt, so kann man M und die Krümmungsradien leicht ausdrücken. Sind nämlich x und y die Koordinaten der Mittelfläche und ist, wie schon gesagt, z der senkrechte Abstand von ihr, ist ferner w die Biegung, und sind X, Y, Z die Komponenten der äußeren Kräfte, so gelangt man zu folgender Grundgleichung:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-h}^{+h} Z\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{+h} X z\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{+h} Y z\,dz \\ &\qquad = \frac{4}{3}h^3 K\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) \quad , \end{aligned}\right. \tag{91}$$

wozu noch, wenn X', Y', Z' die Druckkräfte auf ein Oberflächenelement do sind und φ der in bestimmtem Sinne festgesetzte Winkel zwischen der auf dem Randelement dr nach dem Innern gezogenen Normalen und der x-Achse ist, die Grenzbedingungen

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-h}^{+h} Z'\,dz + \frac{\partial}{\partial s}\left(\sin\varphi\int_{-h}^{+h} X' z\,dz - \cos\varphi\int_{-h}^{+h} Y' z\,dz\right) \\ &\qquad + \cos\varphi\int_{-h}^{+h} X z\,dz + \sin\varphi\int_{-h}^{+h} Y z\,dz \\ &= \frac{4}{3}h^3 K\left[\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}\left\{\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right\}\right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right\}\right] \quad , \end{aligned}\right. \tag{92}$$

$$
(93)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos\varphi\int_{-h}^{+h} X' z\,dz + \sin\varphi\int_{-h}^{+h} Y' z\,dz \\
&= \frac{4}{3}h^3 K\left[\frac{\Theta}{1+\Theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi\right. \\
&\qquad \left. + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right]
\end{aligned}\right.
$$

hinzukommen. Die Grundgleichung vereinfacht sich ganz wesentlich, wenn keine Kräfte auf die Masse wirken, also von Schwerkraft bezw. Eigengewicht abgesehen wird. Dann wird sie nämlich

$$
(94)\quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad ,
$$

also ganz analog der Gleichung $d^4x/dy^4 = 0$ für den Stab. Sehr verwickelt bleiben aber immer noch die beiden Grenzbedingungen, und sie lassen sich ohne besondere Spezialisierung der Form und Anordnung des Randes nicht weiter vereinfachen.

Andererseits kann man das Problem auch auf die andere der oben angedeuteten Arten anfassen. In der Mittelfläche wird im natürlichen, ebenen Zustande ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das der Unterscheidung halber mit s_1, s_2 bezeichnet werden möge, eingeführt, und die Lage eines Punktes P in der Mittelfläche hierdurch bestimmt; durch P werden ferner drei Linienelemente 1, 2, 3 gelegt, deren erste beiden den Achsen der s_1 und s_2 parallel sind; nach der Deformation sollen diese drei Richtungen die Achsen des xyz Systems sein, und durch dieses soll die Lage eines in der Nähe von P gelegenen, sonst beliebigen Plattenpunktes bestimmt werden, derart, daß seine Koordinaten vor der Änderung xyz, nachher $x+u$, $y+v$, $z+w$, seine relativen Verrückungen gegen P also uvw sind; dabei sei z die der Plattenachse entsprechende Achse, w die entsprechende Verrückung. Endlich seien wieder $\xi\eta\zeta$ die Koordinaten von P nach der Veränderung in bezug auf ein im Raume festes Koordinatensystem, σ_1, σ_2 die relativen Änderungen von s_1 s_2, und α_1, β_1 u. s. w. die Kosinus der neun Winkel zwischen den Achsen der xyz und der $\xi\eta\zeta$. An der Stelle der drei Gleichungen (13) beim Stabe treten hier deren sechs, nämlich je drei für $s_1\,\sigma_1$ und für $s_2\,\sigma_2$; auch aus den drei Gleichungen (14) werden hier sechs, welche die Größen $p_1\,q_1\,r_1$, $p_2\,q_2\,r_2$ definieren. Führt man noch den kleinen Winkel τ ein, um welchen der Winkel zwischen den Linien 1 und 2 nach der Formänderung von einem rechten abweicht, so erhält man, den Gleichungen unter (14) entspechend,

$$
(95)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = q_1 z + \sigma_1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -p_1 z \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x} = p_1 y - q_1 x \quad , \\
&\frac{\partial u}{\partial y} = -p_1 z + \tau \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -p_2 z + \sigma_2 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = p_2 y + p_1 x \quad ,
\end{aligned}\right.
$$

und durch Integration

$$
(96)\quad \left\{\begin{aligned}
u &= u_0 - p_1 yz + q_1 zx + \sigma_1 x + \tau y \quad , \\
v &= v_0 - p_2 yz - p_1 zx + \sigma_2 y \quad , \\
w &= w_0 - \tfrac{1}{2} q_1 x^2 + p_1 xy + \tfrac{1}{2} p_2 y^2 \quad .
\end{aligned}\right.
$$

Zur Bestimmung von $u_0\, v_0\, w_0$ dienen die Bedingungsgleichungen

$$(97)\quad \begin{cases} \text{allgemein:} \quad X_z = 0 \;, \quad Y_z = 0 \;, \quad Z_z = 0 \;, \\ \text{für} \quad x = 0 \;, \quad y = 0 \;, \quad z = 0: \\ u = 0 \;, \quad v = 0 \;, \quad w = 0 \;, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \;, \quad \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \;, \quad \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0 \;. \end{cases}$$

Damit sind die unbekannten Größen sämtlich bestimmt, und man kann schließlich auch das elastische Potential der ganzen Platte berechnen. Ist die Platte endlich gekrümmt, so erhält man die Gleichungen:

$$(98)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial s_1}\right)^2 = 1 \;, \\ \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial s_2}\right)^2 = 1 \;, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial s_1}\dfrac{\partial \xi}{\partial s_2} + \dfrac{\partial \eta}{\partial s_1}\dfrac{\partial \eta}{\partial s_2} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial s_1}\dfrac{\partial \zeta}{\partial s_2} = 0 \;; \end{cases}$$

σ_1, σ_2, τ verschwinden, die Elemente der Mittelfläche erfahren also keine Dehnung und Verzerrung, die Mittelfläche ist mithin eine abwickelbare Fläche. Das elastische Potential ist, wenn K, Θ die KIRCHHOFFsche Konstanten sind, und $2h$ die Dicke der Platte ist:

$$(99)\quad F = -\frac{2}{3} K h^3 \iint \left(q_1^2 + p_2^2 + 2 p_1^2 + \frac{\Theta}{1+\Theta} (q_1 + p_2)^2 \right) ds_1\, ds_2 \;,$$

ein Ausdruck, den man mit dem obigen (90) vergleiche. Ist die Platte unendlich wenig gekrümmt, so handelt es sich darum, die unendlich kleinen Verrückungen zu finden, die die Punkte ihrer Mittelfläche erlitten haben und hierbei darf man im allgemeinen die Größen $\sigma_1\, \sigma_2\, \tau$ nicht vernachlässigen, findet vielmehr für diese Größen Werte, welche den Werten von $p_1\, p_2\, q_1$ vergleichbar sind, und erhält schließlich F nicht, wie oben, mit h^3 proportional, sondern zusammengesetzt aus zwei Gliedern, deren eines h^3, deren anderes h selbst als Faktor enthält.

Weitere allgemeine Untersuchungen. In neuerer Zeit ist die Theorie der Biegung von Platten in verschiedenen Richtungen weitergeführt worden, und es haben dabei lebhafte Diskussionen über einige prinzipiell nicht unwesentliche Punkte stattgefunden, die sehr zur Klärung der Fragen beigetragen haben. Namentlich handelt es sich hierbei um Platten, deren Dicke nicht mehr so klein ist, daß sie als einfacher Zahlenfaktor mitgeführt werden darf, wo es sich vielmehr darum handelt, die Verhältnisse in der Mittelfläche, darüber und darunter eingehender zu untersuchen; zur Diskussion standen dabei unter anderen die Frage des zur Mittelfläche senkrechten Zuges, die Frage der Ausdehnung der Mittelfläche, das Verhältnis des mit der Dicke zu dem mit dem Kubus der Dicke proportionalen Gliedes u. s. w. Es muß aber in dieser Hinsicht auf die Arbeiten von ÖLTJEN, MICHELL, H. HEIMANN, DOUGALL sowie auf kritische Darstellung in dem Lehrbuche von LOVE verwiesen werden. Übrigens hat LOVE die KIRCHHOFFsche Theorie auch in anderer Hinsicht kritisch geprüft und in gewisser Weise ergänzt, wodurch ein von BOUSSINESQ gemachter Vorwurf, sie sei nur eine erste Annäherung zu geben fähig und liefere die Biegungskräfte überhaupt nicht, widerlegt wird.[1]

---

[1] M. BOUSSINESQ, LIOUVILLE Journ. 1871. — A. E. H. LOVE, Proc. Cambr. phil. Soc. **6**. 144. 1887. — ÖLTJEN, Inaug.-Diss. Kiel 1881. — J. M. MICHELL, Proc. Lond. math. Soc. **31**. 100. 1899. — H. HEIMANN, Ztschr. f. Math. u. Phys. **48**. 126. 1902. — J. DOUGALL, Edinb. Trans. **41**. 129. 1904. Diese umfangreiche Abhandlung gibt eine sehr gründliche, den älteren in mancher Hinsicht überlegene Entwickelung des Problems.

also für kleine Torsionen aus der Gleichung

$$\varphi = c z \tag{121}$$

ergibt. Bei kleinen Torsionen erleiden also die Querschnitte eine ihrem Abstande vom festen Querschnitt proportionale Drehung, kurz ausgedrückt: die Torsion ist eine gleichförmige. Die Konstante c bestimmt sich durch das am freien Ende angreifende Drehungsmoment $M = Pl$, wenn dieses Drehungsmoment durch ein am Hebelarm l angreifendes Gewicht P dargestellt wird. In Anbetracht des Gleichgewichts muß nämlich, wenn

$$\frac{E}{2(1+\mu)} = K \tag{122}$$

gesetzt wird:

$$M = Pl = \int_0^{2\pi}\int_0^R d\varphi\, dr (Y_z x - X_z y) = \frac{\pi}{2}\,\frac{c}{K} R^4 \tag{123}$$

sein; hieraus findet man c und erhält somit für die Drehung der um z vom festen Ende abstehenden Stelle

$$\varphi = \frac{2Pl}{\pi K R^4} z \tag{124}$$

und insbesondere für die Drehung des freien Endes ($z = L$):

$$\Phi = \frac{2PlL}{\pi K R^4} \quad ; \tag{125}$$

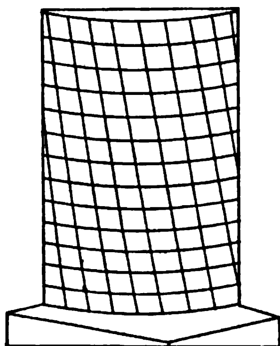
hierin ist der Winkel φ bezw. Φ natürlich im Bogenmaß ausgedrückt. Setzt man

$$\frac{\pi K R^4}{2L} = N \quad , \tag{126}$$

so erhält man:

$$\Phi = \frac{M}{N} \quad . \tag{127}$$

Die Größe N heißt gewöhnlich Torsionsmoment (andere Namen, die auch vorkommen, wie z. B. Torsionsmodul des gegebenen Drahtes, sind zur Vermeidung von Mißverständnissen lieber nicht zu gebrauchen). Das Torsionsmoment ist, wie man sieht, die Größe, mit der man das Drehungsmoment dividieren muß, um den Torsionswinkel zu erhalten; es spielt also für die elastische Drehung ganz die entsprechende Rolle wie das Trägheitsmoment für die starre Drehung (p. 340). Man kann auch sagen: das Torsionsmoment ist dasjenige Drehungsmoment, welches eine Drillung um den Winkel eins (d. h. rund 57,3°) erzeugt.



Figur 209.

Wie man sieht, hängt die Torsion von einer einzigen Elastizitätskonstanten K ab; man wird diese demgemäß als Drillungsmodul oder Torsionsmodul (auch zuweilen als Scherungsmodul) bezeichnen. Die Formel (122), durch die sie mit Dehnungsmodul und Elastizitätszahl in Beziehung gebracht wird, läßt erkennen, daß der Torsionsmodul (vgl. p. 508 und die Tabelle p. 539) nichts anderes ist wie der Gestaltsmodul k_2; in England wird er, wie hier wiederholt sei, vielfach Starrheitsmodul oder kurz Starrheit genannt. Hiernach ist also bei der Torsion

die räumliche Dilatation $D = 0$; es findet nur Gestaltsänderung, Verzerrung statt; und in dem hier vorliegenden einfachsten Falle des Kreiszylinders betrifft auch diese Verzerrung nur die einzelnen Elemente bezw. Fasern, während die Gestalt im ganzen, d. h. die äußere Begrenzung ungeändert bleibt. In der Figur 209 ist das dargestellt; die Quadrate, die auf dem ungedrillten Zylinder gezeichnet gedacht sind, haben sich, wie man sieht, durch die Drillung in Rhomben, die geraden Leitlinien in Schraubenlinien verwandelt.

Führt man in die obige Formel für die Dillung statt des Radius das Trägheitsmoment q bezw. Q des bis zu s reichenden bezw. des ganzen Zylinders (ohne Rücksicht auf die Dichte) um seine Achse ein, so erhält man:

(128) $$\varphi = \frac{M}{Kq} \quad , \quad \Phi = \frac{M}{KQ} \quad ;$$

damit wird die Formel für den Torsionsmodul

(129) $$K = \frac{M}{q} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{M}{Q} \cdot \frac{1}{\Phi} \quad ,$$

also nunmehr ganz analog mit der Definitionsformel für den Dehnungsmodul (p. 548).

Schließlich ergibt sich die Arbeit beim Tordieren um den Winkel φ:

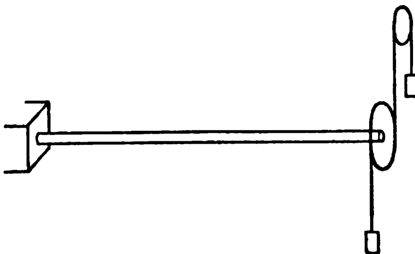
$$A = N \int_0^{\varphi} \psi \, d\psi = \tfrac{1}{2} N \varphi^2 \quad ,$$

dies ist also die potentielle Energie des tordierten Stabes; für

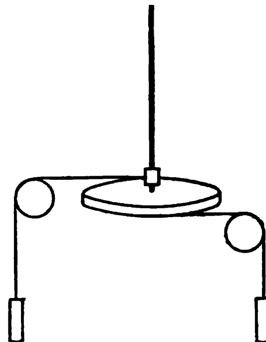
$$\varphi = \sqrt{2} = 84^0\ 1'\ 42''$$

wird $A = N$, man kann also das Torsionsmoment auch als die potentielle Energie des um diesen Winkel tordierten Stabes bezeichnen.

Experimentelle Untersuchung der Torsion. Die ersten wissenschaftlichen Versucheüber die Torsion hat Coulomb angestellt; später haben besonders Savart, Wertheim und G. Wiedemann die experimentelle Technik ausgebildet; der von letzterem gebaute Apparat ist im wesentlichen der noch jetzt meist



Figur 210.



Figur 211.

übliche.[1] Das eine Ende wird eingeklemmt oder besser fest eingelassen, da es, namentlich bei dickeren Stäben, große Beanspruchung auszuhalten hat. Das freie Ende wird mit einer Scheibe oder einem Rade versehen, das mit einer Rille zur Aufnahme der für die Anhängung des Gewichts bestimmten Schnur versehen ist.

[1] A. Coulomb, Mém. Acad. Paris 1784. — F. Savart, Ann. chim. phys. (2) **41.** 373. 1829; Pogg. Ann. **16.** 206. 1829. — A. Wertheim, Ann. chim. phys. (3) **12.** 385. 1844; **23.** 52. 1849; **50** 202. 1857; Pogg. Ann. **78.** 381. 1849. — G. Wiedemann, Pogg. Ann. **56.** 160. 1842; Wied. Ann. **6.** 487. 1879. — Wegen neuerer Abänderungen am Wiedemannschen Apparate vgl. E. Zimansky, Wied. Ann. **54.** 139. 1895.

Der Stab oder Draht muß natürlich so festgelegt werden, daß das Gewicht keine Biegung erzeugen, sondern nur Drillung ohne Ortsänderung hervorbringt. Stäbe wird man am besten horizontal einlegen, Drähte, um ihnen die nötige Minimalspannung zu geben, vertikal aufhängen und mit einer geeigneten Führung versehen. Statt einer einzigen Drehkraft kann man auch ein Kräftepaar wirken lassen, bei dem horizontalen Stabe muß man dann das eine Gewicht direkt an der einen Schnur, das andere gleich große an einer zweiten Schnur befestigen, die am entgegengesetzten Punkte des Radumfangs ansetzt — beide an entgegengesetzten Enden seines horizontalen Durchmessers — und zunächst nach oben über eine feste Rolle geführt wird (Figur 210). Bei vertikal aufgehängten Drähten muß man, da hier das Rad und die Schnuranfänge horizontal liegen, ohnehin zwei Rollen für die beiden Gewichte benutzen (Figur 211).

Den Drillungswinkel mißt man entweder direkt, indem man die Scheibe mit Kreisteilung versieht und ihr an zwei gegenüberliegenden Stellen feste Indizes gegenüberstellt, wobei durch Bildung des Mittelwertes aus beiden Ablesungen etwaige Asymmetriefehler eliminiert werden. Oder man verwendet die Methode der Spiegelablesung, bringt an dem Scheibenrande ein Spiegelchen mit der Normale in der Radiusfortsetzung an und stellt ihm Fernrohr und Skale gegenüber. Das letztere Verfahren hat den Vorzug, daß es der Scheibe gar nicht notwendig bedarf, daß man es also, indem man das Spiegelchen an einer beliebigen Stelle des Stabes befestigt, nicht bloß zur Bestimmung des Endwinkels Φ, sondern allgemein zur Ermittelung des Drillungswinkels φ in irgend einem Abstand z vom festen Ende benutzen kann, was bei direkter Messung umständliche Einrichtungen erfordern würde. Die tordierende Kraft kann man natürlich in dem einen oder anderen Sinne wirken lassen, und man wird gut tun, beide Versuche nacheinander anzustellen, um sich zu überzeugen, ob sie dasselbe ergeben oder um, wenn das nicht der Fall ist, je nach Zweck der Untersuchung den Mittelwert zu bilden oder die Differenz weiter zu verfolgen; zu diesem Zweck befestigt man die Schnur oder die beiden Schnüre so, daß man bequem einen Austausch vornehmen kann. Nach der Torsionsmessung muß man natürlich von neuem den untordierten Zustand beobachten, um zu sehen, ob er noch der alte ist und, wenn nicht, um hieraus die nötigen Konsequenzen zu ziehen. Belastung und Entlastung muß man exakt und vorsichtig vollziehen, damit nicht durch Stöße unbeabsichtigte und anomale Wirkungen erzeugt werden. — Schließlich sind noch der Hebelarm des Gewichts, sowie die Dimensionen des Körpers zu messen, und zwar die Dicke, gerade wie bei der Biegung, mit besonderer Sorgfalt (an verschiedenen Stellen und in verschiedenen Richtungen), da der hierbei gemachte Fehler sich im Resultat vervierfacht.

Besondere Kunstgriffe zur Messung des Torsionswinkels sind mehrfach angewandt worden, namentlich da, wo es sich um sehr kleine Winkel handelte; erwähnt seien die Methoden von JERVIS-SMITH und von COKER; die erstere ist freilich für rotierende, die letztere aber für ruhende Stäbe bestimmt. Der Apparat von COKER besteht aus zwei Teilen, die an verschiedenen Stellen des Stabes befestigt werden; jeder Teil trägt einen Stift, und diese beiden Stifte berühren sich im untordierten Zustand des Stabes; nach der Drillung muß der eine Stift mittels einer Mikrometerschraube so lange verschoben werden, bis eine Galvanometernadel oder ein Telephon die Wiederherstellung des Kontakts anzeigt. Bei einem anderen COKERschen Apparat trägt der eine Teil ein Mikroskop, der andere einen Draht, dessen Verschiebung im Mikroskop gemessen wird.[1]

Ferner sei noch auf ein mehr zur Demonstration dienendes Verfahren von MELDE hingewiesen, bei dem die Reaktionskraft des SEGNERschen Rades benutzt wird.[2]

---

[1] F. J. JERVIS-SMITH, Phil. Mag. (5) **45**. 183. 1898. — E. G. COKER, ibid. (5) **46**. 520. 1898. — [2] F. MELDE, Ztschr. f. Instrumentenk. **1**. 76. 1881.

Schließlich ist zu erwähnen, daß wiederholt Universalapparate, d. h. Apparate mit Einrichtungen zur Zug-, Biegungs- und Drillungsmessung gebaut worden sind, besonders für Zwecke der praktischen Materialienprüfung.

Gesetze der Torsion. Aus Theorie und Erfahrung ergeben sich nun übereinstimmend folgende Gesetze:

1. Der Torsionswinkel ist der tordierenden Kraft und ihrem Hebelarm, also zusammengefaßt, dem Moment der tordierenden Kraft direkt proportional. Innerhalb der Elastizitätsgrenze gilt dieses Gesetz ohne nähere Erläuterung und, wie es scheint (ähnliche Abweichungen, wie bei Dehnung und Biegung sind hier noch nicht festgestellt), exakt; jenseits derselben kann es bei geeigneter Fassung und besonderer Behandlung des Versuchskörpers auch noch gültig bleiben, worüber in späteren Artikeln zu reden sein wird.

2. Der Torsionswinkel an irgend einer Stelle des Stabes ist deren Entfernung vom festen Ende proportional; insbesondere ist der Torsionswinkel des freien Endes proportional mit der Länge des Stabes.

3. Der Torsionswinkel ist umgekehrt proportional der vierten Potenz der Dicke des Stabes; statt dessen kann man auch sagen: er ist umgekehrt proportional mit dem axialen Trägheitsmoment des Stabes.

4. Der Torsionswinkel ist umgekehrt proportional mit einer dem Stoffe des Stabes charakteristischen Konstanten, dem Torsionsmodul. Das Produkt aus Torsionsmodul und Trägheitsmoment kann man also als Torsionswiderstand des Stabes bezeichnen. Oder, indem man erwägt, daß in dem Trägheitsmoment der Faktor Dichte fehlt, noch besser: Der Widerstand eines Stabes gegen Torsion ist gleich seinem axialen Trägheitsmoment, wenn in diesem die Dichte durch den Torsionsmodul ersetzt wird.

5. Der Torsionsmodul läßt sich durch den Dehnungsmodul allein nicht ausdrücken, wohl aber durch eine bestimmte Kombination von Dehnungsmodul und Elastizitätszahl, und zwar ist er identisch mit dem Gestaltsmodul.

6. Der Torsionsmodul hängt ebenso wie der Dehnungsmodul von zahlreichen Umständen ab, namentlich von der Temperatur, der inneren Beschaffenheit des Materials, der Zeit und Vorgeschichte, der Größe der Beanspruchung, sobald sich diese der Elastizitätsgrenze nähert oder sie überschreitet, wobei alsdann nach Aufhebung der Beanspruchung dauernde Drillung zurückbleibt. Von den meisten dieser Einflüsse wird erst in späteren Artikeln die Rede sein.

Bestimmung des Torsionsmoduls. Die eine der beiden Methoden, den Torsionsmodul zu messen, beruht einfach auf der Umkehrung der obigen Formel für den Torsionswinkel (125); diese Umkehrung ergibt:

$$K = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\varphi} P l \frac{L}{R^4} \quad . \tag{130}$$

Auch hier ist übrigens die Angabe nicht in absolutem Maße, sondern, wie beim Dehnungsmodul, in Kilogrammgewichten pro Quadratzentimeter üblich; zur Umrechnung in C.G.S.-Maß ist wieder mit 10^6 und mit g zu multiplizieren.

Man nennt die in Rede stehende Methode zur Messung des Torsionsmoduls die statische und stellt ihr die dynamische oder kinetische gegenüber, die, wie hier kurz bemerkt sei, in der Ermittelung der Periode der Torsionsschwingungen besteht, die der Körper ausführt, wenn man ihn mit einem Körper von bekanntem Trägheitsmoment belastet, tordiert und dann sich selbst überläßt. Die dynamische Methode ist auf Drähte und ähnliche Körper beschränkt, gibt für diese aber unter Umständen zuverlässigere Resultate. Von der Methode als solcher wird im Artikel über elastische Schwingungen noch die Rede sein. Hier sei nur noch hinzugefügt, daß nach einigen Experimentatoren die beiden Methoden etwas abweichende Werte des Moduls liefern, während dies von andern, bei

Elimination aller Fehlerquellen, bestritten oder bezweifelt wird; so fand TOMLINSON[1] für die meisten Metalle Differenzen unter 1% und nur für Eisen 2% zugunsten des kinetischen Wertes. Im folgenden sind die wichtigsten Werte, die für K gefunden wurden, nach Gruppen und innerhalb dieser in alphabetischer Folge der Stoffe zusammengestellt.

1. Einfache Metalle.

Metall	K	Autor
Aluminium	2329	SCHÄFER
„ (gegossen)	2580	VOIGT
„	3350	KATZENELS.
„ (hart)	2673	TOMLINSON
„	2605	HORTON
Blei	550	SCHÄFER
„	740	TOMLINSON
„	814	HORTON
Cadmium	1024	SCHÄFER
„ (gegossen)	2450	VOIGT
„	2370	HORTON
Eisen	7651	COULOMB
„	8082	PISATI
„	7505	KATZENELS.
„	7975	BAUMEISTER
„ (weich)	8230	GRAY
„	7337	SCHÄFER
„ (geglüht)	7590	TOMLINSON
„	8280	HORTON
„ Stahl (Guß)	8070	VOIGT
„ „	8262	PISATI
„ „ (mild)	7965	GRAY
„ „ (Silber)	7872	SEARLE
„ „	8470	HORTON
„ „	8022	SCHULZE
Gold	3950	KATZENELS.
„	2850	VOIGT
„	2495	HORTON
Kupfer	4213	SAVART
„	3900	KOHLR. u. L.
„	3587	KATZENELS.
„	4450	BAUMEISTER

Metall	K	Autor
Kupfer	4664	KIEWIET
„	3972	PISATI
„ (gezogen)	4199	GRAY
„ (gegossen)	4780	VOIGT
„	3967	SCHÄFER
„	4430	ANGENHSTR.
Magnesium	1181	SCHÄFER
„ (gegossen)	1710	VOIGT
Nickel	9518	SCHÄFER
„	7820	VOIGT
Palladium	4613	SCHÄFER
Platin	6594	SCHÄFER
„	6632	PISATI
„	6628	TOMLINSON
„	6585	HORTON
Silber	2650	BAUMEISTER
„	2566	PISATI
„	2960	VOIGT
„	2467	SCHÄFER
„	2721	ANGENHSTR.
„	2770	TOMLINSON
Wismut	1240	VOIGT
„	1372	SCHULZE
Zink	3820	KIEWIET
„	3880	VOIGT
„	1614	SCHÄFER
Zinn	1543	KIEWIET
„	1730	VOIGT
„	1570	SUTHERLAND
„	1530	HORTON

2. Legierungen.

Metall	K	Autor
Ag—Cu: 1:0,01	2586	ANGENHSTR.
1:0,1	2896	„
1:1	2975	„
1:10	4115	„
Bronze (gegossen) 88 Cu + 12 Sn	4060	VOIGT
Messing (gegossen) 60 Cu + 40 Zn	3700	VOIGT
	3407	GRAY
	2652	PISATI

Metall	K	Autor
Messing (gegossen) 60 Cu + 40 Zn	3150	KATZENELS.
	3550	BAUMEISTER
	3908	SCHULZE
Neusilber	3426	GRAY
„	4320	KATZENELS.
Phosphorbronze	4359	SEARLE
ROSEs Metall	853	ANGENHSTR.
WOODsche Legierung	839	ANGENHSTR.

[1] H. TOMLINSON, Proc. Roy. Soc. Lond. **42.** 362; **43.** 88. 1887.

3. Jenaer Gläser

(aus Dehnungsmodul und Elastizitätszahl berechnet von STRAUBEL).

Nr.	Charakter	K	Nr.	Charakter	K
627	Natronkaliborosilikat . .	3290	714	Natronkalikalksilikat . .	2690
1299	Barytborosilikat . . .	3140	270	Barytphosphat mit Tonerde	2530
665	„	3100	2154	Kalibleisilikat	2500
1450	Natronborosilikat . . .	3050	370	Kalizinksilikat	2320
16 III	Natronkalkzinksilikat . .	3010	500	Sehr schweres Bleisilikat	2220
1973	Kalibarytzinksilikat . .	2960	658	Bleitonerdeboratsilikat .	2190
S 219	Kalitonerdephosphat . .	2750	S 209	Schwerstes Bleisilikat . .	2020
278 III	„ . .	2750	S 196	Tonerdeborat mit Natron und Baryt	1840
709	Natronzinksilikat . . .	2700			

4. Gesteine

(nach NAGAOKA; kleine Auswahl, für jeden Stoff mehrere extreme Werte).

Charakter	K	Charakter	K
Archaische Gesteine		Mesozoische Gesteine	
Chloritschiefer	2400	Sandstein	240
„	3200	„	460
Serpentin	2200	Tertiäre Gesteine	
„	1600	Ryolith-Tuff	690
Paläozoische Gesteine		„	360
Tafelspat	1900	Diluvium	
„	2500	Tuff	1100
Kalkstein	3000	„	510
„	2200	„	120
Marmor	3000	Andesit	1850
„	1900	„	600
Granit	1800	„	250
„	500		

5. Verschiedene Stoffe

(mit Ausnahme von Quarz aus Modul und Elastizitätszahl berechnet).

Metall	K	Autor
Borsäure	793	AUERBACH u. STRAUBEL
Ebonit	849	SCHULZE
Flußspat	4280	DRUDE u. VOIGT
Kautschuk	16	GRAETZ
Opal	1800	AUERBACH, DRUDE u. VOIGT
Paraffin	57	SEGEL, MALLOCK
Quarz (Faden) . .	2380	BOYS
„ . .	2888	THRELFALL
„ . .	1460	BARNETT
„ . .	2475	SCHULZE

Ein Blick auf diese Tabellen zeigt, daß die Bestimmungen des Torsionsmoduls trotz aller aufgewandten Sorgfalt zu sehr wenig übereinstimmenden Werten geführt haben, und es liegt der Schluß nahe, daß dies auf die Verschiedenheit des Materials und seines inneren Zustands zurückzuführen sei. Der einzige Stoff, für den — abgesehen von den wohldefinierten Jenaer Gläsern — die Werte gut stimmen, ist Platin, dann in zweiter Reihe merkwürdigerweise Stahl; andererseits kommen auch wieder ganz kolossale Differenzen vor, so bei

Aluminium, Cadmium u. a., namentlich aber bei Zink, von dem sogleich noch die Rede sein wird. Die Reihenfolge der Stoffe ist im großen ganzen wohl dieselbe wie hinsichtlich des Dehnungsmoduls, im einzelnen kommen aber doch große Abweichungen vor, was nicht zu verwundern ist, da eben außer dem Modul auch die Elastizitätszahl in Betracht kommt; wo also diese extreme Werte hat, wird sich die Reihenfolge ändern.

Die obige Zahl für Kautschuk hat übrigens nur eine annähernde Bedeutung, da erstens verschiedene Sorten sehr verschiedene Werte liefern und zweitens auch ein und dasselbe Stück Anomalien des Ganges aufweist, sowohl hinsichtlich der Abweichungen vom HOOKEschen Gesetze — die übrigens nach CANTONE und CONTINO nur gering sein sollen —, als auch hinsichtlich der zeitlichen Folge und Zeitdauer der Torsionen, was auf innere Veränderungen schließen läßt.

Außerordentlich verschieden sind auch die Werte für Quarz, woraus BARNETT schließt, daß bei diesem Stoffe der Torsionsmodul mit wachsender Dicke des Fadens abnimmt — eine für die Zahlen von THRELFALL, BOYS und BARNETT stimmende Vermutung, die aber durch die Zahl von SCHULZE widerlegt wird, da es sich hier gerade um ein dickes Präparat (10 × 1 × 0,27 cm) handelte.

Nach der Formel (122) müßte der Torsionsmodul ein Bruchteil des Dehnungsmoduls sein und zwar je nach dem Werte der Elastizitätszahl ein größerer oder kleinerer; für $\mu = 0$ müßte dieser Bruchteil $\frac{1}{2}$, für $\mu = \frac{1}{4}$ müßte er $\frac{2}{5}$ und für $\mu = \frac{1}{2}$ müßte er $\frac{1}{3}$ sein. Alle diese Wertverhältnisse finden sich, wie eine Gegenüberstellung der Tabellen auf p. 577 ff. mit den jetzigen ergibt, vor; daß sich auch andere vorfinden, daß z. B. für einige Stoffe (Gesteine u. s. w.) K kleiner als $E/3$ ist, zeigt von neuem, wie unsicher diese Bestimmungen sind, selbst wenn E und K an der gleichen Probe oder an zwei aus demselben Stück geschnittenen Proben ermittelt wird.

Beziehung des Dehnungs- und Drillungsmoduls zur Atomtheorie. Es ist schon von WERTHEIM ein sehr merkwürdiges Gesetz aufgestellt worden, es sollte nämlich der Quotient des Dehnungsmoduls durch die siebente Potenz der auf die Längeneinheit entfallenden Atomzahl für alle Metalle gleich groß, also die Größe E/n^7 eine universelle Konstante C sein; statt dessen ergaben sich freilich Werte, die im äußersten Falle wie 2 : 5 schwankten und auch eine Nachprüfung, die später TOMLINSON vornahm, ergab kein besseres Resultat. Mit Benutzung seiner Messungen an möglichst isotropen Metallen hat nun VOIGT die Frage wieder aufgenommen, und er hat, außer der WERTHEIMschen Beziehung, noch die andere geprüft, bei der die siebente Potenz durch die sechste ersetzt wird, bei der also, wie man auch sagen kann, der Modul nicht mit der $^7/_3$ten, sondern mit der zweiten Potenz des Verhältnisses v der Dichte zum Atomgewicht multipliziert wird; diese Zahlen sind in der folgenden Tabelle, und zwar die der VOIGTschen Beziehung für beide Moduln — Dehnung und Drillung — zusammengestellt (absolut mal 10^8):

Metall	$E \cdot v^{7/3}$	$E \cdot v^2$	$T \cdot v^2$	Metall	$E \cdot v^{7/3}$	$E \cdot v^2$	$T \cdot v^2$
Al . . .	31,2	6,70	2,63	Ni . . .	35,7	8,82	3,40
Cd . . .	59,4	11,77	4,08	Ag . . .	38,3	8,20	3,12
Fe . . .	33,0	7,74	3,15	Bi . . .	80,4	13,61	5,29
Au . . .	36,6	7,84	2,95	Zn . . .	37,4	8,34	3,14
Cu . . .	22,9	5,52	2,43	Sn . . .	75,6	13,91	4,45
Mg . . .	41,6	8,06	3,24				

Wie man sieht, stimmt die VOIGTsche Beziehung wesentlich besser als die WERTHEIMsche, und sie stimmt am besten für die Metalle, bei denen man hinsichtlich ihrer Isotropie und elastischen Vollkommenheit am sichersten ist; noch

besser würden übrigens jedenfalls die kubischen Moduln stimmen, wenn man diese direkt mit genügender Genauigkeit messen könnte. — Übrigens zeigt VOIGT, daß der von WERTHEIM gezogene Schluß, es müßten hiernach die Atomkräfte umgekehrt proportional der fünften Potenz der Entfernung sein, nicht zwingend ist. Wohl aber kann man den Schluß ziehen, daß die Wechselwirkung der Atome unmöglich mit ihren Massenprodukten proportional sein kann; denn diese schwanken bei den obigen Metallen wie 1 : 100. Man gelangt also auch auf diesem Wege zu der Vorstellung, daß für die inneren Prozesse in den Körpern nicht die ponderablen Massen, sondern etwas anderes, etwa ihre elektrischen Ladungen, maßgebend sind.[1]

Einfluß der Temperatur. Auch hierüber liegt reiches Messungsmaterial, aus dem in den folgenden Tabellen das Wichtigste herausgehoben ist, vor, so von CANTONE, GRAY, SCHÄFER, HORTON, ZIMANSKY u. A.

Negative Temperaturkoeffizienten nach GRAY, BLYTH und DUNLOP.

$K = K_0 [1 - \alpha t]$

Metall	$\alpha \cdot 10^6$	Metall	$\alpha \cdot 10^6$
Eisen (weich)	367	Messing	247
Kupfer (Handels-) . .	413	Neusilber	528
„ (elektrisch, gez.)	160	Stahl (mild)	388

Negativer Temperaturkoeffizient in Prozenten zwischen Zimmertemperatur und einer tiefen Temperatur (Kältemischung) nach SCHÄFER.

Kohlenstoff .	1,25	Palladium ..	2,70	Kupfer . .	4,49	Zink . . .	48,4
Iridium . .	4,03	Eisen . . .	3,04	Silber . . .	8,21	Blei . . .	78,7
Rhodium .	3,69	Nickel. . .	3,28	Aluminium .	24,7	Cadmium .	46,7
Platin . . .	1,78	Gold . . .	3,01	Magnesium .	30,2	Zinn . . .	82,0

Torsionsmodul bei verschiedenen Temperaturen nach HORTON (abs. $\times 10^{-11}$).

Kupfer		Weiches Eisen		Platin		Gold	
14,5°	4,370	12,4°	8,278	11,9°	6,462	15,0°	2,445
32,9	4,338	57,8	8,103	33,9	6,448	34,0	2,430
56,7	4,297	74,9	8,075	58,5	6,432	75,0	2,400
75,5	4,267	98,0	8,046	74,0	6,423	98,0	2,386
95,5	4,233			99,2	6,401		
				125,9	6,376		

Cadmium		Silber		Stahl		Aluminium	
15°	2,312	16°	2,446	10,4°	8,461	15°	2,548
100	1,161	35	2,434	35,0	8,407	100	2,257
		56	2,422	76,4	8,320		
		75	2,410	99,4	8,267		
		100	2,393				

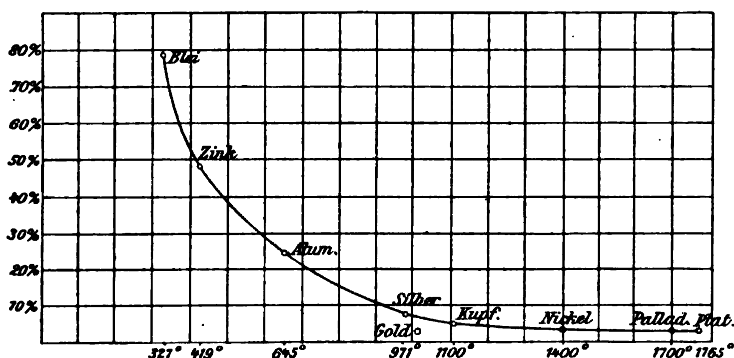
[1] A. WERTHEIM, Ann. chim. phys. (3) **12.** 447. 1844. — H. TOMLINSON, Trans. Roy. Soc. **174.** 32. 1884; Proc. Roy. Soc. **38.** 488. 1885. — W. VOIGT, WIED. Ann. **49.** 395. 1893.

Blei		Zinn	
16°	0,746	16°	1,480
54	0,688	33	1,350
72	0,667	56	1,162
99	0,659	71	1,086
		99	0,940

Diese Zahlen werden in der Arbeit von HORTON in zahlreichen Figuren graphisch dargestellt; wie man aus diesen Figuren ersieht, verlaufen die meisten Kurven geradlinig, nur die für Eisen und Blei sind stark, die für Platin ist schwach gekrümmt. Für die übrigen Metalle lassen sich also Temperaturkoeffizienten angeben, für die genannten drei Metalle werden sie nur die Bedeutung von Mittelwerten haben; es sind folgende Zahlen ($\times 10^4$).

Kupfer	3,877	Platin	1,196	Aluminium	14,79
Eisen	2,884	Gold	3,069	Zinn	41,60
Stahl	2,642	Silber	4,784	Blei	16,40

Hiermit stimmen die Angaben der andern Autoren im großen Ganzen überein, so daß man sagen kann: der Torsionsmodul nimmt mit wachsender Temperatur nach einem linearen oder, bei einigen Metallen, quadratischen Gesetze ab. Die Werte des Temperaturkoeffizienten sind aber sehr verschieden, und es sind hieran ähnliche Betrachtungen geknüpft worden, wie an die entsprechende Erscheinung beim Temperaturkoeffizienten des Dehnungsmoduls (p. 584). So sind die obigen Zahlen von SCHÄFER nach den Schmelztemperaturen der Körper geordnet, von der höchsten anfangend und bei der tiefsten endend; wie man sieht, nehmen die Temperaturkoeffizienten zwar nicht durchweg, aber doch im ganzen stark zu;



Figur 212.

noch besser ersieht man das aus der graphischen Darstellung in Figur 212, die der Figur 178 auf p. 585 ganz analog ist. Auch weitere Schlüsse, betreffend das periodische System der Elemente, hat SCHÄFER hieran angereiht; jedoch muß die Extrapolation weiterer Zahlen für den Temperaturkoeffizienten von Metallen, die sich nicht experimentell behandeln lassen, und ähnliches als mindestens gewagt bezeichnet werden, besonders, solange in den Zahlenwerten der Temperaturkoeffizienten keine bessere Übereinstimmung erzielt ist als bisher. Das zeigen auch die Versuche von ANGENHEISTER an Legierungen, die, wie schon im vorigen Artikel erwähnt wurde, die Schlüsse SCHÄFERs nicht voll bestätigen, und die im übrigen folgende relative prozentische Abnahmen für 100 Grad, abgeleitet aus Messungen bei Zimmertemperatur und bei — 186 Grad liefern (wegen der Legierungen vgl. oben):

Ag	Leg. I	Leg. II	Leg. III	Leg. IV	Cu
7,60	7,44	6,35	5,62	4,52	3,45

Bei der Temperatur der flüssigen Luft haben übrigens noch mehrere Experimentatoren gearbeitet; so, als der erste, Dewar, der für niedrig schmelzende Metalle den Torsionsmodul bei — 186 Grad auf das mehrfache vergrößert fand; ferner Sutherland und, ganz neuerdings, Benton, der den Wert von K für Kupfer um 73, für Stahl um 79 tausendtel vergrößert fand.

Schließlich ist zu betonen, daß die Abnahme des Torsionsmoduls mit wachsender Temperatur stärker ist als die des Dehnungsmoduls, wie es zu erwarten war, nachdem theoretisch gefordert und experimentell festgestellt worden war (p. 582), daß die Elastizitätszahl mit wachsender Temperatur ansteigt, und zwar bis zum Grenzwert $^1/_2$, also bis zu dem Werte $^1/_3$ des Verhältnisses des Torsions- zum Dehnungsmodul.

Unter allen Metallen verhält sich Zink in bezug auf Temperatureinfluß am eigentümlichsten, und es sind von zahlreichen Forschern Anomalien desselben aufgedeckt worden, so von Rammelsberg, Kalischer, Heinemann und Bolley. Es hat deshalb Zimansky eine Untersuchung seines Torsionsverhaltens bei Erwärmung durchgeführt und gefunden, daß bei geeignet feiner und vorsichtiger Methode jene Anomalien nicht oder doch nicht in dem entsprechenden Umfange auftreten. Allerdings finden erhebliche Nachwirkungserscheinungen statt, von denen später noch die Rede sein wird; in bezug auf die hier interessierende Hauptsache aber ergibt sich folgendes, je nachdem der zur Messung benutzte Zinkstab gezogen oder gegossen, langsam oder rasch gekühlt war; die Zahlen geben die Torsion selbst an (reziprok dazu der Modul) und haben nur relative Bedeutung; die tordierende Kraft ging bis zu 500 g hinauf, wobei aber die Elastizitätsgrenze meist schon überschritten war; hier sind nur die Zahlen für 200 g und nur in der ersten Reihe zur Vergleichung auch die für 500 g mitgeteilt.

1. gezogen, langsam gekühlt			2. gegossen, langsam gekühlt		3. gezogen, rasch gekühlt		4. gegossen, rasch gekühlt	
	200 g	500 g						
17°	20,0	54	150°	29	125°	41,0	125°	19,0
50	23,2	75	175	32	150	38,5	150	19,8
100	35,0	136	200	32	175	50,0	175	22,2
125	43,0	198	225	31	200	55,0	200	27,5
150	58,0	281			225	83,0		
175	70,5	378						
200	83,0	590						

Die gewaltige, auch von späteren Beobachtern wiedergefundene (s. o.) Abnahme des Moduls von Zink bei steigender Temperatur ist, wie man hier deutlich sieht, auf gezogene Stäbe beschränkt; bei gegossenen ist die Abnahme sehr mäßig, woraus sich vielleicht noch wichtige Schlüsse in bezug auf die Natur des gezogenen und gegossenen Zustands werden ziehen lassen. Außerdem ist die Abnahme bei gezogenen Stäben nur dann von einigermaßen regelmäßigem Verlauf, wenn der Stab langsam gekühlt ist; aber auch hier ist sie nicht gleichförmig, sondern beschleunigt.

Verhalten des Kautschuks und des Quarzes. Der Kautschuk verhält sich, wie in anderen Hinsichten, so auch in bezug auf den Torsionsmodul anomal; dieser nimmt nämlich mit steigender Temperatur nicht ab, sondern zu, und zwar, wie Graetz fand, meist mit abnehmender Geschwindigkeit. Wurde nämlich die Formel

$$K = K_{20}\,[1 + \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2]$$

zugrunde gelegt, so fand sich α zwischen 0,0042 und 0,0071, β zwischen — 0,0001 und + 0,0001, jedoch in der Mehrzahl der Fälle negativ. Freilich muß man bei derartigen Bestimmungen sehr vorsichtig sein, da, wie neuere Untersuchungen gezeigt haben, auch die Torsion den Kautschuk dauernd verändert.

Ebenfalls anomal verhält sich der amorphe Quarz, von dem schon oben die Rede war. An Quarzfäden haben THRELFALL und BARNETT unabhängig voneinander eine Zunahme festgestellt, und die beiden Koeffizienten des Moduls nach der Temperatur, 0,00018 bezw. 0,00015, stimmen gut überein. Neuerdings hat dann HORTON das Resultat dahin ergänzt, daß der Modul bis etwa 800 Grad ziemlich gleichförmig wächst, darüber hinaus aber rasch abnimmt.[1]

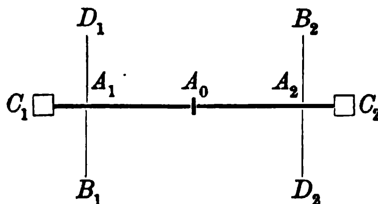
Bestimmung von E und μ aus Biegung und Torsion. Zur Bestimmung der beiden Elastizitätskonstanten stehen nach den bisherigen Darlegungen folgende Methoden zur Verfügung:

1. Dehnung und Querkontraktion; liefert E und μ.
2. Längsdehnung und kubische Kompression; liefert E und C.
3. Biegung und Querbiegung; liefert E und μ.
4. Dehnung und Drillung; liefert E und K.
5. Biegung und Drillung; liefert E und K.
6. Drillung und kubische Kompression; liefert K und C.

Andere Kombinationen kommen weniger in Betracht. Dabei wird man die beiden Messungen an derselben Probe durchführen, um sich von den Verschiedenheiten selbst aus demselben Block herausgeschnittener Teile unabhängig zu machen. Noch günstiger würde es sein, wenn man auch die beiden Messungen miteinander verschmelzen könnte. Das läßt sich nun in besonders eleganter Weise bei dem fünften Verfahren, der Kombination von Biegung und Drillung, erreichen, und es läßt sich damit in die Bestimmung von μ nach der Formel

$$\mu = \frac{E}{2K} - 1 \tag{131}$$

eine große Sicherheit bringen. Hierfür hat KIRCHHOFF ein sinnreiches Verfahren angegeben. Der Stab $A_1 A_2$ (Figur 213), in der Mitte A_0 befestigt, trägt in A_1 und A_2 je einen Querarm $B_1 D_1$ und $B_2 D_2$; werden in B_1 und B_2 Gewichte angehängt, so wird der Stab zugleich gebogen und tordiert, und man kann Biegung und Torsion messen, wenn man in zwei Fernröhren die von den horizontal befestigten Spiegeln C_1 und C_2 reflektierten Bilder einer Quadratnetzskala beobachtet; aus der Längsverschiebung erhält man die Biegung, aus der Querverschiebung die Torsion. Aus den Werten, die beide Fernröhre ergeben aben, und aus den Werten, die sich ergeben, je nachdem die Gewichte in B_1 und B_2 oder in D_1 und D_2 hängen, nimmt man das Mittel.



Figur 213.

[1] Literatur zum Torsionsmodul und seinem Temperaturkoeffizienten: G. ANGENHEISTER, DRUDES Ann. **11.** 188. 1903; Inaug.-Diss. Berlin 1902. — F. AUERBACH, DRUDES Ann. **3.** 116. 1900. — S. J. BARNETT, Physik. Rev. **6.** 114. 1898. — M. BAUMEISTER, WIED. Ann. **18.** 578. 1883. — J. R. BENTON, Physik. Rev. **16.** 17. 1903. — C. V. BOYS, Phil. Mag. (5) **30.** 116. 1890. — M. CANTONE, Nuov. Cim. (4) **4.** 270. 354. 1896. — M. CANTONE und G. CONTINO, Rend. R. Ist. Lomb. (2) **32.** 1899. — C. A. COULOMB, Hist. Acad. 1784. p. 229. Paris 1787. — J. DEWAR, Proc. Roy. Inst. 1893. — P. DRUDE u. W. VOIGT, WIED. Ann. **42.** 537. 1891. — L. GRAETZ, ibid. **28.** 354. 1886. — GRAY, BLYTH und DUNLOP, Proc. Roy. Soc. **67.** 180. 1900. — F. HORTON, Proc. Roy. Soc. **73.** 334. 1904; **74.** 401. 1905 (Quarz); Trans. Roy. Soc. A **204.** London 1905. — S. KATZENELSOHN, Inaug.-Diss. Berlin 1887. — J. KIEWIET, Inaug.-Diss. Göttingen 1886. — F. KOHLRAUSCH u. E. LOOMIS, POGG. Ann. **141.** 481. 1871. — A. KUPFFER, Mém. Acad. St. Petersb. (6) **5.** 233. 1856; **6.** 397. 1857. — H. NAGAOKA, Phil. Mag. (5) **50.** 53. 1900. — NAPIERSKY, POGG. Ann., Erg.-Bd. **3.** 351. 1853. — G. PISATI, Nuov. Cim. (3) **1.** 181; **2.** 137; **4.** 152; **5.** 34. 135. 1877—79. — N. SAVART, POGG. Ann. **16.** 206. 1829. — CL. SCHÄFER, DRUDES Ann. **5.** 220. 1901; **9.** 665. 1124. 1902. — F. A. SCHULZE, DRUDES Ann. **13.** 583; **14.** 384. 1904. — SEARLE,

Später hat OKATOW die KIRCHHOFFsche durch vergleichende Messungen geprüft und ist dabei zu sehr günstigen Resultaten gelangt; endlich hat BOCK den Apparat mit einer Heizvorrichtung versehen, um auch Bestimmungen der Temperaturkoeffizienten vornehmen zu können.[1]

Torsion von Stäben beliebigen Querschnitts. Hat der Stab zwar immer noch überall den gleichen Querschnitt, ist dessen Form aber nicht mehr kreisförmig, so haben die einfachen Formeln und Betrachtungen von vorhin keine Gültigkeit mehr, und man muß von den allgemeinen Gleichungen ausgehen, wie sie auf p. 523, Gleichung (72) aufgestellt worden sind. Wendet man diese auf einen stabförmigen Körper mit der z-Achse als Achse an, so nehmen sie verschiedene Form an, je nachdem man die Verschiebungen oder die Kräfte eliminiert; tut man das letztere, so erhält man das Formelsystem der Gleichungen (1) bis (6) und insbesondere die Gleichungen (8); tut man das erstere, so erhält man:

$$(132)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[X_x - \frac{\Theta}{1+3\Theta}(X_x+Y_y+Z_z)\right] \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[Y_y - \frac{\Theta}{1+3\Theta}(X_x+Y_y+Z_z)\right] = 2\,\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial y} \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left[Y_y - \frac{\Theta}{1+3\Theta}(X_x+Y_y+Z_z)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y} + \frac{\partial Y_x}{\partial z}\right] \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

und die Gleichgewichtsbedingungen sind alsdann, wenn keine Massenkräfte wirken, die entsprechend spezialisierten Gleichung (62) von p. 520:

$$(133)\qquad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \quad .$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Auf diesen Gleichungen beruht die Theorie von SAINT-VENANT einerseits, sowie die modifizierte Theorie, die später von KIRCHHOFF u. A. ausgearbeitet wurde; man vergleiche darüber das schon oben bei der Einordnung des Torsionsfalles in das allgemeine Schema auf p. 608 angegebene Formelsystem. Auf die Verschiedenheiten der einzelnen Modifikationen der Theorie kann hier nicht eingegangen werden; ein sehr deutlicher Einblick in das Wesentliche der Unterschiede ergibt sich aber aus einer in neuester Zeit von VOLLGRAFF veröffentlichten Darstellung, die eine Kritik und in gewissem Sinne eine Verbindung der Methoden von KIRCHHOFF und SAINT-VENANT enthält; der Gedankengang möge daher kurz skizziert werden. DE SAINT-VENANT definiert die Torsion in einer gemischten Weise („methode mixte"), nämlich zum Teil aus der Verschiebung der Punkte des Zylinders, zum Teil aus den wirkenden Kräften; er läßt beide vorläufig zum Teil noch unbestimmt und gestaltet sie dann in der Weise aus, daß sie den allgemeinen Gleichungen genügen. Es liegt also hierin eine anfängliche Ungewißheit, betreffend die Möglichkeit, die erst durch das Ergebnis beseitigt. Diese Ungewißheit besteht aber auch bei dem KIRCHHOFFschen Verfahren, wie es oben skizziert wurde; und hier kommt noch hinzu, daß die Drillung und die

Phil. Mag. (5) **49.** 193. 1900. — R. STRAUBEL, WIED. Ann. **68.** 369. 1899. — W. SUTHERLAND, Phil. Mag. (5) **32.** 31. 1891; DRUDES Ann. **8.** 474. 1902. — W. THRELFALL, Phil. Mag. (5) **30.** 99. 1890. — H. TOMLINSON, Proc. Roy. Soc. **40.** 343. 1886; **43.** 88. 1887. — W. VOIGT, WIED. Ann. **48.** 674. 1893. — E. ZIMANSKY, WIED. Ann. **54.** 139. 1895.

[1] G. KIRCHHOFF, POGG. Ann. **108.** 369. 1859; Ges. Abhandl. p. 116. — M. OKATOW, POGG. Ann. **119.** 11. 1863. — A. BOCK, WIED. Ann. **52.** 609. 1894.

Biegung nicht einzeln definiert, also nicht voneinander getrennt werden; ein Umstand, der diese Behandlung gegenüber der eigentlichen SAINT-VENANTschen an Anschaulichkeit zurücktreten läßt. VOLLGRAF versucht nun, die Vorzüge beider Methoden in der Weise zu verbinden, daß die Anschaulichkeit gewahrt bleibt, die Torsion aber trotzdem direkt aus den gegebenen Kräften heraus definiert wird. Dies geschieht in folgender Weise: Tordieren heißt, auf die Endflächen des Zylinders konstante Kräfte ausüben, die auf diese Flächen tangentiell wirken, für beide Flächen in entsprechenden Punkten entgegengesetzt gleichen Wert haben, ferner auch in einem beliebigen Querschnitt in den entsprechenden Punkten gleiche, sonst aber keine Spannungen hervorrufen, deren Resultante für jede der beiden Endflächen gleich null ist, und die endlich den Gleichungen (132) genügen. Diese Gleichungen liefern nun auf Grund der gegebenen Definition folgende Spezialgleichungen für die Torsion, in denen P eine Konstante ist:

$$(134)\quad \begin{cases} Z_x \cos nx + Z_y \cos ny = 0 \quad , \\ \int X_z\, dx\, dy = 0 \quad , \qquad \int Y_z\, dx\, dy = 0 \quad , \\ \dfrac{\partial Y_z}{\partial x} - \dfrac{\partial X_z}{\partial y} = P \quad , \qquad \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} = 0 \quad . \end{cases}$$

Diesen Gleichungen genügt man, indem man, wenn F eine Funktion von x und y ist, allgemein

$$(135)\quad X_z = Z_x = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad , \qquad Y_z = Z_y = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad ,$$

$$(136)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = P$$

und außerdem an der Kontur des Querschnitts

$$(137)\quad F = \text{const}$$

setzt; einen Teil dieser Gleichungen hat übrigens schon VOIGT in ähnlicher Weise entwickelt. Es ist also die Gleichung der Kontur in die Form (137) zu bringen, wobei die Funktion F der Gleichung (136) genügt; bei gegebener Kontur hat F/P einen vollkommen bestimmten Wert; die Kräfte erhält man dann aus den Gleichungen (135). Nachträglich erweist sich übrigens ein Teil der obigen Definitionsstücke als überflüssig, weil von selbst erfüllt; es genügt, die Torsion als Folge von Kräften zu definieren, die nur in den Endflächen und hier tangential wirken, und die in jedem Querschnitt ebenfalls tangentiale, sonst aber keine Spannungen erzeugen. Schließlich ergeben sich die Verschiebungsgrößen folgendermaßen:

$$(138)\quad \begin{cases} \omega = \dfrac{P}{2K} \quad , \qquad u = -\omega y z \quad , \qquad v = \omega x z \quad , \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = \omega y - \dfrac{1}{K}\dfrac{\partial F}{\partial y} \quad , \qquad \dfrac{\partial w}{\partial y} = -\omega x + \dfrac{1}{K}\dfrac{\partial F}{\partial x} \quad . \end{cases}$$

P ist das Moment, ω der Drillungswinkel pro Längeneinheit, die beiden nächsten Gleichungen liefern die Verzerrung des Querschnitts in, die beiden letzten die senkrecht zu seiner Ebene. Für manche Querschnittsformen, z. B. die Ellipse, ist die Funktion F leicht anzugeben.

Kehrt man jetzt zur Theorie von SAINT-VENANT zurück, so hat man von den Formeln (6) und (8) auszugehen; man kann sie, wenn man statt der Konstanten c den Torsionswinkel pro Längeneinheit ω einführt, in der Form

$$(139)\quad u = -\omega y z \quad , \qquad v = +\omega x z \quad , \qquad w = \omega \Omega$$

schreiben; die einzigen von null verschiedenen Deformationskomponenten sind

(140) $$x_z = \omega\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} - y\right) \quad , \quad y_z = \omega\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y} + x\right) \quad ,$$

die entsprechenden Druckkomponenten

(141) $$X_z = K\omega\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} - y\right) \quad , \quad Y_z = K\omega\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y} + x\right) \quad .$$

Die Hauptgleichung für das Gleichgewicht und die Bedingung für den Rand sind:

(142) $$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\Omega}{\partial n} = y\cos(n\,x) - x\cos(n\,y) \quad .$$

Man kann nun entweder von Ω und ω sofort zur achsialen Verschiebung w und zum ganzen Torsionswinkel φ übergehen, erhält für diese Größen die ganz entsprechenden Gleichungen

(143) $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi x\right)dx - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi y\right)dy = 0$$

und als Lösungen, wenn wieder $x = r\cos\lambda$, $y = r\sin\lambda$ gesetzt wird:

(144) $$\left\{\begin{aligned} w &= \sum_1^m (A\,r^m + A_1\,r^{-m})\sin m\lambda + \sum_1^{m'} (A'\,r^{m'} + A_1'r^{-m'})\cos m'\lambda \\ \frac{r^2}{2}\varphi &= \sum_1^m (A\,r^m - A_1\,r^{-m})\cos m\lambda - \sum_1^{m'} (A'\,r^{m'} - A_1'r^{-m'})\sin m'\lambda \quad ; \end{aligned}\right.$$

mit Hilfe orthogonaler Koordinatinaten lassen sich dann einige Fälle behandeln. Oder, man behält Ω bei und erwägt, daß dieser Funktion, da sie eine Lösung der zweidimensionalen LAPLACEschen Gleichung sein soll, eine konjugierte Funktion Ψ zugehören muß, die, wenn man in Analogie mit der Hydrodynamik Ω als Geschwindigkeitspotential auffaßt, mit der bekannten Stromfunktion zu vergleichen ist; sie genügt ebenfalls der zweidimensionalen LAPLACEschen Gleichung, ihre Randbedingung ist aber eine andere, nämlich:

(145) $$\Psi - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{const} \quad .$$

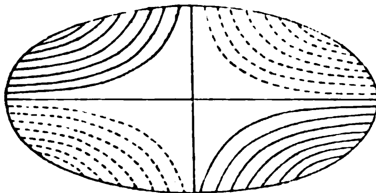
Das Problem ist somit auf die Bestimmung zweier harmonischer Funktionen für gegebene Querschnittsformen reduziert. Zu seiner Lösung kann man sich demnach folgender Methoden bedienen: 1. Direkte Lösung, was nur für wenige Querschnitte möglich sein wird. 2. Willkürliche Wahl von Werten für die beiden Funktionen Ω und Ψ, die dann zu Randbedingungen führen, die für bestimmte Querschnittsformen befriedigt werden, wobei unter Umständen brauchbare Fälle sich ergeben werden. 3. Konforme Abbildung einer gegebenen Querschnittsform auf eine andere, für die die Lösung bekannt ist; man vergleiche hierzu u. a. Abhandlungen von NICCIOLI und AMHOF, wo das allgemeine Verfahren entwickelt wird und Anwendungen gegeben werden. 4. Die Herrübernahme von Lösungen aus anderen Gebieten, wo sie schon bekannt sind, z. B. aus der Hydrodynamik oder aus der Lehre von den elektrischen Flächenströmen. 5. Gewisse indirekte und angenäherte Methoden, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

Lösung für einzelne Fälle. 1. Für den Kreis wird, wenn die Drillung um die Achse erfolgt, $\Omega = 0$, man kommt auf die obigen einfachen Verhältnisse. Erfolgt die Drillung um eine mit der Stabachse parallele Achse, so kann Ω leicht bestimmt werden; es ergibt sich, daß die Querschnitte nicht mehr senkrecht auf der Achse, im übrigen aber unverzerrt bleiben. Ganz entsprechend für den Kreisring.

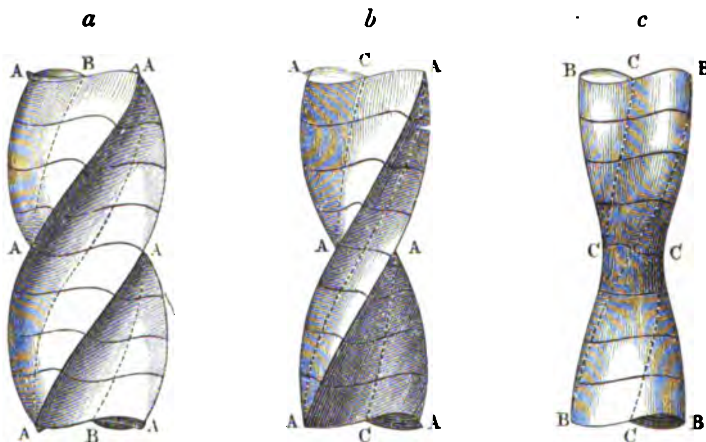
2. Ellipse. Es ergibt sich, wenn a und b die Halbachsen sind:

$$(146) \qquad \Omega = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy \quad , \qquad \Psi = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (x^2 - y^2) \quad .$$

Ganz entsprechend für einen von zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen begrenzten Ring, d. h. für eine elliptische Röhre. Wie man sieht, ist hier $w = \omega \Omega$ von null verschieden und von x und y abhängig; d. h. es büßen hier die Querschnitte ihren ebenen Charakter ein, die Ausbauchung erfolgt nach der einen oder anderen Seite, je nachdem x und y gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben; außerdem ist sie proportional mit dem Produkt beider Koordinaten und insbesondere gleich groß für alle Stellen, in denen dieses Produkt gleich groß ist. Diese Linien nennt SAINT-VENANT die topographischen Konturen; es sind die Linien, in denen der ursprünglich ebene, jetzt gewölbte Querschnitt von einer Schar auf der Achse senkrechter Ebenen geschnitten wird. Diese Linien sind



Figur 214.



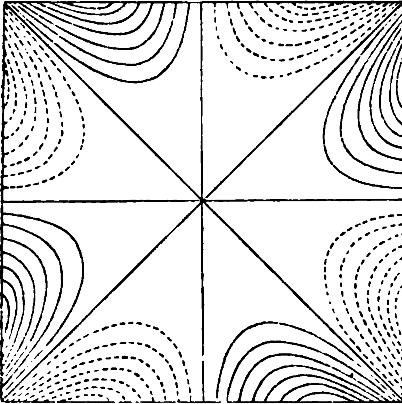
Figur 215.

für die Ellipse in Figur 214 dargestellt; die erhabenen Linien sind voll, die vertieften unterbrochen gezeichnet. Ferner ist in Figur 215 c (rechts) die äußere Ansicht des tordierten elliptischen Zylinders gegeben, mit eingezeichneten Leit- und Querlinien.

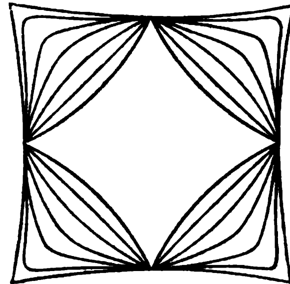
3. Rechteck, begrenzt von den Seiten $x = \pm a$, $y = \pm b$. Die Funktionen lassen sich als unendliche Reihen trigonometrischer und hyperbolischer Glieder darstellen, und zwar wird:

$$(147) \left\{ \begin{aligned} \Omega &= -xy + 4b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_0^\infty \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \frac{1}{\cosh \frac{(2m+1)\pi a}{2b}} \cdot \sinh \frac{(2m+1)\pi x}{2b} \sin \frac{(2m+1)\pi y}{2b} \\ \Psi &= \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2) \\ &\quad - 4b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_0^\infty \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \frac{1}{\cosh \frac{(2m+1)\pi a}{2b}} \cdot \cosh \frac{(2m-1)\pi x}{2b} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b} \,. \end{aligned} \right.$$

Für das Quadrat treten leicht ersichtliche Vereinfachungen ein. Für diesen Spezialfall sind die topographischen Konturen in Figur 216, die Gesamtansicht in Figur 215*c* (links) dargestellt, während Figur 215*b* (Mitte) dem allgemeinen Fall des Rechtecks entspricht. Vergleicht man die topographischen Konturen für Ellipse und Quadrat, so sieht man, daß jene in vier, dieses aber in acht Teile zerlegt erscheint, und man kann sich fragen, wie es beim Rechteck, das doch mit beiden Figuren gewisse Ähnlichkeiten hat, sich gestalten möge; die Antwort lautet, daß sich hier vier oder acht Teile bilden, je nachdem das Seitenverhältnis größer oder kleiner als 1,4513 ist.



Figur 216.



Figur 216 *a*.

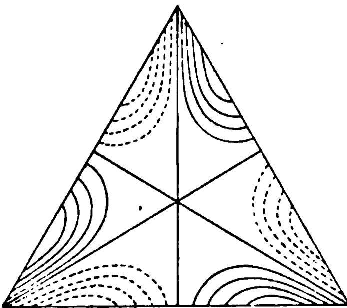
Auch für Quadrate mit vier krummlinigen Seiten läßt sich das Problem lösen und führt auf algebraische Funktionen, wenn man die Seiten in bestimmter Weise wählt, nämlich gemäß der Gleichung

(148) $$x^2 + y^2 - a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) = 1 - a$$

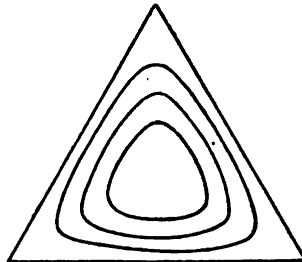
oder in Polarkoordinaten

(149) $$r^2 - ar^4 \cos 4\varphi = 1 - a \quad ,$$

wo sich für jeden Wert von a eine andere Querschnittsform ergibt (Figur 216*a*). Es sind sämtlich Quadrate mit abgerundeten Ecken; nur das innerste ($a = 0{,}5$) und das äußerste $[a = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)]$ haben Spitzen, liegen übrigens, wie man sieht, diagonal zueinander.



Figur 217.



Figur 218.

4. Gleichseitiges Dreieck. Setzt man $\Omega = -1/6\, a \cdot (x^3 - 3xy^2)$, so wird die Randbedingung für das gleichseitige Dreieck von der Höhe $3a$ und den durch die drei Wurzeln der Gleichung

(150) $$(x - a)(x - y\sqrt{3} + 2a)(x + y\sqrt{3} + 2a) = 0$$

bestimmten Seiten befriedigt. Die topographischen Konturen sind in Figur 217 angegeben. Dagegen bedeuten die Linien der Figur 218, der man für die anderen Querschnittsformen analoge zur Seite stellen kann, Richtungslinien des Tangentialdruckes; es sind allgemein die Kurven

(151) $$\Psi - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) - c \quad ;$$

speziell für das gleichseitige Dreieck:

(152) $$x^3 - 3xy^2 + 3ax^2 = -6ac \quad ;$$

und wenn man hier die Konstante c von Kurve zu Kurve um gleich viel wachsen läßt, so erhält man in der nachbarlichen Dichte der Kurven zugleich ein Bild von der Größe des Tangentialdrucks (für die Ellipse sind es konzentrische und ähnliche Ellipsen).

5. Von sonstigen Formen sei noch als Beispiel komplizierterer Begrenzung der Fall eines Kreisringes erwähnt, dessen innere und äußere Begrenzung nicht konzentrisch sind; er ist von Macdonald behandelt worden. a und a' sind die Radien, b ist ihr Abstand; die Drillung erfolgt um die Achse, auf der die Schnittpunkte der Zentrallinien und der Potenzlinien der Kreise liegen. Je nachdem $a \gtreqless 2b + a'$ ist, liegt die Stelle größter Schubdeformation in der äußeren oder inneren Oberfläche; wenn a' klein ist, wird der Torsionswiderstand im ersten Falle durch die Höhlung kaum beeinflußt, im zweiten aber annähernd im Verhältnis $a:2b$ vermindert. — Für $b > a + a'$ erhält man die Torsion zweier getrennter Vollzylinder um eine gemeinsame Achse.

Weitere Bemerkungen zur Torsion der Prismen. Was zunächst die Formel für das Torsionsmoment bezw. den Torsionsmodul betrifft, so hatte für den Fall rechteckigen Querschnitts schon Cauchy eine Formel, und zwar eine solche algebraischen Charakters, aufgestellt; sie konnte indessen unmöglich richtig sein und ist auch durch Beobachtungen von Voigt widerlegt worden. Dagegen bestätigen diese Messungen die von Saint-Venant aus seiner Theorie abgeleitete Formel

(153) $$K = \frac{Ml}{\varphi a b^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{a}\frac{f(n)}{16}\right)} \quad ,$$

worin $f(n)$ eine aus den Saint-Venantschen Tafeln zu entnehmende Funktion des Verhältnisses n der beiden Rechteckseiten a und b ist. Später hat Saint-Venant noch eine Formel angegeben, die für elliptischen Querschnitt genau, für andere näherungsweise gilt, nämlich:

(154) $$K = \frac{MlQ}{\varphi \varkappa q^4} \quad ,$$

wo Q das polare Trägheitsmoment des Querschnitts q ist, während $\varkappa$ (teils genau, teils näherungsweise) folgende Werte hat (rund: $\varkappa = 1/40$):

Ellipse, unabhängig vom Achsenverhältnis $\varkappa = \frac{1}{4\pi^2} = 0{,}0253$ (also auch Kreis).

Rechteck, mit dem Seitenverhältnis;

	1 (Quadrat)	2	4	8
$\varkappa =$	0,0234	0,0238	0,0249	0,0260

Kreissektor, mit dem Zentriwinkel:

	45°	60°	90°	120°	180°
$\varkappa =$	0,0233	0,0230	0,0236	0,0246	0,0245

Gleichseitiges Dreieck . . . . $\lambda = 0{,}0222$.

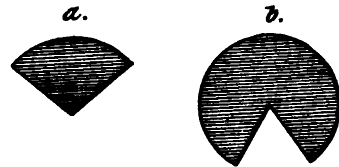
Rechnet man aus, so findet man, daß der Kreis der günstigste von allen Querschnitten ist, daß andere also nur zu besonderem Zwecke Vorteil bieten. BAUSCHINGER hat diese Formeln an fünf Zylindern geprüft, die bezw. kreisförmigen, elliptischen (1 : 2), quadratischen und rechteckigen (2 : 1 und 4 : 1) Querschnitt hatten, während dessen Größe bei den vier ersten 50, beim letzten 25 qcm betrug; es ergab sich für das Verhältnis der fünf Drillungswinkel:

berechnet 1 : 1,25 : 1,13 : 1,40 : 9,1

beobachtet 1 : 1,24 : 1,20 : 1,47 : 9,65;

drei Werte stimmen also gut, die beiden anderen nur leidlich überein, was vielleicht auf Rechnung der bei Gußeisen, dem Material der Stäbe, nicht unbeträchtlichen Abweichung vom HOOKEschen Gesetz zu setzen ist.

Ein überraschendes und praktisch wichtiges Ergebnis ist noch dies, daß gerade die der Achse am nächsten liegenden Punkte des Randes am meisten verzerrt werden, und daß, was hiermit zusammenhängt, eine ausspringende Ecke einer sehr kleinen, eine einspringende Ecke einer sehr großen Deformation ausgesetzt ist (Figur 219*a* und *b*) — eine Tatsache, der in der Praxis durch Abrundung jeder einspringenden Ecke Rechnung getragen wird.



Figur 219.

Man vergleiche hierzu noch eine Abhandlung von FILON, in der nach der Methode der trigonometrisch-hyperbolischen Reihen (s. o.) Querschnitte behandelt werden, die von konfokalen Kegelschnitten begrenzt sind; insbesondere solche, die teilweise durch Hyperbelzweige begrenzt sind und sich in gewissen Fällen der Querschnittsform von Schienen nähern, wobei sich über die Wirkung der Einschnitte interessante Folgerungen ergeben. — Hinsichtlich der Frage der Abrundung scharfer Kanten sei auch auf eine Arbeit von SOEKNIK hingewiesen, auf die im übrigen, da sie heterotrope Körper betrifft, später zurückzukommen sein wird.

Eine hübsche Veranschaulichung der Spannungen im tordierten Prisma hat PRANDTL ersonnen. Wenn man nämlich eine horizontale Membran gleichmäßig spannt und gleichförmig belastet, so nimmt sie die Gestalt einer krummen Fläche an, die eben jene Veranschaulichung liefert; die Schubspannungen haben die Richtung der Tangenten an die horizontalen Schichtlinien der Membran, die Größe der Spannungen wird durch die Dichte der Schichtlinien, der Torsionswiderstand durch das Volumen zwischen der krummen Fläche und der ursprünglichen Ebene dargestellt. Man kann die Membran herstellen, indem man in eine ebene Blechplatte eine Öffnung von der Gestalt des Stabquerschnittes schneidet, eine Seifenhaut darauf bringt und einen einseitigen Überdruck auf sie wirken läßt. Auch auf hohle Querschnitte kann man den Vergleich ausdehnen.[1]

Zusammenwirkung von Zug und Drillung. Die im vorigen Artikel erwähnte Tatsache, daß der Dehnungsmodul eines Drahtes von der schon vorhandenen Belastung abhängt, läßt die Frage aufwerfen, ob nicht auch die Drillung ver-

[1] Literatur zur Torsion der Prismen: DE SAINT-VENANT, Mém. sav. étrang. 1855. p. 232; C. R. **87.** 823. 849. 893; **88.** 142. 1879. — THOMSON und TAIT, **2.** 229. — G. KIRCHHOFF, Vorl. über Mechanik und Ges. Abh. (vgl. o.). — J. A. VOLLGRAFF, DRUDEs Ann. **14.** 620. 1904. — G. NOCCIOLI, Nuov. Cim. **33.** 208. 1893. — R. AMHOF, Progr. Koburg 1894. — A. G. GREENHILL (Kreissektor), Mess. of Math. **8.** 89. 1877; **10.** 83. 1880; (Konfokale Ellipsen u. s. w.), Quart. Journ. of Math. **16.** 1879. — H. M. MACDONALD (nicht konzentrische Kreise), Cambr. Phil. Soc. **8.** (2) 62. 1893. — L. FILON, Proc. Roy. Soc. Lond. **65.** 428. 1899. — BAUSCHINGER, Zivilingenieur. 1881. p. 115. — L. PRANDTL, Physik. Ztschr. **4.** 758. 1903 Jahresbericht d. Math.-Ver. **13.** 31. 1904. — K. SOECKNICK, Progr. Königsberg 1904. — W. VOIGT, WIED. Ann. **15.** 497. 1882.

schieden ausfällt, je nachdem gleichzeitig ein Zug ausgeübt wird oder nicht. Die erweiterte Elastizitätstheorie läßt einen solchen Einfluß im Prinzip erwarten, und man kann dafür sofort die Formel

$$M = \alpha + \beta P + \gamma P^2 \tag{155}$$

aufstellen, wo M der Torsionswiderstand, P die Spannung der Länge nach ist und die drei Konstanten durch Versuche zu bestimmen wären, bezw., da die erste von ihnen den normalen Torsionswiderstand darstellt, nur die beiden letzten. Versuche hierüber haben u. A. CANTONE und MICHELUCCI, sowie BENTON angestellt. Erstere fanden, daß der Torsionswiderstand mit wachsender Belastung bei den meisten Substanzen abnimmt, daß aber Nickel sich entgegengesetzt verhält; umgekehrt fanden sie, daß die Längenänderung der Drähte durch die Belastung im allgemeinen mit zunehmender Drillung geringer wurde, besonders bei den weicheren Metallen. Sehr eingehende und sorgfältige Messungen hat BENTON angestellt; die Werte, die er für die Koeffizienten β und γ erhält, haben freilich insofern keine allgemeine Bedeutung, als sie von der Dicke der Drähte abhängen; immerhin läßt sich so viel sagen, daß der Torsionswiderstand bei Stahl, Eisen, Nickelin und nicht zu kupferhaltigem Messing mit wachsender Spannung abnimmt, daß er bei Kupfer erst zunimmt und nachher abnimmt, daß er endlich, in Bestätigung des Resultats von CANTONE, bei Nickel durchweg zunimmt.

Mit den hier in Rede stehenden, rein elastischen Erscheinungen sind diejenigen nicht zu verwechseln, die bei permanenten Drillungen und Dehnungen auftreten, die von WIEDEMANN, HIMSTEDT u. A. eingehend studiert worden sind, und auf die im Artikel „Kohäsion" eingegangen werden wird.

Für Kautschuk liegen Versuche über den Einfluß der Spannung auf die Drillung vor von MACGREGOR und MACDONALD einerseits und von HEBB andererseits; danach scheint der Torsionsmodul bei wachsender Belastung zuerst bis zu einem Minimum ab- und dann zuzunehmen; jedoch muß man nach HEBB in diesen Schlüssen sehr vorsichtig sein, da die Zeit und die Materialveränderung sehr störend mitwirken.[1]

Spiralfedern. Das interessanteste Objekt für das Studium des Zusammenwirkens verschiedener Beanspruchungen ist die Spiralfeder, d. h. ein elastischer Körper, der überall gleichen Querschnitt hat und dessen Mittellinie doppelt gekrümmt ist (man vgl. hierüber das schon auf p. 616 Gesagte); insbesondere der Spezialfall, wo die Mittellinie eine regelmäßige Schraubenlinie ist, so daß die Hauptachsen der ursprünglichen Biegung und Drillung überall ähnlich zur Kurve gelegen sind; und wo ferner, was den Querschnitt betrifft, dieser so beschaffen ist, daß der Biegungswiderstand in allen Richtungen gleich ist oder daß wenigstens die beiden Hauptträgheitsebenen, d. h. die Ebenen des größten und kleinsten Biegungswiderstands in jedem Punkte mit der Tangentialebene des Zylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt und mit der die Zentrallinie berührenden Normalebene zusammenfallen. Man kann alsdann eine Beanspruchung ausüben, bei der die Spirale immer regelmäßige Schraubenform beibehält; und zwar erfolgt diese Beanspruchung durch einen am freien Ende — das andere ist fest — angreifenden „Bohr" oder ein „Korkzieher-Kraftsystem" (vgl. p. 264), d. h. durch eine axiale Kraft und ein Kräftepaar in einer darauf senkrechten Ebene. Auf die verschiedenen Möglichkeiten, diesen Bohr aufzulösen und auf die Frage, wie hier Zug, Biegung und Drillung zusammenwirken, kann hier nicht eingegangen werden; es muß genügen, zu bemerken, daß durch die Beanspruchung der Steigungswinkel u, der Zylinderradius r, die Länge l der Spirale, die Länge h

[1] M. CANTONE u. E. MICHELUCCI, Rend. Acc. Linc. (5) **6**. II. 1897. — J. R. BENTON, Inaug.-Diss. Gött. 1900.; DRUDES Ann. **3**. 471. 1900. — E. G. COKER, Tranz. Edinb. Soc. **40**. 263. 1901 (die Resultate weichen von den obigen z. T. ab). — J. MACGREGOR u. W. MACDONALD, Proc. N. Scotia Inst. **10**. 28. 1899. — TH. HEBB, ibid. p. 273. 1900.

ihrer Achse und die Winkellänge w des freien Endes sämtlich geändert werden, und zwar so, daß sie die neuen Werte u', r', l', h', w' annehmen; dabei bestehen zwischen diesen Größen die Beziehungen

$$(156)\qquad w = \frac{l\cos u}{r} \quad , \qquad h = l\sin u \quad .$$

Die beiden Bestandteile des Bohrs, der diese Änderungen hervorruft, nämlich die Kraft R und das Kräftepaar L haben alsdann folgende Werte:

$$(157)\quad \begin{cases} R = C\frac{\cos u'}{r'}\left(\frac{\sin u'\cos u'}{r'} - \frac{\sin u\cos u}{r}\right) - B\frac{\sin u'}{r'}\left(\frac{\cos^2 u'}{r'} - \frac{\cos^2 u}{r}\right) \quad , \\ L = C\sin u'\left(\frac{\sin u'\cos u'}{r'} - \frac{\sin u\cos u}{r}\right) + B\cos u'\left(\frac{\cos^2 u'}{r'} - \frac{\cos^2 u}{r}\right) \quad , \end{cases}$$

wo C und B der axiale und transversale elastische Widerstand, d. h. C der gegen Drillung und B der in allen Querrichtungen gleiche gegen Biegung ist; hat der Querschnitt nicht kinetische Symmetrie (Kreis-, Quadratform u. s. w.), so muß man besondere Glieder mit den beiden Biegungswiderständen A und B einführen. Für kleine Änderungen erhält man, wenn man sie durch dh und dw ausdrückt,

$$(158)\quad \begin{cases} R = \frac{1}{lr^2}\left[(C\cos^2 u + B\sin^2 u)\,dh + (C - B)\sin u\cos u\cdot r\,dw\right] \quad , \\ L = \frac{1}{lr}\left[(C - B)\sin u\cos u\cdot dh + (C\sin^2 u + B\cos^2 u)\,r\,dw\right] \quad . \end{cases}$$

Diese Formeln sind nun nach dh und dw aufzulösen; es genüge hier die Angabe für den einfachsten Fall, wenn nämlich ausschließlich ein axialer Zug R wirkt, also L gleich null ist:

$$(159)\qquad dh = lr^2\left(\frac{\sin^2 u}{B} + \frac{\cos^2 u}{C}\right)R \quad , \qquad dw = lr\sin u\cos u\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)R \quad .$$

Hat die Feder kreisförmigen Querschnitt vom Radius a, so wird

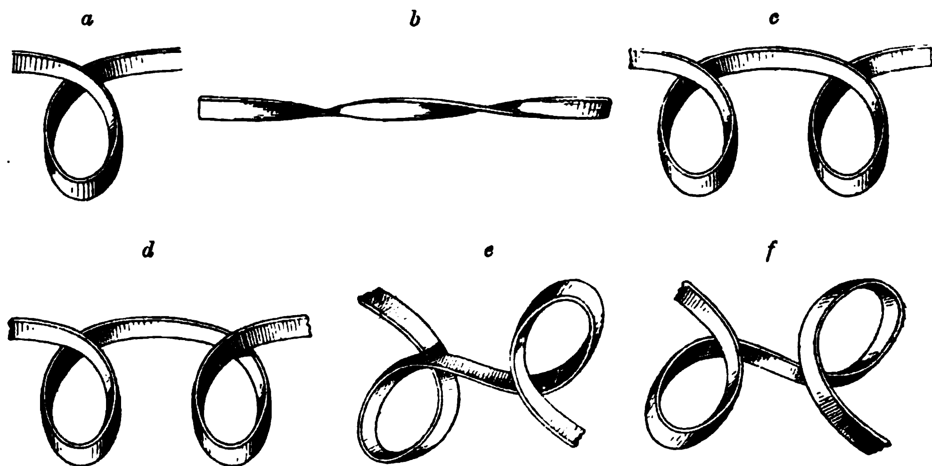
$$(160)\qquad \frac{1}{C} - \frac{1}{B} = \frac{4\mu}{E\pi a^4} \quad ;$$

beide Größen dh und dw sind dann positiv, d. h. die Spiralfeder wird länger und der Gesamtumlauf größer; dagegen wird dr negativ, d. h. der Schraubenzylinder enger; umgekehrt natürlich bei Druck. Dieser Fall ist schon von SAINT-VENANT behandelt worden, andere später von THOMSON und TAIT, PERRY, MITCHELL u. A. Auch Versuche zur Prüfung der Theorie sind mehrfach angestellt worden, so von MILLER, der, in Übereinstimmung mit obiger (etwas umzuändernder) Formel fand, daß die Dehnung direkt proportional ist dem Zuge und umgekehrt proportional dem Quadrat des Sekans des Steigungswinkels der Spirale. Man kann hiernach auch die Elastizitätskonstanten des Materials aus Spiralversuchen ermitteln, und zwar Dehnungsmodul, Drillungsmodul und Elastizitätszahl in einheitlicher Weise, so daß, bei Benutzung gut gearbeiteter Spiralen, die Messungsfehler sehr gering werden. Ferner sei auf Untersuchungen von AYRTON und PERRY hingewiesen, die sich u. a. auch darauf erstrecken, ob man zur Erreichung bestimmter Zwecke Drähte mit elliptischem Querschnitt besser flach oder mit der hohen Kante auf den Windungszylinder wickle.

In der Technik bedient man sich statt der exakten Theorie lieber einer angenäherten, die von bestimmten vereinfachenden Annahmen ausgeht, dafür aber handlichere Formeln liefert und dann auch auf Spiralfedern anwendbar ist, die nicht einen Zylinder, sondern einen Kegel oder eine Kugel erfüllen; es sei in

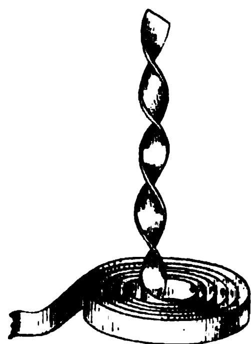
dieser Hinsicht auf das Buch von BACH sowie auf die technischen Zeitschriften verwiesen.[1]

Streifen und Bänder. Zum Schlusse sei noch auf die zahlreichen und interessanten Versuche hingewiesen, die man mit Körpern anstellen kann, die in ihren drei Dimensionen von verschiedener Größenordnung sind, d. h. deren Länge groß gegen die Breite und deren Breite groß gegen die Dicke sind; es sind das



Figur 220.

Bänder oder Streifen aus Metallblech, Kautschuk u. s. w. Auch hierüber vergleiche man u. a. eine Arbeit von PERRY[2], die einen an den Enden festgehaltenen, in der Mitte tordierten und dann auf Zug beanspruchten Blechstreifen betrifft. Kautschukbänder andererseits eignen sich besonders zu Versuchen über weitgehende Biegung und Drillung, wobei ganze Umläufe oder gar viele solche zur Ausbildung gelangen, ohne daß deshalb die Elastizitätsgrenze überschritten zu sein braucht. So kann man auf diese Weise die Verwandtschaft von Biegung und Drillung demonstrieren. Erteilt man z. B. einem Bande eine ganze Biegung von 360° (Figur 220*a*) und fügt jetzt einen Zug hinzu, so erhält man eine ganze Torsion um 360° (Figur 220*b*). Aus zwei ganzen Biegungen erhält man im Falle Figur 220*c* zwei ganze Torsionen, dagegen in den Fällen Figur 220*c* und 220*e* gar keine, weil die beiden Biegungen entgegengesetzt sind und die beiden infolgedessen ebenfalls entgegengesetzten Torsionen sich ausgleichen; im Falle Figur 220*f* endlich erhält man wieder zwei Torsionen. Ein anderes Beispiel erhält man durch Ausziehen des inneren Endes eines ebenen Spiralbandes von vielen Umläufen (Figur 221), wobei sich jeder Biegungsumlauf in einen Drillungsumlauf verwandelt. Geht man zu geschlossenen Bändern über, so kommt man zu dem Problem der möglichen Gleichgewichtsformen eines solchen Ringes (Kreis, achtförmige Figur, Schleifenfigur u. s. w.). Ferner zu Fragen, die in die Geometrie

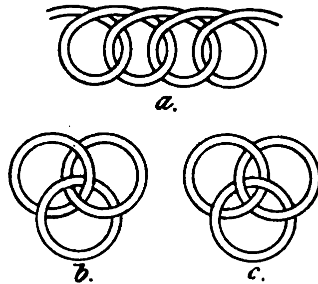

Figur 221.

---

[1] DE SAINT-VENANT, C. R. **17.** 1843. — THOMSON und TAIT, Handbuch der theoretischen Physik **2.** 126 ff. — J. PERRY, Applied mechanics. London 1899. — W. E. AYRTON und J. PERRY, Proc. Roy. Soc. **36.** 297. 1884. — J. H. MICHELL, Proc. Lond. math. Soc. **31.** 130. 1899. — J. W. MILLER, Phys. Rev. **14.** 129. 1902. — [2] J. PERRY, Phil. Mag. (5) **29.** 244. 1890.

des Zusammenhangs hinüberspielen; so zu dem Experiment, bei dem ein geschlossenes Papierband der ganzen Länge nach zerschnitten wird, wobei sich, je nachdem es ursprünglich (vor der Schließung) keine oder eine oder zwei u. s. w. Drillungsumläufe erhalten hatte, zwei getrennte Ringe oder ein einziger, doppelt so langer oder zwei miteinander verkettete Ringe ergeben u. s. w.

Elastizität zusammengesetzter Körper. Sehr kompliziert, aber wegen ihrer Wichtigkeit für die Bau- und sonstige Technik vielfach untersucht, sind die Erscheinungen an zusammengesetzten Körpern, z. B. Stabsystemen, Ketten, Geweben, Drahtnetzen u. s. w. Gewebe haben in der Längs- und Querrichtung einen großen, in der Diagonalrichtung einen kleinen Dehnungsmodul. Ein wie in Figur 222 *a* geknüpfter Drahtstreifen hat in einem Sinne einen großen, im anderen einen kleinen Biegungs- und Torsionswiderstand. Ein nach Art der Figur 222 *b* hergestelltes Geflecht ist sehr biegsam (Panzerhemd), ein wie Figur 222 *c* gearbeitetes fast gar nicht (Rohrstuhl).



Figur 222.

Grenze der Biegungs- und Torsionselastizität. Dieselbe ist erreicht, wenn die Hinzufügung der kleinsten biegenden bezw. tordierenden Kraft eine dauernde Biegung bezw. Torsion erzeugt. Allgemeines läßt sich hierüber jedoch nicht sagen, da die Lage der Grenze von zahlreichen Faktoren bedingt wird; so liegt sie bei hartgezogenen Drähten höher als bei geglühten, nach wiederholten Deformationen rückt sie meist hinauf (in gewissen Fällen aber auch hinab) u. s. w. In vielen Punkten lauten die Resultate verschiedener Beobachter zum Teil nicht übereinstimmend oder gar widersprechend. Ein nahe bis zur Grenze tordierter Draht bekommt nach Mac Ferlane eine dauernde Torsion, wenn er gespannt wird, und ein nahe bis zur Grenze gespannter Draht erfährt eine dauernde Dehnung, wenn er tordiert wird. Andererseits wird nach Wiedemann einem permanent tordierten Draht durch Spannung ein Teil der permanenten Torsion entzogen.

Anwendungen der Elastizität. Die wichtigsten sind folgende: 1. Federn mit der Bestimmung, auf irgend einen Gegenstand einen Druck auszuüben, stets für Herstellung des ursprünglichen Zustandes zu sorgen u. s. w. 2. Spiralförmige Uhrfedern zur Erzeugung (Hauptfeder) und Regulierung (Unruhe) der Bewegung. 3. Federwagen (s. Artikel „Wage“, p. 138). 4. Federdynamometer zu verschiedenen Zwecken, insbesondere zur Messung der Muskelkraft und der Leistung von Maschinen. 5. Aneroidbarometer, Federmanometer und andere druckmessende Apparate (s. Artikel „Luftdruck“).

Biegung und Torsion durch thermische Kräfte. Wie schon im allgemeinen Artikel (p. 609) bemerkt wurde, können elastische Veränderungen, statt durch mechanische Druckkräfte, auch durch thermische Drucke hervorgerufen werden, wie sie entstehen, wenn sich die Temperatur im ganzen oder von Teil zu Teil des betrachteten Körpers ändert. Dabei sind zwei Fälle möglich, nämlich einerseits der, daß der Körper in der Lage ist, dem thermischen Drucke nachzugeben, so daß er Verschiebungen der Teile erfährt, aber von Spannungen frei wird; und andererseits der, daß er undeformiert bleibt, dann aber notwendig in einen Zustand elastischer Spannung kommt. Was insbesondere Biegung und Drillung durch Temperaturänderung betrifft, so ist die Zahl der hierher gehörigen Erscheinungen sehr groß, und ein Teil von ihnen, wie die Biegung des Kompensationsstabes eines Pendels oder die Drillung und Entdrillung von Fäden bei Temperaturschwankungen sind allgemein bekannt. Die nähere Untersuchung gehört aber teils in die Thermodynamik, teils in die Technik, und es sei daher auf die betreffende Literatur verwiesen.

Elastizität der Kristalle.

Von F. AUERBACH.

Einleitung. Bei Kristallen äußert sich die Elastizität naturgemäß in weit verwickelteren Erscheinungen als bei isotropen Körpern, und es ist daher dieser Zweig der Elastizitätslehre erst in neuester Zeit wenigstens in den Hauptzügen zu einem gewissen Abschluß gebracht worden. Hieran hat, auf der physikalisch durch FRANZ NEUMANN, KIRCHHOFF, Lord KELVIN u. A., kristallographisch durch HESSEL, SCHOENFLIES, SOHNCKE u. a. geschaffenen Grundlage, den Hauptanteil W. VOIGT, der es sich in zahlreichen und schwierigen Untersuchungen hat angelegen sein lassen, die Theorie sowohl in mathematisch-physikalischer als auch in kristallographischer Hinsicht in möglichster Klarheit und Strenge durchzuführen, und der ebenfalls, teils selbst, teils durch seine Schüler, die experimentelle Prüfung der Theorie und die Feststellung der Konstanten gefördert hat. Daneben kommen natürlich auch andere Forscher in Betracht, sowohl Physiker wie Kristallographen. Hier kann die ganze Lehre, in Anbetracht der Weitläufigkeit aller Formeln und Tabellen, nur in den Hauptzügen wiedergegeben werden.[1]

Komplikation der Wirkungen bei Kristallen gegenüber isotropen Körpern. Die gedachte Komplikation äußert sich hauptsächlich in folgenden Punkten:

1. Längszug oder -druck bringt zwar auch hier außer der Verlängerung oder Verkürzung in der Beanspruchungsrichtung die Nebenerscheinung der Querkontraktion oder Querdilatation hervor; diese ist aber hier nicht nach allen Querschnittsrichtungen gleich groß, und es wird infolgedessen nicht nur, wie bei isotropen Körpern, die Größe, sondern auch die Gestalt des Querschnitts eine andere, z. B. wird aus einem kreisförmgen Querschnitt ein elliptischer, aus einem rechteckigen ein solcher mit gekrümmten Seiten u. s. w., und es werden auch die Winkel geändert, unter denen sich Linien im Körper schneiden.

2. Die durch allseitig gleichen Druck erzeugte kubische Kompression ist hier nicht, wie bei isotropen Körpern, eine reine Kompression, sondern sie ist, da die linearen Kompressionen in verschiedenen Richtungen verschieden sind, mit der Begleiterscheinung einer Deformation, d. h. Gestaltsänderung verknüpft; der Körper bleibt nicht sich selbst ähnlich, die an oder in ihm vorkommenden

[1] Näheres findet man u. a. in folgenden Werken und Abhandlungen: W. VOIGT, Die fundamentalen Eigenschaften der Kristalle (elementar, aber mit höheren Zusätzen). Leipzig 1898. — W. VOIGT, Rapport s. l'état. actuel de nos connaiss. s. l'élast. des cristaux. Paris 1900. — W. VOIGT (allgemeine Theorie), WIED. Ann. **16.** 273. 1882. — W. VOIGT (allgemeine Theorie, auf molekularer Grundlage), Abh. Göttingen. Ges. d. Wiss. **34.** 1. 1887. — F. NEUMANN, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität. Leipzig 1885. — TH. LIEBISCH, Physikalische Kristallographie. Leipzig 1891; Grundriß der physikalischen Kristallographie. Leipzig 1896 — CH. SORET, Elem. de cryst. ph. Paris 1893. — P. GROTH, Grundriß der physikalischen Kristallographie u. s. w. — Man vergleiche ferner die Zitate zur Konstitution der Kristalle oben p. 57 und 66.

oder gedachten Winkel ändern sich im allgemeinen. Eine Ausnahme machen nur die dem regulären System angehörigen Kristalle; bei ihnen erzeugt allseitig gleicher Druck eine reine Kompression.

3. Bei prismatischen oder zylindrischen, aus Kristallen gebildeten Körpern bewirken, selbst wenn sie doppelt symmetrische Querschnitte haben, Zugkräfte, die auf die Grundflächen ausgeübt werden, außer der in einer Biegung bestehenden Haupterscheinung noch die Nebenerscheinung einer Drillung, und umgekehrt bringen Drehungsmomente um die Längsachse außer der Drillung noch eine Biegung hervor. Man kann diese Erscheinungen als „freie Biegung" und „freie Drillung" bezeichnen; nur in besonderen Fällen gehen dieselben in eine „reine Biegung" bezw. „reine Drillung" über.[1]

4. Bei der Drillung bleiben die Querschnitte auch in dem Spezialfalle kreisförmiger Gestalt nicht eben, sondern wölben sich, wie das bei isotropen Körpern nur bei nicht kreisförmiger Gestalt eintritt.

5. Die Größe der eintretenden Kompressionen, Winkeländerungen, Biegungen und Drillungen hängt, von den wirkenden Kräften abgesehen, nicht bloß von dem Stoffe ab, aus dem der Körper besteht, sondern auch von der Richtung, in der das Stäbchen, Scheibchen oder allgemein das Beobachtungsstück aus dem Kristall herausgeschnitten ist. Es genügt also hier nicht, den Elastizitätsmodul E, den Torsionsmodul T, die Elastizitätszahl μ u. s. w. schlechthin anzugeben, sondern man muß diese Größen für jede der kristallographischen Hauptrichtungen besonders ermitteln.

6. Das elastische Verhalten der Kristalle ist hiernach nicht, wie bei den isotropen Körpern, durch zwei, sondern durch mehr Konstanten bestimmt. Bei jenen konnte man hierfür entweder E und μ oder E und K oder die Elastizitätskonstanten, oder Volumen- und Gestaltsmodul wählen; hier, bei den Kristallen, empfiehlt sich am meisten entweder die Angabe der verschiedenen E und K oder die Angabe sämtlicher Elastizitätskonstanten.

Druckkomponenten.[2]

Diese, $X_x\ Y_y\ Z_z\ Y_z\ Z_x\ X_y$, sind sechs homogene lineare Funktionen der neun Differentialquotienten der Verrückungskomponenten $u\,v\,w$ nach den Koordinaten $x\,y\,z$. Die hiernach auftretende Zahl von 54 Konstanten verringert sich aber zunächst auf 36 durch Berücksichtigung des Umstands, daß die Differentialquotienten nur in den sechs Kombinationen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial v}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial w}{\partial z}\,,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

oder abgekürzt $x_x,\ y_y,\ z_z,\ y_z,\ z_x,\ x_y$ vorkommen [s. Art. „Elastizität" p. 514, Gleichung (36)]; sodann weiter auf 21 auf Grund der Existenz des elastischen Potentials (p. 527, statt a wird jetzt c geschrieben):

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f = \tfrac{1}{2}c_{11}x_x^2 &+ c_{12}x_x y_y + c_{13}x_x z_z + c_{14}x_x y_z + c_{15}x_x z_x + c_{16}x_x x_y \\ &+ \tfrac{1}{2}c_{22}y_y^2 + c_{23}y_y z_z + c_{24}y_y y_z + c_{25}y_y z_z + c_{26}y_y x_y \\ &+ \tfrac{1}{2}c_{33}z_z^2 + c_{34}z_z y_z + c_{35}z_z z_x + c_{36}z_z x_y \\ &+ \tfrac{1}{2}c_{44}y_z^2 + c_{45}y_z z_x + c_{46}z_z x_y \\ &+ \tfrac{1}{2}c_{55}z_x^2 + c_{56}z_x x_y \\ &+ \tfrac{1}{2}c_{66}x_y^2 \end{aligned}\right.$$

[1] W. Voigt, Wied. Ann. **16**. 273. 1882. — [2] Für die Druckkomponenten: F. Neumann, Vorlesung über Elastizität; mit Rücksicht auf das Potential: W. Voigt, Wied. Ann. **16**. 276. 1882. Für die Potentiale selbst: G. Kirchhoff, Mechanik, p. 390; Story, Am. J. Math. **1**. 177. 1878.

Durch Differentiation nach x_x u. s. w. erhält man hieraus $-X_x$ u. s. w.; die erste vertikale und die erste horizontale Kolumne ergeben die sechs Glieder von X_x, die zweite vertikale und die zweite horizontale Kolumne die Glieder von Y_y u. s. w.

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
-X_x &= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y\\
-Y_y &= c_{12}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{24}y_z + c_{25}z_x + c_{26}x_y\\
-Z_z &= c_{13}x_x + c_{23}y_y + c_{33}z_z + c_{34}y_z + c_{35}z_x + c_{36}x_y\\
-Y_z &= c_{14}x_x + c_{24}y_y + c_{34}z_z + c_{44}y_z + c_{45}z_x + c_{46}x_y\\
-Z_x &= c_{15}x_x + c_{25}y_y + c_{35}z_z + c_{45}y_z + c_{55}z_x + c_{56}x_y\\
-X_y &= c_{16}x_x + c_{26}y_y + c_{36}z_z + c_{46}y_z + c_{56}z_x + c_{66}x_y
\end{aligned}\right.$$

Anwendung auf die einzelnen Kristallklassen und Kristallsysteme. Die allgemeinen Formeln sind nun auf die 32 Kristallklassen anzuwenden, die nach den Symmetrieverhältnissen (vgl. p. 58) möglich sind. Diese Zahl verringert sich hier freilich sehr bedeutend. Denn die Elastizitätserscheinungen beruhen auf den Druckkräften, und dies sind Größen vom Charakter von Tensoren (p. 16), d. h. von gerichteten Größen, bei denen die beiden Richtungssinne gleichwertig sind; es muß also ein Symmetriezentrum existieren, und es fließen daher alle diejenigen Klassen in je eine zusammen, die sich nur durch die Existenz oder das Fehlen eines Symmetriezentrums unterscheiden. Einerseits werden die Symmetrieebenen äquivalent den auf ihnen senkrechten binären Achsen, andererseits werden die Spiegelachsen äquivalent den um zwei Ordnungen höheren Symmetrieachsen. Das Ergebnis ist, daß nur elf Gruppen, jede zu mehreren Klassen, übrig bleiben, und zwar nach folgendem Schema (den Symmetriecharakter vergleiche man auf p. 58):

I	II	III	IV	V	VI	VII
1, 2	3, 4, 5	6, 7, 8	9, 10	11, 12, 13	14, 16, 17	15, 18, 19, 20

VIII	IX	X	XI
21, 23, 24	22, 25, 26, 27	28, 29	30, 31, 32 .

Diese elf Gruppen sind also ausschließlich durch die Symmetrieachsen charakterisiert. Untersucht man nun das Verhalten der 21 Elastizitätskonstanten für diese elf Gruppen, so findet man, daß einige von ihnen null, andere einander gleich und wiederum andere durch eine Kombination anderer dargestellt werden; und zwar kommt man dabei zweimal auf zwei Fälle, die sich als identisch erweisen, nämlich VIII und IX einerseits und X und XI andererseits; es fallen demnach zwei Gruppen weg, und es bleiben nur neun übrig.[1] Diese neun Gruppen sind identisch mit den sieben Kristallsystemen, mit der Maßgabe jedoch, daß zwei der letzteren je zwei Gruppen bilden, nämlich das trigonale oder rhomboedrische die Gruppen IV und V, das quadratische die Gruppen VI und VII. Mit Berücksichtigung dieser Unterteilung kann man sich also für die Untersuchung der elastischen Eigenschaften auf die Kristallsysteme stützen; dabei soll stets die z-Achse als ausgezeichnete Achse benutzt werden:

a) Für das allgemeine Kristallsystem, das trikline, gelten die obigen Ausdrücke ohne weiteres, d. h. ohne daß Vereinfachungen in ihnen auftreten. Die Zahl der Konstanten bleibt also 21.

b) Das monokline System hat die Besonderheit, daß die dritte Achse auf der Ebene der beiden ersten senkrecht steht, daß also die letztere, es sei die xy-Ebene, eine Symmetrieebene ist. Es muß hiernach f bei Vertauschung von z mit $-z$ umgeändert bleiben, was, da in diesem Falle y_z und z_x ihr Zeichen ändern, nur möglich ist, wenn die Koeffizienten der diese Größen linear ent-

[1] B. MINNIGERODE, Gött. Nachr. 1884. 195. 374. 488.

haltenden Glieder, also die acht Konstanten c_{14}, c_{15}, c_{24}, c_{25}, c_{34}, c_{35}, c_{46}, c_{56} verschwinden. Es wird also:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f = {} & \tfrac{1}{2} c_{11} x_x^2 + c_{12} x_x y_y + c_{13} x_x z_z + c_{16} x_x x_y \\ & + \tfrac{1}{2} c_{22} y_y^2 + c_{23} y_y z_z + c_{26} y_y x_y \\ & + \tfrac{1}{2} c_{33} z_z^2 + c_{36} z_z x_y + \tfrac{1}{2} c_{44} y_z \\ & + c_{45} y_z z_x + \tfrac{1}{2} c_{55} z_x^2 + \tfrac{1}{2} c_{66} x_y^2 \quad ; \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} -X_x &= c_{11} x_x + c_{12} y_y + c_{13} z_z + c_{16} x_y & -Y_z &= c_{44} y_z + c_{55} z_x \\ -Y_y &= c_{12} x_x + c_{22} y_y + c_{23} z_z + c_{26} x_y & -Z_x &= c_{45} y_z + c_{55} z_x \\ -Z_z &= c_{13} x_x + c_{23} y_y + c_{33} z_z + c_{36} x_y & -X_y &= c_{16} x_x + c_{26} y_y + c_{36} z_z + c_{66} x_y \end{aligned}\right.$$

Kristalle dieses Systems sind also durch 18 Elastizitätskonstanten charakterisiert.

c) Beim rhombischen System stehen alle drei Achsen aufeinander senkrecht, sind also alle drei Ebenen Symmetrieebenen; es ist indes nur notwendig, die Existenz zweier Symmetrieebenen (xy und yz) einzuführen, da die Existenz der dritten dann notwendig folgt. Es müssen also noch die vier Konstanten c_{26}, c_{36}, c_{45}, c_{16} verschwinden, und es wird:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} f = {} & \tfrac{1}{2} c_{11} x_x^2 + \tfrac{1}{2} c_{22} y_y^2 + \tfrac{1}{2} c_{33} z_z^2 + c_{23} y_y z_z + c_{13} z_z x_x + c_{12} x_x y_y \\ & + \tfrac{1}{2} c_{44} y_z^2 + \tfrac{1}{2} c_{55} z_x^2 + \tfrac{1}{2} c_{66} x_y^2 \quad , \end{aligned}\right.$$

also

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} -X_x &= c_{11} x_x + c_{12} y_y + c_{13} z_z & -Y_y &= c_{44} y_z \\ -Y_y &= c_{12} x_x + c_{22} x_y + c_{23} z_z & -Z_x &= c_{55} z_x \\ -Z_z &= c_{13} x_x + c_{23} y_y + c_{33} z_z & -X_y &= c_{66} x_y \quad . \end{aligned}\right.$$

Dem rhombischen System entsprechen also nur noch neun Elastizitätskonstanten.

d) Beim tetragonalen oder quadratischen System ist zwischen Gruppe VI und Gruppe VII zu unterscheiden; es möge die letztere, obgleich sie symmetrischer ist, vorangestellt werden, da sie wichtiger und als Ausgangssystem bequemer ist. Hier ist das elastische Verhalten nicht, wie beim rhombischen, in jeder der aufeinander senkrechten drei Achsenrichtungen ein anderes, sondern es sind zwei derselben, etwa x und y, elastisch gleichwertig, so daß, wenn diese beiden Achsen miteinander vertauscht werden, sich nichts ändert.

Es muß daher $c_{11} = c_{22}$, $c_{44} = c_{55}$, $c_{13} = c_{23}$ sein und es wird:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} f = {} & \tfrac{1}{2} c_{11} (x_x^2 + y_y^2) + \tfrac{1}{2} c_{33} z_z^2 + c_{13} (y_y z_z + z_z x_x) + c_{12} x_x y_y \\ & + \tfrac{1}{2} c_{44} (y_z^2 + z_x^2) + \tfrac{1}{2} c_{66} x_y^2 \quad , \end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} -X_x &= c_{11} x_x + c_{12} y_y + c_{13} z_z & -Y_z &= c_{44} y_z \\ -Y_y &= c_{12} x_x + c_{11} y_y + c_{13} z_z & -Z_x &= c_{44} z_x \\ -Z_z &= c_{13} (x_x + y_y) + c_{33} z_z & -X_y &= c_{66} x_y \quad . \end{aligned}\right.$$

Der Gruppe VII des quadratischen Systems entsprechen also nur noch sechs Elastizitätskonstanten.

Während die Gruppe VII des quadratischen Systems eine vierzählige z-Achse und eine zweizählige x-Achse hat, fällt die letztere bei der Gruppe VI weg, oder vielmehr, sie ist hier noch nicht vorhanden, es kommt infolgedessen noch die Konstante c_{16} vor, und zwar bei X_x als das Glied $+ c_{16} x_y$, bei Y_y als das Glied $- c_{16} x_y$. Alles andere bleibt unverändert. — Diese Gruppe hat also noch sieben Konstanten.

e) Beim regulären System sind alle drei Achsen gleich lang bezw. gleichwertig; es muß also $c_{11} = c_{22} = c_{33}$, $c_{13} = c_{23} = c_{12}$, $c_{44} = c_{55} = c_{66}$ sein, und folglich erhält man:

$$(9) \quad f = \tfrac{1}{2} c_{11} (x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + c_{12} (y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) + \tfrac{1}{2} c_{44} (y_z^2 + z_x^2 + x_y^2) \quad ,$$

$$(10) \quad \begin{cases} -X_x = c_{11} x_x + c_{12}(y_y + z_z) & -Y_z = c_{44} y_z \\ -Y_y = c_{11} y_y + c_{12}(z_z + x_x) & -Z_x = c_{44} z_x \\ -Z_z = c_{11} z_z + c_{12}(x_x + y_y) & -X_y = c_{44} x_y \end{cases}$$

Die Konstantenzahl ist hier nur noch gleich 3.

Die bisherigen Gruppen bilden eine fortlaufende Reihe mit abnehmender Konstantenzahl; bei allen handelt es sich um Formen, denen drei Achsen zugrunde gelegt werden können. Anders bei den beiden noch übrigen Systemen, dem trigonalen oder rhomboedrischen und dem hexagonalen, die man bekanntlich früher unter dem Namen des letzteren in ein einziges System, von dem die rhomboedrischen hemiedrische Formen waren, zusammenfaßte, und bei denen man vier Achsen, eine Haupt- und drei Nebenachsen zugrunde legen muß. Daß es sich indessen hier um zwei verschiedene Systeme handelt, geht, außer aus allgemein kristallographischen, nicht hierhergehörigen, auch aus elastischen Erwägungen hervor; denn die Gestaltung der Formeln wird ganz verschieden, und beim trigonalen hat man überdies noch die beiden Gruppen zu unterscheiden (früher also bei dem ungeteilten System drei Gruppen). Auch hier ist es bequemer, den aufsteigend systematischen Gang durch einen absteigenden zu ersetzen.

f) Beim hexagonalen System hat man eine sechszählige Symmetrieachse, also einen Symmetriewinkel von 60°. Drückt man dies in Gleichung (1) und (2) aus und wählt man die z-Achse als Hauptachse, so erhält man:

$$(11) \quad \begin{cases} f = \tfrac{1}{2} c_{11} (x_x^2 + y_y^2) + \tfrac{1}{2} c_{33} z_z^2 + c_{13} (x_x + y_y) z_z + c_{12} x_x y_y \\ \qquad + \tfrac{1}{4} (c_{11} - c_{12}) x_y^2 + \tfrac{1}{2} c_{44} (y_z^2 + z_x^2) \quad , \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} -X_x = c_{11} x_x + c_{12} y_y + c_{13} z_z & -Y_z = c_{44} y_z \\ -Y_y = c_{12} x_x + c_{11} y_y + c_{13} z_z & -Z_x = c_{44} z_x \\ -Z_z = c_{13} (x_x + y_y) \quad + c_{33} z_z & -X_y = \tfrac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) x_y \quad . \end{cases}$$

Die Zahl der Elastizitätskonstanten beträgt also hier 5.

g) Das trigonale oder rhomboedrische System ist, was zunächst die Gruppe V betrifft, durch eine dreizählige z-Achse und die yz-Ebene als Symmetrieebene charakterisiert; der Drehungswinkel ist hier 120°. Mit Rücksicht hierauf kann man die Formeln bequem in der Weise hinschreiben, daß man zu den entsprechenden Formeln des hexagonalen Systems, deren Größen durch den Index null gekennzeichnet seien, die notwendigen Zusätze macht; man erhält so:

$$(13) \quad f = f_0 + c_{14} [(x_x - y_y) z_x - x_y y_z] \quad ,$$

$$(14) \quad \begin{cases} -X_x = -X_x^0 + c_{14} y_z \quad , & -Y_z = -Y_z^0 + c_{14} x_y \\ -Y_y = -Y_y^0 - c_{14} y_z \quad , & -Z_x = -Z_x^0 + c_{14} (x_x - y_y) \quad , \\ -Z_z = -Z_z^0 \quad , & -X_y = -X_y^0 + c_{14} z_x \quad . \end{cases}$$

Neu hinzugetreten ist also die Konstante c_{14}, die Zahl der Konstanten ist also sechs.

Bei der ebenfalls dem trigonalen System zugehörigen Gruppe IV kommt die x-Achsensymmetrie nicht in Betracht; infolgedessen tritt hier noch die Konstante c_{25} hinzu, und zwar bei X_x als $-c_{25} z_x$, bei Y_y als $+c_{25} z_x$ (oder auch c_{15} mit vertauschtem Vorzeichen). Die Zahl der Konstanten ist also hier gleich 7.

Ordnet man nunmehr sämtliche Gruppen bezw. Systeme nach abnehmender Konstantenzahl, d. h. nach zunehmender Einfachheit der Elastizitätsverhältnisse und fügt die Gruppe der Isotropie hinzu, so erhält man das folgende Tableau:

System	Gruppen	Klassen	Zahl der Konstanten
Triklin . . .	I	1 und 2	21
Monoklin . .	II	3 bis 5	13
Rhombisch . .	III	6 bis 8	9
Quadratisch . .	VI	14, 16, 17	7
Trigonal . . .	IV	9 und 10	7
" . . .	V	11 bis 13	6
Quadratisch . .	VII	15, 18, 19, 20	6
Hexagonal . .	VIII u. IX	21 bis 27	5
Regulär . . .	X u. XI	28 bis 32	3
Isotrop . . .	XII	33	2

Andere Darstellungen. An Stelle des obigen Formelsystems können noch andere aufgestellt werden, die sich von ihnen in formaler Hinsicht unterscheiden und für gewisse Zwecke besser geeignet sind als diese. Was zunächst die Bezeichnung betrifft, so ist schon in dem allgemeinen Artikel über Elastizität davon die Rede gewesen; man vergleiche die Zusammenstellungen auf p. 537. Hier, bei den Kristallen, wird es sich unter Umständen empfehlen, die Bedeutung und den Gegensatz zwischen den drei ersten und den drei letzten Druck- und Deformationskomponenten deutlicher hervortreten zu lassen, indem man die Zeichen

$$x_x \quad y_y \quad z_z \quad y_z \quad z_x \quad x_y \quad X_x \quad Y_y \quad Z_z \quad Y_z \quad Z_x \quad X_y$$

durch die neuen

$$V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad 2W_1 \quad 2W_2 \quad 2W_3 \quad N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad T_1 \quad T_2 \quad T_3$$

ersetzt, wie das VOIGT in dem Buche über die Kristallphysik getan hat; es sind dann die V die Dilatationen, die $2W$ die Winkeländerungen (speziell die Verkleinerungen ursprünglich rechter Winkel); die N die Normalspannungen, die T die Tangentialspannungen.

Ferner kann man die Gleichungen (2), die die Drucke durch die Deformationskomponenten darstellen, nach den letzteren auflösen und die neuen, natürlich ebenfalls linearen homogenen Gleichungen in der einfachen Form [vgl. p. 524, Gleichung (75), statt b ist jetzt s geschrieben, s_{kh} ist, wenn $k > h$, durch s_{hk} ersetzt]:

$$(15)\quad \begin{cases} -x_x = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z + s_{15} Z_x + s_{16} X_y \\ -y_y = s_{12} X_x + s_{22} Y_y + s_{23} Z_z + s_{24} Y_z + s_{25} Z_x + s_{26} X_y \\ -z_z = s_{13} X_x + s_{23} Y_y + s_{33} Z_z + s_{34} Y_z + s_{35} Z_x + s_{36} X_y \\ -y_z = s_{14} X_x + s_{24} Y_y + s_{34} Z_z + s_{44} Y_z + s_{45} Z_x + s_{46} X_z \\ -z_x = s_{15} X_x + s_{25} Y_y + s_{35} Z_z + s_{45} Y_z + s_{55} Z_x + s_{56} X_y \\ -x_y = s_{16} X_x + s_{26} Y_y + s_{36} Z_z + s_{46} Y_z + s_{56} Z_x + s_{66} X_y \end{cases},$$

schreiben. Man muß nunmehr die beiden Serien von Koeffizienten auch durch die Namen deutlich unterscheiden; nach früheren Festsetzungen kann das nur so geschehen, daß man die Koeffizienten c_{11} u. s. w., die ein direktes Maß der aufgewandten Drucke bezw. der erzeugten Spannungen, aber ein inverses Maß der erzeugten Deformationen darstellen, als Elastizitätsmoduln oder als elastische Widerstände, dagegen die Koeffizienten s_{11} u. s. w., die gerade mit den Deformationen in direktem Verhältnis stehen, als Elastizitätskoeffizienten des Kristalls bezeichnet; der Name Elastizitätskonstanten bleibt dann für beide Serien zusammen vorbehalten. Es darf auch hier nicht verschwiegen

werden, daß andere Autoren von der gemachten Festsetzung abweichen, bedauerlicherweise auch Voigt, dem man nach dem überwiegenden Anteile, den er an der wissenschaftlichen Begründung der Kristallelastizität genommen hat, auch in der Nomenklatur folgen müßte, wenn das mit den Bezeichnungen in der Lehre von den isotropen Körpern und mit der Ausdrucksweise der Technik, sowie mit den früher betonten Forderungen an die einheitliche Vorstellung physikalischer Wirkungen überhaupt vereinbar wäre. Wie die Dinge liegen, bleibt also nichts anderes übrig, als sich in jedem Falle zu vergewissern, wie die Ausdrücke gemeint sind.

Die Elastizitätskoeffizienten s stehen natürlich mit den Moduln c in der aus der Determinantentheorie bekannten Beziehung; es ist nämlich das mit den Indizes $h\,k$ behaftete s gleich dem Verhältnis des in der h. Horizontal- und k. Vertikalreihe (oder umgekehrt) der Determinante aus den c stehenden Gliedes zu dieser ganzen Determinante; wegen $c_{kh} = c_{hk}$ ist daher auch $s_{kh} = s_{hk}$, und die Anzahl der s ist ebenso wie die der c gleich 21 bezw. gleich der bestimmten Symmetrieverhältnissen entsprechend verminderten Zahl. Es sei gleich hier bemerkt, daß sich die s der Beobachtung meist weit unmittelbarer darbieten, als die c, und daß sie deshalb, da die Umrechnung immerhin die Fehlergrenzen erweitert, zur exakten Charakterisierung von Stoffen geeigneter sind.

Schließlich ist noch eine Bemerkung zu machen, die zu einer neuen Darstellung führt. Die Formelsysteme (2) und (15) sind nämlich insofern speziell, als sie sich, wenn zu den einzelnen Kristallgruppen übergegangen wird, auf bestimmte Koordinatenachsen beziehen, und zwar auf solche, die nach kristallographischen Rücksichten ausgewählt sind. Nun gibt es aber offenbar noch eine andere mögliche Wahl der Koordinatenachsen, nämlich mit Rücksicht auf das System der Beanspruchungen, dem der Körper unterworfen wird (daß es daneben noch ein Drittes gibt, nämlich das mit Rücksicht auf die erzeugten Deformationen gewählte, das mit dem zweiten im allgemeinen nicht übereinstimmen wird, soll hier nicht weiter verfolgt werden). Da man gewisse typische Beanspruchungen an Körpern studieren wird, die in bestimmter Form aus dem Kristall herausgeschnitten sind, kann man auch sagen, dieses neue Koordinatensystem sei mit Rücksicht auf die wesentlichen Figurrichtungen des Versuchskörpers gewählt, gleichviel, wie diese Richtungen zu den kristallographischen Hauptrichtungen liegen. Das erste System liegt also im Kristall als solchem fest, das zweite in der herausgeschnittenen Figur. Beide Systeme sind in einer Hinsicht allgemein, in der anderen speziell (nur mit Vertauschung); man pflegt aber nach Voigt das kristallographische als das Hauptsystem und demgemäß die in seinen Formeln auftretenden Konstanten als die Hauptmoduln (bezw. die s als die Hauptkoeffizienten) zu bezeichnen. Will man nun z. B. untersuchen, wie sich die Dehnung von Prismen gestaltet, die in verschiedener Richtung aus einem und demselben Kristall herausgeschnitten sind, so steht man der Aufgabe gegenüber, die Moduln des zweiten Systems durch die Hauptmoduln und die bekannten neun Kosinus der Winkel auszudrücken, die die Achsen des zweiten Systems mit den Hauptachsen einschließen.

Diese Transformationsaufgabe läßt sich wie analoge auf anderen Gebieten am einfachsten lösen, wenn man von der Tatsache ausgeht, daß die Arbeit, hier die Deformationsarbeit, vom Koordinatensystem unabhängig ist; man braucht also nur ihre beiden formalen Ausdrücke in den beiden Koordinatensystemen einander gleichzusetzen, um die gewünschten Beziehungen zu erhalten. Dabei muß man sich freilich vergegenwärtigen, daß es sich hier nicht um Vektoren, sondern um Tensoren handelt, und daß für diese zweifellos andere Transformationsregeln gelten; es ist aber leicht, den Satz abzuleiten, daß sich die Normalspannungen wie die Quadrate, die Tangentialspannungen wie Produkte von Vektoren transformieren; es gelten nämlich, wenn

$$\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3 \qquad \beta_1 \; \beta_2 \; \beta_3 \qquad \gamma_1 \; \gamma_2 \; \gamma_3$$

die gedachten Kosinus sind, und wenn die neuen Spannungen mit Strichen bezeichnet werden, die Formeln:

für eine der Normalspannungen:

$$(16) \quad \begin{cases} N_1 = N_1' \alpha_1 + N_2' \alpha_2^2 + N_3' \alpha_3^2 \\ \quad + 2\, T_1' \alpha_2 \alpha_3 + 2\, T_2' \alpha_3 \alpha_1 + 2\, T_3' \alpha_1 \alpha_2 \end{cases},$$

für eine der Tangentialspannungen:

$$(17) \quad \begin{cases} T_1 = N_1' \beta_1 \gamma_1 + N_2' \gamma_1 \alpha_1 + N_3' \alpha_1 \beta_1 \\ \quad + T_1' (\beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2) + T_2' (\beta_3 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_3) + T_3' (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) \end{cases},$$

und entsprechend für die anderen Größen. Man kann diese Formeln symbolisch in der Form

$$(18) \qquad P_m = \sum_h r_{hm} P_h' \qquad \text{oder} \qquad P_n = \sum_k r_{kn} P_k'$$

schreiben, wo m, n neue Nummernsymbole, die r Abkürzungen für die trigonometrischen Größen und die P die sechs Spannungskomponenten N und T sind. Dies vorausgeschickt, sind die beiden gleichwertigen Ausdrücke für die Deformationsarbeit (die Spannung gleichförmig von null auf P wachsend gedacht):

$$(19) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \sum_h \sum_k s_{hk}' P_h' P_k' \\ \text{und} \\ A = \frac{1}{2} \sum_h \sum_k P_h' P_k' \sum_m \sum_n s_{hk} r_{hm} r_{kn} \end{cases};$$

durch Vergleichung ergibt sich also:

$$(20) \qquad s_{hk}' = \sum_m \sum_n s_{hk} r_{hm} r_{kn} \quad .$$

Man kann diese Formel auf zwei verschiedene Arten auffassen; erstens, indem man das s' als lineare Funktion der s ansieht, mit den Kosinus als Koeffizienten; und zweitens, indem man s' als Funktion der Kosinus ansieht, mit den s als Koeffizienten; da in der Formel ein Produkt zweier r vorkommt, jedes von ihnen aber in den Kosinus nach Gleichung (16 u. 17) vom zweiten Grade ist, erhält man offenbar eine Funktion vierten Grades, wobei aber die Möglichkeit offen bleibt, daß in einzelnen Fällen eine Reduktion auf eine Funktion zweiten Grades eintritt. Diese Funktion vierten Grades hat im allgemeinen 21 Glieder, entsprechend der Zahl der s; in gewissen Fällen, wenn es sich nämlich um axiale Erscheinungen handelt, also z. B. bei der Längsdehnung oder bei der Drillung eines Kreiszylinders, wird man, da hier die Koordinatenachse gleichgültig ist, an Stelle der neun Kosinus nur deren drei, α, β, γ, unter Weglassung der Indizes, einzuführen brauchen, eben die Kosinus der Winkel, die die Figurachse mit den Hauptachsen bildet; und da in diesem Falle eine Funktion vierten Grades nur 15 Glieder haben kann, so folgt, daß hier die 21 s nur in 15 Kombinationen auftreten werden, also neun einzeln und zweimal sechs in bestimmten Kombinationen. Im allgemeinen Falle bleibt es bei 21 Gliedern; es sind aber natürlich die bekannten Beziehungen zwischen den neun Kosinus zu beachten. Als Beispiele der einen und der anderen Art seien hier hingeschrieben einerseits s_{11}', das aber in diesem Falle natürlich ebensogut s_{22}' oder auch s_{33}' genannt werden könnte und der Dehnungskoeffizient ε bezw. der reziproke Dehnungsmodul in der betreffenden Richtung ist, andererseits s_{44}', aus dem sich dann s_{55}' und s_{66}' durch zyklische Vertauschung der Indizes des Kosinus ergeben:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon = \frac{1}{E} = s_{11}' = {} & s_{11}\alpha^4 + s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 \\ & + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2 + (s_{55} + 2s_{13})\gamma^2\alpha^2 + (s_{66} + 2s_{12})\alpha^2\beta^2 \\ & + 2\beta\gamma[(s_{14} + s_{56})\alpha^2 + s_{24}\beta^2 + s_{34}\gamma^2] \\ & + 2\gamma\alpha[s_{15}\alpha^2 + (s_{25} + s_{46})\beta^2 + s_{35}\gamma^2] \\ & + 2\alpha\beta[s_{16}\alpha^2 + s_{26}\beta^2 + (s_{36} + s_{45})\gamma^2] \quad ; \end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} s_{44}' = {} & 4(s_{11}\alpha_2^2\alpha_3^2 + s_{22}\beta_2^2\beta_3^2 + s_{33}\gamma_2^2\gamma_3^2) \\ & + s_{44}(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2)^2 + s_{55}(\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2) + s_{66}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) \\ & + 8(s_{23}\beta_2\gamma_2\beta_3\gamma_3 + s_{13}\gamma_2\alpha_2\gamma_3\alpha_3 + s_{12}\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3) \\ & + 4(\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3)(s_{14}\alpha_2\alpha_3 + s_{24}\beta_2\beta_3 + s_{34}\gamma_2\gamma_3) \\ & + 4(\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)(s_{15}\alpha_2\alpha_3 + s_{25}\beta_2\beta_3 + s_{35}\gamma_2\gamma_3) \\ & + 4(\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)(s_{16}\alpha_2\alpha_3 + s_{26}\beta_2\beta_3 + s_{36}\gamma_2\gamma_3) \\ & + s_{56}(\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)(\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3) \\ & + s_{46}(\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)(\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3) \\ & + s_{45}(\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3)(\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3) \quad . \end{aligned}\right.$$

Als dritter Ausdruck ist für das Spätere besonders wichtig der für den Drillungskoeffizienten τ, d. h. den reziproken Drillungsmodul K, der sich, wenn man sich auf einen Kreiszylinder in der z-Richtung bezieht, durch die Kombination $^1/_2\,(s_{44}' + s_{55}')$ dargestellt wird (die eintretende Symmetrie erlaubt wieder α, β, γ für α_3, β_3, γ_3 zu schreiben):

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \tau = \frac{1}{K} = \tfrac{1}{2}(s_{44}' + s_{55}') = {} & 2[s_{11}\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + s_{22}\beta^2(\gamma^2 + \alpha^2) + s_{33}\gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)] \\ & + \tfrac{1}{2}[s_{44}(\beta^2 + \gamma^2 - 4\beta^2\gamma^2) + s_{55}(\gamma^2 + \alpha^2 - 4\gamma^2\alpha^2) + s_{66}(\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha^2\beta^2)] \\ & + 4[s_{23}\beta^2\gamma^2 + s_{31}\gamma^2\alpha^2 + s_{12}\alpha^2\beta^2] \\ & - 2\beta\gamma[s_{14}\,2\alpha^2 + s_{24}(2\beta^2 - 1) + s_{34}(2\gamma^2 - 1)] \\ & - 2\gamma\alpha[s_{15}(2\alpha^2 - 1) + s_{25}\,2\beta^2 + s_{35}(2\gamma^2 - 1)] \\ & - 2\alpha\beta[s_{16}(2\alpha^2 - 1) + s_{26}(2\beta^2 - 1) + s_{36}\,2\gamma^2] \\ & + s_{56}\beta\gamma(1 - 4\alpha^2) + s_{64}\gamma\alpha(1 - 4\beta^2) + s_{45}\alpha\beta(1 - 4\gamma^2) \quad . \end{aligned}\right.$$

Man ersieht schon aus diesen Beispielen, daß die Ausdrücke im allgemeinen von großer Komplikation sind; in der Anwendung auf die wirklichen Kristalle treten natürlich meist sehr erhebliche Vereinfachungen auf; ebenso in Anwendung auf die typischen Beanspruchungen. Auch kann man dann in bequemer Weise die Beziehungen, die zwischen den Winkelkosinus bestehen, ausnützen, indem man neue Winkelzeichen einführt, von denen unter Umständen schon zwei genügen. Das soll jetzt für die wichtigsten Fälle betrachtet werden.

Anwendung auf die einzelnen elastischen Erscheinungen.

1. Einseitiger Druck. Die Gleichungen (15), auf ein willkürliches Koordinatensystem bezüglich, ergeben, wenn das dem Drucke unterworfene Prisma die z-Achse zur Längs- und Druckachse (die aber im allgemeinen keine Hauptachse ist) hat, also $Z_z = p$, alles übrige $= 0$ ist:

$$(24)\quad \begin{cases} x_x = s_{13} = p\dfrac{\Sigma_{31}}{\Pi}\ , & y_y = s_{23} = p\dfrac{\Sigma_{32}}{\Pi}\ , & z_z = s_{33} = p\dfrac{\Sigma_{33}}{\Pi}\ , \\ y_z = s_{34} = p\dfrac{\Sigma_{34}}{\Pi}\ , & z_x = s_{35} = p\dfrac{\Sigma_{35}}{\Pi}\ , & x_y = s_{36} = p\dfrac{\Sigma_{36}}{\Pi}\ , \end{cases}$$

wo Π die Determinante jener Gleichungen und Σ_{hk} deren $h$tes Element in der $k$ten Kolumne ist. Die dritte dieser Größen ist offenbar die Längskompression bezw. Dilatation, und folglich der Elastizitätsmodul

$$(25)\qquad E = \frac{1}{s_{33}} = \frac{\Pi}{p\Sigma_{33}}$$

(entsprechend würde für die x- bezw. y-Achse als Längsachse s_{11} bezw. s_{22} auftreten).

Ferner wird die Querdilatation bezw. die Querkontraktion in einer Richtung, welche mit der x-Achse den Winkel φ bildet

$$(26)\quad \begin{cases} Q = x_x \cos^2\varphi + y_y \sin^2\varphi + x_y \cos\varphi \sin\varphi \\ \quad = s_{13}\cos^2\varphi + s_{23}\sin^2\varphi + s_{36}\cos\varphi\sin\varphi \\ \quad = \dfrac{p}{\Pi}(\Sigma_{31}\cos^2\varphi + \Sigma_{32}\sin^2\varphi + \Sigma_{36}\cos\varphi\sin\varphi)\ ; \end{cases}$$

sie ist also rings um die z-Achse variabel, außer wenn $\Sigma_{36} = 0$ und $\Sigma_{31} = \Sigma_{32}$ ist. Dasselbe gilt natürlich auch von dem Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation

$$(27)\qquad \mu = \frac{\Sigma_{31}}{\Sigma_{33}}\cos^2\varphi + \frac{\Sigma_{32}}{\Sigma_{33}}\sin^2\varphi + \frac{\Sigma_{36}}{\Sigma_{33}}\sin\varphi\cos\varphi\quad .$$

Endlich sind noch die Winkeländerungen zu bestimmen, insbesondere die Änderung ursprünglich rechter Winkel. Die beiden Ebenen, die diesen Winkel bilden, seien

$$\mu x + \nu y + \pi z = 1 \qquad \text{und} \qquad \mu_1 x + \nu_1 y + \pi_1 z = 1\quad ,$$

also die Kosinus der Richtungswinkel ihrer Normalen

$$\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}}\ ,\qquad \beta = \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}}\ ,\qquad \gamma = \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}}$$

und entsprechend α_1, β_1, γ_1, so daß ursprünglich

$$a a_1 + b b_1 + c c_1 = 0$$

ist; die Winkeländerung ist alsdann

$$(28)\quad \eta = 2(x_x\alpha\alpha_1 + y_y\beta\beta_1 + z_z\gamma\gamma_1) + y_z(\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1) + z_x(\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1) + x_y(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)\ .$$

Die Einsetzung der Werte (24) in diese Gleichungen und deren weitere Ausführung liefert freilich schon für die einfacheren Fälle recht komplizierte Formeln. Die Mitteilung derselben kann um so eher unterbleiben, als in ihnen die Elastizitätskonstanten in derselben Kombination vorkommen wie bei der Biegung und Drillung (s. u.), Beobachtungen von Winkeländerungen also, da sie heikler sind als Biegungs- und Drillungsmessungen und diesen gegenüber nichts neues liefern, nur ganz ausnahmsweise angezeigt erscheinen werden.

Bei der Anwendung obiger Formeln für einseitigen Druck auf ein bestimmtes Kristallsystem muß man, um die dann eintretende Vereinfachung der Gleichungen (2) benutzen zu können, diese auf die Kristallachsen beziehen, daneben aber als zweites Koordinatensystem eines einführen, dessen z-Achse die Längs- und Druckachse ist, und das mit jenem durch die neun Kosinus $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$ verknüpft ist; zuweilen genügt es, wie gesagt, auch, drei von diesen Größen,

nämlich die Richtungskosinus der Längs- und Druckachse des Stäbchens in bezug auf jenes System, die dann kurz $\alpha\ \beta\ \gamma$ heißen mögen, einzuführen; es handelt sich dann also um die Anwendung der Formel (22).

Beispiel: Reguläres System. Die drei Elastizitätskonstanten sind hier $c_{11}\ c_{12}\ c_{44}$ (häufig auch $A\,B\,c$ oder $A\,B\,\varepsilon$ oder $A\,B\,\delta$ genannt). Die Dilatationen nach den Kristallachsen ergeben sich

$$(29)\quad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{p}{c_{11}-c_{12}}\left(\dfrac{c_{12}}{c_{11}+2c_{12}} - \alpha^2\right), \quad \varepsilon_y = \dfrac{p}{c_{11}-c_{12}}\left(\dfrac{c_{12}}{c_{11}+2c_{12}} - \beta^2\right), \\ \varepsilon_z = \dfrac{p}{c_{11}-c_{12}}\left(\dfrac{c_{12}}{c_{11}+2c_{12}} - \gamma^2\right), \end{cases}$$

dagegen die Dilatation in der Längs- und Druckrichtung oder gleich ihr p ter Teil, also das Reziproke des Elastizitätsmoduls

$$(30)\quad \frac{1}{E} = \frac{c_{12}}{(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})} - \frac{1}{2c_{44}} - \left(\frac{1}{c_{11}-c_{12}} - \frac{1}{2c_{44}}\right)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4) .$$

Ausgezeichnete Werte liefert diese Formel in den Richtungen der Normalen der Würfel-, Oktaeder- und Granatoederfläche, nämlich:

⊥ Würfel ($\alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0$) ein Maximum (oder Minimum),

⊥ Oktaeder ($\alpha = \beta = \gamma = \sqrt{\frac{1}{3}}$) ein Minimum (oder Maximum),

⊥ Granatoeder ($\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2}},\ \gamma = 0$) ein gemischtes Maximum-Minimum, d. h. ein Maximum in dem einen, ein Minimum in dem darauf senkrechten Hauptschnitt.

Die betreffenden Werte sind:

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{E_w} = \dfrac{c_{11}+c_{12}}{(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})}, \quad \dfrac{1}{E_o} = \dfrac{1}{3(c_{11}+2c_{12})} + \dfrac{1}{3c_{44}}, \\ \dfrac{1}{E_g} = \dfrac{c_{11}}{2(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})} + \dfrac{1}{4c_{44}} . \end{cases}$$

Die entsprechenden Formeln in den Elastizitätskoeffizienten statt in den Moduln sind, mit Rücksicht auf die Beziehungen:

$$(32)\quad c_{11} = \frac{s_{11}+s_{12}}{(s_{11}-s_{12})(s_{11}+2s_{12})}, \quad c_{12} = \frac{-s_{12}}{(s_{11}-s_{12})(s_{11}+2s_{12})}, \quad c_{44} = \frac{1}{s_{44}}$$

die folgenden:

$$(33)\quad \begin{matrix} \varepsilon_x = p\,[(s_{12}-s_{11})\alpha^2 - s_{12}], \quad \varepsilon_y = p\,[(s_{12}-s_{11})\beta^2 - s_{12}], \\ \varepsilon_z = p\,[(s_{12}-s_{11})\gamma^2 - s_{12}], \end{matrix}$$

$$(34)\quad \frac{1}{E} = \frac{1}{2}(s_{44}+2s_{12}) + (s_{11}-s_{12}-\frac{1}{2}s_{44})(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4) ,$$

$$(35)\quad \frac{1}{E_w} = s_{11}, \quad \frac{1}{E_o} = \frac{1}{3}(s_{11}+s_{44}+2s_{12}), \quad \frac{1}{E_g} = \frac{1}{4}(2s_{11}+s_{44}+2s_{12}) ;$$

wie man sieht, sind diese Formeln sogar einfacher als die in den c. Wie man sich ferner leicht überzeugt, findet die einfache Beziehung statt:

$$(36)\quad \frac{1}{E_w} + \frac{3}{E_o} = \frac{4}{E_g} ;$$

die Gleichungen (31 oder 35) reichen also zur Bestimmung von c_{11}, c_{12}, c_{44} bezw. s_{11}, s_{12}, s_{44} nicht aus; es muß also noch ein zweites Experiment hinzukommen (s. w. u.). In ähnlicher Weise läßt sich die Querkontraktion und die

Winkeländerung verfolgen. Findet der Druck senkrecht zur Würfelfläche oder zur Oktaederfläche statt, so ergibt sich μ ringsherum konstant und unabhängig von der Richtung der Seitenflächen; und im ersteren Falle wird besonders einfach

$$\mu = \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}} \quad .$$

Auch die Winkeländerungen werden in bestimmten Fällen gleich null.

Für die übrigen Kristallsysteme müssen wenige Angaben genügen. Im rhombischen ist:

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{1}{E} = s_{11}\alpha^4 + s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 \\ \qquad + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2 + (s_{55} + 2s_{13})\gamma^2\alpha^2 + (s_{66} + 2s_{12})\alpha^2\beta^2 \quad , \end{cases}$$

also nur von sechs Kombinationen der neun Konstanten abhängig; die c ergeben sich aus den s mittels der Formeln (Δ die Determinante der s):

$$(38) \quad c_{11} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{vmatrix} \text{ u. s. w.} \;, \quad c_{23} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} s_{13} & s_{32} \\ s_{11} & s_{12} \end{vmatrix} \text{ u. s. w.} \;, \quad c_{44} = \frac{1}{s_{44}} \text{ u. s. w.} \quad .$$

Im hexagonalen System wird, wenn die z-Achse in die Hauptachse, die x-Achse in eine Nebenachse gelegt wird:

$$(39) \qquad \frac{1}{E} = s_{11}(1-\gamma^2)^2 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{13})\gamma^2(1-\gamma^2) \quad ,$$

also der Dehnungsmodul rings um die kristallographische Hauptachse konstant; von den fünf Konstanten des Systems kommt eine, s_{12}, in E nicht vor. Ferner wird:

$$(40) \quad \begin{cases} c_{11} = \frac{s_{11}s_{33} - s_{13}^2}{(s_{11}-s_{12})[s_{33}(s_{11}+s_{12}) - 2s_{13}^2]} \,, \quad c_{12} = \frac{s_{13}^2 - s_{12}s_{33}}{(s_{11}-s_{12})[s_{33}(s_{11}+s_{12}) - 2s_{13}^2]} \,, \\ c_{13} = \frac{-s_{13}}{s_{33}(s_{11}+s_{12}) - 2s_{13}^2} \,, \quad c_{33} = \frac{s_{11}+s_{12}}{s_{33}(s_{11}+s_{12}) - 2s_{13}^2} \,, \quad c_{44} = \frac{1}{s_{44}} \quad . \end{cases}$$

Für das trigonale System, Gruppe V — z-Achse kristallographische Hauptachse, yz-Ebene Symmetrieebene, die $+y$-Achse trete aus einer der um die $+z$-Achse gelegenen Rhomboederflächen heraus — wird:

$$(41) \quad \frac{1}{E} = s_{11}(1-\gamma^2)^2 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{13})\gamma^2(1-\gamma^2) + 2s_{14}\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2) \quad ,$$

(die sechste Konstante s_{12} kommt in E nicht vor), also, anders wie beim hexagonalen System, auch von α und β abhängig; und die Moduln c stehen mit den Koeffizienten s in den Beziehungen

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l|l} c_{11}s_{11} + c_{12}s_{12} + c_{13}s_{13} + c_{14}s_{14} = 1 & c_{13}(s_{11}+s_{12}) + c_{33}s_{13} = 0 \\ c_{12}s_{11} + c_{11}s_{12} + c_{13}s_{13} - c_{14}s_{14} = 0 & 2c_{14}s_{14} + c_{44}s_{44} = 1 \\ 2c_{13}s_{13} + c_{33}s_{33} = 1 \quad , & c_{14}(s_{11}-s_{12}) + c_{44}s_{14} = 0 \quad . \end{array} \right.$$

In der Gruppe IV des trigonalen Systems kommt noch s_{25} hinzu, und es wird

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{1}{E} = s_{11}(1-\gamma^2)^2 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{13})\gamma^2(1-\gamma^2) \\ \qquad + 2s_{14}\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2) + 2s_{25}\alpha\gamma(3\beta^2 - \alpha^2) \quad , \end{cases}$$

was mit Rücksicht auf das letzte Glied, wie eine einfache Betrachtung lehrt, eine Unsymmetrie der Elastizitätsverhältnisse in der Spaltungsebene ergibt, die bei Gruppe V fehlt.

2. Allseitig gleicher Druck. Die Gleichungen (2) sollen sich jetzt auf die Hauptachsen beziehen. Alsdann findet sich die kubische Dilatation

$$(44)\qquad \frac{\delta V}{V} = x_x + y_y + z_z = -p\,[(s_{11} + s_{22} + s_{33}) + 2\,(s_{23} + s_{31} + s_{12})]$$

und folglich die kubische Kompressibilität

$$(45)\qquad C = [(s_{11} + s_{22} + s_{33}) + 2\,(s_{23} + s_{31} + s_{12})] \quad ;$$

die Umrechnung der Koeffizienten s_{11} u. s. w. in die Elastizitätsmoduln c_{11} u. s. w. erfolgt besser in jedem Spezialfalle für sich.

Beispiele: a) für das reguläre System wird

$$(46)\qquad C = \frac{3}{c_{11} + 2\,c_{12}} = 3\,(s_{11} + 2\,s_{12}) \quad .$$

b) Für das quadratische, hexagonale und rhomboedrische System wird übereinstimmend

$$(47)\qquad C = \frac{c_{11} + 2\,c_{33} + c_{12} - 4\,c_{23}}{c_{33}\,(c_{11} + c_{12}) - 2\,c_{23}^{\,2}} \quad ,$$

für das rhombische:

$$(48)\qquad C = (s_{11} + s_{12} + s_{13}) + 2\,(s_{23} + s_{31} + s_{12}) \quad .$$

Die lineare Dilatation wird für jede Richtung eine andere, so daß aus einer Kugel ein Ellipsoid wird; nur beim regulären System ist sie für alle Richtungen gleich und folglich ein Drittel der obigen kubischen, d. h.

$$(49)\qquad \delta = \frac{1}{c_{11} + 2\,c_{12}} = s_{11} + 2\,s_{12} \quad ;$$

Kugel bleibt also hier Kugel.

In den anderen Systemen wird:

$$(50)\qquad \delta_x = s_{11} + s_{12} + s_{13}\;, \qquad \delta_y = s_{21} + s_{22} + s_{23}\;, \qquad \delta_z = s_{31} + s_{32} + s_{33} \quad .$$

Für die Änderung eines ursprünglich rechten Winkels ergibt sich aus Gleichung (28):

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} \eta = &-2p\,[(s_{11} + s_{21} + s_{31})\,\alpha\alpha_1 + (s_{12} + s_{22} + s_{32})\,\beta\beta_1 \\ &\qquad + (s_{13} + s_{23} + s_{33})\,\gamma\gamma_1] \\ &+ p\,[(s_{14} + s_{24} + s_{34})(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1) + (s_{15} + s_{25} + s_{35})(\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1) \\ &\qquad + (s_{16} + s_{26} + s_{36})\,(\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1)] \end{aligned}\right. \quad .$$

Für das reguläre System wird $\eta = 0$, und zwar für beliebige Größe des ursprünglichen Winkels; in bezug auf kubische Kompression verhält sich also ein regulärer Kristall ganz wie ein isotroper Körper. Für das quadratische, hexagonale und rhomboedrische System wird übereinstimmend:

bei ursprünglich rechtem Winkel

$$(52)\qquad \eta = -p\,\frac{(c_{11} + c_{12}) - (c_{33} + c_{23})}{c_{33}\,(c_{11} + c_{12}) - 2\,c_{23}^{\,2}}\,2\,\gamma\gamma_1 \quad ,$$

bei ursprünglich beliebigem Winkel φ

$$(53)\qquad \eta = -\frac{p}{\sin\varphi}\,\frac{(c_{11} + c_{12}) - (c_{33} + c_{23})}{c_{33}\,(c_{11} + c_{12}) - 2\,c_{23}^{\,2}}\,[2\,\gamma\gamma_1 - \cos\varphi\,(\gamma^2 + \gamma_1^{\,2})] \quad .$$

Im rhombischen System wird bei beliebigen Winkel φ:

(54)
$$\left\{\begin{aligned} \eta = -\frac{p}{\sin\varphi}\Big\{&(s_{11}+s_{12}+s_{13})\,[2\,\alpha\,\alpha_1-(\alpha^2+\alpha_1^2)\cos\varphi] \\ &+(s_{21}+s_{22}+s_{23})\,[2\,\beta\,\beta_1-(\beta^2+\beta_1^2)\cos\varphi] \\ &+(s_{31}+s_{32}+s_{33})\,[2\,\gamma\,\gamma_1-(\gamma^2+\gamma_1^2)\cos\varphi]\Big\}\ . \end{aligned}\right.$$

Übrigens gibt es für jeden Kristall ein ihm individuelles Koordinatensystem, auf das bezogen die Winkeländerungen $2\,W$ verschwinden, so daß man die Gleichungen

(55)
$$s_{41}+s_{42}+s_{43}=0\quad,\qquad s_{51}+s_{52}+s_{53}=0\quad,\qquad s_{61}+s_{62}+s_{63}=0$$

hat, so daß der allgemeine, trikline Kristall jetzt im Grunde nur noch 18 (statt 21) Konstanten hat.

Damit wird der Koeffizient der linearen Dilatation in der Richtung l bei allseitig gleichem Zug:

(56)
$$\delta=(s_{11}+s_{12}+s_{13})\cos^2(l,x)+(s_{21}+s_{22}+s_{23})\cos^2(l,y)+(s_{31}+s_{32}+s_{33})\cos^2(l,z)\ .$$

Es sei bemerkt, daß die hier vorkommenden sechs Koeffizienten von den in dem Ausdruck für die Dehnung bei einseitigem Zug vorkommenden unabhängig sind, die Kombination beider also zu vollständigerer Kenntnis der Verhältnisse führt. Schließlich sei der interessante Satz angeführt, daß der Koeffizient der linearen Kompression in einer beliebigen Richtung, hervorgerufen durch allseitig gleichen Druck, gleich ist der kubischen Kompression durch einen einseitigen Druck in jener Richtung.

3. Biegung. Die strenge Durchführung des allgemeinen Problems ist nicht möglich; man muß sich also entweder auf die sogen. gleichförmige Biegung durch Drehungsmomente M (wobei der Stab die Gestalt eines Kreisbogens annimmt) beschränken, oder, wenn man die gewöhnliche Versuchsordnung beibehalten will, den Querschnitt klein gegen die Länge annehmen und sich mit einer angenäherten Lösung begnügen. Das allgemeine Resultat ist folgendes: Der einfachste Fall ist der, wo die Längsrichtung des Stäbchens eine Symmetrieachse ist; in diesem Falle erhält man in jeder beliebigen Ebene eine reine Biegung, und zugleich bleiben hier ursprünglich ebene Querschnitte eben. Auf ein solches Stäbchen können demgemäß ohne weiteres die Biegungsformeln für isotrope Medien angewandt werden. Die Senkung der Mitte eines an den Enden unterstützten, in der Mitte belasteten Stäbchens wird angenähert

(57)
$$S=\frac{L^2}{8\,E\,q\,k^2}\,M\quad,$$

speziell für rechteckigen Querschnitt

(58)
$$S=\frac{L^2}{4\,E\,b\,d^3}\,M$$

(q Querschnitt, k Trägheitsradius in der Biegungsrichtung, b Breite, d Höhe). Der Zusammenhang zwischen E und den Elastizitätskonstanten braucht nicht von neuem untersucht zu werden, da er schon von der Druckelastizität bekannt ist [z. B. für reguläre Kristalle Gleichung (30) u. s. w.] Auch aus der Biegung ergibt sich nur ein Teil der Konstanten, sie muß also mit einer anderen Messung kombiniert werden.

Der nächst einfache Fall ist der, wo eine durch die Längsrichtung und eine Hauptträgheitsachse gelegte Ebene identisch mit einer kristallographischen Symmetrieebene ist; in diesem Falle gibt es eine Biegung (nämlich senkrecht zu jener Ebene), die eine reine Biegung ist. In allen anderen Fällen erhält man

neben der Biegung auch Drillung, und zwar wird, wenn M_x und M_y die Komponenten des Drehungsmoments, S_x und S_y die entsprechenden Biegungspfeile, k_x und k_y die entsprechenden Trägheitsradien sind (für $1/E$ wird jetzt besser s_{33} geschrieben):

(59) $$S_x = \frac{s_{33} L^2}{8 q k_y^2} M_y \quad , \qquad S_y = \frac{s_{33} L^2}{8 q k_x^2} M_x \quad ,$$

und die Größe der gleichzeitigen Drillung:

(60) $$T = \frac{1}{2q}\left(\frac{s_{35}}{k_y^2} M_y - \frac{s_{36}}{k_x^2} M_x\right) \; .$$

Hieraus geht zugleich hervor, daß man durch Kombination zweier Drehungsmomente in geeignetem Größenverhältnis stets die Drillung vernichten, d. h. reine Biegung erzwingen kann; die Resultante des Moments hat dann eben die oben geforderte Richtung.

4. Drillung. Das Problem ist, wie für isotrope Körper, so auch für Kristalle von ST. VENANT teilweise behandelt und von VOIGT für allgemeinere Fälle durchgeführt worden.[1] Im allgemeinen ist die Torsion zugleich von einer Biegung begleitet; nur wenn die Längsachse normal zu einer Symmetrieebene ist, findet reine Drillung statt. Der Drillungswinkel eines rechteckigen Prismas läßt sich dann auf die Form bringen:

(61) $$\psi = \frac{M L}{K\left[\frac{4 q n^2}{8} - n^4 f\left(\frac{m}{n}\right)\right]} \; ,$$

wo M das tordierende Moment, K der Torsionsmodul, L die Länge, q der Querschnitt, m die halbe größere, n die halbe kleinere Querdimension und f eine Funktion von m/n ist, die sich in gewissen Fällen zahlenmäßig angeben läßt. Bei gemischter Torsion gilt diese Formel nur noch näherungsweise, nämlich wenn n^2 klein gegen m^2 ist.

Eine genauere Formel als die obige hat VOIGT später entwickelt; nämlich, wenn wiederum f eine Funktion von m/n ist:

(62) $$\psi = \frac{8 L M\left[s_{55}' + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \frac{s_{34}'^2}{s_{33}'} + \left(\frac{s_{34}'^2}{m^2} + \frac{s_{35}'^2}{n^2}\right)\frac{n^3 f}{m s_{33}'}\right]}{16 m n^3\left(1 + \frac{n}{m} f\right)} \; ;$$

dabei hat f in den vollständig durchführbaren Fällen die Eigenschaft, für einigermaßen große Werte von m/n konstant zu werden; findet man also aus Beobachtungen an Prismen gleicher Orientierung, aber verschiedenem Verhältnis m/n gleiche Werte von f, so kann man es durch kombinierte Beobachtungen eliminieren. Wie man sieht, hängt der Drillungswinkel bei von der Einheit stark abweichendem Verhältnis der Querdimensionen in erster Linie von s_{55}' ab, in zweiter von s_{35}' und s_{34}', endlich auch noch von s_{33}', d. h. vom Dehnungskoeffizienten. Bei kleinem n/m geht die neue Formel angenähert in die alte über. Streng tut sie das, wenn die Längsachse eine geradzählige Symmetrieachse ist,

[1] Die von CAUCHY und NEUMANN ausgebildete ältere Theorie hat sich in ihren Endformeln als nicht allgemein anwendbar erwiesen, wohl aber die von ST. VENANT (Mém. Sav. Etr. **14**. 370. 1855), welche zuerst dieser selbst und alsdann VOIGT auf Kristalle angewandt hat: WIED. Ann. **16**. 294. 1882 (angenäherte Formel) und WIED. Ann. **29**. 604. 1886 (strenge Formel).

z. B. normal zu einer Symmetrieebene steht. In diesem Falle läßt sich die Funktion f ermitteln und man findet:

(63) $$f = -\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{s_{44}' s_{55}' - s_{45}'^2}}{s_{55}'}\left(1 + 0{,}510\frac{s_{45}'^2}{s_{44}' s_{55}' - s_{45}'^2}\right) \quad ;$$

in dem speziellen Falle, daß $s_{45}' = 0$, wird sehr einfach

$$f = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{s_{44}'}{s_{55}'}} \quad ;$$

dagegen ist der allgemeine Wert von s_{45}' sehr verwickelt (18 Reihen von Gliedern); er vereinfacht sich aber mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Längsachse normal zu einer Symmetrieebene steht; ist dies die yz-Ebene, so wird z. B.

(64) $$s_{45}' = s_{55}\gamma_1\gamma_2 + s_{56}(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) + s_{66}\beta_1\beta_2 \quad .$$

Anwendung auf das reguläre System. Bei etwas anderer Schreibweise ergibt sich aus obigem der Torsionswinkel für das reguläre System (und andere Systeme s. u.), wenn die Kanten des Stäbchens in die Symmetrieachsen fallen:

(65) $$\psi = \frac{3ML}{Kd^2 b\left(1 - \frac{3}{16}\lambda\frac{d}{b}\sqrt{\frac{K}{K'}}\right)} \quad ,$$

wo jetzt d die Dicke, b die Breite des Stäbchens, K' der aus K durch Vertauschung der Querdimensionen hervorgehende Wert und λ eine Funktion ist, die, wenn das Verhältnis der Querdimensionen größer als 3 ist, merklich konstant, nämlich gleich 3,361 ist. Mit den Elastizitätskonstanten hängt K durch die Formel

(66) $$\frac{1}{K} = s_{44} + 2\left\{2(s_{11} - s_{12}) - s_{44}\right\}(\alpha^2\alpha_1^2 + \beta^2\beta_1^2 + \gamma^2\gamma_1^2)$$

zusammen, wo $\alpha\beta\gamma$ die Richtungskosinus der Längsrichtung, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ die der größeren Querrichtung sind (entsprechend für K'). Die Reduktion der s_{11} u. s. w. auf die Elastizitätskonstanten c ergibt:

(67) $$\frac{1}{K} = \frac{1}{c_{44}} - 4\left(\frac{1}{2c_{44}} - \frac{1}{c_{11} - c_{12}}\right)(\alpha^2\alpha_1^2 + \beta^2\beta_1^2 + \gamma^2\gamma_1^2) \quad ;$$

(entsprechend für K'); ist die Längsrichtung normal zur Würfelfläche, so wird

(68) $$\frac{1}{K_w} = s_{44} = \frac{1}{c_{44}} \quad \text{und auch} \quad \frac{1}{K_w'} = s_{44} = \frac{1}{c_{44}} \quad ;$$

ist die Längsrichtung normal zur Granatoederfläche, die längere Querrichtung normal zur Würfelfläche, so ist ebenfalls

(69) $$\frac{1}{K_g} = s_{44} = \frac{1}{c_{44}} \quad , \quad \text{dagegen} \quad \frac{1}{K_g'} = 2s_{11} - s_{12} = \frac{2c_{11} + 3c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})} \quad .$$

Hat das Stäbchen kreisförmigen Querschnitt, so hängt die Torsion nur von der Lage der Längsrichtung gegen die Achsen ab:

(70) $$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{K} &= 2s_{44} + 4[2s_{11} - s_{12}) - s_{44}](\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2) \\ &= \frac{2}{c_{44}} + 4\left(\frac{2}{c_{11} - c_{12}} - \frac{1}{c_{44}}\right)(\beta^6\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2) \quad . \end{aligned}\right.$$

Für die anderen Systeme muß wiederum weniges genügen. Im rhombischen System wird für einen Kreiszylinder von der Länge L und dem Radius R:

(71) $$\psi = \frac{L}{\pi R^4 K} \cdot M \quad ,$$

und hierin ist, wenn $\alpha\beta\gamma$ die Richtungskosinus der Längsrichtung sind:

(72) $$\left\{\begin{aligned} \tau = \frac{1}{K} = \alpha^2(s_{55}+s_{66}) + \beta^2(s_{66}+s_{44}) + \gamma^2(s_{44}+s_{55}) \\ + 4\beta^2\gamma^2(s_{22}+s_{33}-s_{44}-2s_{23}) \\ + 4\gamma^2\alpha^2(s_{33}+s_{11}-s_{55}-2s_{31}) \\ + 4\alpha^2\beta^2(s_{11}+s_{22}-s_{66}-2s_{12}) \quad ; \end{aligned}\right.$$

dagegen für rechteckigen Querschnitt wieder ψ wie oben in Formel (65), und darin, wenn $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ die Richtungskosinus der größeren Querdimension sind:

(73) $$\left\{\begin{aligned} \tau = \frac{1}{K} = 4(s_{11}\alpha^2\alpha_1^2 + s_{22}\beta^2\beta_1^2 + s_{33}\gamma^2\gamma_1^2) \\ + 2[(s_{44}+4s_{23})\beta\beta_1\gamma\gamma_1 + (s_{55}+4s_{13})\gamma\gamma_1\alpha\alpha_1 + (s_{66}+4s_{12})\alpha\alpha_1\beta\beta_1] \\ + s_{44}(\beta^2\gamma_1^2+\gamma^2\beta_1^2) + s_{55}(\gamma^2\alpha_1^2+\alpha^2\gamma_1^2) + s_{66}(\alpha^2\beta_1^2+\beta^2\alpha_1^2) \quad . \end{aligned}\right.$$

Im hexagonalen System ist K ebenso wie E rings um die Hauptachse konstant; führt man die Richtungskosinus γ, γ_1, γ_2 der Längs-, größeren und kleineren Querdimension eines rechteckigen Prismas mit der kristallographischen Hauptachse ein, so wird:

(74) $$\tau = \frac{1}{K} = s_{44} + [2(s_{11}-s_{12}) - s_{44}]\gamma_2^2 + 4(s_{11}+s_{33}-s_{44}-2s_{13})\gamma^2\gamma_1^2 \quad .$$

Im trigonalen System endlich wird, wenn man die neuere VOIGTsche Formel (62) in der Form

(75) $$\psi = \frac{3LM}{16Kmn^3\left(1+\frac{n}{m}f\right)}\left(1 + EKs_{34}'^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2 + f\left(\frac{n}{m}\right)^3\right\} + EKs_{35}'^2\frac{n}{m}f\right)$$

schreibt (hier müssen alle neun Kosinus eingeführt werden):

(76) $$\left\{\begin{aligned} \tau = \frac{1}{K} = s_{44} + [2(s_{11}-s_{12}) - s_{44}]\gamma_2^2 \\ + 4(s_{11}+s_{33}-s_{44}-2s_{13})\gamma^2\gamma_1^2 \\ + 4s_{14}[(\gamma\beta_1+\beta\gamma_1)(3\alpha\alpha_1-\beta\beta_1) - \beta_2\gamma_2] \quad , \end{aligned}\right.$$

(77) $$\left\{\begin{aligned} s_{34}' = [s_{44}+2(s_{13}-s_{11})]\gamma\gamma_2 + 2(s_{11}+s_{33}-s_{44}-2s_{13})\gamma^3\gamma_2 \\ + s_{14}[(\beta_2\gamma+\gamma_2\beta)(3\alpha^2-\beta^2) + 2\beta\gamma(3\alpha_2\alpha-\beta_2\beta)] \quad , \\ s_{35}' = [s_{44}+2(s_{13}-s_{11})]\gamma\gamma_1 + 2(s_{11}+s_{33}-s_{44}-2s_{13})\gamma^3\gamma_1 \\ + s_{14}[(\beta_1\gamma+\gamma_1\beta)(3\alpha^2-\beta^2) + 2\beta\gamma(3\alpha_1\alpha-\beta_1\beta)] \quad . \end{aligned}\right.$$

Weiteres zur Theorie. Die obigen Ausführungen stellen im wesentlichen die NEUMANN-KIRCHHOFF-VOIGTsche Theorie der Kristallelastizität dar. Was die übrigen theoretischen Arbeiten betrifft, so sind sie teils, wie von MINNIGERODE, oben mit eingeflochten, teils sind sie überholt, teils von geringerer Bedeutung. Das Folgende sei jedoch noch in Kürze angeführt:

MICHAELIS[1] dehnt die Theorie der Torsion von SAINT-VENANT auf heterotrope Zylinder aus, beschränkt sich aber auf den Fall, daß die Zylinderachse auf einer Symmetrieebene senkrecht steht; die Lösung erfolgt durch gewisse Integrale sowie durch Aufstellung des Potentials der Druckkräfte, wobei sich wiederum die kinetische Analogie ergibt.

CHREE[2] stellt auch für heterope Körper Lösungen der Gleichungen auf, die Reihenform haben und die SAINT-VENANTsche Lösung bestätigen bezw. in mancher Hinsicht ergänzen.

MITCHELL[3] dehnt seine frühere Methode der Ableitung von Potentiallösungen auf Körper mit einer Symmetrieachse aus und behandelt danach einige besondere Fälle von Beanspruchung.

SOEKNIK[4] behandelt in zwei Programmschriften die Drillung und Biegung von kristallinischen Prismen mit drei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen und leitet eine alle Fälle von Deformation umfassende Formel ab, die nicht wesentlich komplizierter als die von CLEBSCH ist. Die Drillung wird auf zwei Konstanten zurückgeführt, die für isotrope Körper einander gleich sind, und deren Verhältnis die Lösung für einen heterotropen Körper aus der für einen isotropen unmittelbar abzuleiten gestattet; ähnlich bei der Biegung. Auf die Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden.

Endlich behandelt WESENDONCK[5], wie schon im allgemeinen Artikel (p. 531) erwähnt wurde, die Frage der Eindeutigkeit der Lösung des elastischen Problems, die für isotrope Körper von KIRCHHOFF entschieden worden ist. Für Kristalle hatte NEUMANN bereits die Bedingung angegeben, die das Potential f erfüllen muß, damit die Lösung eindeutig sei. WESENDONCK ersetzt nun diese Bedingung durch eine neue, zutreffendere und zeigt, wie gleich hier vorgreifend bemerkt sei, an der Hand der Messungen VOIGTS, daß sie stets erfüllt ist; wie es in dieser Hinsicht mit den seit der Arbeit von WESENDONCK hinzugekommenen Messungen steht, wäre interessant, festzustellen.

Geometrische Darstellung der Elastizitätsverhältnisse der Kristalle.

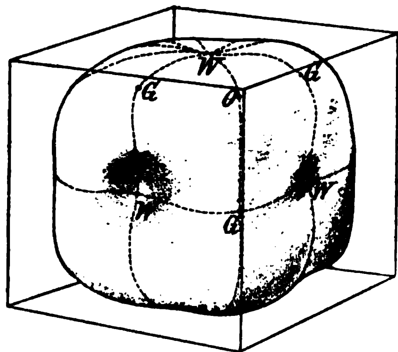
Die entwickelten Formeln lassen sich in leicht ersichtlicher Weise geometrisch darstellen und damit die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle in sehr anschaulicher Weise zum Ausdruck bringen.

A) Die vollkommenste Methode, die man hierbei anwenden kann, ist natürlich die räumliche, entsprechend der räumlichen Mannigfaltigkeit der Körper und ihrer Richtungsverschiedenheiten.

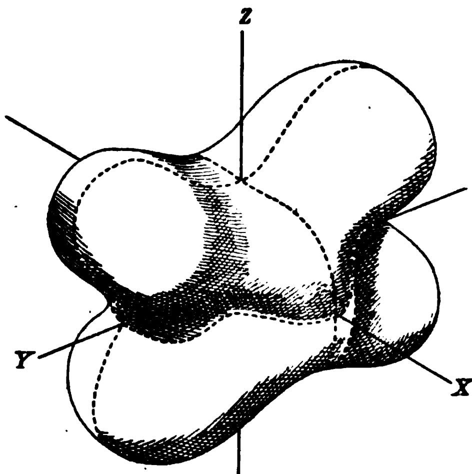
1. Schneidet man, was zunächst die Formeln für $1/E$ betrifft, aus einem Kristall zylindrische oder prismatische Stäbchen in den verschiedensten Richtungen heraus, ermittelt jedesmal den Dehnungskoeffizienten (reziproken Dehnungsmodul) und trägt diese Größe in der entsprechenden Richtung in einem willkürlichen, aber ein für allemal gewählten Maßstabe als Radiusvektor auf, so erhält man als geometrischen Ort der Endpunkte dieser Radienvektoren eine Oberfläche vierter Ordnung. Diese Flächen werden für jedes Kristallsystem bezw. jede Gruppe von verschiedenem Charakter, für Kristalle eines und desselben Systems aber von gleichem Charakter, dagegen von verschiedenem individuellen Verhältnis der Ausmaße sein. Man kann derartige Flächen oder vielmehr die von ihnen eingeschlossenen Körper aus Holz oder Gips herstellen und an diesen Modellen

[1] G. J. MICHAELIS, Arch. Néerl. 21. 387. 1887. — [2] C. CHREE, Proc. Roy. Soc. Lond. 44. 214. 1888. — [3] H. MICHELL, Proc. Lond. math. Soc. 32. 247. 1900. — [4] K. SOEKNICK, Progr. Königsberg 1904 und 1905. — [5] K. WESENDONCK, WIED. Ann. 35. 121. 1888; 36. 725. 1889.

alsdann die Verhältnisse bequem studieren.[1] In Figur 223 ist eine solche „Dehnungsfläche" für einen Kristall des regulären Systems, und zwar insbesondere für Steinsalz (nach weiter unten anzuführenden Messungen) wiedergegeben. Man erkennt die oben erwähnten Maxima, Minima und gemischten

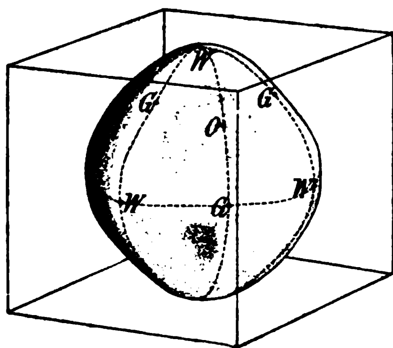


Figur 223.



Figur 224.

Maxima-Minima; man kann die Fläche als einen Würfel mit abgerundeten Ecken und Kanten sowie mit eingedrückten Flächen bezeichnen. Als zweites Beispiel diene Figur 224, die sich auf das rhombische System, und zwar auf den Baryt bezieht; diese Fläche ist, wie man sieht, nicht mehr, wie die vorige, symmetrisch zu rechtwinkligen Achsen.



Figur 225.

2. Entsprechend kann man nun in bezug auf den Drillungskoeffizienten (reziproken Drillungsmodul) verfahren; auch hier erhält man gemäß den obigen Gleichungen Flächen vierter Ordnung, aber von wesentlich anderer Gestalt. So stellt Figur 225, freilich nur angenähert, die Drillungsfläche für das reguläre System, speziell für Steinsalz, dar. Wie die Dehnungsfläche an einen abgerundeten und eingedrückten Würfel, so erinnert diese an ein abgerundetes und eingedrücktes Oktaeder; wie dort, so sind auch hier die Enden der Würfel-, Oktaeder- und Granatoederrichtung durch Buchstaben bezeichnet.

3. Die Dehnungs- und die Drillungsfläche stellen zusammengenommen alles dar, was den Körper charakterisiert; aber nicht in der einzig möglichen Weise. Im Gegenteil, eine andere Kombination ist in mancher Hinsicht vorzuziehen, nämlich die der Dehnungsfläche bei einseitigem Zug oder, was doch dasselbe ist, der Verkürzungsfläche bei einseitigem Druck, mit der Verkürzungsfläche bei allseitig gleichem Druck, d. h. mit der Fläche, die die lineare Kompression δ in bestimmter Richtung als Folge kubischer Kompression darstellt; sie ist, wie aus einer obigen Bemerkung hervorgeht, zugleich die Fläche kubischer Kompression bei einseitiger Druckbeanspruchung und im allgemeinen ebenfalls eine

[1] G. Finsterwalder in München hat zuerst solche Modelle berechnet und in Gips vervielfältigen lassen.

komplizierte Fläche, im regulären System aber einfach eine Kugel. Die Kombination der beiden Flächen für $\varepsilon = 1/E$ und δ, um dasselbe Zentrum und in gleichem Maßstabe entworfen, liefert aber noch eine neue Anschauung, und zwar durch die Abschnitte der Radienvektoren zwischen beiden Flächen; denn die Differenz $\varepsilon - \delta$ ist nichts anderes als der Koeffizient der Flächendilatation senkrecht zur Längsspannung, hängt also mit der Querkontraktion in nahem Zusammenhange; im allgemeinen wird diese Größe das entgegengesetzte Vorzeichen haben wie die Längsveränderung; es kann aber auch Richtungen in Kristallen geben, wo sie das gleiche Vorzeichen hat (s. u.).

4. Schließlich ist noch eine vierte Fläche anzuführen, weil sie sich durch besondere Einfachheit auszeichnet. Bildet man nämlich aus den Formeln (21) und (23) die Kombination

$$s_0 = \varepsilon + \frac{1}{2}\tau = \frac{1}{E} + \frac{1}{2K} \quad , \tag{78}$$

so erhält man den auffallend einfachen Wert

$$\left\{\begin{aligned} s_0 = {} & [s_{11} + \tfrac{1}{4}(s_{55} + s_{66})]\,\alpha^2 + [s_{22} + \tfrac{1}{4}(s_{66} + s_{44})]\,\beta^2 \\ & + [(s_{33} + \tfrac{1}{4}(s_{44} + s_{55})]\,\gamma^2 \\ & + (s_{24} + s_{34} + \tfrac{1}{2}s_{56})\,\beta\gamma + (s_{35} + s_{15} + \tfrac{1}{2}s_{64})\,\gamma\alpha \\ & + (s_{16} + s_{26} + \tfrac{1}{2}s_{45})\,\alpha\beta \quad , \end{aligned}\right. \tag{79}$$

der in bezug auf α, β, γ statt vom vierten nur vom zweiten Grade ist und somit eine wesentlich höhere Symmetrie besitzt; man wird also hier eine Fläche erhalten, die einer Oberfläche zweiten Grades in mancher Hinsicht sehr ähnelt.

B) Will man von einer räumlichen Darstellung durch Modelle und von perperspektivischen Zeichnungen der Flächen absehen, so muß man sich mit der Zeichnung der charakteristischen Hauptschnitte in drei aufeinander senkrechten Ebenen behelfen; diese zusammengenommen werden ebenfalls ein gutes, wenn auch nicht so unmittelbar vollständiges Bild der Verhältnisse geben. Als Beispiel sei für diese Darstellung nach Voigt das System der Schnitte durch die Dehnungsfläche und die Drillungsfläche für das trigonale System, Gruppe V, gegeben. Die betreffenden Formeln lauten (z-Achse Hauptachse):

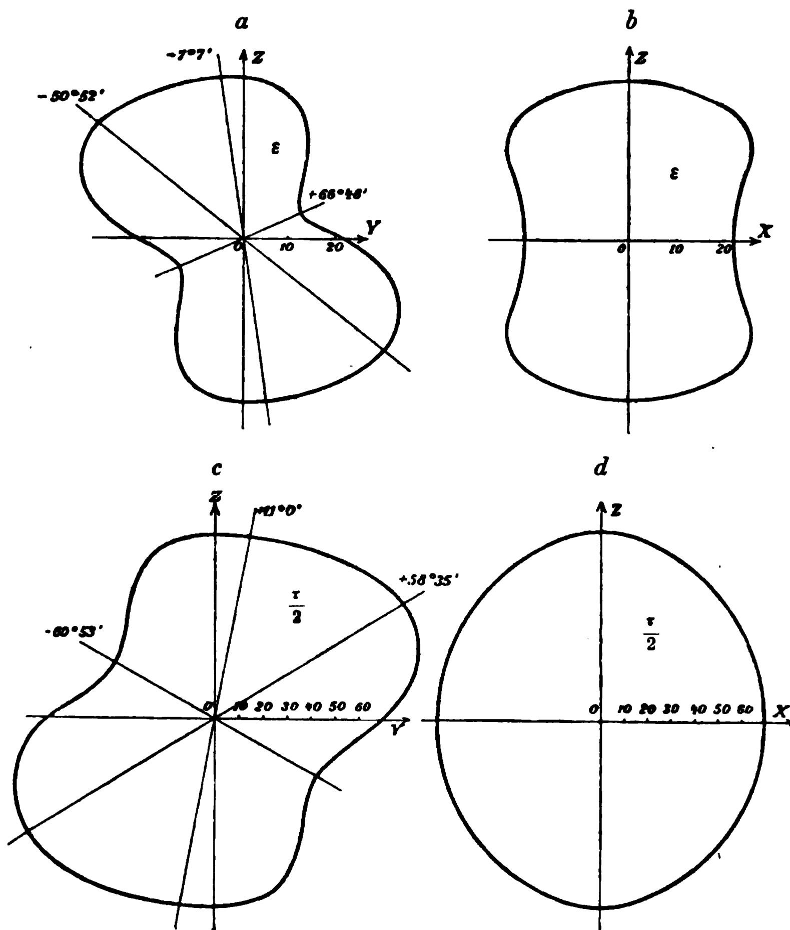
für den Dehnungskoeffizienten ε:

$$\left\{\begin{aligned} & \text{in der } yz\text{-Ebene } (\psi = 90^0): \\ & \varepsilon = s_{11}\sin^4\varphi + s_{33}\cos^4\varphi + (s_{44} + 2s_{13})\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 2s_{14}\sin^3\varphi\cos\varphi\,; \\ & \text{in der } zx\text{-Ebene } (\psi = 0^0): \\ & \varepsilon = s_{11}\sin^4\varphi + s_{33}\cos^4\varphi + (s_{44} + 2s_{13})\sin^2\varphi\cos^2\varphi \quad ; \\ & \text{in der } xy\text{-Ebene } (\varphi = 90^0): \\ & \varepsilon = s_{11} \text{ (Kreis)} \quad ; \end{aligned}\right. \tag{80}$$

für den Drillungskoeffizienten τ:

$$\left\{\begin{aligned} & \text{in der } yz\text{-Ebene:} \\ & \tau = s_{44} + [(s_{11} - s_{12}) - \tfrac{1}{2}s_{44}]\sin^2\varphi \\ & \quad + 2(s_{11} + s_{33} - s_{44} - 2s_{13})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 4s_{14}\sin^3\varphi\cos\varphi \quad ; \\ & \text{in der } zx\text{-Ebene:} \\ & \tau = s_{44} + [(s_{11} - s_{12}) - \tfrac{1}{2}s_{44}]\sin^2\varphi \\ & \quad + 2(s_{11} + s_{33} - s_{44} - 2s_{13})\sin^2\varphi\cos^2\varphi \quad ; \\ & \text{in der } xy\text{-Ebene:} \\ & \tau = s_{11} - s_{12} + \tfrac{1}{2}s_{44} \text{ (Kreis)} \quad . \end{aligned}\right. \tag{81}$$

Diese Formeln sind, mit Ausnahme der beiden Kreise liefernden, durch die ihnen entsprechenden Kurven in Figur 226 *a* und *b* (für ε) und *c* und *d* (für τ) dargestellt; sie beziehen sich auf Kalkspat; *c* und *d* sind in halbem Maßstabe gehalten, stellen also eigentlich $\tau/2$ dar. Die yz-Schnitte sind dann in Figur 227 mit gemeinsamem Zentrum wiederholt, und es ist ihnen hinzugefügt die δ-Kurve



Figur 226.

der linearen Kompression bei allseitig gleichem Druck und die Kurve, welche $\varepsilon + \frac{1}{2}\tau$ darstellt; letztere ist, wie wir wissen, eine Rotationsfläche, würde also in jedem anderen Meridianschnitt ebenso aussehen; sie ist, wie man sieht, einer Ellipse sehr ähnlich. Insoweit ist die Figur aus VOIGTs Kristallbuche entnommen; hinzugefügt ist schließlich noch, und zwar der Deutlichkeit halber im doppelten Maßstabe, die Fläche $(\varepsilon - \delta)$ der flächenhaften Querkontraktion.

C) Eine dritte Darstellungsart hat FINSTERWALDER[1] angegeben. Ersetzt man in der Oberflächengleichung die Kosinus durch die rechtwinkligen Koordinaten

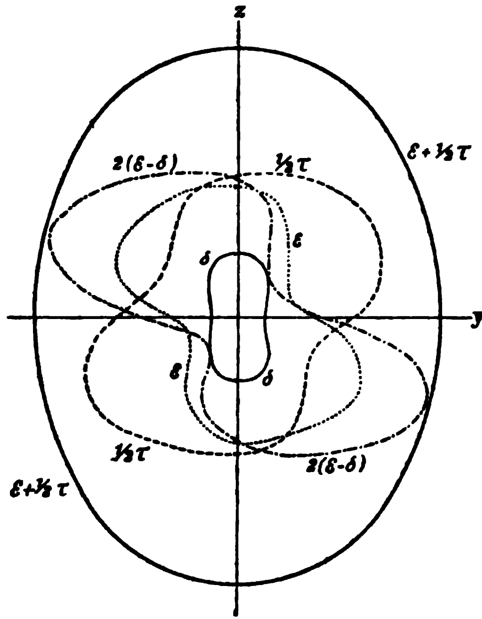
$$x = \varrho\alpha \quad , \qquad y = \varrho\beta \quad , \qquad z = \varrho\gamma \quad ,$$

so wird der Radiusvektor der Fläche beispielsweise für das rhombische System (die a sind gewisse Kombinationen):

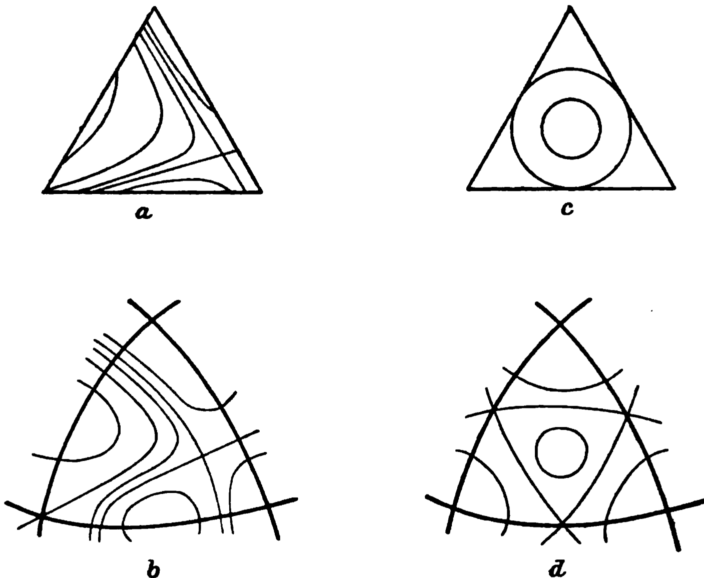
$$(82) \qquad \varrho^5 = a_{11}x^4 + a_{22}y^4 + a_{33}z^4 + 2a_{23}y^2z^2 + 2a_{31}z^2x^2 + 2a_{12}x^2y^2 \quad .$$

[1] S. FINSTERWALDER, Münch. Ber. 1888, p. 257.

Jede mit dieser Fläche F konzentrische Kugel trifft F in einer Kurve, die auf die Einheitskugel S projiziert wird; jedem isolierten Punkte auf S entspricht alsdann ein Maximum oder Minimum von F. Die auf S liegenden Kurven werden, um die Betrachtung zu erleichtern, durch die Substitution $x^2 = u$, $y^2 = v$, $z^2 = w$ in einen andern Raum (u, v, w) abgebildet; die Abbildungen liegen aber jetzt in einer Ebene P, nämlich in der durch die Gleichung $u + v + w = 1$ dargestellten, dem Bilde von S; jedem isolierten Punkte auf S entspricht eine besondere Eigenschaft der zugehörigen Kurve auf P. Die Fläche F läßt sich demnach auf die Ebene P so abbilden, daß ihren Kugelschnitten ein System von Kegelschnitten mit gemeinsamen Asymptoten entspricht; innerhalb eines Dreiecks der Ebene findet Beziehung auf reelle Punkte der Fläche F (und zwar auf einen in jedem der acht Kugeloktanten) statt. Für den **Baryt** (rhombisch) und für den **Flußspat** (regulär, hier wird die Fläche natürlich einfacher) hat FINSTERWALDER die Kurvensysteme auf P und S berechnet und zeichnerisch dargestellt; man vergleiche Figur 228, wo sich a und b auf Baryt (Hyperbeln), c und d auf Flußspat (Kreise) bezieht.



Figur 227.



Figur 228.

Molekulartheorie.

Es ist schon in dem allgemeinen Artikel über Elastizität auf p. 538 ff. ausgeführt worden, welche Stellung die Molekulartheorie der Elastizität neben der Kontinuumstheorie einnimmt; es ist gezeigt worden, daß die NAVIER-POISSON-CAUCHYsche Theorie zu falschen Resultaten führt, daß dagegen die VOIGTsche Theorie, die sich von den Spezialisierungen jener freihält, sich als durchaus brauchbar erweist, wenn man alle Körper als kristallinisch aufgebaut und die isotropen Körper als quasi-isotrop, d. h. aus kristallinischen Aggregaten aufgebaut betrachtet. Von diesem Gesichtspunkte aus wird also für die VOIGTsche Theorie gerade der Kristall der einfachere Körper; da an jener Stelle sofort zu den quasi-isotropen Körpern übergegangen wurde, ist das Wichtigste aus der Theorie nunmehr für wirkliche endliche Kristalle nachzuholen.

Über die Verrückungen der Teilchen u, v, w ist nichts Neues zu sagen: sie treten auch hier nur in den sechs Kombinationen auf, die man als Deformationskomponenten bezeichnet und x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y nennt. Neu kommen aber nun noch die molekularen Rotationskomponenten hinzu, l, m, n, von denen man, um sie relativ zu dem Volumenelement, dem sie angehören, aufzufassen, die Drehungskomponenten dieses Volumenelements, d. h. die Größen

$$(83)\quad \lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

abziehen muß, so daß nur die Größen $l-\lambda$, $m-\mu$, $n-\nu$ übrig bleiben. Mit Rücksicht auf diese Molekulardrehungen hören nun die Gleichungen $X_y = Y_x$, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$ auf, gültig zu sein; es wird vielmehr, wenn man das Potential der elastischen Kräfte einführt, dieses nicht nur durch Differentiation nach den sechs Deformationskomponenten, sondern auch nach den drei Differezen $l-\lambda$, $m-\mu$, $n-\nu$ Werte liefern, und zwar nach letzteren eben jene nunmehr von null verschiedenen Differenzen $Y_z - Z_y$, $Z_x - X_z$, $X_y - Y_x$. Das Potential der elastischen Kräfte wird nun unter denselben Annahmen wie früher eine Funktion zweiten Grades; es wird also hier aus drei Gliedern φ, ψ, χ bestehen, deren erstes die Quadrate der Deformationskomponenten, deren letztes die Quadrate der Rotationskomponenten, deren mittleres die Produkte beider enthält; es wird also:

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned}
2\varphi &= \alpha_{11} x_x^2 + 2\alpha_{12} x_x y_y + 2\alpha_{13} x_x z_z + 2\alpha_{14} x_x y_z + \ldots + 2\alpha_{16} x_x x_y \\
&\qquad + \alpha_{22} y_y^2 + 2\alpha_{23} y_y z_z + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2\alpha_{26} y_y x_y \\
&\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi &= (l-\lambda)(\beta_{11} x_x + \beta_{12} y_y + \ldots + \beta_{16} x_y) \\
&\quad + (m-\mu)(\beta_{21} x_x + \ldots\ldots\ldots + \beta_{26} x_y) \\
&\quad + (n-\nu)(\beta_{31} x_x + \ldots\ldots\ldots + \beta_{36} x_y) \quad ; \\
2\chi &= \gamma_{11}(l-\lambda)^2 + 2\gamma_{12}(l-\lambda)(m-\mu) + 2\gamma_{13}(l-\lambda)(n-\nu) \\
&\qquad + \gamma_{22}(m-\mu)^2 \qquad + 2\gamma_{23}(m-\mu)(n-\nu) \\
&\qquad\qquad + \gamma_{33}(n-\nu)^2 \quad .
\end{aligned}\right.$$

Schließt man die Einwirkung von Kraftmomenten L, M, N auf die elementaren Massen in dem betrachteten Volumen aus (Mittel zu ihrer Ausübung sind ohnedies nicht ersichtlich, wenn man nicht elektrische oder magnetische Kräfte heranziehen will), so wird

$$(85)\qquad \frac{\partial(\psi+\chi)}{\partial(l-\lambda)}=0\quad,\quad \frac{\partial(\psi+\chi)}{\partial(m-\mu)}=0\quad,\quad \frac{\partial(\psi+\chi)}{\partial(n-\nu)}=0\quad,$$

und man kann die Größen $l-\lambda$, $m-\mu$, $n-\nu$ durch die x_x u. s. w. ausdrücken. Schließlich kann man zusammenfassen und erhält, wenn man $\varphi+\chi=f$ setzt, die Gleichung (1) am Anfang dieses Artikels. Die Formel erhält aber jetzt durch ihre Verknüpfung mit bestimmten Vorstellungen über die Anordnung und Wirkungsweise der Molekeln erhöhte Bedeutung, und man wird durch den Ausbau dieser Vorstellungen imstande sein, Beziehungen zwischen den Koeffizienten aufzustellen und damit dem Wesen der Kristallelastizität näher zu kommen.

Die einfachste, aber auch speziellste Hypothese in dieser Richtung, die von Poisson und Cauchy[1], wonach die Kräfte zwischen den Molekeln in ihrer Verbindungslinie wirken und nur von ihrer Entfernung abhängen, führt ohne weitere Annahmen über die Verteilung der Molekeln zu folgenden sechs Beziehungen:

$$(86)\qquad c_{44}=c_{23}\;,\quad c_{55}=c_{31}\;,\quad c_{66}=c_{12}\;,\quad c_{56}=c_{14}\;,\quad c_{64}=c_{25}\;,\quad c_{45}=c_{36}\;.$$

Hierdurch würde sich die Zahl der Elastizitätskonstanten für die einzelnen Gruppen reduzieren, und zwar

im triklinen auf	15	im trigonalen, Gruppe IV	6
im monoklinen auf	10	im trigonalen, Gruppe V	5
im rhombischen auf	6	im hexagonalen, Gruppe IV	4
im quadratischen, Gruppe VI	5	im regulären	2
im quadratischen, Gruppe VII	4	für isotrope Körper	1

Noch speziellere Beziehungen erhält man, wenn man nach Lord Kelvin[2] bestimmte Annahmen der gedachten Art macht; es erübrigt sich, auf sie einzugehen, da schon die obigen Beziehungen durch die Erfahrung nicht bestätigt werden; man vgl. auch oben p. 542.

Somit erweist es sich als notwendig, die Kräfte zwischen den Molekeln von ihrer Orientierung abhängig zu machen, d. h. den Molekeln Polarität zuzuschreiben, wie das Voigt[3] in einer großen Studie durchgeführt hat. Die obigen Beziehungen werden dann immer noch die Bedeutung haben, daß sie, je näher sie erfüllt werden, eine desto geringere, und umgekehrt, je greller die beobachteten Beziehungen von ihnen abweichen, eine desto stärkere Polarität der Molekeln erkennen lassen. Die Entwickelungen der Voigtschen Theorie selbst können hier ihrer Komplikation halber nicht wiedergegeben werden; sie gipfeln in allgemeinen Formeln für Potential und Druckkomponenten (neun Größen zu je neun Gliedern, also 81 Koeffizienten, von denen aber nur $21+18=39$ verschieden sind), sowie in ihrer Spezialisierung für die Kristallsysteme. Um wenigstens einen Begriff von den Formeln zu geben, seien zwei Beispiele angeführt. Im regulären System wird (ϱ ist die Dichte):

$$(87)\qquad l=\lambda-\frac{\varrho L}{2(B-C)}\;,\quad m=\mu-\frac{\varrho M}{2(B-C)}\;,\quad n=\nu-\frac{\varrho N}{2(B-C)}\;,$$

[1] A. Cauchy, Exerc. de math. **3.** 226. 1828. — S. D. Poisson, Mém. de l'Acad. **18.** 115. 1842. — Vergl. ferner: R. Clausius, Pogg. Ann. **76.** 46. 1849. — B. de St.-Venant, Mém. sav. étr. **14.** 260. 1853. — [2] Lord Kelvin, Proc. Edinb. Soc. **16.** 693. 1890; Proc. Roy. Soc. **54.** 59. 1893. — Vergl. auch B. Elie, Journ. de phys. (2) **5.** 204. 1886. — [3] W. Voigt, Theoretische Studien über die Elektrizitätsverhältnisse der Kristalle. Abh. Göttinger Ges. **34.** 3. 1887; Rapport au Congrès int. de phys. Paris 1900.

$$(88)\left\{\begin{aligned}
&-X_x = Ax_x + B(y_y + z_z)\,, \quad -Y_y = Ay_y + B(z_z + x_x)\,, \quad -Z_z = Az_z + B(x_x + y_y)\,,\\
&-Y_z = \frac{B+C}{2}y_z + \frac{\varrho}{2}L\,, \qquad -Z_y = \frac{B+C}{2}y_z - \frac{\varrho}{2}L\,,\\
&-Z_x = \frac{B+C}{2}z_x + \frac{\varrho}{2}M\,, \qquad -X_z = \frac{B+C}{2}z_x - \frac{\varrho}{2}M\,,\\
&-X_y = \frac{B+C}{2}x_y + \frac{\varrho}{2}N\,, \qquad -Y_x = \frac{B+C}{2}x_y - \frac{\varrho}{2}N\,.
\end{aligned}\right.$$

Für $L = M = N = 0$ wird auch $l - \lambda = m - \mu = n - \nu = 0$; eine selbständige Drehung der Molekeln infolge von Druckkräften findet also hier nicht statt (wohl aber bei den anderen Kristallsystemen).

Für das rhomboedrische System, Gruppe V, sei beispielsweise die Serie der Einzelkonstanten β und γ angeführt:

$$\begin{array}{cccccc|ccc}
\beta_{11} & -\beta_{11} & 0 & \beta_{14} & 0 & 0 & \gamma_{11} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{14} & -\beta_{11} & & \gamma_{11} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \gamma_{33}
\end{array}\,.$$

Beobachtungsmethoden.

Sie sind im wesentlichen schon oben bei „Zug und Druck“ (p. 553 u. 593) bezw. bei „Biegung und Torsion“ (p. 627 u. 649) aufgeführt worden. Am wichtigsten sind einerseits Versuche über kubische Kompressibilität, welche zur Kenntnis von C führen, und die u. A. Röntgen und Schneider[1] nach der schon erwähnten Piezometermethode angestellt haben, andererseits Versuche über Biegung und Torsion, die, nacheinander an denselben Stäbchen ausgeführt, nicht nur zur Kenntnis von E und T, sondern auch zu der aller Elastizitätskonstanten c_{11} u. s. w. führen, mit dem weiteren Vorteil, daß man eine mehr als ausreichende Zahl von Bestimmungen erhält, so daß man entweder Kontrollwerte hat oder die geeignetsten Beobachtungen sich auswählen kann; man wird dies in der Weise tun, daß man möglichst viel Daten durch Biegungen und nur den Rest durch Drillungen ermittelt.[2] Im einzelnen sei noch folgendes bemerkt: Die Dimensionen der Kristallstäbchen bezw. der auch zuweilen benutzten Kristallscheibchen[3] müssen bei ihrer Kleinheit mit besonderer Sorgfalt gemessen werden. Den Querschnitt der Stäbchen nimmt man meist rechteckig und wählt seine beiden Kanten zur Vereinfachung der Theorie (s. o.) einigermaßen verschieden. Ebenso empfiehlt es sich, bei abnehmender Länge der Stäbchen auch Breite und Dicke entsprechend abnehmen zu lassen, weil sonst die gewöhnliche Biegungsformel hinfällig und auch die Anwendbarkeit einer von Warburg und Koch[4] angegebenen Korrektion von Voigt[5] bezweifelt wird. Ergeben die Messungen der Dicke an verschiedenen Stellen verschiedene Werte, so kann man bei den Drillungen einfach die mittlere Dicke, muß aber bei den Biegungen einen anders zu ermittelnden Wert in die Rechnung einführen.[6] In bezug auf eine Reihe weiterer Vorsichtsmaßregeln, besonders bei der Herstellung, Behandlung und Belastung der Stäbchen, muß auf die betreffenden Untersuchungen verwiesen werden. Die Messung der Biegung selbst geschieht entweder nach der besonders

[1] W. C. Röntgen und J. Schneider, Wied. Ann. **31**. 1000. 1887. — [2] W. Voigt, ibid. **16**. 416. 1882. — [3] J. Beckenkamp, Ztschr. f. Kryst. **10**. 41. 1885. — H. Vater, ibid. **11**. 549. 1886. — [4] E. Warburg und R. Koch, Wied. Ann. **5**. 253. 1878. — [5] W. Voigt, ibid. **34**. 1023. 1888. — [6] W. Voigt, Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1884. p. 989.

von KOCH, TUTTON[1] u. A. ausgebildeten mikroskopischen Interferenzstreifenmethode oder nach der von VOIGT[2] ausgebildeten teleskopischen Spiegelungsmethode; die letztere hat den Vorteil, auch gleich zur Messung der Drillungen zu dienen, wenn man nicht hierzu lieber einen gesonderten, ebenfalls von VOIGT[3] angegebenen Apparat benutzen will. Die Beschreibung beider Apparate würde hier zu weit führen; man findet sie, unterstützt durch Abbildungen, in LIEBISCHs physikalischer Kristallographie, p. 559 ff. Die Messungen werden, wenn nur die Hauptwerte von E und K ermittelt werden sollen, nur an in den Hauptrichtungen geschnittenen Stäbchen ausgeführt, dagegen noch an zahlreichen schiefgeschnittenen, wenn es sich um Zeichnung der Elastizitäts- und Torsionsflächen bezw. Kurven oder um Ermittelung sämtlicher Elastizitätskonstanten handelt.

Neben der statischen ist noch kurz der dynamischen Methode zu gedenken, bei der die Schwingungen, etwa mit der Hilfe der Klangfiguren auf Kristallscheibchen, beobachtet werden, und die, von SAVART[4] angewandt, die erste war, durch die überhaupt die Elastizität der Kristalle, wenn auch nur qualitativ, untersucht wurde.

Resultate der Beobachtungen.

Die weitaus überwiegende Zahl von experimentellen Untersuchungen, insbesondere sämtliche Messungen von eigentlichen Elastizitätskonstanten s bezw. c verdankt man VOIGT; daneben, jedoch nur für einzelne Werte von E, C und K, kommen Arbeiten von AUERBACH, BAUMGARTEN, BECKENKAMP, COROMILAS, GAMBA, KOCH, MALLOCK, NIEDMANN, RÖNTGEN und SCHNEIDER, VATER und einigen wenigen andern in Betracht. Die Schwierigkeit der Arbeiten liegt, nachdem die Theorie einmal vollständig entwickelt und das erforderliche Beobachtungs- und Rechnungsverfahren klargelegt ist, einzig und allein in der Beschaffung und Bearbeitung des Materials. Denn es sind zu den Messungen immerhin möglichst große und klare Präparate erforderlich; diese sind aber in der Natur meist sehr selten und werden, da sie für die Untersuchung zerschnitten, also vernichtet werden müssen, im allgemeinen nicht hergegeben; in den Fällen, wo dies in selbstloser Weise geschieht, zeigt sich beim Polieren der einzelnen Stücke oft noch nachträglich, daß sie nicht homogen oder stetig genug sind; und wenn sie schließlich brauchbar sind, gehen sie nicht selten bei den Vorversuchen zugrunde. Diese Schwierigkeiten werden natürlich um so größer, je geringer die Symmetrie der Gruppe ist; denn um so mehr Konstanten sind zu bestimmen, um so mehr Stücke müssen also hergestellt werden; und diese Stücke müssen, wenn die Resultate Wert haben sollen, aus demselben Kristall oder mindestens aus Kristallen von demselben Fundort herausgeschnitten werden. So darf es denn nicht Wunder nehmen, wenn es VOIGT trotz jahrzehntelanger Bemühungen nicht gelungen ist, Vertreter aller Gruppen zu bearbeiten; für trikline und quadratische Kristalle liegen gar keine, für monokline nur sehr beschränkte Zahlen vor. Vielleicht wird auch hier die Ausbildung des Kristallzüchtungsverfahrens, das ja auch für optische und andere Zwecke äußerst erwünscht ist, und an verschiedenen Orten eifrig betrieben wird, eine Besserung der Verhältnisse herbeiführen.

Im folgenden ist alles auf kg und qmm, nur die kubische Kompressibilität auf Atmosphären bezogen; die Bedeutung der Zeichen ergibt sich aus dem Vorangegangenen.

---

[1] K. R. KOCH, WIED. Ann. **5.** 251. 1878; **18.** 325. 1883; Freib. Verh. **8.** 2. 1881. — A. E. H. TUTTON, Ztschr. f. Kryst. **39.** 321. 1904. — [2] W. VOIGT, WIED. Ann. **31.** 474. 1887. — [3] W. VOIGT, POGG. Ann. Erg.-Bd. **7.** 185. 1875. — [4] F. SAVART, POGG. Ann. **16.** 206. 1829.

A) Reguläres System.

Die Formeln für E und K für die drei Hauptrichtungen der Würfel-, Oktaeder- und Grantoiedernormale sind schon oben gegeben; übrigens genügen, wie man dort sieht, zwei Biegungs- und eine Drillungsmessung, um die drei s und daraus die drei c zu berechnen.

1. Steinsalz.[1]

Beobachter	E_w	E_g	E_o	E_w/E_g	E_g/E_o
VOIGT (1876) .	4103	3410	3193	1,20	1,07
„ (1884) .	4186	3482	—	1,20	—
„ (1888) .	4187	3490	3026	1,20	1,15
KOCH	4033	3395	—	1,19	—
GROTH . . .	—	—	—	1,19	—

$$\varepsilon = \frac{1}{E} = [33{,}48 - 9{,}66\,(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)] \cdot 10^{-5}$$

$$\text{(Kreiszylinder)}\ \tau = \frac{1}{K} = [154{,}58 - 77{,}28\,(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5}\quad,$$

insbesondere:

$$K_w = 646\quad,\qquad K_o = 776\quad,\qquad K_g = 739\quad,$$

dagegen für das rechteckige Prisma

$$K_w^* = 1294\quad.$$

$$C = 4{,}2 \cdot 10^{-6}\ (\text{VOIGT});\ C = 5{,}0 \cdot 10^{-6}\ (\text{RÖNTGEN u. SCHNEIDER})^2,$$

$$s_{11} = 23{,}8 \cdot 10^{-5}\quad,\qquad s_{12} = -5{,}2 \cdot 10^{-5}\quad,\qquad s_{44} = 77{,}8 \cdot 10^{-5}\quad.$$

Es ist also s_{12} negativ, wie zu erwarten war, da hierdurch die Änderung der Querdimension dargestellt wird.

$$c_{11} = 4770\quad,\qquad c_{12} = 1820\quad,\qquad c_{44} = 1294\quad.$$

Für Steinsalz ist also die POISSONsche Beziehung $c_{12} = c_{44}$ nahezu erfüllt; nach VOIGT ist also die Polarität der Steinsalzmolekeln sehr gering.

2. Sylvin.[3]

$$E_w = 4010\quad,\qquad E_g = 2088\quad,\qquad E_w : E_g = 1{,}92\ (\text{KOCH})$$

$$E_w = 3724\quad,\qquad E_g = 1960\quad,\qquad E_w : E_g = 1{,}90\quad,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} = [75{,}1 - 48{,}2\,(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)] \cdot 10^{-5}\,,\ \text{hieraus ber. } E_o = 1695$$

$$\tau = \frac{1}{K} = [306{,}0 - 385{,}6\,(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5}\quad,$$

insbesondere

$$K_w = 327\quad,\qquad K_o = 397\quad,\qquad K_g = 388\quad,$$

dagegen

$$K_w^* = 655\quad.$$

(VOIGT)

[1] W. VOIGT, POGG. Ann. Erg.-Bd. **7.** 1. 177. 1876; Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1884. p. 989; WIED. Ann. **35.** 651. 1888. — K. R. KOCH, Freib. Ber. **8.** (2) 1; WIED. Ann. **18.** 325. 1881. — P. GROTH, Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1875. p. 544. — [2] W. C. RÖNTGEN u. J. SCHNEIDER, WIED. Ann. **31.** 1000. 1887. — [3] K. R. KOCH, a. a. O. — W. VOIGT, WIED. Ann. **35.** 655. 1888. — W. C. RÖNTGEN u. J. SCHNEIDER, a. a. O.

Ferner

$s_{11} = 26,9 \cdot 10^{-5}$, $s_{12} = -1,35 \cdot 10^{-5}$, $s_{44} = 153,0 \cdot 10^{-5}$ (VOIGT)
$c_{11} = 3750$, $c_{12} = 198$, $c_{44} = 655$, $C = 7,4 \cdot 10^{-6}$

$C = 5,6 \cdot 10^{-6}$ (RÖNTGEN u. SCHNEIDER).

Die POISSONsche Beziehung ist hier gar nicht erfüllt.

3. Flußspat (VOIGT).[1]

$$E_w = 14730 \quad , \quad E_g = 10080 \quad , \quad E_o = 9100 \quad ,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} = [13,05 - 6,26\,(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)] \cdot 10^{-5} \quad ,$$

$$\tau = \frac{1}{K} = [58,04 - 50,08\,(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5} \quad ,$$

insbesondere:

$$K_w = 1724 \quad , \quad K_o = 2418 \quad , \quad K_g = 2197 \quad ,$$

dagegen

$$K_w{}^* = 3446 \quad .$$

Ferner:

$$s_{11} = 6,79 \cdot 10^{-5} \quad , \quad s_{12} = -1,46 \cdot 10^{-5} \quad , \quad s_{44} = 29,0 \cdot 10^{-5} \quad ,$$
$$c_{11} = 16700 \quad , \quad c_{12} = 4570 \quad , \quad c_{44} = 3450 \quad ; \quad C = 1,20 \cdot 10^{-6} \quad .$$

Die POISSONsche Beziehung ist hier nicht gut erfüllt; Flußspat muß also nach VOIGT schon merklich polar wirkende Molekeln haben.

4. Pyrit (parallelflächige Hemiedrie) (VOIGT).[2]

$$E_w = 35300 \, , \; E_g = 25300 \, , \; E_o = 23100 \text{ (ber.)}, \; K_w{}^* = 10750 \, ; \; C = 1,14 \cdot 10^{-6} \, ,$$

$$\tau = \frac{1}{K} = [18,60 - 17,95\,(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5} \quad ,$$

insbesondere:

$$K_w = 5376 \quad , \quad K_o = 7924 \quad , \quad K_g = 7087 \quad .$$

Ferner:

$$s_{11} = 2,83 \cdot 10^{-5} \quad , \quad s_{12} = +0,43 \cdot 10^{-5} \quad , \quad s_{44} = 9,30 \cdot 10^{-5} \quad .$$
$$c_{11} = 36800 \quad , \quad c_{12} = -4830 \quad , \quad c_{44} = 10750 \quad .$$

Pyrit hat also einen überaus großen (einen der größten bisher bekannten, vgl. p. 562) Elastizitätsmodul und außerdem die merkwürdige Eigenschaft, daß eine der drei Elastizitätskonstanten negativ ist; von Erfüllung der POISSONschen Beziehung kann also hier gar nicht die Rede sein; im Gegenteil, es tritt hier die merkwürdige Erscheinung auf, daß Längszug keine Querkontraktion, sondern Querdilatation erzeugt — eine so merkwürdige Erscheinung, daß man erst noch eine Bestätigung in einem zweiten Falle wird abwarten müssen.

5. Chlorsaures Natron (tetartoedrisch).

$E_w = 4047$, $E_g = 3190$, $E_w : E_g = 1,27$ (KOCH).[3]

$E_w = 4147$, $E_g = 2581$, $E_w : E_g = 1,61$,
$K_w{}^* = 1218$,
$s_{11} = 24,1 \cdot 10^{-5}$, $s_{12} = 12,3 \cdot 10^{-5}$, $s_{44} = 82,1 \cdot 10^{-5}$,
$c_{11} = 6330$, $c_{12} = -2140$, $c_{44} = 1218$
(VOIGT).[4]

---

[1] W. VOIGT, Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1884. p. 999; WIED. Ann. **35.** 645. 1888; s. auch H. KLANG, WIED. Ann. **12.** 321. 1881. — [2] W. VOIGT, WIED. Ann. **35.** 649. 1888. — [3] K. R. KOCH, a. a. O. — [4] W. VOIGT, Gött. Nachr. 1893. p. 220; WIED. Ann. **49.** 719. 1893.

Vergleicht man diese Werte mit denen für das verwandte Steinsalz, so sieht man, daß c_{44} ziemlich gleich, c_{11} nicht gar zu verschieden ist, daß aber c_{12} für beide Körper sogar entgegengesetzte Zeichen hat. Das Zeichen bei Steinsalz ist nun normal, das für chlorsaures Natron ist dagegen anormal; es findet also hier dieselbe Erscheinung statt, die eben schon beim Pyrit erwähnt wurde. Danach dürfte es keinem Zweifel mehr unterliegen, daß es Körper gibt, bei denen die Längsdehnung eines Zylinders eine Querdehnung zur Folge hat. Gleichzeitig ist zu schließen, daß die Molekeln des chlorsauren Natrons starke Polarität besitzen, was in guter Übereinstimmung mit der starken piezoelektrischen Erregbarkeit des Minerals steht. Die gedachte Anomalie der Querdilatation bleibt übrigens, wie eine einfache Rechnung auf Grund der Formeln von p. 541 zeigt, auch für ein etwa herzustellendes oder aufzufindendes quasi-isotropes (dichtes) chlorsaures Natron bestehen.

6. Alaune (BECKENKAMP).[1]

Kalialaun: $E_w = 1806$, $E_g = 1987$, $E_w : E_g = 0{,}90$,

Chromalaun: $E_w = 1608$, $E_g = 1771$, $E_o = 1832$, $E_w : E_g = 0{,}90$,

Eisenalaun: $E_g = 1861$.

7. Kupfer (VOIGT).[2]

$$E = 12260 \;,\quad K_1 = 4616 \;,\quad K_2 = 3930 \;,$$
$$c_{11} = 13420 \;,\quad c_{12} = 6575 \;,\quad c_{44} = 5590 \;.$$

B) Rhombisches System.

Fällt die Längsachse in eine der drei Hauptachsen, so ist der Index 1, 2, 3, fällt sie in eine der drei Hauptebenen unter 45° gegen die beiden betreffenden Achsen, so ist der Index 4, 5, 6 beigefügt, der zweite Index gibt die Richtung der größeren Querdimension an.

8. Topas (VOIGT).[3]

$$E_1 = 23040,\ E_2 = 28900,\ E_3 = 26520,\ E_4 = 26700,\ E_5 = 28930,\ E_6 = 31800,$$
$$K_{23} = K_{32} = 11040 \;,\quad K_{31} = K_{13} = 13530 \;,\quad K_{12} = K_{21} = 13360 \;,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} = [4{,}341\,\alpha^4 + 3{,}460\,\beta^4 + 3{,}771\,\gamma^4 + 2\,(3{,}879\,\beta^2\gamma^2 + 2{,}856\,\gamma^2\alpha^2 + 2{,}390\,\alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5} \;.$$

$$\text{(Kreiszylinder)}\quad \tau = \frac{1}{K} = (14{,}88\,\alpha^4 + 16{,}54\,\beta^4 + 16{,}45\,\gamma^4 + 30{,}89\,\beta^2\gamma^2 + 40{,}89\,\gamma^2\alpha^2 + 43{,}51\,\alpha^2\beta^2) \cdot 10^{-5} \;.$$

Die Hauptschnitte beider Flächen sind in Figur 229 gezeichnet.

$$C = 0{,}61 \cdot 10^{-6} \;.$$

Der größte, bei Topas vorkommende Wert von E fällt in die (12) Ebene und ist:

$$E_{\max} = 32\,450 \;.$$

Es sei ferner mit E_4 der Wert verglichen, den AUERBACH[4] für den Eindringungsmodul [vgl. p. 602, Gleichung (89) und die anschließende Tabelle] gefunden

[1] BECKENKAMP, Ztschr. f. Kryst. 1885. p. 41; 1887, p. 418. — [2] W. VOIGT, Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1883, p. 961; 1884, p. 1015. — [3] W. VOIGT, WIED. Ann. 34. 981. 1888; Gött. Nachr. 1887. Nr. 19. — [4] F. AUERBACH, WIED. Ann. 58. 381. 1896.

hat (auch bei den späteren Kristallen bezieht sich das Zeichen E' auf die AUERBACHschen Zahlen):

$$E' = 29\,700 \quad ;$$

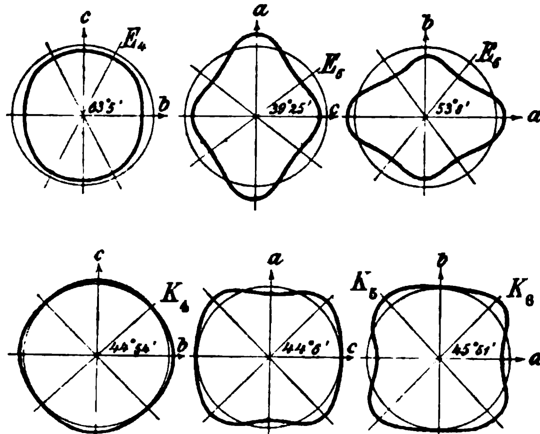
dieser Wert ist, wie man sieht, einige Prozent größer als der von E_4, was nur z. T. auf die Verschiedenheit von E und E', z. T. aber auf die des Materials fällt.

Ferner ist:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} s_{11} = 4{,}34 & s_{44} = 9{,}06 & s_{23} = -0{,}65 \\ s_{22} = 3{,}46 & s_{55} = 7{,}39 & s_{31} = -0{,}84 \\ s_{33} = 3{,}77 & s_{66} = 7{,}49 & s_{12} = -1{,}35 \end{array}\right\} \cdot 10^{-6} \quad .$$

$$c_{11} = 28\,700 \;, \quad c_{22} = 35\,600 \;, \quad c_{33} = 30\,000 \;,$$
$$c_{44} = 11\,000 \;, \quad c_{55} = 13\,500 \;, \quad c_{66} = 13\,300 \;,$$
$$c_{23} = 9000 \;, \quad c_{31} = 8600 \;, \quad c_{12} = 12\,800 \;.$$

Die POISSONschen Relationen sind hier durchaus nicht erfüllt; die hiernach vorhandene starke Polarität der Topasmolekeln stimmt mit den bekannten pyro-



Figur 229.

elektrischen Eigenschaften des Topases überein und macht die zuerst von RIECKE[1] ausgesprochene Vermutung, die Polarität möchte elektrischen Ursprungs sein, wahrscheinlich.

9. Baryt (VOIGT).[2]

$$E_1 = 6199 \;,\quad E_2 = 5403 \;,\quad E_3 = 9594 \;,\quad E_4 = 3764 \;,\quad E_5 = 7025 \;,\quad E_6 = 7400 \;,$$

$$K_{23} = K_{32} = 1215 \;,\quad K_{31} = K_{13} = 2927 \;,\quad K_{12} = K_{21} = 2828 \;,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} = [16{,}13\,\alpha^4 + 18{,}51\,\beta^4 + 10{,}42\,\gamma^4 + 2\,(38{,}79\,\beta^2\gamma^2 + 15{,}21\,\gamma^2\alpha^2 + 8{,}88\,\alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-6} \quad .$$

Maximum: $E = 9582$, Minimum: 3715, also in dem ungewöhnlich starken Verhältnis 2,6 : 1 stehend.

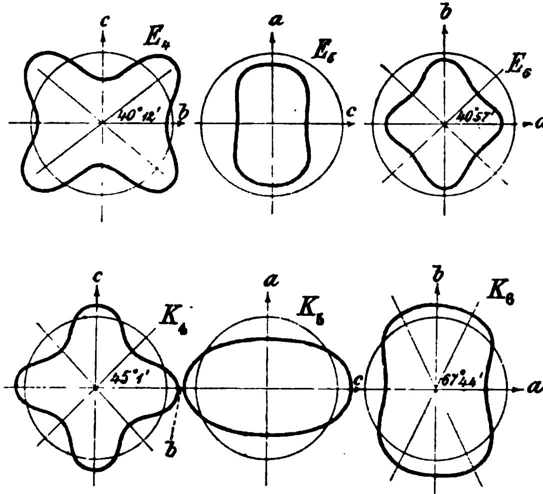
---

[1] E. RIECKE, Gött. Nachr. 1887. p. 194. — [2] W. VOIGT, WIED. Ann. **34.** 981. 1888; Gött. Nachr. 1887. Nr. 19. — Ferner: NIEDMANN, Ztschr. f. Kryst. 1887. p. 392. Es fand sich: $E_1 = 6500$, $E_2 = 5410$, $E_3 = 8490$, ersterer ziemlich, der zweite Wert gut, der dritte schlecht mit VOIGT übereinstimmend.

$$(\text{Kreiszylinder})\ \tau = \frac{1}{K} = [69{,}52\,\alpha^4 + 117{,}66\,\beta^4 + 116{,}46\,\gamma^4 + 2\,(20{,}16\,\beta^2\gamma^2 + 85{,}29\,\gamma^2\alpha^2 + 127{,}85\,\alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5} \quad .$$

Die Hauptschnitte sind in Figur 230 dargestellt; die Dehnungsfläche außerdem perspektivisch in Figur 224 (oben)

$$C = 1{,}98 \cdot 10^{-6} \quad ,$$



Figur 230.

Ferner ist:

$s_{11} = 16{,}13$	$s_{44} = 82{,}30$	$s_{23} = -\ 2{,}46$
$s_{22} = 18{,}57$	$s_{55} = 34{,}16$	$s_{31} = -\ 1{,}88$
$s_{33} = 10{,}42$	$s_{66} = 35{,}36$	$s_{12} = -\ 8{,}80$

$\Big\} \cdot 10^{-5}$,

und hieraus:

$c_{11} = 9070$,	$c_{22} = 8000$,	$c_{33} = 10740$,
$c_{44} = 1220$,	$c_{55} = 2980$,	$c_{66} = 2880$,
$c_{23} = 2780$,	$c_{31} = 2750$,	$c_{12} = 4680$.

C) Monoklines System (COROMILAS).[1]

Es sind hier nur die Spaltungsflächen untersucht; es fand sich Größe und Lage des Maximums und Minimums von E bei

10. Gips: $E_{max} = 8870$ in $21{,}9^0$ gegen die Hauptachse,
$E_{min} = 3180$ in $75{,}4^0$ gegen die Hauptachse.

11. Glimmer: $E_{max} = 22183$ in der Hauptachse,
$E_{min} = 15548$ in 45^0 gegen die Hauptachse.

12. Orthoklas (Feldspat) ⊥ Basis:
a) Adular: $E' = 8460$, b) Sanidin: $E' = 8030$ (AUERBACH).

[1] COROMILAS, Über die Elastizitäts-Verhältnisse im Gyps und Glimmer. Diss. Tübingen 1877 und Ztschr. f. Kryst. 1. 407.

D) Hexagonales System.

Der Index bedeutet die Neigung der Längsachse gegen die Hauptachse.

13. Beryll (Smaragd) (Voigt).[1]

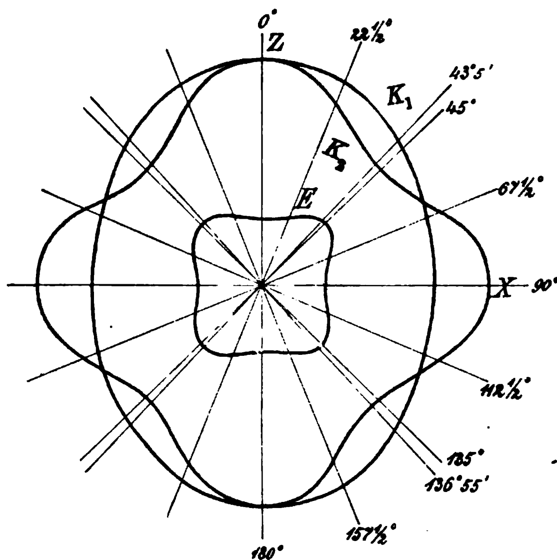
$$E_0 = 21650\,,\quad E_{45} = 17960\,,\quad E_{90} = 23120\,,\quad K_0^* = 6666\,,\quad K_{90}^* = 8880$$

(letztere Zahl, wenn die kleinere Querdimension in die Hauptachse fällt). Ferner, wenn φ, φ_1, φ_2 die Winkel der Längs-, Breiten- und Dickenrichtung des Stäbchens gegen die Hauptachse sind:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} = (4{,}325 \sin^4\varphi + 4{,}619 \cos^4\varphi + 13{,}328 \sin^2\varphi \cos^2\varphi) \cdot 10^{-5}$$

$$\tau = \frac{1}{K} = (15{,}000 - 3{,}675 \cos^2\varphi_2 - 17{,}536 \cos^2\varphi \cos^2\varphi_1) \cdot 10^{-5} \quad .$$

In Figur 231 stellt die Kurve E den Wert von $1/E$ bei verschiedenen φ dar, die Kuren K_1 und K_2 die Werte von $1/K$, wenn die Längsrichtung in



Figur 231.

einem Hauptschnitte variiert und entweder die größere oder die kleinere Querdimension senkrecht zur Hauptachse bleibt. Ferner wird:

$$C = 0{,}747 \cdot 10^{-6} \quad .$$

$$\left.\begin{array}{ll} s_{11} = 4{,}325 & s_{33} = 4{,}619 \\ s_{12} = -1{,}338 & s_{44} = 15{,}000 \\ s_{13} = -0{,}836 & \end{array}\right\} \cdot 10^{-5}$$

und hieraus:

$$c_{11} = 27460\,,\quad c_{12} = 9800\,,\quad c_{13} = 6740\,,\quad c_{33} = 24090\,,\quad c_{44} = 6660\quad .$$

Die Poissonschen Beziehungen sind hier nahe erfüllt, die Polarität also klein.

Schließlich:

$$E_0' = 21500\quad ,\qquad E_{90}' = 23640 \text{ (Auerbach)},$$

[1] W. Voigt, Wied. Ann. 31. 474. 1887; Gött. Nachr. 1886. Nr. 3.

also mit Rücksicht auf die hier jedenfalls sehr geringe Differenz zwischen E und E' sehr gut mit VOIGT stimmend.

14. Apatit.[1]

$$E_0' = 14490 \text{ (AUERBACH)}.$$

E) Trigonales System (höhere Gruppe).

Diese Gruppe (V) hat sechs Konstanten und ist besonders reich bearbeitet (z = Symmetrieachse, yz = Symmetrieebene).

15. Bergkristall (VOIGT).[2]

$$E_0 = 10304 \ , \quad E_{-45} = 13050 \ , \quad E_{+45} = 8505 \ , \quad E_{90} = 7853 \ ,$$
$$K_0{}^* = 5085 \ , \quad K_{90}{}^* = 3481 \ ,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} = [12{,}734(1-\gamma^2)^2 + 16{,}693(1-\gamma^2)\gamma^2 + 9{,}705\gamma^4 - 8{,}460\beta\gamma(3\alpha^2-\beta^2)] \cdot 10^{-5},$$

und speziell für Richtungen $\|$ oder $\perp$ zur Symmetrieebene:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} = [12{,}734\sin^4\varphi + 16{,}693\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 9{,}705\cos^4\varphi + 8{,}460\cos\varphi\sin^3\varphi] \cdot 10^{-5}$$

Maximum: $E_1 = 13100$ für $\varphi = -48^0\ 15'$, Minimum: $E_1 = 7047$ für $\varphi = 71^0\ 35'$;

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} = [12{,}734\sin^4\varphi + 16{,}693\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 9{,}705\cos^4\varphi] \cdot 10^{-5} \ ,$$

Maximum: $E_2 = 10665$ für $\varphi = \pm 29^0\ 6'$.

Ferner:

$$\tau = \frac{1}{K} = [19{,}665 + 9{,}060\gamma_2{}^2 + 22{,}984\gamma^2\gamma_1{}^2 - 16{,}920[(\gamma\beta_1 + \beta\gamma_1)(3\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) - \beta_2\gamma_2]] \cdot 10^{-5} \ ,$$

und speziell, wenn die Längs- und die größere oder kleinere Querdimension in der Symmetrieebene liegt:

$$\tau_1 = \frac{1}{K_1} = [19{,}665 + 5{,}746\sin^2 2\varphi + 8{,}460\sin 2\varphi\cos 2\varphi] \cdot 10^{-5} \ ,$$

$$\tau_2 = \frac{1}{K_2} = [19{,}665 + 9{,}060\sin^2\varphi - 8{,}460\sin 2\varphi] \cdot 10^{-5} \ .$$

Die Elastizitätskurve auf der Basis ist ein Kreis; im übrigen ist das elastische Verhalten des Bergkristalls (die reziproken Moduln) durch die vier Kurven der Figur 232 dargestellt. Ferner ist der Koeffizient der Winkeländerung durch allseitigen Druck

$$B = -2{,}856 \cdot 10^{-5} \ ,$$

die Kompressibilität

$$C = 2{,}675 \cdot 10^{-6} \ ;$$

$s_{11} = 12{,}734$	$s_{13} = -1{,}486$	$s_{33} = 9{,}705$ $\cdot 10^{-5}$
$s_{12} = -1{,}629$	$s_{14} = -4{,}230$	$s_{44} = 19{,}665$ $\cdot 10^{-5}$

und hieraus

$c_{11} = 8682$	$c_{13} = 1438$	$c_{33} = 10745$
$c_{12} = 709$	$c_{14} = 1715$	$c_{44} = 5823$;

[1] Vergl. auch H. VATER, Ztschr. f. Kryst. **11.** 549. 1886. — [2] W. VOIGT, Gött. Nachr. 1886. Nr. 3; WIED. Ann. **31.** 495; 701. 1887.

an die POISSONschen Beziehungen findet sich auch nicht einmal eine Annäherung; es muß also sehr starke Polarität der Molekeln vorhanden sein.

Endlich ist nach AUERBACH:

$$E_0' = 10620 \quad .$$

16. Korund (AUERBACH):

$$E_0' = 52800 \quad ;$$

es ist dies (mit Iridium) der größte überhaupt bisher beobachtete Elastizitätsmodul.

17. Kalkspat (VOIGT und BAUMGARTEN).[1]

$$E_0 = 5837 \quad , \quad E_{-70} = 5756 \quad , \quad E_{+50} = 11167 \quad , \quad E_{+90} = 8977 \quad ,$$

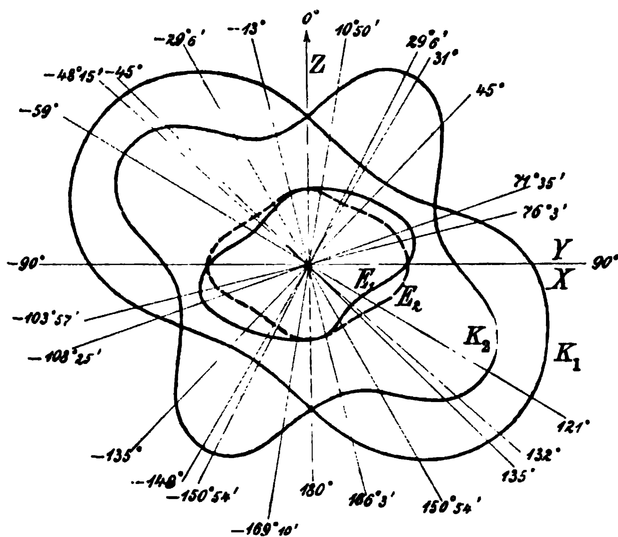
$$\varepsilon = \frac{1}{E} = [11{,}14\,\beta^4 + 17{,}18\,\gamma^4 + 31{,}05\,\beta^2\gamma^2 + 17{,}97\,\beta\gamma(3\,\alpha^2 - \beta^2)] \cdot 10^{-5} \quad .$$

Im ersten Hauptschnitt ($\alpha = 0$) liegt:

das Maximum $E = 14298$ bei $\varphi = + 66^0\,46'$ (gegen die Hauptachse) ,

das Minmum $E = 5128$ bei $\varphi = - 50^0\,52'$ (gegen die Hauptachse) .

Die Kurven für ε in den beiden Hauptschnitten sind schon oben in Figur 226 *a* und *b* wiedergegeben, und es sind dort auch gleich die Richtungen



Figur 232.

der Maxima und Minima (auch der sekundären) eingetragen; im zweiten Hauptschnitt sind es die Achsen und die Werte E_{90} und E_0; der dritte Hauptschnitt (Basis) ist natürlich ein Kreis.

Ferner ist für einen Kreiszylinder

$$\tau = \frac{1}{K} = [69{,}13 - 1{,}21\,\gamma^2 + 11{,}12\,\gamma^4 - 71{,}86\,\beta\gamma(3\,\alpha^2 - \beta^2)] \cdot 10^{-5} \quad .$$

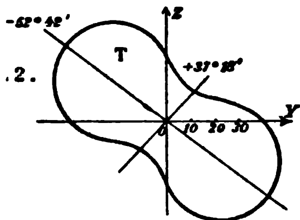
[1] G. BAUMGARTEN, POGG. Ann. **152**. 369. 1874. — W. VOIGT, Gött. Nachr. 1889. p. 483; WIED. Ann. **39**. 413. 1890; vergl. auch H. VATER a. a. O.

Im ersten Hauptschnitt ($\alpha = 0$) liegt:

das Maximum $K = 2167$ bei $\varphi = -\,60^0\ 53'$,

das Minimum $K = 1078$ bei $\varphi = +\,58^0\ 35'$;

auch diese Fläche ist in den beiden Hauptschnitten schon in Figur 226 *c* und *d*, ferner aber ein ganzes System von Kurven in Figur 227 dargestellt. Außerdem folgt hier noch als Figur 233 die Drillung eines rechteckigen *x*-Achsenprismas als Funktion der Richtung der Querachsen gemäß der Formel:



Figur 233.

$$\tau^* = \frac{1}{K^*} = (89{,}52 - 9{,}91\,\gamma_2^{\,2} - 85{,}93\,\gamma_2\,\beta_2)\cdot 10^{-5};$$

der Einfluß der Lage der Querdimensionen ist, wie man sieht, enorm. Ferner ist

$$C = 1{,}56\cdot 10^{-6} \quad ,$$

und der Koeffizient der Winkeländerung durch allseitigen Druck

$$B = 5{,}42\cdot 10^{-5} \quad .$$

Endlich sind die Konstanten

$$\left.\begin{array}{ll|ll} s_{11} = & 11{,}14 & s_{14} = + & 8{,}98 \\ s_{12} = - & 3{,}67 & s_{33} = & 17{,}13 \\ s_{13} = - & 4{,}24 & s_{44} = & 39{,}52 \end{array}\right\}\cdot 10^{-5} \text{ und hieraus } \left\{\begin{array}{ll|ll} c_{11} = & 13970 & c_{14} = - & 2120 \\ c_{12} = & 4650 & c_{33} = & 8120 \\ c_{13} = & 4600 & c_{44} = & 3490 \end{array}\right.$$

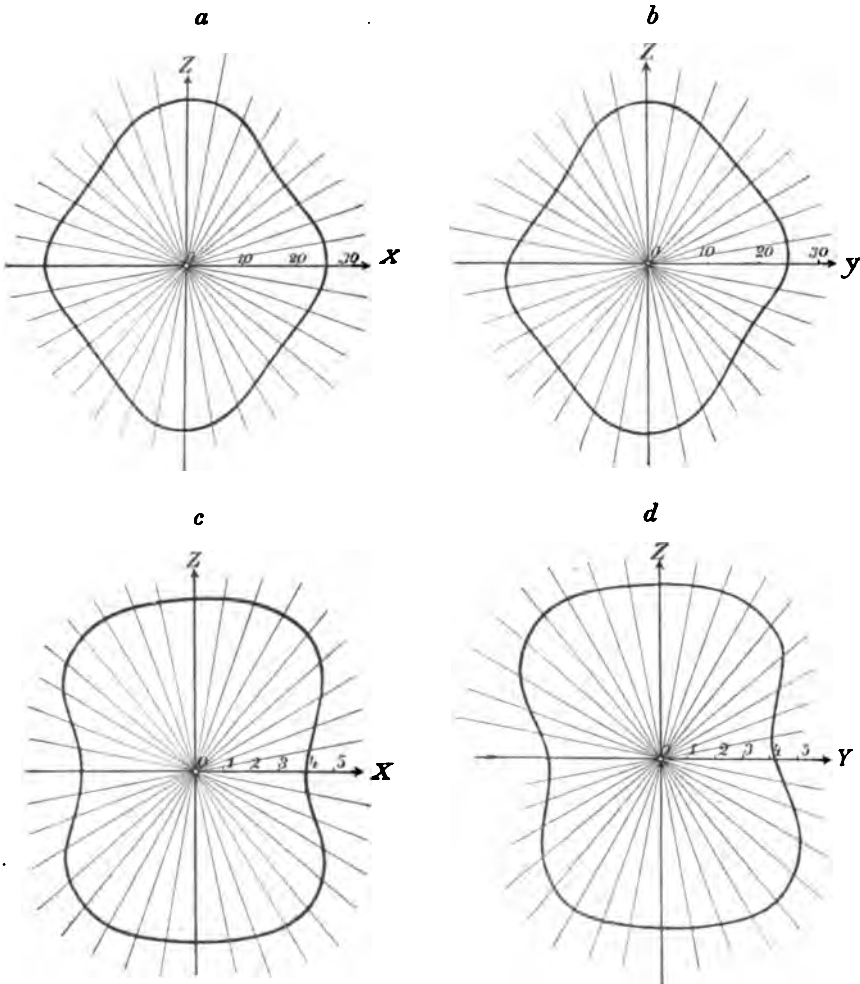
Am Kalkspat hat man bekanntlich besonders günstige Gelegenheit, das Phänomen einer reinen Schiebung zu beobachten; bei Ausübung geeigneter Druckkräfte begibt sich nämlich ein mehr oder weniger großer Teil des Kristalls, begrenzt durch eine zur Symmetrieebene senkrechte Ebene, die sogen. Gleitfläche, in die Zwillungsstellung gegen diese, wobei die Verschiebungen sämtlich der Schnittlänge der Gleitfläche mit der Symmetrieebene parallel und dem Abstand von der Gleitfläche proportional sind. VOIGT[1] hat nun den erfolgreichen Versuch gemacht, diese Erscheinung an die Betrachtungen und Formeln der allgemeinen Theorie anzuschließen auf Grund gewisser, vereinfachter, aber im wesentlichen erlaubter Annahmen. Von den Deformationsgrößen tritt hier nur eine einzige auf, eben die Schiebung; mit den Druckkomponenten nach den Achsen eines der Erscheinung gemäß gewählten Koordinatensystems steht diese Schiebung k in Proportionalitätsbeziehung, und die Faktoren sind die sechs Schiebungsmoduln γ_{11} u. s. w. Es gelingt nun leicht, sie für das trigonale System durch die c_{11} u. s. w. auszudrücken; es genüge hier, den wichtigsten von ihnen, nämlich den Koeffizienten des in die Schiebungsrichtung fallenden Druckes, anzuführen; nennt man diesen Modul γ_{44} und sind c und s der Kosinus und der Sinus des Winkels φ zwischen der y-Hauptachse und der y'-Gleitachse, so hat man:

$$(89) \qquad \gamma_{44} = (c_{11} + c_{33})\,c^2 s^2 + c_{44}\,(c^2 - s^2)^2 - c_{13}\cdot 2\,c^2 s^2 + c_{14}\,2\,cs\,(c^2 - s^2) \quad .$$

Frägt man sich nun, für welche Lagen φ der Ebene der Modul seinen größten und kleinsten Wert annehme, so findet man zwei Maxima und zwei Minima, und die eine der beiden Ebenen kleinsten Widerstands fällt sehr nahe mit der Gleitfläche zusammen, nämlich in die Richtung gegen die Hauptachse ($90^0 - \varphi$) von $65\frac{3}{4}$ statt $63\frac{3}{4}{}^0$; und zwar ist hier der Widerstand fast nur halbsogroß wie in der Maximalrichtung. Ein ähnliches Resultat erhält man, wenn

[1] W. VOIGT, Gött. Nachr. 1889. p. 512; WIED. Ann. 39. 432. 1890.

man umgekehrt nur eine einzige Druckkomponente beibehält und die sechs Deformationskomponenten durch sie ausdrückt; die Winkelabweichung der Minimalrichtung von der Gleitfläche wird zwar hier etwas größer, aber die beiden ihnen entsprechenden Konstanten sind noch fast dieselben. — Schließlich läßt sich auch einsehen, warum die zweite oben erwähnte Ebene minimalen Moduls nicht ebenfalls eine Gleitfläche ist: die Verhältnisse liegen eben hier nicht so, daß die Teilchen in die Zwillungsstellung übergehen, sondern sie kehren in die ursprüngliche zurück.



Figur 234.

18. Turmalin (aus Brasilien) (Voigt).[1]

$$E_0 = 16330 \quad , \quad E_{45} = 17160 \quad , \quad E_{-45} = 15560 \quad , \quad E_{90} = 25570 \quad ,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} = [3{,}91\,(1-\gamma^2)^2 + 6{,}12\,\gamma^4 + 14{,}5\,\gamma^2(1-\gamma^2) + 1{,}14\,\beta\gamma\,(3\,\alpha^2 - \beta^2)] \cdot 10^{-5} \quad .$$

Der Verlauf in den beiden Hauptschnitten ist in Figur 234*a* und *b* dargestellt.

[1] W. Voigt, Gött. Nachr. 1890. p. 255.

Ferner:

$$\tau = \frac{1}{K} = [24,7-12,9\,\gamma^2 + 17,9\,\gamma^4 - 4,58\,\beta\,\gamma\,(3\,\alpha^2 - \beta^2)] \cdot 10^{-5} \quad ;$$

der Verlauf in den beiden Hauptschnitten ist in Figur 234 *c* und *d* dargestellt.
Ferner:

$$C = 1{,}16 \cdot 10^{-6} \quad ,$$

endlich:

$$\left.\begin{array}{ll|ll} s_{11} = & 3{,}91 & s_{14} = + & 0{,}57 \\ s_{12} = & -1{,}01 & s_{33} = & 6{,}12 \\ s_{13} = & -0{,}16 & s_{44} = & 14{,}84 \end{array}\right\} \cdot 10^{-5} \text{ und hieraus } \left\{\begin{array}{ll|ll} c_{11} = & 27540 & c_{14} = - & 790 \\ c_{12} = & 7040 & c_{33} = & 16380 \\ c_{13} = & 900 & c_{44} = & 6800 \end{array}\right. .$$

Die Polarität der Turmalinmolekeln muß hiernach sehr groß sein; der Turmalin ist bekanntlich sehr stark pyroelektrisch erregbar.

19. Eisenglanz (VOIGT)[1]; von Kragerö (Norwegen).

$$E_0 = 23000 \quad , \quad E_{+45} = 21800 \quad , \quad E_{-45} = 18700 \quad , \quad E_{90} = 23100 \quad ,$$

$$K_0^* = 8670 \quad , \quad K_{90A}^* = 9390 \quad , \quad K_{90B}^* = 8220 \quad .$$

$$C = 1{,}04 \cdot 10^{-6} \quad .$$

$$\left.\begin{array}{ll|ll} s_{11} = & 4{,}33 & s_{14} = + & 0{,}78 \\ s_{12} = & -1{,}00 & s_{33} = & 4{,}35 \\ s_{13} = & -0{,}23 & s_{44} = & 11{,}70 \end{array}\right\} \cdot 10^{-5} \text{ und hieraus } \left\{\begin{array}{ll|ll} c_{11} = & 24700 & c_{14} = - & 1300 \\ c_{12} = & 5600 & c_{33} = & 23200 \\ c_{13} = & 1600 & c_{44} = & 8700 \end{array}\right. .$$

20. Eis (nach Messungen von HESS).[2]

Temperatur	Hauptachse	E	rundes Mittel
0 bis − 1	‖ l	182	120
− 2 „ − 5	‖ l	59	
0 „ − 1	‖ b	383	400
− 1 „ − 5	‖ b	418	
− 1 „ − 5	‖ a	254	255
− 1 „ − 3	große Körner	285	255
0 „ − 3	kleine Körner	226	

(l Längs-, a Höhen-, b Breitenrichtung des Biegungsprismas.)

Diese Zahlen können, wie der grelle Widerspruch zwischen den beiden ersten zeigt, nur ganz ungefähre Bedeutung haben; immerhin lassen sie erkennen, daß der Maximalwert mehr als dreimal so groß ist wie der Minimalwert, während der Wert für die mittlere Richtung mit dem für isotropes Material übereinstimmt.

F) Trigonales System (niedere Gruppe).

21. Dolomit. Dieser Kristall bietet als Vertreter einer besonderen Gruppe (IV) das Interesse dar, zu ermitteln, ob der durch die Kristalltheorie hingestellte Symmetrietypus in der Natur wirklich existiert oder nicht, ob also die hier zu den sechs anderen Konstanten des trigonalen Systems hinzutretende siebente Konstante c_{25} von null verschieden oder null ist. VOIGT[3] hat daher einen

[1] W. VOIGT, Ann. d. Physik. 1907 (Korrekturbogen). — [2] H. HESS, DRUDES Ann. 8. 405. 1902. — [3] W. VOIGT, WIED. Ann. 40. 642. 1890.

Kristall aus dem Wallis ausgemessen und folgendes gefunden (Spaltungsebene, φ Winkel mit der Nebenachse):

$$E_0 = 14600 \quad , \quad E_{-21^1/_2} = 14400 \quad , \quad E_{+21^1/_2} = 18700 \quad , \quad E_{90} = 8330 \quad ,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} = [6{,}85 - 6{,}87 \sin^2 \varphi + 12{,}02 \sin^4 \varphi + 1{,}76 \sin\varphi \cos\varphi (5 \sin^2\varphi - 2)] \cdot 10^{-5} \ .$$

Die beiden Werte für $\pm 21^1/_2$ Grad sind, wie man sieht, erheblich verschieden, die gedachte Unsymmetrie ist also wirklich vorhanden. Sehr anschaulich

Figur 235.

tritt sie in Figur 235 hervor, die die Dehnungskurve in der Fläche des Spaltungsrhomboeders für Dolomit (links) und zum Vergleich für Kalkspat (rechts) darstellt (die Maßstäbe, die verschieden sind, sind eingezeichnet).

G) Weitere Angaben.

Eine große Anzahl von Stoffen hat MALLOCK[1] untersucht, aber ohne Kenntnis der Theorie und der Messungen von VOIGT (!); die meisten seiner Zahlen sind wertlos, da die Orientierung nicht festgestellt wurde; von den wenigen übrig bleibenden seien folgende angeführt:

Turmalin aus dem Ural	(∥ Prismenkante)	$E = 13200$
	(⊥ Prismenkante)	$E = 8300$
Flußspat	E (diag.) = 12200,	E (Kante) = 12100
Quarz		$E_{90} = 7600$
Achat		$E = 6500$

Ferner hat GAMBA[2] Schiefer untersucht und zwar für Streifen, bei denen 1. die Ebene des Streifens die natürliche Spaltfläche war, die Symmetrieachse also senkrecht zur Streifenebene lag; 2. die Symmetrieachse parallel und 3. senkrecht zu den Unterstützungslinien des Streifens lag; es fand sich

[1] A. MALLOCK, Proc. Lond. Soc. **49**. 380. 1891. — [2] P. GAMBA, Nuov. Cim. (4) **10**. 168. 1899.

E	E	E
8700	3850	8700

also, wie zu erwarten war, der 1. und 3. Wert gleich groß.

Verschiedene Ergänzungen. 1. Thermische Beziehungen. Die Abhängigkeit der Elastizitätskonstanten der Kristalle von der Temperatur ist bisher noch nicht untersucht worden; Messungsversuche, die VOIGT[1] in seiner ersten Arbeit unternahm, wurden abgebrochen und sind seitdem nicht wieder aufgenommen worden. Es dürfte auch schwierig sein, zuverlässige Resultate zu erzielen, da die Abhängigkeit jedenfalls in den meisten Fällen nicht besonders stark sein wird und die Zahlen selbst eine mäßige Genauigkeit besitzen. Dagegen verdient ein anderer Punkt, dem ebenfalls VOIGT[2] seine Aufmerksamkeit widmete, Erwähnung, nämlich der Unterschied zwischen isothermischen und adiabatischen Elastizitätskonstanten; die letzteren, die durch Striche gekennzeichnet werden mögen, folgen aus den ersten mittels Formeln, in die die Wärmeleitungskoeffizienten, die spezifische Wärme, die absolute Temperatur, das Wärmeäquivalent und die Dichte eingeht. Für Kalkspat ergibt sich folgendes:

$$c_{11}' - c_{11} = c_{12}' - c_{12} = +\ 38 \qquad s_{11} - s_{11}' = s_{12} - s_{12}' = +0{,}086 \cdot 10^{-5}$$
$$c_{13}' - c_{13} = -\ 109 \qquad s_{13} - s_{13}' = -0{,}173 \cdot 10^{-5}$$
$$c_{33}' - c_{33} = +\ 318 \qquad s_{33} - s_{33}' = +0{,}\ 84 \cdot 10^{-5}$$
$$c_{44}' - c_{44} = c_{14}' - c_{14} = 0 \qquad s_{44} - s_{44}' = s_{14} - s_{14}' = 0\ ,$$

für brasilianischen Turmalin:

$$c_{11}' - c_{11} = c_{12}' - c_{12} = 68 \qquad s_{11} - s_{11}' = s_{12} - s_{12}' = 0{,}0067 \cdot 10^{-5}$$
$$c_{13}' - c_{13} = 52 \qquad s_{13} - s_{13}' = 0{,}0081 \cdot 10^{-5}$$
$$c_{33}' - c_{33} = 31 \qquad s_{33} - s_{33}' = 0{,}0098 \cdot 10^{-5}$$
$$c_{44}' - c_{44} = c_{14}' - c_{14} = 0 \qquad s_{44} - s_{44}' = s_{14} - s_{14}' = 0\ .$$

Die Unterschiede sind also in diesen Beispielen durchaus nicht zu vernachlässigen; insbesondere macht beim Kalkspat die Differenz z. B. für die Konstante c_{33} etwa vier Prozent des Wertes aus; bei anderen ist die Differenz freilich null.

2. Erweiterte Elastizitätstheorie. Diese Theorie, bei der von der Proportionalität abgesehen wird und höhere Glieder eingeführt werden, ist schon im allgemeinen Artikel angeführt, und es ist dann bei der Dehnung und Biegung isotroper Körper auf sie zurückgekommen worden. Für Kristalle würde die Verallgemeinerung begreiflicherweise zu sehr verwickelten Formeln führen, und es soll darauf hier nicht eingegangen werden. Dagegen lassen sich die betreffenden Formeln für Potential und Druck noch in einer anderen Weise verwerten; nämlich dazu, zu bestimmen, wie sich ein isotroper Körper durch eine in ihm erzeugte Deformation gegenüber späteren in seinem Verhalten ändert; er wird durch die erste offenbar in gewissem Sinne heterotrop, d. h. seine Richtungen werden ungleichwertig werden, und die Gesetze dieser Verhältnisse sind in dem Ansatze der erweiterten Theorie enthalten. VOIGT[3] hat nun gezeigt, daß man bei der Entwicklung dieses Gedankens auf Gleichungen für die Druckkomponenten kommt, die der Form nach mit denen übereinstimmen, die die ältere Theorie für Kristalle liefert; wenn insbesondere die Druckachsen

[1] W. VOIGT, POGG. Ann. Erg.-Bd. 7. 1876; In.-Diss. Berlin 1875. p. 49. — [2] W. VOIGT, Gött. Nachr. 1889. p. 489. 511; 1890. p. 270. — [3] W. VOIGT, Gött. Nachr. 1893. p. 534.

der primären Deformation in die Koordinatenachsen fallen, so nehmen die Formeln die Symmetrie eines rhombischen Kristalls an, mit der Vereinfachung, daß infolge Gleichwerdens dreier Koeffizienten die Konstantenzahl statt neun nur sieben beträgt. Für den Fall einer primären Dehnung eines Zylinders durch einseitigen Druck erhält man die Symmetrie eines hexagonalen Kristalls u. s. w. Da nun die Kristallprobleme gelöst sind, erhält man hiernach auch Lösungen für das Problem der Aufeinanderfolge zweier Beanspruchungen, namentlich wenn die erste stärker ist als die zweite.

3. Zylindrisch aufgebaute Körper. Zum Schlusse sei noch ein Problem erwähnt, auf das Voigt durch das Verhalten der Metalle geführt wurde, und das er wegen des Interesses, das es auch sonst darbietet, durchgeführt hat.[1] Ein zylindrisch aufgebauter Körper soll ein solcher sein, der auf koaxialen Kreiszylindern gleiches elastisches Verhalten zeigt; genauer, mit Zugrundelegung molekularer Vorstellung, dessen Elemente, soweit sie der Zylinderachse parallel aneinander gereiht sind, gleichartig und gleichgerichtet, soweit sie auf demselben Querradius liegen, gleichgerichtet, aber verschiedenartig, d. h. durch verschiedene Konstanten charakterisiert, soweit sie endlich auf demselben Querschnittskreise liegen, gleichartig, aber verschieden orientiert sind. Ein kleines, durch zwei Zylinderflächen, zwei Meridianebenen und zwei Querschnitte begrenztes Volumenelement besitzt in diesem Falle rhombische Symmetrie und ist daher durch neun Konstanten charakterisiert. Auf dieser Grundlage entwickelt nun Voigt die Formeln des Problems und wendet sie auf verschiedene Fälle von Beanspruchungen voller und hohler Zylinder an, wobei sich bemerkenswerte Beziehungen ergeben.

---

[1] W. Voigt, Gött. Nachr. 1886. p. 505.

Elastische Schwingungen.

Von F. AUERBACH.

Einleitung. Nachdem in den drei vorangegangenen Artikeln die elastische Statik vollkommen elastischer Körper behandelt worden ist, ist jetzt die elastische Kinetik in gleicher Weise zu behandeln. Gegenstand der Betrachtung sind also in diesem Artikel die Bewegungen elastischer Körper; diese Bewegungen sind naturgemäß, da es sich nicht um fortschreitende Ortsveränderung handeln kann, periodisch, also vom Charakter von Schwingungen und Wellen. Eine besondere Klasse solcher Wellen, die als sekundäre Wirkung von Zusammenstößen von Körpern infolge ihrer Ortsänderung auftreten, soll abgezweigt und im Artikel „Stoß" gesondert betrachtet werden.

Bei der Untersuchung der Schwingungen und Wellen elastisch fester Körper handelt es sich einerseits um Untersuchungen allgemeiner Natur, um die allgemeine Formulierung und die Gesetze dieser Bewegungen, um die Grenzbedingungen, um die Fortpflanzung von Wellen u. s. w.; teils um die Spezialisierung für Körper bestimmter Form. Dabei werden, wie in der Statik, so auch hier die Körper mit wesentlich nur einer oder nur zwei Dimensionen eine praktisch besonders wichtige und theoretisch besonders einfache Rolle spielen; also Körper vom Typus von Saiten und Stäben einerseits, von Membranen und Platten andererseits. Aber auch dreidimensionale Körper, wie Kugel und Zylinder, bieten Interesse dar.

Wie es sich ferner in der Statik um die Aussonderung bestimmter Deformationstypen aus dem allgemeinen Typus handelte, nämlich um Dehnung, Biegung und Drillung, so wird man auch hier zwischen Dehnungs- oder Longitudinal-, Biegungs- oder Transversal- und Drillungs- oder drehenden Schwingungen zu unterscheideu haben. In einfacher und deutlicher Weise differenzieren sich diese Typen freilich nur bei eindimensionalen, teilweise auch noch bei zweidimensionalen Körpern, während bei dreidimensionalen Körpern der Schwingungstypus mit Rücksicht auf die Gestalt des Körpers gekennzeichnet werden muß, z. B. radiale Schwingungen bei der Kugel.

Die angedeuteten Fragen sind nun, wie anderwärts, von zwei Ausgangspunkten zu betrachten, nämlich theoretisch und experimentell. Indessen zeigt sich auf unserem Gebiete wie auf kaum einem anderen, wie schwer es ist, ein Kapitel einheitlich in das System der Darstellung einzuordnen. Denn während es keinem Zweifel unterliegen kann, daß die Theorie der elastischen Schwingungen in die Lehre von der Elastizität gehört, liegt das hinsichtlich der experimentellen Seite wesentlich anders. Einige wenige Fälle von Schwingungen allerdings lassen die üblichen elastischen Beobachtungs- und Messungsmethoden zu, so namentlich die meisten Torsionsschwingungen. Alle anderen aber sind als Phänomene von

spezifischem, nämlich von akustischem Charakter, d. h. sie werden als Töne und Klänge mit dem Ohre und meist überhaupt nur mit diesem wahrgenommen; eine Folge des Umstands, daß die elastischen Quer- und Längsschwingungen unter den meist realisierten Bedingungen sehr rasch aufeinanderfolgen, zu vielen hunderten oder gar tausenden in der Sekunde. Infolgedessen sind auch die Beobachtungs- und Messungsmethoden und Apparate spezifisch akustischen Charakters; und wenn man auch neuerdings das Ohr mit Hilfe der graphischen Methode soweit wie möglich durch das Auge als Beobachtungsorgan ersetzt, so bleibt doch die Erzeugung der Schwingungen und der ganze Habitus der Untersuchung akustischen Charakters. Aus diesem Grunde soll hier nur die Theorie, von der experimentellen Seite aber nur dasjenige gegeben werden, was sich auf langsame Schwingungen bezieht und direkt beobachtet werden kann. Wegen der Ergänzung ist dann auf die Akustik zu verweisen, wo auch alle diejenigen Einzelheiten der Theorie, deren Interesse auf akustischem Gebiet liegt, berührt werden sollen.

A) Allgemeiner Teil.

Grundlagen. Auszugehen ist von den allgemeinen elastischen Bewegungsgleichungen (61) bezw. (76) des allgemeinen Artikels. Sie lauten in den Drucken:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho\frac{d^2u}{dt^2} &= \varrho X - \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) \\ \varrho\frac{d^2v}{dt^2} &= \varrho Y - \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) \\ \varrho\frac{d^2w}{dt^2} &= \varrho Z - \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) \end{aligned}\right. ,$$

wo $u v w$ die Verrückungen, X_x u. s. w. die Druckkomponenten, $X Y Z$ die Komponenten der Massenkräfte sind und ϱ die Dichte ist; dagegen in den Deformationen:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \varrho X + K\Delta u + K(1+2\Theta)\frac{\partial D}{\partial x} \\ \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \varrho Y + K\Delta v + K(1+2\Theta)\frac{\partial D}{\partial y} \\ \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \varrho Z + K\Delta w + K(1+2\Theta)\frac{\partial D}{\partial z} \end{aligned}\right. ,$$

wo D die räumliche Dilatation und Δ ein Symbol für die Summe der zweiten Differentialquotienten der dahinterstehenden Größe nach den Koordinatenrichtungen ist. — Man kann jene Gleichungen als die Streßgleichungen, diese als die Straingleichungen (vgl. p. 497) der elastischen Bewegungen bezeichnen; jene gelten allgemein, diese nur für isotrope Stoffe, und es sind K und Θ deren Elastizitätskonstanten. Für Kristalle werden die Straingleichungen natürlich sehr kompliziert, da hier statt obiger zwei 21 Konstanten auftreten.

Zu den Gleichungen kommen nun noch Grenzbedingungen hinzu, und zwar hier, bei der Bewegung, nicht nur, wie beim Gleichgewicht, örtliche, also Oberflächenbedingungen bezw. Bedingungen für die Grenze zweier Körper, sondern auch zeitliche, nämlich Festsetzungen über die Verhältnisse zu Beginn (oder in irgend einem späteren Stadium) der zu untersuchenden Bewegung. Diesen Bedingungen, den örtlichen wie den zeitlichen, ist alsdann die Lösung anzupassen; und hierin ist es zum größten Teil begründet, daß das Problem

schwierig und seine Lösung in vielen Fällen unmöglich wird. Andererseits kommen zwei günstige Umstände in Betracht: für die Anfangsbedingungen der Umstand, daß es dank den Arbeiten von FOURIER und DIRICHLET möglich ist, die Lösung diesen Bedingungen in sehr weitem Umfang anzupassen; für die Oberflächenbedingungen, daß die Körper, um die es sich in den meisten physikalisch wichtigen Fällen handelt, entweder, sofern sie dreidimensional sind, Oberflächen von einfacher Gestalt haben, z. B. Kugel oder Zylinder, oder überhaupt nur zwei- oder gar eindimensional sind, wobei alsdann jene Bedingungen sich in Rand- bezw. Endpunktsbedingungen verwandeln, die natürlich viel leichter zu erfüllen sind.

Die Natur der Verhältnisse, die bei den elastischen Bewegungen die fortschreitenden Bewegungen (von dem Phänomen des Stoßes abgesehen) als interesselos ausschließt, bringt es mit sich, daß diese Bewegungen von periodischem Charakter, also Schwingungen im allgemeinsten Sinne des Wortes sind; Schwingungen, die nach Richtung, Periode, Amplitude und Phase im allgemeinen sehr kompliziert sein werden, die sich aber stets in Reihen einfacher Schwingungen auflösen bezw. aus solchen zusammensetzen lassen. Dabei ergibt sich sofort eine wichtige Unterscheidung zwischen zwei wesentlich verschiedenen Arten von Schwingungen, nämlich zwischen freien Schwingungen und erzwungenen Schwingungen. Freie Schwingungen treten auf, wenn die Kräfte oder die Oberflächendrucke plötzlich geändert werden, insbesondere, wenn sie plötzlich zu wirken anfangen oder — das ist der praktisch häufigste Fall — plötzlich zu wirken aufhören; infolge der Beharrung nimmt alsdann der Körper nicht unmittelbar den neuen Zustand an, sondern er geht über diesen hinaus in einen anderen Zustand über; und er würde zwischen diesen beiden Extremen unaufhörlich hin und her pendeln, wenn nicht als neues Moment die Reibung hinzukäme, die zur Folge hat, daß die Schwingungen an Intensität abnehmen und der neue Gleichgewichtszustand erreicht wird. Man wird nun gut tun, diese Reibungswirkung nicht immer in der Rechnung mitzuführen, sondern ihren ein- für allemal festgestellten Einfluß da, wo es erforderlich wird, einzuführen. Erzwungene Schwingungen hingegen sind solche, die als Wirkung einer selbst periodischen äußeren Kraft oder eines periodisch wirkenden Oberflächendrucks auftreten, sei es, daß jene Kraft oder dieser Druck abwechselnd auftritt und aufhört, sei es, daß sie nur periodischen Intensitäts- oder Richtungsschwankungen unterliegen; unfrei oder erzwungen sind diese Schwingungen insofern, als ihre charakteristischen Konstanten, namentlich die Periode der Schwingungen, hier nicht wie bei den freien Schwingungen, aus der Natur und Gestalt des schwingenden Körpers oder doch nicht aus ihr allein sich bestimmt, sondern ganz wesentlich mitbestimmt werden durch die Natur, namentlich durch die Periode der Kraft- bezw. Druckänderungen. Bedenkt man nun, daß auch in dem zweiten Falle, dem der erzwungenen Schwingungen, durch diese selbst unter Umständen wieder freie Schwingungen ausgelöst werden, die nunmehr neben den erzwungenen hergehen, so sieht man sich einer neuen Komplikation der Erscheinung gegenüber.

Wie in der elastischen Statik, so wird man auch hier zunächst den Versuch machen, mit unendlich kleinen Verrückungen, hier also unendlich kleinen Schwingungsamplituden auszukommen; die Erfahrung muß dann zeigen und hat tatsächlich gezeigt, daß hiermit ein großer Teil der bezüglichen Erscheinungen befriedigend dargestellt wird. Der Vorteil, den man hiervon hat, besteht darin, daß die Gleichungen linear bleiben, und daß infolgedessen das Superpositionsprinzip gilt, so daß man die gesamte Bewegung aus den elementaren durch einfache Summation bilden kann; anderenfalls würden höhere Glieder auftreten, und diese würden, außer den Summen, auch noch neue Glieder vom Charakter von Kombinationsgliedern erzeugen, was z. B. in der Akustik bei gewissen Erscheinungen eine Rolle spielt.

Auch bei kinetischen Problemen wird man vielfach erfolgreichen Gebrauch machen von der Existenz des Potentials f der elastischen Kräfte (p. 527). Es stellt dasselbe die in dem Körper aufgespeicherte Deformationsenergie pro Volumeneinheit dar, seine Änderungen also die Schwankungen der inneren Energie infolge der geleisteten oder verbrauchten Arbeit. Dabei besteht nun allerdings ein Unterschied zwischen den Erscheinungen des Gleichgewichts und den Schwingungen. Bei jenen ist nämlich zu beachten, daß auch Erwärmung oder Abkühlung eintritt, und daß diese praktisch vollkommene Gelegenheit hat, sich mit der Umgebung auszugleichen, mit anderen Worten, daß es sich hier um isotherme Prozesse handelt. Bei den Schwingungen hingegen, zumal bei den sehr raschen longitudinalen und transversalen — für die torsionalen, die langsamer sind, wird es nicht in vollem Umfange gelten — ist zum Wärmeaustausch keine Zeit, der Prozeß verläuft daher, obgleich keine stoffliche, wärmedichte Abgrenzung vorhanden ist, doch so gut wie adiabatisch. Daraus folgt aber, daß in den Koeffizienten des elastischen Potentials, den Elastizitätskonstanten, Differenzen sich zeigen werden, je nachdem sie aus statischen oder aus kinetischen Versuchen abgeleitet sind; es ist hiervon schon gelegentlich die Rede gewesen und wird noch weiter zu erwähnen sein; hier sei nur bemerkt, daß die Differenz bei festen Körpern nicht deutlich merklich ist; bei Luft spielt sie, wie man weiß, eine z. B. für die Schallgeschwindigkeit entscheidende Rolle.

Über die Erhaltung der Gesamtenergie, d. h. der Summe aus der kinetischen und der potentiellen Energie, sowie über ihre Wanderung von Ort zu Ort ist den schon im allgemeinen Artikel gegebenen Ausführungen und Formeln nichts hinzuzufügen; man vergl. p. 527 ff., sowie die dortigen Formeln (92) bis (94).

Freie Schwingungen eines beliebigen Systems. Wirken keine Kräfte, weder auf die Massen noch auf die Oberfläche, so kann man die Gleichungen und die Oberflächenbedingung, wenn n die Normale eines Elements der letzteren ist, in der Form

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x_z}\right) \text{ u. s. w.,} \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial x_x}\cos(x\,n) + \frac{\partial f}{\partial x_y}\cos(y\,n) + \frac{\partial f}{\partial x_z}\cos(z\,n) \text{ u. s. w.} \end{aligned}\right.$$

schreiben. Es läßt sich dann zunächst nachweisen, daß dieses System unendlich viele Lösungen hat; daß aber, wenn man nun noch die Anfangsbedingungen für Verrückung und Geschwindigkeit hinzufügt, die Lösung ebenso wie bei dem Gleichgewichtsproblem eindeutig wird; dies hat bereits F. NEUMANN gezeigt. Welcher Art die Lösung selbst sei, darüber hat zuerst LAMÉ eine Hypothese aufgestellt, die sich jedoch nicht bewährt hat. Erst CLEBSCH[1] hat dieses Problem gelöst, und zwar durch eine Verallgemeinerung, für beliebige Körperform, der schon von POISSON für die Kugel gegebenen Darlegungen. Hiernach hängt die Form der Lösung von der Zahl der Freiheitsgrade ab, die dem System zukommt; so groß wie diese ist die Anzahl der unabhängigen Schwingungsglieder, in die man die Lösung zerlegen kann; in dem allgemeinsten und für die Elastizitätslehre wichtigsten Falle unendlich vieler Freiheitsgrade wird also auch die Zahl dieser Glieder unendlich groß. Hierbei und für das Folgende wird nur vorausgesetzt, daß die Schwingungen klein sind, und daß sich die Punkte des Systems immer in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage halten. Ein Einzelglied der gedachten unendlichen Summe, das man als eine Haupt- oder Normalschwingung des Systems bezeichnen kann, stellt alsdann eine einfach harmonische Schwingung dar, Periode und Phase dieser Schwingung ist für

[1] A. CLEBSCH, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862. p. 62.

alle Punkte dieselbe, dagegen variiert die Amplitude von Punkt zu Punkt, und zwar nach bestimmtem Gesetz.

Nennt man eine Einzelschwingung u_i, v_i, w_i, ihre Periode $2\pi/m$, also ihre Schwingungszahl (Frequenz) $m/2\pi$, ihre Phase p_i, und drückt man ihre Amplitude als Produkt zweier Faktoren aus, deren einer, A_i, konstant, deren anderer, u_i^0, v_i^0, w_i^0 Funktion von x, y, z ist, so hat man hiernach die Formeln:

$$(4)\quad u_i = A_i u_i^0 \cos(m_i t + p_i)\,,\quad v_i = A_i v_i^0 \cos(m_i t + p_i)\,,\quad w_i = A_i w_i^0 \cos(m_i t + p_i)\,,$$

und für u_i^0, v_i^0, w_i^0 die Gleichungen

$$(5)\qquad A\varrho m^2 u^0 = \frac{\partial X_x^0}{\partial x} + \frac{\partial X_y^0}{\partial y} + \frac{\partial X_z^0}{\partial z} \text{ u. s. w.}$$

nebst den Grenzbedingungen

$$(6)\qquad X_x^0 \cos(xn) + X_y^0 \cos(yn) + X_z^0 \cos(zn) = 0 \text{ u. s. w.}\quad ,$$

wo X_x^0 u. s. w. die örtlichen Faktoren der X_x u. s. w. sind, d. h. das, was aus X_x u. s. w. wird, wenn u u. s. w. durch u_0 u. s. w. ersetzt wird. Diese Gleichungen, in denen die Zeit nicht mehr vorkommt, kann man nun andererseits als solche für m^2 bezw. m selbst auffassen, sie liefert dann die Einzelwurzeln m_i, und diese führen zu den Einzelschwingungen u_i u. s. w. Schließlich wird die Gesamtschwingung:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \sum A_i u_i^0 \cos(m_i t + p_i)\quad ,\quad v = \sum A_i v_i^0 \cos m_i t + p_i)\quad ,\\ w &= \sum A_i w_i^0 \cos(m_i t + p_i)\quad . \end{aligned}\right.$$

Die Größen u_i^0, v_i^0, w_i^0 heißen Normalfunktionen; für je zwei verschiedene von ihnen (Indizes i und k) gilt die Beziehung ($d\tau$ ein Raumelement):

$$(8)\qquad \int \varrho\,(u_i^0 u_k^0 + v_i^0 v_k^0 + w_i^0 w_k^0)\,d\tau = 0\quad .$$

CLEBSCH hat nun gezeigt, daß die Wurzeln m^2 der transzendenten Gleichung für m (denn m kommt ja auch in den trigonometrischen Funktionen vor) erstens immer reell, also die m selbst entweder rein imaginär oder rein reell sind, und zweitens, daß von diesen beiden Fällen nur der zweite in Betracht kommt, daß also auch die m selbst immer reell sind. Infolgedessen sind die Argumente der trigonometrischen Funktionen immer reell, diese Funktionen also immer von echt trigonometrischem Charakter, ohne Anteile, welche die Zeit in Exponentialfunktion enthielten, was anderenfalls eintreten würde. Der wahre Sinn des von CLEBSCH bewiesenen Satzes besteht also darin, daß die freien Bewegungen eines elastischen Körpers an Ausdehnung für alle Zeit weder wachsen noch abnehmen, sondern daß alle Einzelbewegungen in gleichmäßigen Perioden innerhalb unveränderlich bestehender Grenzen ausgeführt werden, die sie niemals überschreiten, aber auch immer nach Verlauf gewisser Zeiten wieder erreichen.

Im obigen ist der Einfachheit halber als trigonometrische Funktion der Kosinus eingeführt worden. Entsprechende Betrachtungen gelten natürlich auch für den Sinus; und schließlich kann man beide Lösungen zu einer allgemeineren kombinieren. Der Unterschied beider Halblösungen besteht bekanntlich nur in der verschiedenen Anfangsphase und in der verschiedenen Rückwärtsverlängerung nach negativen Argumentwerten, die beim Kosinus durch einfache Spiegelung um die Abszissenachse, beim Sinus durch doppelte Spiegelung an beiden Achsen erfolgt. In bezug auf die hieraus sich ergebenden Konsequenzen für die Akustik sei auf diese verwiesen.

Zum Schlusse dieses Abschnitts möge eine praktische Folgerung aus der Theorie der freien Schwingungen Platz finden. Bei allen feineren statischen Messungen elastischer Größen muß man, wie in den vorangegangenen Artikeln jedesmal bemerkt wurde, das beanspruchende Gewicht langsam und vorsichtig

anbringen bezw., nachdem es gewirkt hat, ebenso entfernen. Andernfalls würden nämlich Schwingungen entstehen, und diese würden das Material weit stärker beanspruchen als die entsprechenden statischen Verhältnisse. Und zwar wird, wie eine einfache Überlegung des Schwingungsvorgangs lehrt, die Deformation bei plötzlicher Änderung in erster Annäherung doppelt so groß sein wie bei allmählicher. Noch stärker wird der Einfluß bei plötzlicher Umkehrung einer Beanspruchung, wenn z. B. eine Rechtsdrillung plötzlich in eine Linksdrillung verwandelt wird: hier tritt in erster Annäherung offenbar die dreifache Deformation auf. Bei Besprechung der Festigkeitsverhältnisse (Artikel „Kohäsion") wird hierauf zurückzukommen sein.

Wellenfortpflanzung in elastisch-festen Medien. Die beiden Wellentypen. In den Gleichungen (2) sind die linksstehenden Beschleunigungen, wenn man von Massenkräften absieht, rechterseits durch zwei Glieder ausgedrückt, und man könnte versuchen, hiernach zwei Arten von Bewegung herauszuschälen, bei deren erster die räumliche Dilatation D null (bezw. überall im Körper gleich groß) ist, also nur das Glied mit Δ übrig bleibt, bei deren anderer die Δ null sind, also nur das Glied mit D übrig bleibt. Indessen ist eine andere Zerlegung von größerer und anschaulicherer Bedeutung, die zwar ebenfalls auf die erste der beiden obigen Spezialbewegungen, statt der zweiten aber auf eine andere führt. Zu diesem Zwecke wende man auf die Gleichungen die beiden in der Vektorenrechnung als Divergenz einerseits und als Quirl andererseits bezeichneten Operationen an, d. h. man differenziere das eine Mal die Gleichungen bezw. nach x, y, z und addiere sie dann; und man differenziere das andere Mal die zweite nach z, die dritte nach y, subtrahiere sie voneinander und verfahre mit der dritten und ersten sowie mit der ersten und zweiten entsprechend. Bei der ersten Operation fallen dann die u, v, w, soweit sie nicht in D enthalten sind, heraus; bei der anderen fällt D heraus, und die u, v, w bleiben nur noch in den Kombinationen

$$(9) \qquad \omega_x = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \qquad \omega_y = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \qquad \omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

stehen, wo ω_x, ω_y, ω_z die Drehungs- oder Quirlkomponenten sind. Man erhält nämlich durch die erste Operation

$$(10) \qquad \varrho \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = 2K(1+\Theta)\Delta D$$

als einzige Gleichung; dagegen durch die zweite:

$$(11) \qquad \varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = K\Delta(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad ,$$

womit drei verschiedene Gleichungen symbolisch ausgedrückt sind. Ist kein Quirl vorhanden, so genügt die erste Gleichung allein; ist keine Divergenz vorhanden, so genügen die drei letzten für sich. In jedem dieser beiden Spezialfälle kann man aber die betreffenden Gleichungen noch erheblich vereinfachen. Im ersten nämlich, wenn kein Quirl existiert, gibt es bekanntlich (p. 528) ein Verrückungs- oder Deformationspotential φ, man kann mit Hilfe der dortigen Gleichungen (95) und (97) integrieren und trennen und erhält die drei Bewegungsgleichungen:

$$(12) \qquad \varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u, v, w) = 2K(1+\Theta)\Delta(u, v, w) \quad .$$

Im anderen Falle, wenn D null ist, geht man einfach auf die allgemeinen Gleichungen (2) zurück und erhält:

(13) $$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u, v, w) = K\Delta(u, v, w) \quad .$$

Die Gleichungen (10) und (11) sind also die allgemeinen Grundgleichungen einer jeden Wellenbewegung in isotropen elastisch-festen Körpern; die Gleichungen (12) und (13) dagegen sind die Spezialgleichungen für die beiden Haupttypen solcher Wellen. Übrigens sind alle vier von der nämlichen Form, nämlich, wenn s die gesuchte Größe und a die charakteristische Konstante ist, von der Form:

(14) $$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \Delta s \quad .$$

Die Lösung enthält bekanntlich willkürliche Funktionen von $r - at$ und $r + at$, wo r im allgemeinen ein komplizierter Raumvektor ist und ebenso wie die sonstige Form der Lösung von Fall zu Fall zu untersuchen ist. Worüber sich aber ganz allgemein eine Aussage machen läßt, ist der Zeitfaktor a, der offenbar die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle darstellt. Dieser hat nun für jeden der beiden Bewegungstypen einen anderen Wert, nämlich für den ersten

(15) $$a = \sqrt{\frac{2K(1+\Theta)}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}\,\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2}} \quad ,$$

für den zweiten

(16) $$a' = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}\,\frac{1}{2(1+\mu)}} \quad .$$

Wellen der ersten Art kann man als quirlfreie oder Potentialwellen, solche der zweiten Art als divergenzfreie oder isopyknische bezeichnen: zu ersteren gehören die Longitudinal-, zu letzteren die Transversal- und Torsionswellen. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt, wie man sieht, von beiden Elastizitätskonstanten ab, ihr Verhältnis dagegen, wie die zweiten Teile der obigen Formeln zeigen, lediglich von der Elastizitätszahl; wenn man einmal für diese den Wert der älteren Theorie, $1/4$, einsetzt, um den sich ja die wahren Werte vielfach gruppieren, so erhält man als Verhältnis der Quadrate der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die Zahl 3, d. h. longitudinale Wellen pflanzen sich in diesem Falle $\sqrt{3}$ mal, d. h. 1,73 mal so schnell fort wie z. B. transversale. Mit wachsendem Werte von μ wird a immer größer, a' immer kleiner, ihr Verhältnis a/a' also immer größer, nämlich

(17)

für $\mu =$	0,2	0,25	0,33	0,40	0,444	0,5
$(a/E)^2 =$	1,11	1,2	1,5	2,18	3,46	∞
$(a'/E)^2 =$	0,42	0,40	0,38	0,36	0,35	0,33
$(a:a')^2 =$	2,6	3	4	6	10	∞

Übrigens gilt das, wie wir sehen werden, nur für allseitig ausgedehnte Medien, nicht etwa auch für Stäbe oder Platten, und nicht einmal für die Oberflächenwellen in allseitig ausdehnten Körpern.

Der einfachste Fall ist der einer ebenen Welle, d. h. einer Welle, bei der der geometrische Ort aller in gleicher Bewegungsphase befindlichen Punkte je eine Ebene ist. Er tritt ein, wenn die gesuchte Größe vom Orte nach linearem Gesetz abhängt, wenn also das Argument im ganzen die Form

$$\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z + at$$

hat, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Richtungskosinus der Normale der Wellenebene sind. Man

erhält dann für die zweiten Ableitungen von u, v, w nach diesem Argument die Beziehungen

(18) $$\begin{cases} \varrho a^2 u'' = K(1 + 2\,\Theta)(\mathfrak{a}\,u'' + \mathfrak{b}\,v'' + \mathfrak{c}\,w'') + K u'' \\ \varrho a^2 v'' = K(1 + 2\,\Theta)(\mathfrak{a}\,u'' + \mathfrak{b}\,v'' + \mathfrak{c}\,w'') + K v'' \\ \varrho a^2 w'' = K(1 + 2\,\Theta)(\mathfrak{a}\,u'' + \mathfrak{b}\,v'' + \mathfrak{c}\,w'') + K w'' \end{cases}$$

und, nach Elimination von u'', v'', w'' die Beziehung

(19) $$[2\,K(1 + \Theta) - \varrho\,a^2]\,(K - \varrho\,a^2)^2 = 0 \quad ,$$

deren Wurzeln in a eben die beiden oben betrachteten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind. Legt man die x-Achse des Koordinatensystems in die Normale der Wellenebenen, so wird die Grundgleichung:

(20) $$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

und ihre Lösung:

(21) $$s = f(x - a\,t) + F(x + a\,t) \quad ,$$

das erste Glied stellt eine in der positiven, das zweite eine in der negativen x-Achse fortschreitende Welle dar.

Der nächst einfache Fall ist der, wo die Wellenflächen konzentrische Kugeln sind. In diesem Falle wird die Grundgleichung, wenn r der Radiusvektor ist:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial s}{\partial r}\right)$$

oder eleganter und leichter deutbar geschrieben:

(22) $$\frac{\partial^2 (r s)}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 (r s)}{\partial r^2} \quad ,$$

so daß die Lösung

(23) $$s = \frac{1}{r}\,[f(r - a\,t) + F(r + a\,t)]$$

wird. Wie man sieht, unterscheidet diese sphärische Welle sich von der ebenen auch noch dadurch, daß bei der Ausbreitung die Amplitude nicht konstant bleibt, sondern umgekehrt wie r abnimmt. Dazwischen liegt der Fall der Zylinderwellen, wo sie auch, aber langsamer, abnimmt. Näheres hierüber in der Akustik.

Ist die Wellenbewegung von ganz allgemeinem Charakter, so werden sich nach dem Gesagten die beiden in ihr enthaltenen Typen infolge ihrer verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit trennen, die quirlfreie wird der divergenzfreien voraneilen; daraus folgt, daß für die Fortpflanzung der Diskontinuitätsfläche, d. h. der Fläche, bis zu der die in dem Körper hervorgerufene Störung im Augenblick gediehen ist, im allgemeinen die größere der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten maßgebend sein wird (s. u.). Übrigens ist es leicht, die charakteristischen Beziehungen anzugeben, die an der Diskontinuitätsfläche gelten müssen, wenn sie sich normal zu sich selbst mit der Geschwindigkeit a fortbewegt, nämlich, wenn n ihre Normale ist:

(24) $$\frac{\dfrac{\partial\,(u, v, w)}{\partial x}}{\cos\,(n\,x)} = \frac{\dfrac{\partial\,(u, v, w)}{\partial y}}{\cos\,(n\,y)} = \frac{\dfrac{\partial\,(u, v, w)}{\partial z}}{\cos\,(n\,z)} = \frac{\partial\,(u, v, w)}{\partial n} = -\,\frac{1}{a}\,\frac{\partial\,(u, v, w)}{\partial t}$$

in kinetischer Hinsicht, und

(25) $$\varrho\,a\,\frac{\partial\,(u, v, w)}{\partial t} = -\,(X_n,\ Y_n,\ Z_n)$$

in dynamischer Hinsicht; durch Einsetzen der Werte und geeignete Umformung nehmen letztere Gleichungen die Form an:

$$(26)\qquad -\varrho a \frac{\partial u}{\partial t} = 2K(1+\Theta) D \cos(n x) - K\omega_z \cos(n y) + K\omega_y \cos(n z)$$

und zwei entsprechende, woraus man wiederum die beiden Typen herausschälen kann.

Für heterotrope Körper hat zuerst CHRISTOFFEL[1] die allgemeinen Beziehungen in vollkommener Gestalt aufgestellt. Setzt man für den Augenblick

$$\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = h \quad , \qquad \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial t} = i \quad , \qquad \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial t} = k \quad ,$$

und sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Richtungskosinus der Normale der Wellenfläche, so hat man für die Deformationskomponenten nach (24) die Formeln:

$$(27)\qquad \begin{cases} x_x = -\mathfrak{a} h \;, & y_y = -\mathfrak{b} i \;, & z_z = -\mathfrak{c} k \;, \\ y_z = -(\mathfrak{b} k + \mathfrak{c} i) \;, & z_y = -(\mathfrak{c} h + \mathfrak{a} k) \;, & x_y = -(\mathfrak{a} i + \mathfrak{b} h) \;, \end{cases}$$

und die dynamischen Gleichungen (25) können mit Hilfe des Potentials der elastischen Kräfte in der Form

$$(28)\qquad -\varrho a \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t} = \mathfrak{a}\frac{\partial f}{\partial(x_x, y_x, z_x)} + \mathfrak{b}\frac{\partial f}{\partial(x_y, y_y, z_y)} + \mathfrak{c}\frac{\partial f}{\partial(x_z, y_z, z_z)}$$

geschrieben werden. Durch Kombination beider erhält man f, das nunmehr F heißen möge, als homogene quadratische Funktion von h, i, k; und zwar wird

$$(29)\qquad \frac{\partial F}{\partial h} = -\mathfrak{a}\frac{\partial f}{\partial x_x} - \mathfrak{b}\frac{\partial f}{\partial x_y} - \mathfrak{c}\frac{\partial f}{\partial x_z}$$

nebst zwei entsprechenden Gleichungen für $\partial F/\partial i$ und $\partial F/\partial k$. Somit kann man die Gleichungen (28) in der Form

$$(30)\qquad \varrho a^2 h = \frac{\partial F}{\partial h} \quad , \qquad \varrho a^2 i = \frac{\partial F}{\partial i} \quad , \qquad \varrho a^2 k = \frac{\partial F}{\partial k}$$

schreiben. Setzt man nun

$$(31)\qquad 2F = \lambda_{11} h^2 + \lambda_{22} i^2 + \lambda_{33} k^2 + 2\lambda_{23} i k + 2\lambda_{13} k h + 2\lambda_{12} h i \quad ,$$

dann genügt, wie die Gleichungen (30) zeigen, a^2 der Gleichung

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_{11} - \varrho a^2 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} - \varrho a^2 & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} - \varrho a^2 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

mit der weiteren Maßgabe, daß alle drei Wurzeln positiv sind. Man erhält also drei reelle Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die man die Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten nennt. Das Weitere über die Gestalt der Wellenfläche für ein- und zweiachsige Kristalle, über die besonderen Spezialisierungen für bestimmte Symmetrien u. s. w. gehört in die Kristalloptik, wo die obigen Betrachtungen ihre praktische Anwendung finden.[2] Hier sei nur

[1] E. B. CHRISTOFFEL, Ann. di mat. (2) 8. 1877. — [2] Eingehende Darstellungen der Wellenausbreitung in elastisch-festen Körpern findet man u. a. in F. NEUMANN, Vorlesung über die Theorie der Elastizität, herausg. von O. E. MEYER, p. 203 ff., in RIEMANN-WEBER, Die partiellen Differentialgleichungen u. s. w., in W. VOIGT, elementare Mechanik u. s. w.

noch erwähnt, daß CHRISTOFFEL auch die Ausdrücke der hier auftretenden Konstanten λ in den allgemeinen Elastizitätskonstanten c_{11} u. s. w. entwickelt hat; zwei von ihnen seien beispielsweise angeführt (die übrigen lassen sich leicht aus ihnen ableiten):

$$(33) \begin{cases} \lambda_{11} = c_{11}\mathfrak{a}^2 + c_{66}\mathfrak{b}^2 + c_{55}\mathfrak{c}^2 + 2c_{56}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + 2c_{15}\mathfrak{c}\mathfrak{a} + 2c_{16}\mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad , \\ \lambda_{12} = c_{16}\mathfrak{a}^2 + c_{26}\mathfrak{b}^2 + c_{45}\mathfrak{c}^2 + (c_{46} + c_{25})\mathfrak{b}\mathfrak{c} + (c_{14} + c_{56})\mathfrak{c}\mathfrak{a} + (c_{12} + c_{66})\mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad . \end{cases}$$

Allgemeines Problem der Wellenausbreitung. Über dieses historisch berühmte Problem, das in die allgemeine Wellenlehre gehört, und auf das in der Akustik und Optik näher eingegangen wird, sei hier nur folgendes bemerkt. Zuerst hat HUYGENS Betrachtungen hierüber angestellt, sein Name ist in dem nach ihm benannten HUYGENSschen Prinzip verewigt. Dann hat POISSON die Lösung der Grundgleichung (14) durch die Zeit t und die Anfangswerte s_0 und $(ds/dt)_0$ von s und ds/dt dargestellt, und zwar durch diese Anfangswerte selbst, wenn die Erregung ursprünglich sich auf ein punktförmiges Zentrum beschränkt; dagegen durch ihre Mittelwerte, wenn sie sich über einen endlichen Raum erstreckt. Später hat STOKES diese Lösung im besonderen Hinblick auf die Probleme der Beugung diskutiert und weiter entwickelt. Schließlich hat, auf der durch die GREENschen Sätze geschaffenen Grundlage, KIRCHHOFF die Lösung in allgemeiner Form gegeben und damit erst eigentlich das HUYGENSsche Prinzip auf eine exakt wissenschaftliche Basis gestellt.[1] Bei alledem ist immer noch vorausgesetzt, daß die Welle von einem der beiden Typen allein ist. Im Falle einer gemischten Welle und entsprechenden Anfangsbedingungen muß man die allgemeinen Gleichungen (2) oder die kombinierten Systeme (12) und (13) zugrunde legen und kommt dann zu viel verwickelteren Ergebnissen; im großen ganzen läßt sich aber folgendes sagen: Die Anfangsverrückung $u_0 v_0 w_0$ und die entsprechende Geschwindigkeit erstrecke sich auf einen Raum T, S und S' seien zwei, mit den Radien at bezw. $a't$ um den Punkt xyz geschlagene Kugeln, und T' sei der innerhalb von T gelegene Teil der Kugelschale zwischen S und S'; ferner sei r die Entfernung eines innerhalb T' (einschließlich der Grenzen) gelegenen Punktes $x'y'z'$ von xyz, und q_0 sei die auf r projizierte Anfangsverrückung in $x'y'z'$. Alsdann kann man u, v, w für x, y, z durch ein Raumintegral über T' und zwei Flächenintegrale über S und S' ausdrücken und hieraus die beiden charakteristischen Größen der Welle, Dilatation und Rotation (Divergenz und Quirl) berechnen, wobei sich u. a. folgendes ergibt: Es seien e und E die kleinste und größte Entfernung irgend eines Punktes P des Mediums von der Grenze des Raumes T, dann beginnt die Bewegung in P im Augenblick $t = e/a$, die Dilatationswelle hört auf im Augenblick $t = E/a$, die Rotationswelle beginnt zur Zeit $t = e/a'$, sie und damit die ganze Bewegung hört auf im Moment E/a'. Offenbar können nun zwei Fälle eintreten, je nachdem die dritte der vier obigen Zeiten größer oder kleiner als die zweite ist; im ersten Falle verläuft jede Welle für sich, und es tritt zwischen ihnen eine Pause ein, die im Grenzfalle verschwindet; im anderen greifen die beiden Wellen teilweise ineinander

[1] CH. HUYGENS, Traité de la lumière. Leiden 1690; OSTWALDS Klassiker Nr. 20; vgl. auch FRESNEL, Oeuvres **1.** 365. — S. D. POISSON, Mém. de l'Inst. **3.** 1820; Mém. de l'Acad. **10.** 1831; vgl. auch LIOUVILLE, Journ. de math. **1.** 1856. — Lord RAYLEIGH, Theorie des Schalls. Kap. 14. — G. GREEN, An essay on the appl. of math. analysis etc. Nottingham 1828; Cambr. Trans. 1833; OSTWALDS Klassiker. Nr. 61; Cambr. Trans. **7.** 1839; Math. Papers u. s. w. — G. KIRCHHOFF, Berl. Ber. 1882; WIED. Ann. **18.** 663. 1883; Ges. Abhandlungen (Nachtrag); Vorlesung über Optik. Leipzig 1891. — G. G. STOKES, Cambr. Trans. **9.** 1849; Papers **2.** 243; vgl. auch L. BELTRAMI, Rend. Acc. Linc. (5) **4.** 1895. — A. E. H. LOVE, Proc. Lond. math soc. (2) **1.** 37. 291. 1904; A Treat. on the math. Th. of elasticity, Kap 13; an diese Darstellung lehnt sich die obige an.

über, und in der entsprechenden Zeit findet an dem betreffenden Orte eine komplizierte Bewegung statt.

Das Gesagte findet seinen exakten Ausdruck in den folgenden, ohne nähere Erläuterung verständlichen Formeln. Zunächst die POISSONsche Lösung:

(34) $$s = \frac{d}{dt}(t s_0) + t\left(\frac{ds}{dt}\right)_0 .$$

Sodann die von KIRCHHOFF (s links für das Argument t, rechts für $t - r/a$:

(35) $$s(t) = \frac{1}{4\pi}\int\left[s\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial s\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial n} - \frac{1}{ar}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{\partial s\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t}\right] dS .$$

Endlich für beliebige Anfangsbedingung und gemischte Welle, wenn zeitliche Differentialquotienten durch Punkte bezeichnet werden:

(36) $$\left\{\begin{aligned} u = {} & \frac{1}{4\pi}\int\left[(t\dot{u}_0 + u_0)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + (t\dot{v}_0 + v_0)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} + (t\dot{w}_0 + w^0)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\right] dT' \\ & + \frac{1}{4\pi}\int\left[r\left(u_0\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + v_0\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} + w_0\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\right) + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(t\dot{q}_0 + q_0 + r\frac{\partial q_0}{\partial r}\right)\right] dS \\ & - \frac{1}{4\pi}\int\left[r\left(u_0\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + v_0\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} + w_0\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\right) + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(t\dot{q}_0 + q_0 + r\frac{\partial q_0}{\partial r}\right)\right. \\ & \qquad\left. - \frac{1}{r^2}\left(t\dot{u}_0 + u_0 + r\frac{\partial u_0}{r}\right)\right] dS' ,\end{aligned}\right.$$

und entsprechend für v und w.

Noch komplizierter gestalten sich natürlich die Verhältnisse, sobald äußere variable Massenkräfte wirken, die Bewegung also vom erzwungenen Charakter ist. Man benutzt in diesem Falle zweckmäßig die in den Formeln (100) bis (103) auf p. 529 angegebene Darstellung der Verrückung als Summe eines Gradienten und eines Quirls und die entsprechende Darstellung der äußeren Kraft. Man kann alsdann sowohl das Potential Φ als auch die Quirlkomponenten Φ_x, Φ_y, Φ_z der Kraft durch Raumintegrale ausdrücken, ausgedehnt über den Raum T; und, wenn diese gefunden, kann man die Bestandteile von u, v, w, also die dort mit φ, φ_x, φ_y, φ_z bezeichneten Größen durch jene mittels der Formeln

(37) $$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi a^2}\int\frac{1}{r}\,\Phi\left(t-\frac{r}{a}\right) dT \\ (\varphi_x,\ \varphi_y,\ \varphi_z) &= \frac{1}{4\pi a'^2}\int\frac{1}{r}(\Phi_x,\ \Phi_y,\ \Phi_z)\left(t-\frac{r}{a'}\right) dT\end{aligned}\right.$$

ausdrücken. Das Resultat des Einsetzens ist begreiflicherweise im allgemeinen sehr kompliziert; in dem einfachsten Falle, wo eine einzige Kraft X (t) in der x-Richtung wirkt, erhält man (t die Zeit, t' Integrationsvariable):

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned}
u &= \frac{1}{4\pi\varrho}\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\int\limits_{r/a}^{r/a'} t'\,X(t-t')\,dt' \\
&\quad + \frac{1}{4\pi\varrho r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\left[\frac{1}{a^2}X\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{a'^2}X\left(t-\frac{r}{a'}\right)\right]+\frac{1}{4\pi\varrho a'^2 r}X\left(t-\frac{r}{a'}\right) \\
v &= \frac{1}{4\pi\varrho r}\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\int\limits_{r/a}^{r/a'} t'\,X(t-t')\,dt' + \frac{1}{4\pi\varrho r}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial y}\left[\frac{1}{a^2}X\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{a'^2}X\left(t-\frac{r}{a'}\right)\right] \\
w &= \frac{1}{4\pi\varrho r}\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\int\limits_{r/a}^{r/a'} t'\,X(t-t')\,dt' + \frac{1}{4\pi\varrho r}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial z}\left[\frac{1}{a^2}X\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{a'^2}X\left(t-\frac{r}{a'}\right)\right]
\end{aligned}\right.$$

ferner die kubische Dilatation:

$$(39)\qquad D = \frac{1}{4\pi\varrho a^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r}X\left(t-\frac{a}{r}\right)\right]\ ,$$

endlich die Quirlkomponenten:

$$(40)\quad \omega_x = 0\,,\quad \omega_y = \frac{1}{4\pi\varrho a'^2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}X\left(t-\frac{r}{a'}\right)\right],\quad \omega_z = \frac{1}{4\pi\varrho a'^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{r}X\left(t-\frac{r}{a'}\right)\right],$$

und entsprechend für den Fall $Y(t)$ und $Z(t)$. In welcher Weise diese Ausdrücke sich spezialisieren, wenn die Kraft, was den einfachsten und wichtigsten Fall darstellt, eine einfach harmonische Funktion der Zeit ist, kann hier nicht weiter verfolgt werden.

Oberflächenwellen. G. H. DARWIN (s. o. p. 605) hat im Jahre 1882 da, statische Problem der Deformation eines elastisch-festen Körpers durch Auss übung eines periodischen Druckes auf seine Oberfläche behandelt; ein Problem- das naheliegende Anwendungen auf den Erdkörper zuläßt. In noch höherem Maße ist das bei dem entsprechenden kinetischen Problem der Fall, für das Lord RAYLEIGH[1] die Formeln und Konsequenzen entwickelt hat. Es handelt sich also um das Verhalten von Wellen, deren Natur derart ist, daß sie sich an der Oberfläche eines ausgedehnten festen Körpers halten und in sein Inneres nicht tiefer eindringen als durch die Größenordnung der Wellenlänge gegeben ist. Der Fall liegt also ähnlich wie in der Hydrodynamik bei den Tiefseewellen, nur daß die Kraft hier nicht die Schwere, sondern die Elastizität ist.

Auszugehen ist wieder von den Grundgleichungen elastischer Wellen. Es mögen aber gleich zwei Vereinfachungen vorgenommen werden: erstens soll die Grenzfläche eine Ebene, und zwar die Ebene $z = 0$, sein, und zweitens soll die Welle von einfach harmonischem Charakter, d. h. aus Sinus und Kosinus zusammengesetzt sein, so daß man sie bequem als Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten schreiben kann. Ferner werde zur Abkürzung

$$h^2 = \frac{\varrho m^2}{2K(1+\Theta)}\ ,\qquad k^2 = \frac{\varrho m^2}{K}$$

[1] Lord RAYLEIGH, Proc. Lond. math. Soc. **17**. 4. 1885; Papers **2**. 441; vgl. auch H. LAMB, ibid. 1882; ferner: H. LAMB, Proc. Roy. Soc. Juni 1903; Trans. Roy. Soc. Lond. (A) **203**. 1. 1904.

gesetzt. Auch die Verrückungen seien in x und y von derselben Form, die betreffenden Exponenten seien ifx und igy, und abgekürzt sei

$$r^2 = f^2 + g^2 - h^2 \quad , \qquad s^2 = f^2 + g^2 - k^2 \quad .$$

Dann kann man die vollständigen Werte von u, v, w in der Form

$$u = -\frac{if}{h^2} e^{-rz} + A e^{-sz} \; , \quad v = -\frac{ig}{h^2} e^{-rz} + B e^{-sz} \quad , \quad w = \frac{r}{h^2} e^{-rz} + C e^{-sz}$$

schreiben, wo zwischen A, B, C die Beziehung

$$ifA + igB - sC = 0$$

besteht. Nunmehr sind die Oberflächenbedingungen einzuführen; es muß nämlich für diese sowohl der Normaldruck als auch jede der beiden Tangentialkomponenten verschwinden. Dies liefert die weiteren Beziehungen

$$sB = \frac{2igr}{h^2} + igC \quad , \qquad sA = \frac{2ifr}{h^2} + ifC$$

und durch Einsetzen in die vorige

$$C(s^2 + f^2 + g^2)h^2 + 2r^2(f^2 + g^2) = 0 \quad .$$

Eliminiert man jetzt C aus seinen beiden Gleichungen, so erhält man die Gleichung

$$[2(f^2 + g^2) - k^2]^2 = 4rs(f^2 + g^2) \quad ,$$

durch die die Schwingungsdauer ausgedrückt wird durch die Wellenlänge und die elastischen Konstanten des Mediums; durch Einsetzen der Werte von r und s nimmt sie die Form

$$[2(f^2 + g^2) - k^2]^4 = 16(f^2 + g^2)^2(f + g^2 - k^2)(f^2 + g^2 - h^2)$$

an. Hier kommen nun f und g lediglich in der Kombination $f^2 + g^2$ vor, die man, da sie mit h^2 und k^2 homogen ist, vorübergehend durch die Einheit ersetzen kann; alsdann wird:

$$k^8 - 8k^6 + 24k^4 - 16k^2 - 16h^2k^2 + 16h^2 = 0 \quad .$$

Für die Diskussion dieser Gleichung beschränkt man sich am besten auf zwei spezielle Fälle, nämlich erstens auf den, daß das Medium inkompressibel, und zweitens den, daß es die POISSONsche Beziehung erfüllt; die meisten anderen Fälle werden zwischen diesen beiden oder nicht weit jenseits des letzteren liegen. Im ersten Falle, $h^2 = 0$, erhält man als reelle Wurzel der nunmehr in k^2 kubischen Gleichung (die komplexen sind nicht zu gebrauchen) $k^2 = 0{,}913$ und hieraus als Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$a_0 = 0{,}955\, a' \quad ,$$

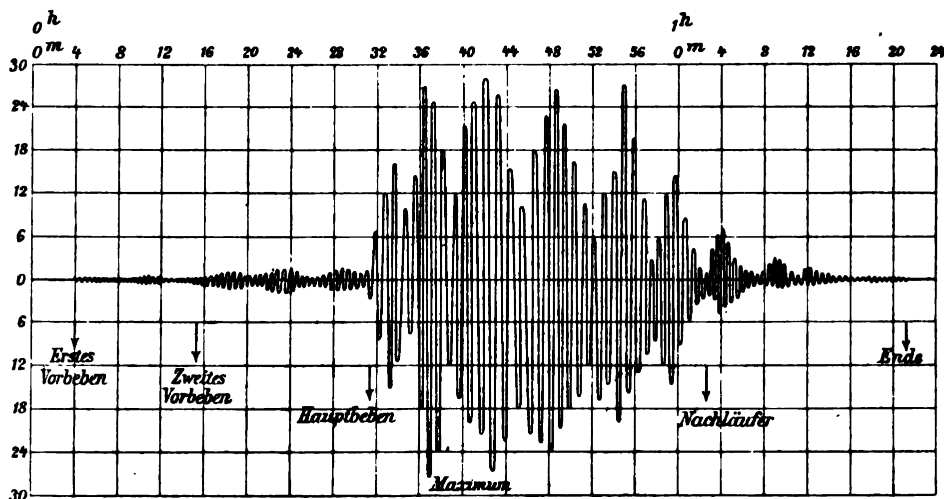
d. h. etwas geringer als die von isopyknischen Wellen, z. B. transversalen, durch das Innere des Körpers. Im zweiten Falle, $h^2 = \frac{1}{3} k^2$, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$a_0 = 0{,}919\, a' \quad ,$$

also wiederum nicht unwesentlich kleiner. Was die Wellen selbst betrifft, so sind sie, wie man leicht findet, an der Oberfläche von elliptischer Natur, und zwar ist die vertikale Achse annähernd doppelt so groß, wie die horizontale; die horizontale Komponente verlöscht in etwa $^1/_7$ Wellenlänge Tiefe, die vertikale hat nach der Tiefe zu keine bestimmte Grenze, wird aber natürlich bald sehr schwach.

Die wichtigste Anwendung derartiger Betrachtungen bezieht sich auf die Erdbebenwellen, die einerseits durch das Innere des Erdkörpers, andererseits

an seiner Oberfläche hin laufen. Die letzteren werden in größerer Entfernung überwiegend in die Erscheinung treten, da sie sich nur flächenhaft, jene aber räumlich zerstreuen. Wie sich ferner aus dem Früheren ergibt, und wie LAMB noch eingehend nachgewiesen hat, tritt in bestimmter Entfernung von dem Herde die erste Störung nach einer Zeit auf, die der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der quirlfreien Welle, also der Verdichtungswelle entspricht; ein zweiter Abschnitt setzt ein nach einer Zeit, die der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der divergenzfreien, also der Quirlwelle entspricht; diese beiden vom Charakter räumlicher Wellen, die durch das Innere gegangen sind. Nun erst, nach einer Zeit, die der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oberflächenwelle entspricht, beginnt der kräftigste Teil der Störung. Man pflegt diese Phasen, die man in Figur 236 (aus verschiedenen neueren Erdbebenkurven der Station Jena typisch abgeleitet)



Figur 236.

deutlich erkennt, als erstes, zweites Vorbeben und Hauptbeben zu kennzeichnen; wie sie sich des genaueren zu einer verhalten, wie sie ineinander übergreifen u. s. w., das wird von der Natur der Erregung, von der Entfernung der Beobachtungsstelle vom Herde und von den Eigenschaften der verschiedenen Erdschichten abhängen, wofür auf die seismische Literatur verwiesen werden muß. Nur das eine, scheinbar paradoxe Ergebnis mag angeführt werden, daß sich für alle drei Wellen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ergeben, die für verschiedene Entfernungen nicht konstant sind, sondern bei gewissen mittleren Abständen Minima aufweisen; scheinbar und nicht in Wahrheit paradox, insofern als die zugrunde gelegten Entfernungen, einerseits geradlinig durch das Erdinnere, andererseits längs der Oberfläche nur Grenzannahmen darstellen, die in Wahrheit durch Bahnen zu ersetzen wären, die in gewisser, durch die Verhältnisse des Erdkörpers bedingter Weise aus beiden Typen, mit größerem oder geringerem Anteil des einen und anderen, zusammengesetzt sind.[1]

---

[1] Vgl. die Berichte der internationalen seismischen Vereinigung, die „Beiträge zur Geophysik" u. s. w. Als neuestes Schulbeispiel sei die große Arbeit von RIZZO über die Ausbreitung des kalabrischen Erdbebens (Atti di Torino 1906) angeführt. Aus der Theorie ergibt sich übrigens, wie LAMB (a. a. O.) nachweist, als Fernwirkung eines Erdbebenstoßes immer nur ein einziger Hauptstoß; da nun die Seismographen, auch wenn ihre Eigenschwingungen durch besondere Dämpfungsvorrichtungen eliminiert sind, eine lange Reihe von hin und her gehenden Schwingungen ergeben, ist zu schließen, daß die Beben selbst aus solchen bestehen.

Fortschreitende und stehende Wellen. Wenn in einem ausgedehnten Körper ein Punkt oder eine begrenzte Stelle erregt wird, so geht von ihr eine fortschreitende Welle nach jeder Richtung, im einfachsten Falle aber, dem der ebenen Wellen, je eine nach der positiven und negativen Seite. Jede Stelle des Körpers wird also nur von einer dieser Wellen getroffen. Anders, wenn die Erregung an mehreren Stellen stattfindet oder wenn, bei nur einer Erregungsstelle, der Körper eine begrenzende Oberfläche hat, an der die ankommende Welle reflektiert wird, so daß zu der primären Erregungsstelle die Oberfläche gewissermaßen als sekundäre hinzutritt. In diesen Fällen wird jeder Punkt des Körpers von mehreren, im einfachsten Falle von zwei entgegengesetzt fortschreitenden Wellen getroffen, und diese werden sich in ihrer Wirkung nach dem Superpositionsprinzip kombinieren. Nun kann, wie wir wissen, jede fortschreitende Welle auf eine trigonometrische, sagen wir, auf eine Sinusfunktion des aus Zeit und Ortsvektor gebildeten Binoms zurückgeführt werden, bei ebenen Wellen z. B. auf den $\sin[(2\pi/\lambda)(x + at)]$ oder den $\sin[(2\pi/\lambda)(x - at)]$, je nachdem die Fortschreitung in negativer oder positiver Richtung erfolgt. Zieht man nun diese beiden Wellen, soweit sie gleiche Amplituden haben, in ein einziges Glied zusammen, so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}at \cdot \sin\frac{2\pi}{\lambda}x \quad ,$$

und dieser stellt nicht mehr eine fortschreitende, sondern eine stehende Welle oder stehende Schwingung dar, d. h. eine Bewegung, bei der alle Verrückungen mit gleicher Periode und in gleicher Phase zu- und abnehmen, während für jeden Punkt die Amplitude eine andere ist, für gewisse Punkte, die Knoten, null, für gewisse andere, die Bäuche, maximal, für die übrigen von dazwischenliegender Größe. Man sieht also, daß in dem gedachten Falle ein Teil der fortschreitenden Wellenbewegung sich in stehende Schwingungsbewegung umsetzt; und der Grenzfall wird der sein, wo die Umsetzung vollständig ist, der Körper also nur noch stehende Schwingungen ausführt. In dem allgemeinsten Falle beliebiger Erregungsstellen und beliebiger Gestalt des Körpers wird der Umwandlungsprozeß und sein Ergebnis begreiflicherweise außerordentlich verwickelt sein; einfacher schon bei nur einer Erregungsstelle und beliebig dreidimensionalem Charakter des Körpers, am einfachsten bei zwei- oder gar eindimensionalen Körpern, bei denen die gedachte Reflexion nur an einem Rande bezw. gar nur an den Endpunkten stattfindet. Von dreidimensionalen Körpern werden die einfachsten Formen, Kugel und Zylinder, bei geeigneter Erregung auch noch übersichtliche Schwingungsformen liefern. Man vergleiche hierfür den folgenden Abschnitt.

Weitere allgemeine Untersuchungen. Zum Thema der Schwingungen und der Wellen in ausgedehnten Körpern liegt außer den genannten und oben verarbeiteten noch eine Fülle von Untersuchnngen vor, von denen hier nur wenige kurz angeführt werden können. Lord RAYLEIGH hat von 1870 bis auf den heutigen Tag das Problem durch bedeutsame Beiträge gefördert, die meisten sind in seiner „Theorie des Schalles" und in seinen „Scientific papers" niedergelegt, die neueste (1903, s. u) behandelt die von den Kräften bei der Wellenbewegung in der Zeiteinheit geleistete mittlere Arbeit. — BETTI hat an seine Theorie der Gleichgewichtszustände auch Betrachtungen über Bewegungen angeknüpft. Ersetzt man die dem Gleichgewicht entsprechenden Verschiebungen $u\,v\,w$ durch andere $u'\ v'\ w'$, die an der Oberfläche mit jenen identisch sind, während im Innern die longitudinalen Deformationskomponenten zwar auch die alten sind, die transversalen sich aber um $\pm\,\omega_1$, $\pm\,\omega_2$, $\pm\,\omega_3$ unterscheiden, so tritt Bewegung ein, und es gilt, wenn

$$(41)\quad \begin{cases} V = X_x \dfrac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} + Y_y \dfrac{\omega_3^2 + \omega_1^2}{2} + Z_z \dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \\ \quad - Y_z \omega_2 \omega_3 - Z_x \omega_3 \omega_1 - X_y \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

gesetzt wird, das Gleichungssystem

$$(42)\quad \int \left[\varrho \left(w' \frac{d^2 v'}{dt^2} - v' \frac{d^2 w'}{dt^2} \right) - \frac{\partial V}{\partial \omega_1} \right] d\tau = 0$$

nebst zwei entsprechenden. — Einige Arbeiten von VOLTERRA betreffen Zylinderwellen, die also außer von t nur von x und y abhängen. In der ersten jener Arbeiten stellt VOLTERRA der POISSONschen Lösung der Grundgleichung eine andere gegenüber, in der zweiten leitet er allgemeinere Lösungen ab, die sowohl seine eigene frühere als auch die von POISSON als Spezialfälle enthalten. — Eine Reihe von Abhandlungen Lord KELVINS betrifft Verdichtungs- und Verdrehungswellen in festen Körpern und weiter die Frage, welche Kraft auf der Oberfläche eines irgendwie geformten Hohlraumes wirken muß, um in dem umgebenden festen Körper eine bestimmt gegebene Wellenbewegung zu erzeugen und dauernd zu erhalten; für den Fall, daß jene Fläche eine Kugel ist und daß in dem umgebenden Körper gewisse Symmetrien der Kräfteverteilung stattfinden, ergeben sich interessante Schlüsse in bezug auf das Verhältnis der beiden Wellenarten, der quirlfreien und der divergenzfreien, zueinander. — MACDONALD stellt auf Grund des allgemeinen elastischen Potentials (mit Deformations- und Rotationskomponenten, also 45 Konstanten) die Bedingung dafür auf, daß sich die beiden ebenen Wellenarten unabhängig voneinander fortpflanzen; ist dies der Fall, so breiten sich die transversalen Wellen in FRESNELschen Wellenflächen oder in solchen aus, die aus ihnen durch homogene Deformation entstehen, ersteres, wenn das Medium isotrop hinsichtlich der Trägheit, letzteres, wenn es das nicht ist. — LAMB hat auf einen Widerspruch aufmerksam gemacht, der sich anscheinend aus der bekannten Exponentialform für die Kugelwelle ergibt, indem nämlich hierbei der Faktor e^{mr} auftritt, der mit wachsender Entfernung r vom Erreger unbegrenzt wächst; der Widerspruch löst sich durch die Erwägung, daß die Lösung nur innerhalb einer Kugel vom Radius ct gilt, wo t die seit Beginn der Erregung verflossene Zeit ist; außerhalb der Kugel ist überhaupt keine Erregung vorhanden. — POINCARÉ, LOVE u. A. haben die Formeln von POISSON und STOKES, durch die die Verschiebungen in einem erregten Körper durch bestimmte Integrale ausgedrückt werden, diskutiert und weiter entwickelt. Auch stellt LOVE die Integrale der Grundgleichungen für gegebene Kräftesysteme in Formen dar, aus denen man die verschiedenen möglichen Wellentypen anschaulich entnehmen kann. — BOUSSINESQ kommt ganz neuerdings noch einmal auf die allgemeinen Untersuchungen von OSTROGRADSKY und ihm selbst über die beiden Wellenarten zurück, die von einem plötzlich gestörten Kugelraum vom Radius r ausgehen, die Dicke $2r$, aber verschiedene Geschwindigkeiten haben, und zwischen denen sich ein ebenfalls gestörter Zwischenraum befindet; er weist nach, daß, wenn die Verschiebungen in einem Punkte der eigentlichen Wellen $1/R$ ist (R Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt), die Verschiebungen in dem Zwischenraum s von der Ordnung $1/R^2$ und die Geschwindigkeiten von der Ordnung $1/R^3$ sind; in dem besonderen Falle, daß sich die ursprüngliche Gleichgewichtsstörung ohne Anfangsgeschwindigkeit vollzog, werden sie null. — A. KORN schließt an seine statischen Untersuchungen eine Folgerung an für die Schwingungen eines elastischen Körpers, dessen Oberfläche in Ruhe bleibt. Es gibt nämlich unzählig viele Systeme von Funktionen U_i, V_i, W_i, die in einem Raume τ den Gleichungen

$$(43)\quad \Delta U_i + k \frac{\partial D_i}{\partial x} + \lambda_i^2 U_i = 0$$

nebst den beiden entsprechenden, sowie den Bedingungen

(44) $$D_i = \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \quad , \qquad \int_\tau (U_i^2 + V_i^2 + W_i)^2 d\tau = 1$$

genügen, innerhalb dieses Raumes mit ihren ersten Differentialquotienten endlich und in der Oberfläche null sind; jedes solche System stellt eine Einzelschwingung dar, und die ganze ist gegeben durch die Formeln

(45) $$u = \sum C_i U_i \quad , \qquad v = \sum C_i V_i \quad , \qquad w = \sum C_i W_i \quad ,$$

wo

$$C_i = \int_\tau (u U_i + v V_i + w W_i) d\tau$$

ist; die Reihen sind konvergent für jedes $k > -1$. — ORLANDO berechnet mit Hilfe FOURIERscher Integrale die Schwingungen in einem von einer Ebene begrenzten, sonst unendlich ausgedehnten Körper. — Endlich sei auf eine Abhandlung von NAGAOKA hingewiesen, in der die theoretische Möglichkeit stehender Oberflächenwellen nachgewiesen wird, z. B. wenn in den oberflächlichen Schichten zwei zur Grenzebene senkrechte und parallele Wände vorhanden sind, an denen die ursprünglich fortschreitenden Wellen reflektiert werden; ob sich hiervon Anwendungen auf die Erde (Gebirge, Flußläufe u. s. w.) machen lassen, muß dahingestellt bleiben.[1]

Dämpfung der Schwingungen und Wellen. Bisher ist die Lehre von den Schwingungen und Wellen auf rein elastischer Grundlage entwickelt worden, ohne Rücksicht auf die Frage, ob durch die Bewegung gegenüber dem Gleichgewicht ein neues Element für die Gestaltung der Vorgänge eingeführt wird. Das ist nun aber tatsächlich der Fall. Es besteht in allen Körpern, und ganz besonders in den elastisch-festen Körpern, ein Widerstand gegen Bewegung, den man als Zähigkeit oder innere Reibung bezeichnet und gewöhnlich, was in vielen Fällen sich bewährt hat, mit der augenblicklichen Geschwindigkeit proportional setzt. Es handelt sich also hier um einen spezifisch kinetischen Einfluß, der an sich nichts gemein hat mit den Einflüssen, die das statische Verhalten der elastischen Körper modifizieren und die man unter dem Namen der elastischen Unvollkommenheit zusammenfaßt. Es gibt trotzdem etwas, was beiden Phänomenen gemeinsam ist, nämlich die durch sie repräsentierte Zerstreuung oder Dissipation von Energie, nur daß diese bei der elastischen Unvollkommenheit verborgene, hier, bei der inneren Reibung, kinetische Energie von sichtbarem Charakter betrifft. Wie die elastische Unvollkommenheit in ein besonderes Kapitel („Kohäsion") zu verweisen ist, so wird auch die innere Reibung für sich behandelt werden; hier ist nur ihr Einfluß auf Schwingungen und Wellen anzugeben. In erster Linie hat die Reibung den Effekt, daß die Amplitude der Schwingungen an einem und demselben Orte im Körper mit der Zeit geschwächt wird; eine Erscheinung, die man als Dämpfung der Schwingungen bezeichnet. In vielen typischen Fällen erfolgt diese Dämpfung geometrisch-gleichförmig, d. h. je zwei aufeinanderfolgende Amplituden stehen in gleichem Verhältnis, ihre Logarithmen bilden also gleiche Differenzen, weshalb man die Dämpfung vielfach, statt durch das Dämpfungsverhältnis, durch das

[1] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (6) **6**. 385. 1903. — E. BETTI, Proc. Lond. math. Soc. **20**. 246. 1889. — V. VOLTERRA, Rend. Accad. Linc. (5) **1**. II. Sem. 161, 265. 1892. — Lord KELVIN, Phil. Mag. (5) **46**. 494. 1898; **47**. 480; **48**. 227. 388. 1899. — H. M. MACDONALD, Proc. math. Soc. **32**. 311. 1900. — H. LAMB, Proc. math. Soc. **32**. 208. 1900. — A. E. H. LOVE, Proc. math. Soc. (2) **1**. 291. 1904. — J. BOUSSINESQ, C. R. **142**. 480. 542. 609. 1906. — A. KORN, C. R. **142**. 508. 1906. — L. ORLANDO, Rend. Accad. Linc. (5) **15**. I. Sem. 205. 1906. — H. NAGAOKA, Tokyo K. **3**. 79. 1906; Publ. Earthquake-Comm. Nr. 22. p. 17. 1906.

logarithmische Dekrement charakterisiert. Es ist einerseits im allgemeinen sehr beträchtlich wegen der bei festen Körpern immensen inneren Reibung, andererseits aber doch mäßig, weil bei den meisten Schwingungen fester Körper die Amplitude und damit, trotz der oft sehr großen Schwingungszahl, auch die Geschwindigkeit klein ist. Um ungedämpfte Schwingungen zu erhalten, muß man hiernach dauernd Kraft aufwenden, und diese erzwungenen Schwingungen werden aus demselben Grunde nicht ins Ungemessene wachsen, sondern sich einem Maximum nähern, in dem die äußere Kraft mit der inneren Reibung im Gleichgewicht steht. In zweiter Linie wird übrigens durch die Dämpfung auch die Periode der Schwingungen beeinflußt, nämlich vergrößert. Soweit die Erscheinung an einem und demselben Orte. Die Wirkung zeigt sich aber auch in bezug auf die der Schwingung entsprechende fortschreitende Welle, insofern deren Amplitude beim Fortschreiten abnimmt bezw. stärker abnimmt, als sie es, z. B. bei Kugelwellen, schon aus geometrischen Gründen tun würde; man bezeichnet diese Erscheinung als Absorption. Von alledem wird in der Wellenlehre und ihrer Anwendung auf den Schall eingehender die Rede sein.

B) Spezieller Teil.

Übersicht. Während im vorangegangenen die allgemeinen Probleme der elastischen Schwingungen und Wellen angeführt und skizziert worden sind, sollen nun die wichtigsten Spezialfälle betrachtet werden, jedoch nur diejenigen etwas eingehender, die nicht ihren Schwerpunkt in den akustischen Anwendungen haben; in bezug auf alles andere ist also auf die „Akustik“ zu verweisen. Die Spezialisierung hat in verschiedenen Richtungen zu erfolgen. Erstens hinsichtlich der Form der Körper: diese können in der Hauptsache entweder ein- oder zwei- oder dreidimensional sein; und die Komplikation der Erscheinungen und Formeln wird in dieser Reihenfolge sich steigern. Die ein- und die zweidimensionalen Körper können ferner entweder ursprünglich gerade bezw. eben oder aber ursprünglich gekrümmt sein — ein Unterschied, der schon in der elastischen Statik sich geltend machte. Sie können sich endlich noch in einer weiteren Hinsicht ganz wesentlich unterscheiden, je nachdem sie nämlich eigne Steifigkeit, d. h. Biegungs- und Drillungswiderstand besitzen oder nicht. Am einfachsten würden ja Körper sein, die auch keinen Dehnungswiderstand haben; aber diese kommen als völlig unelastisch hier nicht in Betracht. Bei den Körpern ohne Steifigkeit, also den eindimensionalen Fäden oder Saiten und den zweidimensionalen Membranen, ist die maßgebende Größe die Spannung, die man ihnen gibt und geben muß, um sie überhaupt der Betrachtung und der Rechnung zu unterwerfen; sie gehören daher nicht recht eigentlich hierher, wie bereits in der „Statik“ erwähnt wurde; in der „Kinetik“ müssen sie aber des Vergleichs halber doch angeführt werden. Bei den steifen Körpern dagegen, also den eindimensionalen Stäben oder Drähten und den zweidimensionalen Platten ist dagegen ihre Elastizität maßgebend für die Eigenschaften ihrer Schwingungen und Wellen. Schließlich sieht man ein, daß man, um den Verhältnissen der wirklichen Saiten und Membranen näher zu kommen, deren Verhalten aus dem infolge der Spannung und dem infolge ihrer, wenn auch geringen, Steifigkeit zusammensetzen muß.

Eine weitere Mannigfaltigkeit ergibt sich aus den verschiedenen Typen von Schwingungen bezw. Wellen: diese können von longitudinalem, transversalem oder drehendem Charakter sein, entsprechend den statischen Typen der Dehnung, Biegung und Drillung; die transversalen können des weiteren geradlinig oder krummlinig (kreisförmig, elliptisch u. s. w.) sein. Endlich wird es sich, je nach der Begrenzung der Körper, um fortschreitende oder stehende Schwin-

gungen handeln; in den meisten Fällen werden die letzteren das Hauptinteresse in Anspruch nehmen.

Den Schluß hat dann die Frage zu bilden, ob und inwieweit man aus kinetischen Vorgängen die Elastizitätskonstanten der Körper bestimmen kann, und wie sich diese Methoden zu den statischen verhalten.

I. Eindimensionale Körper.

a) Saiten.

Saiten. Wir betrachten zuerst die eindimensionalen Körper ohne Steifigkeit. Der vollkommene Typus wäre ein durchaus biegsames Seil, ein Faden, eine ideale Saite. Als eine schematische Vereinfachung dieses Typus, nämlich als eine Zurückführung seines unendlichen Freiheitsgrades auf einen endlichen kann man die masselose Linie ansehen, auf der sich in gleichen Abständen Massenpunkte befinden; oder auch eine Kette, deren Glieder in sich starr, gegeneinander aber frei beweglich sind. Bei der Saite sind dann diese Glieder unendlich klein und zahlreich.

Von den Wellenarten sind hier fast nur die transversalen von Interesse. Ist die Saite unbegrenzt, so laufen von der Erregungsstelle zwei Wellen nach den beiden Richtungen. Ist sie einerseits begrenzt, so wird die hier eintreffende Welle reflektiert, wobei sich die Phase wegen des festen Charakters des Endes umkehrt und durch Superposition stehende Schwingungen entstehen. Bei zwei festen Enden findet dieser Vorgang an beiden statt, und nach sehr kurzer Zeit befindet sich die ganze Saite im Zustand stehender Schwingungen; diese sind nun näher zu betrachten, wobei angenommen wird, daß die Elongationen nur klein seien, Steifigkeit fehle und äußere Kräfte nicht wirken.

Die Formulierung ist enthalten in den Gleichungen

$$(46)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{S}{\varrho}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{S}{\varrho}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,,$$

wo u, v, w die Verrückungen, x die einzige Koordinate, t die Zeit, S die Spannung (Zugkraft pro Querschnittseinheit) und ϱ die Dichte des Materials ist; statt S/ϱ könnte man auch die ganze Zugkraft K dividiert durch die Masse der Längeneinheit σ, also K/σ, setzen; endlich ist E der Dehnungsmodul. Vervollständigt wird die Formulierung durch örtliche und zeitliche Bedingungsgleichungen; jene lauten, wenn l die Länge der Saite ist:

$$\text{für } x = 0 \text{ und } x = l:\quad u = 0\,,\qquad v = 0\,,\qquad w = 0\,;$$

diese sagen aus, daß zu Anfang der Bewegung sowohl die Verrückung wie die Geschwindigkeit eine gegebene Funktion von x sei:

$$(47)\qquad \left\{\begin{matrix} \text{für } t = 0 \\ \text{und} \\ 0 < x < l \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} u = g(x)\,, & v = f(x)\,, & w = h(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = G(x)\,, & \dfrac{\partial v}{\partial t} = F(x)\,, & \dfrac{\partial w}{\partial t} = H(x)\,. \end{matrix}\right.$$

Die erste der Gleichungen (46) liefert die Längs-, die beiden anderen liefern die Querschwingungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen; da man die allgemeine Querschwingung aus v und w nach dem Prinzip der geometrischen Summe bilden kann, genügt es, eine von ihnen, etwa v, zu betrachten und $w = 0$ zu setzen, so daß man es mit geradlinigen Querschwingungen und einer Gesamtbewegung in der xy-Ebene zu tun hat. Die Lösungen für u und v unterscheiden sich ferner nur durch den Faktor

$$(48)\qquad \frac{E}{\varrho} = b^2 \quad \text{bezw.} \quad \frac{S}{\varrho} = a^2\,,$$

sowie durch die verschiedenen Anfangsfunktionen g, G bezw. f, F. Es genügt also, eine einzige Lösung zu betrachten, für die sich v am besten eignet. Man kann nun die Lösung in zwei verschiedenen Formen schreiben, je nachdem man sie aus partikulären, einfach harmonischen Schwingungen entsprechenden Lösungen synthetisch aufbaut oder aber ohne weiteres allgemein ansetzt. Im ersteren Falle hat man:

$$v = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sin\frac{m\pi}{l}x\left(A_m \cos\frac{m\pi a}{l}t + B_m \sin\frac{m\pi a}{l}t\right) \quad , \tag{49}$$

wo sich die zweimal unendlich vielen Koeffizienten A und B aus den gegebenen Funktionen f und F durch die Formeln:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(s)\sin\frac{m\pi}{l}s\cdot ds \quad , \qquad B_m = \frac{2}{m\pi a}\int_0^l F(s)\sin\frac{m\pi}{l}s\cdot ds \tag{50}$$

ergeben, die in zahlreichen Fällen ausgerechnet werden können. Bei der zweiten Methode setzt man v, gemäß den Formeln des allgemeinen Teiles, gleich der Summe einer Funktion von $x - at$ und einer Funktion von $x + at$:

$$v = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \quad , \tag{51}$$

und bestimmt φ und ψ gemäß den Anfangsbedingungen durch f und F:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= \tfrac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x F(x)\,dx \\ \psi(x) &= \tfrac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x F(x)\,dx \quad , \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Formeln, durch die φ und ψ zunächst freilich nur für Argumente zwischen 0 und l bestimmt werden, während man doch φ auch für Argumente < 0 und ψ auch für solche $> l$ braucht; zu dieser Ergänzung dienen die Bedingungen für die Enden, die die Beziehungen

$$\varphi(-\varepsilon) + \psi(+\varepsilon) = 0 \quad , \qquad \varphi(l-\varepsilon) + \psi(l+\varepsilon) = 0$$

liefern, aus denen sich

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(-\varepsilon) &= -\psi(+\varepsilon) \quad , & \psi(l+\varepsilon) &= -\varphi(l-\varepsilon) \\ \varphi(-l-\varepsilon) &= +\varphi(l-\varepsilon) \quad , & \psi(2l+\varepsilon) &= +\psi(\varepsilon) \end{aligned}\right. \tag{53}$$

u. s. f. ergibt; die Werte dieser Funktionen wiederholen sich also wechselweise und spiegelbildlich.

Beide Lösungen sind identisch auf Grund der Entwickelbarkeit jeder Funktion in eine trigonometrische (FOURIERsche) Reihe; damit ist zugleich gesagt, daß jede beliebige Saitenschwingung sich in einfach harmonische Partialschwingungen auflösen läßt, oder, wie man auch sagt, in eine Grundschwingung und eine unendliche Reihe harmonischer Oberschwingungen; je nach der Stärke dieser Oberschwingungen im Verhältnis zur Stärke der Grundschwingung erhält man unendlich viele verschiedene Arten von Gesamtschwingung. Die Periode bezw. die Schwingungszahl ist gegeben durch die Formeln (alles in absolutem Maße gemessen):

$$\text{longitudinal} \quad T_m = \frac{2l}{m}\sqrt{\frac{\varrho}{E}} \quad , \qquad n_m = \frac{m}{2l}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad , \tag{54}$$

(55) transversal $T_m = \frac{2l}{m}\sqrt{\frac{\varrho}{S}}$, $n_m = \frac{m}{2l}\sqrt{\frac{S}{\varrho}} = \frac{m}{2l}\sqrt{\frac{K}{\sigma}}$.

Die Schwingungsdauer ist hiernach unter gewöhnlichen Verhältnissen eine kleine, die Schwingungszahl eine große Zahl, man gibt daher zweckmäßig die letztere an. Sie ist umgekehrt proportional mit der Saitenlänge und der Wurzel aus der Stoffdichte, dagegen direkt proportional bei den Längsschwingungen mit der Wurzel aus dem Elastizitätsmodul, bei den Querschwingungen mit der Wurzel aus der Spannung. Die Knoten und Bäuche teilen die Saite in lauter gleiche Abschnitte; bei der Grundschwingung sind nur die Enden Knoten, die Mitte Bauch; bei der p. Oberschwingung gibt es außer den Enden noch p Knoten und $p+1$ Bäuche.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist hiernach für Saiten (und ebenso für Stäbe):

(56) longitudinal $a_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$,

[also ganz verschieden von der in allseitig ausgedehnten Körpern, Gleichung (15) und (16) auf p. 716],

(57) transversal $a_t = \sqrt{\frac{S}{\varrho}}$.

Der Charakter der Gesamtschwingung hängt von der Art der Erregung ab, durch die die Natur der Funktionen f und F (bezw. g und G) bestimmt wird. Die beiden typischen Elementarfälle sind die, wo eine dieser beiden Funktionen null ist. Es ist nämlich bei der Erregung durch

Zupfen: $F = 0$, Hämmern: $f = 0$,

beim Zupfen werden sonach auf Grund von (52) die Funktionen φ und ψ einander gleich, beim Hämmern werden sie entgegengesetzt gleich; anders ausgedrückt: beim Zupfen fallen die Koeffizienten B, beim Hämmern die Koeffizienten A fort. Um das Verhalten der übrig bleibenden Serie von Koeffizienten zu verfolgen, muß man weiter spezialisieren, wobei der einfachste Fall offenbar der ist, daß beim Zupfen eine nur punktförmige Stelle ergriffen wird, so daß die Saite zur Zeit $t = 0$ aus zwei Geraden besteht; entsprechend, daß beim Hämmern nur eine punktförmige Stelle ergriffen wird, so daß dieser Punkt im ersten Moment gewissermaßen aus der Saite herausspringt. In jenem Falle hat man, wenn die Anfangskoordinaten der Zupfstelle x_0, y_0 sind:

$$0 < x < x_0: \quad f(x) = \frac{y_0 x}{x_0} \quad ; \quad x_0 < x < l: \quad f(x) = \frac{y_0 (l - x)}{(l - x_0)} \quad ;$$

(58) $$A_m = \frac{2 y_0 l^2}{m^2 \pi^2 x_0 (l - x_0)} \cdot \sin \frac{m \pi x_0}{l} \quad .$$

Die Oberschwingungen nehmen also wegen des Faktors $1/m^2$ mit der Ordnungszahl an Stärke rasch ab, außerdem fallen wegen des Sinusfaktors diejenigen Oberschwingungen gänzlich aus, für die $m = l/x_0$ oder $2l/x_0$ u. s. w. ist, d. h. die an der Zupfstelle einen Knoten haben würden. Im Falle des punktförmigen Hämmerns ist f überall gleich null und F auch überall mit Ausnahme der gehämmerten Stelle; man erhält somit

(59) $$B_m = \frac{2c}{\pi m l}\sqrt{\frac{\varrho}{S}} \sin \frac{m \pi x_0}{l} \quad ,$$

wo c das Produkt der Geschwindigkeit der geschlagenen Stelle in ihre verschwindend kleine Länge ist. Hier fallen also dieselben Oberschwingungen wie

dort aus, im übrigen ist aber die Intensitätsabnahme der Oberschwingungen mit ihrer Ordnungszahl langsamer wie dort, da hier nur der Faktor $1/m$ vorkommt. Modifikationen treten in beiden Fällen auf, wenn nicht ein Punkt, sondern eine endliche Strecke der Saite gezupft bezw. geschlagen wird, im letzteren Falle auch dadurch, daß die Hämmerung nicht mit einem absolut harten, sondern mit einem weichen Körper erfolgt, so daß die Berührung länger dauert und die Erregung dadurch sanfter wird.[1]

Auf die Geschichte und Kritik der Theorie der schwingenden Saite kann hier, indem im übrigen auf einen erschöpfenden Bericht von BURCKHARDT in den Berichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hingewiesen wird, nur mit wenigen Worten eingegangen werden. Die Lösung in Gestalt zweier allgemeiner Funktionen rührt von D'ALEMBERT, die trigonometrische von DANIEL BERNOULLI her. Die Darstellbarkeit jeder Funktion durch trigonometrische Reihen ist von FOURIER und DIRICHLET bewiesen worden. Später sind dann verschiedene Bedenken über die Zulässigkeit einzelner dabei gemachter Schlüsse erhoben worden, namentlich über die Derivierbarkeit der Funktionen, sobald Unstetigkeiten der Richtung u. s. w. auftreten. Die Bedingungen, unter denen diese Diskontinuitäten mit der allgemeinen Gültigkeit der Grundgleichung verträglich sind, hat CHRISTOFFEL angegeben, LINDEMANN hat das weiter verfolgt und HARNACK hat unter allgemeinsten Gesichtspunkten gezeigt, daß, wenn die CHRISTOFFELschen Bedingungen erfüllt sind, die Lösung durch die trigonometrische Reihe ebensogut wie durch die allgemeinen Funktionen dargestellt werden kann; der HARNACKsche Beweis ist endlich von MORERA in strengerer Form wiederholt worden.[2]

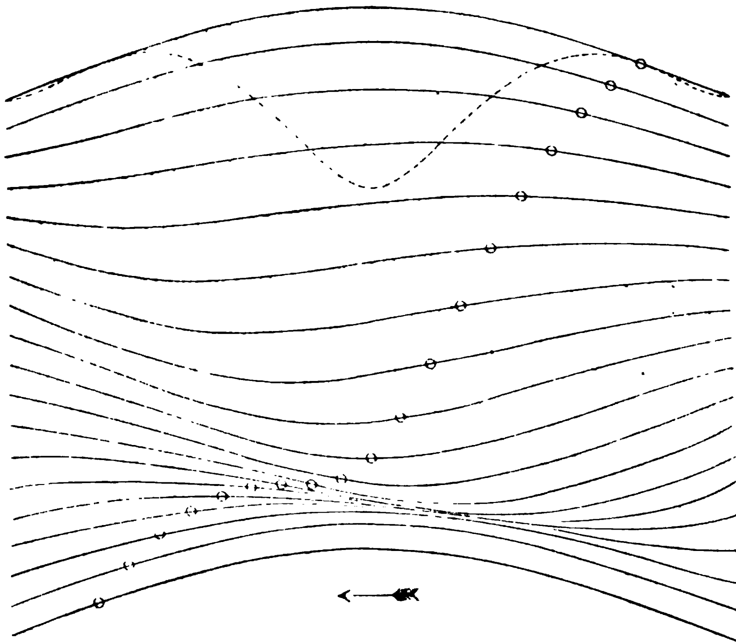
Ergänzungen. Die Theorie der Saitenschwingungen ist nach verschiedenen Richtungen hin zu ergänzen; es muß aber an wenigen Andeutungen genügen. Erstens ist zu untersuchen, wie sich die Gesetze ändern, wenn die Enden der Saite nicht vollkommen fest sind, sondern beispielsweise ein Vorbeigleiten erlauben; man vergleiche hierüber Lord RAYLEIGH[3], sowie eine Arbeit von SKUTSCH. Lord RAYLEIGH fingiert, um eine einfache Rechnung durchführen zu können, zwei Massen, an denen die Enden der Saite befestigt sind und zwei Federn, die sie gegen die Gleichgewichtslage pressen. Je nach den Größenverhältnissen der Massen und der Saite und der Stärke der Federn erhält man dann eine nach oben oder unten modifizierte Schwingungszahl. — Ganz andersartig ist das von SKUTSCH[4] behandelte Problem, nämlich die Bewegung eines gespannten Fadens, der gezwungen ist, durch zwei feste Punkte mit konstanter Geschwindigkeit c zu gehen, während er zwischen ihnen Querschwingungen von kleiner Amplitude ausführt. An Stelle des Wertes $a/2l$, den die Schwingungszahl der Grundschwingung bei festen Enden haben würde, tritt hier der Wert

$$n' = \frac{a^2 - c^2}{2al} = n\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \quad , \tag{60}$$

also ein desto kleinerer, je größerer c im Vergleich zu a ist; im Grenzfalle $c = a$ wird $n' = 0$, d. h. der Faden behält bei der Wanderung seine Form bei — ein Problem, das an bekannte Fragen der Kinematik und graphischen Mechanik erinnert. Die Bestimmung der Schwingungsform aus der für den Anfangsmoment gegebenen geschieht ganz analog wie bei festen Enden, nur daß hier die Bereiche natürlich unsymmetrisch werden. Ist z. B. $c = a/3$, also die Periode um $^1/_8$ vergrößert und anfänglich die Verrückung ein einfacher Sinus, die Geschwindigkeit

[1] H. v. HELMHOLTZ, Tonempfindungen, Beilage III u. V. — [2] Literatur u. a. bei B. RIEMANN, Gött. Abh. 13 oder Ges. Werke, p. 213; bei BURCKHARDT, a. a. O., sowie in der Enzykl. d. math. Wiss., sowie bei G. MORERA, Atti di Torino 23. 1888. — [3] Lord RAYLEIGH, Theorie des Schalles. 1. 212. — [4] R. SKUTSCH, WIED. Ann. 61. 190. 1897.

null, so erhält man das in Figur 237 dargestellte Bild des Fadens in 18 Phasen, je zwei Kurven sind symmetrisch zueinander, die mittelste ist in sich symmetrisch (aber keine Sinuslinie); die Bewegungsrichtung ist durch den Pfeil, die Orte eines Punktes sind durch kleine Kreise, seine wirkliche Bahn ist durch die gestrichelte Linie zur Anschauung gebracht. — Zweitens ist die Steifigkeit der Saiten zu berücksichtigen; man kann das tun, indem man zu der Bedingung $v = 0$ für die



Figur 237.

Enden noch eine weitere, z. B. $dv/dx = 0$ oder $d^2v/dx^2 = 0$ hinzufügt, je nachdem die Enden festgeklemmt sind oder nicht. Im letzteren Falle erhält man als modifizierte Periode, wenn E der Elastizitätsmodul, q der Querschnitt der Saite und k dessen Trägheitsradius ist:

$$(61) \qquad T' = T\left(1 - \frac{q k^2 E}{2 S} \frac{m^2 \pi^2}{l^2}\right) \quad .$$

Wie man sieht, wächst der Einfluß der Steifigkeit rapide mit der Ordnungszahl der Partialschwingung, und diese hören auf in harmonischem Verhältnis zueinander zu stehen. — Drittens ist die Dämpfung der Schwingungen zu berücksichtigen, und zwar durch Einfügung eines Gliedes $\varepsilon\, dv/dt$ in die Grundgleichung; das Ergebnis ist das Auftreten eines Exponentialfaktors mit negativem Zeitexponenten in der Lösung. — Viertens ist zu dem Falle der freien der der erzwungenen Schwingungen hinzuzufügen, und zwar durch Einfügung eines Gliedes in die Grundgleichung, das eine periodische Kraft darstellt; die Anwendung läßt sich z. B. auf eine elektromagnetisch oder durch Streichen mit dem Bogen erregte Saite machen; man vergleiche hierüber u. a. HELMHOLTZ.[1] — Fünftens kann auf die Saite auch noch eine konstante Kraft, z. B. die Schwerkraft wirken; die Folge wird eine Asymmetrie der Gestalt und Bewegung sein, bei der Schwerkraft wird sich z. B. eine Verschiedenheit ergeben, je nachdem

[1] H. v. HELMHOLTZ, Tonempfindungen, Beilage VI.

die Saite horizontal oder vertikal ausgespannt ist. — Sechstens kann man die Modifikationen untersuchen, die auftreten, wenn die Saite nicht homogen ist, wenn z. B. die Dichte oder die Dicke sich längs ihrer gesetzmäßig ändert. Man kann hierauf, wie Lord RAYLEIGH gezeigt hat, die Methode der kleinen Variationen anwenden, also das kompliziertere Problem unter der Annahme, daß die Abweichungen nur gering sind, auf das einfachere zurückzuführen; dabei bedient man sich mit Vorteil der Normalkoordinaten und drückt die Energie des Systems in diesen aus. Als Beispiel behandelt Lord RAYLEIGH die Verschiebung des Mittelknotens bei der ersten Oberschwingung einer Saite durch die Wirkung einer Masse gleich dem p-fachen der Dichte, konzentriert im Abstand $p/4$ von einem Ende; das Ergebnis ist, daß die Verschiebung $-p/2$ beträgt, und zugleich wird die Periode der Schwingung verändert in einer Weise, die man durch eine Potenzreihe nach p/l ausdrücken kann.[1] — Siebentens wird die Temperatur einen Einfluß ausüben; bei Längsschwingungen wird die Schwingungszahl wegen des Faktors E mit steigender Temperatur einfach abnehmen, bei Querschwingungen wird der Einfluß davon abhängen, wie sich der Spannungszustand ändert, was z. B. für homogene und für besponnene Saiten verschieden ausfällt. — Achtens sind die Mannigfaltigkeiten zu verfolgen, die auftreten, wenn beide Querkomponenten v und w vorhanden sind und sich zu krummlinigen Querschwingungen zusammensetzen; das Ergebnis sind die LISSAJOUSschen Kurven, von denen in der „Akustik" die Rede sein wird.

Schließlich sei noch auf eine experimentelle Arbeit von ST. MEYER[2] hingewiesen, in der die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Impulses in einem mittels zweier Fäden zwischen Federn ausgespannten 18 m langen Drahte durch elektrische Fixierung von Anfang und Ende der Welle gemessen und im wesentlichen in Übereinstimmung mit der Theorie befunden wird.

b) Stäbe.

Längsschwingungen von Stäben. Gehen wir nunmehr von Saiten zu Stäben über, so können wir uns auf wenige Bemerkungen hinsichtlich der Längsschwingungen beschränken; denn in bezug auf die Längsschwingungen hat die Steifigkeit begreiflicherweise keinen anderen Einfluß, als daß die Möglichkeit gegeben ist, statt mit festen auch mit freien Enden zu operieren, womit sich gemäß den Bedingungen:

$$\text{(62)} \qquad \text{festes Ende:} \quad v = 0 \quad , \qquad \text{freies Ende:} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

der Charakter des Reflexionsprozesses der fortschreitenden Welle ändert — diese kehrt sich der Amplitude bezw. Phase nach nicht um, sondern bleiben aufrecht —, und infolgedessen ist die Grundschwingung z. B. eines Stabes mit einem freien Ende doppelt so langsam wie die des beiderseits festen; die Oberschwingungen bleiben harmonisch, nur beschränkt sich die Reihe auf die ungeraden Ordnungszahlen, da die Grundschwingung eine Viertelwelle (Knoten bis Bauch), die erste Oberschwingung dreiviertel Wellen u. s. w. darstellt; absolut verglichen, hat man also, an Stelle der Partialschwingungen 2, 4, 6 ... bei zwei festen Enden hier die Reihe 1, 3, 5 ... bei einem festen und einem freien Ende; wieder anders bei einem Stabe mit freien Enden, der in der Mitte festgehalten wird, und den man als aus zwei einerseits festen, andererseits freien Stäben zusammengesetzt ansehen kann. — Schließlich ist noch zu fragen, welchen Einfluß die, wie wir wissen, mit den Längsdehnungen und Zusammenziehungen verknüpften Quer-

[1] Lord RAYLEIGH, Theorie des Schalles. I. § 90f. p. 121. — [2] ST. MEYER, Wien. Ber. 105. 1015. 1896.

zusammenziehungen und Dehnungen etwa ausüben. Die Antwort liegt bei gewissen Annahmen in der Gleichung (k der Trägheitsradius des Querschnitts für die Zentrallinie):

$$\varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{63}$$

und schließlich in der Formel

$$T' = T\left(1 + \frac{m^2\pi^2\mu^2}{4}\left(\frac{r}{l}\right)^2\right) \tag{64}$$

für die modifizierte Periode T'. Wie man sieht, ist die Korrektion für die Grundschwingung von der Größenordnung des Quadrats des Verhältnisses des Radius zur Länge, also sehr klein; für höhere Partialschwingungen kann sie aber wegen des Faktors m^2 merklich werden.[1]

Wenn Kräfte wirken, sind diese in die Gleichung einzufügen; so wird für einen vertikalen, vom festen oberen Ende herabhängenden Stab, an dessen unteres Ende plötzlich ein Gewicht angehängt wird, dessen Masse die m-fache des Stabes ist, die Grundgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g$$

und die Dilatation zur Zeit t

$$\gamma = \frac{g(l-z)}{a^2} + \frac{g m l}{a^2}\left[2 - e^{-\frac{at-z-l}{ml}} - e^{-\frac{at+z-l}{ml}}\right] , \tag{65}$$

speziell für das freie Ende ($z = l$):

$$\Gamma = \frac{g m l}{a^2}\left[2 - e^{-\frac{at-2l}{ml}} - e^{-\frac{at}{ml}}\right] , \tag{66}$$

dagegen für das feste Ende (d. h. die Dilatation des obersten Stabelements), $z = 0$:

$$\gamma_0 = \frac{gl}{a^2}(1+m) - \frac{2gml}{a^2}e^{-\frac{at-l}{ml}} . \tag{67}$$

Für $m = 1$ z. B. wird

$$\gamma_0\ (\text{dynamisch}) = 3{,}27\,\frac{gl}{a^2} , \qquad \gamma_0\ (\text{statisch}) = 2\cdot\frac{gl}{a^2} ,$$

also bei Schwingungen 1,63 mal so groß; für $m = 2$ wird dies Verhältnis 1,68, für $m = 4$ wird es 1,84, und so nähert es sich der theoretischen Grenze 2, von der schon oben (p. 715) die Rede war.

Die Longitudinalschwingungen von Stäben mit längs der Achse veränderlichem Querschnitt sind ebenfalls mehrfach behandelt worden. So betrachtet NABL[2] den Stab als einen Rotationskörper, stellt für diesen die Gleichung auf und integriert sie für den besonderen Fall eines konischen Stabes. Alle Partialschwingungen erweisen sich dabei als rascher als bei gleich langem, zylindrischem Stabe, das Verhältnis nähert sich aber mit der Ordnungszahl der Partialschwingung mehr und mehr der Eins. Auch die Knotenpunkte weichen von jenen ab, sie sind nämlich nach dem dickeren Ende verschoben, und auch diese Verschiebung wird für die höheren Schwingungen immer kleiner. Versuche bestätigen diese theoretischen Ergebnisse annähernd.

---

[1] Hierüber, sowie über die Wirkung verschiedener Querschnittsformen vergl. man, außer Lord RAYLEIGH, noch: C. CHREE, Quart. J. **23**. 317. 1889. — [2] J. NABL, Wien. Anz. 1902. p. 207; Wien. Ber. **111**. 846. 1902.

Querschwingungen von Stäben. Während sich hinsichtlich der Längsschwingungen Saiten und Stäbe in der Hauptsache gleich verhalten, tritt für die Querschwingungen ihr verschiedener Charakter gegenüber biegenden Kräften schroff zutage. Die Grundgleichung wird nämlich für Stäbe nicht von der zweiten, sondern von der vierten Ordnung; sie lautet allgemein, wenn wieder q der Querschnitt und k sein Trägheitsradius ist:

(68) $$q\,k^2 E \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \varrho\, q \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = 0$$

und einfacher, wenn von der Drehungsträgheit des Querschnitts, was gewöhnlich erlaubt ist, abgesehen und für E/ϱ wieder a^2 geschrieben wird (a hat aber hier, wie sich zeigen wird, nicht die Bedeutung einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen):

(69) $$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - k^2 a^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad ;$$

dazu für die Enden gewisse Bedingungen, die bei der gedachten Vereinfachung in der Form

(70) $$\begin{cases} \text{feste Enden:} \quad v = 0 \quad \text{und} \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \text{freie Enden:} \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{und} \quad \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \\ \text{unterstützte Enden:} \\ \qquad v = 0 \quad \text{und} \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

geschrieben werden können; schließlich Anfangswerte für v und dv/dt als Funktionen f und F von x. Als Lösung kann man, wenn man sich wieder auf eine einzige Querkomponente v beschränkt, ansetzen

(71) $$v = P \cos \omega^2 k a t + P' \sin \omega^2 k a t \quad ,$$

und hierin sind P und P' folgende Funktionen von x:

(72) $$\begin{cases} P = A \cos \omega x + B \sin \omega x + C\left(e^{\omega x} + e^{-\omega x}\right) + D\left(e^{\omega x} - e^{-\omega x}\right) \\ P' = A' \cos \omega x + B' \sin \omega x + C'\left(e^{\omega x} + e^{-\omega x}\right) + D'\left(e^{\omega x} - e^{-\omega x}\right) \quad . \end{cases}$$

Wegen der lokalen Grenzbedingungen muß aber, wenn beide Enden frei sind, zwischen ω und l die transzendente Gleichung

$$\frac{2}{e^{\omega l} + e^{\omega l}} = \cos \omega l$$

bestehen, deren Wurzeln $\psi = \omega l$ irrational zueinander sind, nämlich die ersten:

$$\psi_1 = \tfrac{3}{2}\pi + 1^0\,0'\,41'' = 4{,}73 \qquad \psi_3 = \tfrac{7}{2}\pi + \quad 7'' = 11{,}02$$
$$\psi_2 = \tfrac{5}{2}\pi - \quad 2'\,40'' = 7{,}85 \qquad \psi_4 = \tfrac{9}{2}\pi - 0{,}8'' = 14{,}14 \quad ;$$

je höher die Ordnungszahl m, desto genauer nähern sich diese Wurzeln dem Werte $\frac{1}{2}(2m+1)\pi$. Ähnlich für ein festes oder für unterstützte Enden. Schließlich wird die Schwingungszahl der m. Partialschwingung:

(73) $$N_m = \frac{k \psi_m^2}{2 \pi l^2} \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad ,$$

also z. B. für kreisförmigen Querschnitt ($k = R/2 = d/4$)

$$N_m = \frac{R\psi_m^2}{4\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \frac{d}{8\pi}\,\frac{\psi_m{}^2}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} \tag{74}$$

und speziell für die Grundschwingung:

$$N_1 = 0{,}9\,\frac{d}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\;, \tag{75}$$

dagegen für quadratischen Querschnitt (Kante d, $k = d/2\sqrt{2}$):

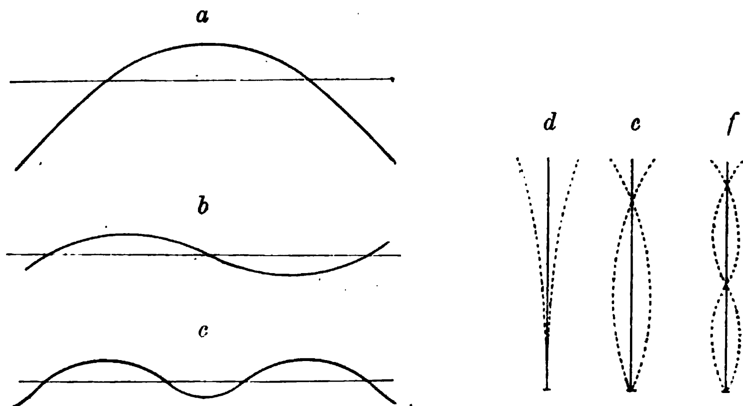
$$N_1 = 1{,}8\,\frac{d}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\;, \tag{76}$$

also bei gleicher Dicke fast um die Hälfte schneller.

Wie man sieht, ist die Schwingungszahl der Grundschwingung mit der Dicke und der Wurzel ans dem Elastizitätsmodul direkt, mit dem Quadrat der Länge und der Wurzel aus der Stoffdichte umgekehrt proportional; die höheren Partialschwingungen sind außerdem annähernd mit den Quadraten der ungeraden Zahlen proportional, desto genauer, je höher. Für andere Querschnitte kommt nur derjenige Trägheitsradius in Betracht, in dessen Richtung die Schwingungen stattfinden. — Auch die Knotenpunkte, die STREHLKE berechnet und beobachtet hat, liegen hier irrational, sie teilen den Stab in ungleiche Teile; für zwei freie Enden z. B. liegen sie in folgenden Tausendsteln der Länge:

Grundschwingung:	224	726			
1. Oberschwingung:	132	500	868		
2. „	94	358	642	906	
3. „	73	279	500	721	927

u. s. w. (Figur 238 *a*, *b*, *c*); ähnlich bei einem festen, einem freien Ende (Figur 238 *d*, *e*, *f*. Vergleicht man die Längs- und die Querschwingungen eines und desselben Stabes,



Figur 238.

so findet man, daß das Verhältnis nur abhängt von dem Verhältnis der Länge zur Dicke, nämlich

$$\frac{N_m}{n_m} = \frac{16}{\pi}\,\frac{m}{(2m+1)^2}\,\frac{l}{d}\;, \qquad \text{speziell} \qquad \frac{N_1}{n_1} = 0{,}56\,\frac{l}{d}\;, \tag{77}$$

für einigermaßen gestreckte Stäbe ist also die Längsschwingung sehr viel rascher als die Querschwingung. — Die allgemeinste Querschwingung ist nun aus den obigen Partialschwingungen wieder in ähnlicher Weise aufzubauen wie bei den

Saiten; nur wird die Zusammensetzung und die Bestimmung der Koeffizienten hier viel komplizierter, weil es sich nicht um zwei, sondern um acht Serien von Koeffizienten, $ABCD$ und $A'B'C'D'$ handelt, und weil von diesen nur vier trigonometrische, die andern aber exponentielle und zwar sogenannte hyperbolische Funktionen darstellen. Je nach der Konstitution der Enden (frei, aufgestützt, eingeklemmt) und je nach der Natur der Erregung (weggebogen und losgelassen, also ohne Impuls, oder gehämmert, also ohne ursprüngliche Elongation) werden einige obiger acht Reihen ausfallen und die anderen von bestimmter Gesetzmäßigkeit werden; es muß aber in dieser Hinsicht auf die Werke von CLEBSCH, Lord RAYLEIGH u. s. w. verwiesen werden.

Die Grundgleichung für die Querschwingungen von Stäben ist von DANIEL BERNOULLI aufgestellt und integriert worden, das Verfahren dabei ist dann von EULER, RICCATI, POISSON, CAUCHY und vielen Andern verbessert oder weiter entwickelt worden. Die Drehungsträgheit der Querschnitte und ihren Einfluß auf die Querschwingungen hat zuerst DE SAINT-VENANT behandelt; das Eigengewicht des Stabes hat ZÖPPRITZ berücksichtigt und die alsdann geltende kompliziertere Gleichung integriert. Endlich hat STREHLKE die Rechnung für Schwingungsdauern und Lage der Knoten durchgeführt und experimentell geprüft.[1]

Aus dem Umstand, daß die Periode bei den Querschwingungen der Stäbe nicht von der Länge, sondern von deren Quadrat abhängt, folgt sofort etwas sehr merkwürdiges: daß es nämlich für Transversalwellen in Stäben eine eigentliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit als charakteristische Konstante, wie in allseitig ausgedehnten Körpern oder wie für die Querwellen in Saiten oder für die Längswellen in Stäben nicht gibt; denn nicht nur für verschiedene l wird sie verschieden, sondern auch bei einem und demselben Stabe ist sie verschieden für verschiedene Partialschwingungen, d. h. Wellenlängen. Es liegt das offenbar daran, daß die Grundgleichung von der vierten Ordnung nach x, aber immer noch von der zweiten nach t ist. Die Folge ist die, daß eine zusammengesetzte Welle sich nicht, wie in den anderen Fällen, als Ganzes fortbewegt, daß sie sich vielmehr in ihre Bestandteile auflöst, indem die langsameren Schwingungen voraneilen und die schnelleren zurückbleiben.

Lord RAYLEIGH hat, um der exakten Lösung des Problems näher zu kommen, die Frage aufgeworfen, wie man einen fest-freien Stab verbiegen müsse, um diejenige Kurve zu erhalten, die er bei den freien Querschwingungen annimmt. Die Wegbiegung am freien Ende liefert ein nur roh annäherndes Ergebnis; dagegen erhält man eine gute Übereinstimmung, wenn man die biegende Kraft in ein Viertel der Länge vom freien Ende entfernt angreifen läßt. Noch besser wird sie, wie GARRET theoretisch und experimentell (durch photographische Aufnahmen und mikroskopische Messungen) nachgewiesen hat, wenn man den Angriffspunkt der biegenden Kraft in ein Fünftel der Länge vom freien Ende verlegt. Die so erhaltene Schwingungszahl der Grundschwingung des Stabes erweist sich ebenfalls als sehr nahe richtig. — Ein anderes Näherungsverfahren hat MORROW angegeben, indem er die Ausbiegung als endliche Potenzreihe darstellt, deren Gliederzahl von der Anzahl der örtlichen Grenzbedingungen abhängt; man kann dann zunächst eine erste, durch Einsetzen dieser eine zweite u. s. w. Annäherung erhalten. Die so erhaltene Schwingungszahl wird etwas zu klein, während die RAYLEIGHsche Methode etwas zu große Werte lierfert; die beiden Methoden ergänzen sich also. — MORROW hat im übrigen seine Methode ausgedehnt auf andere Befestigungsarten, auf belastete Stäbe, sowie auf Stäbe

[1] D. BERNOUILLI, Comm. Acad. Petropol. **13.** 105. 167. 1751. — L. EULER, ibid. 1779. — RICCATI, Mem. Soc. ital. **1.** 501. 1782. — S. D. POISSON, Mém. Acad. Sciences **8.** 442. 1829. — A. CAUCHY, Exerc. de math. **3.** 245. 356. — DE ST.-VENANT, C. R. **17.** 942. 1020. 1843. — R. ZÖPPRITZ, POGG. Ann. **128.** 139. 1866; **129.** 219. 1866. — Vergl. auch OKATOW, ibid. **135.** 260. 1868. — STREHLKE, ibid. **27.** 505; **28.** 512. 1833.

mit veränderlichem Querschnitt (s. u.). — Schließlich sei noch auf Arbeiten von DAVIDOGLOU und PANETTI (im Anschluß an SAINT-VENANT) hingewiesen.[1]

Für veränderlichen Querschnitt ist das Problem der Querschwingungen eines Stabes ebenfalls eingehend behandelt worden, zuerst nach seiner Methode der Variation (s. o.) von Lord RAYLEIGH, dann von KIRCHHOFF, F. VOGEL, MEYER ZUR CAPELLEN, MORROW u. A.[2] — Ist q der Querschnitt und Q das Trägheitsmoment für die Schwingungsrichtung, so ist die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho q} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(Q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \quad , \tag{78}$$

wozu noch das Verschwinden von

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \delta v \qquad \text{und} \qquad Q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \frac{\partial v}{\partial x}$$

für die Enden kommt. Setzt man $v = u \sin \lambda t$, d. h. gleich einer einfach harmonischen Schwingung, und nimmt man für q und Q die besondere Form der Veränderung an, bei der die Querdimensionen wie die m. bezw. n. Potenz von x wachsen, also

$$q = q_1 x^{m+n} \quad , \qquad Q = Q_1 x^{3m+n}$$

ist, so hat man für u die Gleichung:

$$q_1 \varrho \lambda^2 x^{m+n} \cdot u = E Q_1 \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{3m+n} \frac{d^2 u}{dx^2}\right)$$

und kann die Lösung in Gestalt BESSELscher Funktionen hinschreiben, deren höchster Exponent h sich aus einer Gleichung vierten Grades als einer der vier Werte $0, 1, 2 - 3m - n, 3 - 3m - n$ ergibt, während sich für die Koeffizienten der BESSELschen Reihe ebenfalls einfache Gleichungen angeben lassen; die Reihen schreiten, je nachdem m kleiner oder größer als 2 ist, nach steigenden oder fallenden Potenzen von x fort, der Grenzfall $m = 2$ läßt sich besonders behandeln. Für die beiden Fälle $m = 1$, $n = 0$ und $m = 1$, $n = 1$ läßt sich die Differentialgleichung vierter Ordnung auf solche zweiter zurückführen, deren Integrale BESSELsche Funktionen mit reellem oder imaginärem Argument sind. Für den ersten Fall, d. h. für einen keilförmigen oder prismatischen Stab (Kante beim freien Ende) wird u gleich der Summe der allgemeinen Integrale der beiden Gleichungen

$$\xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + 2 \frac{du}{d\xi} = u \quad , \qquad \xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + 2 \frac{du}{d\xi} = -u \quad ,$$

wo zur Abkürzung

$$x \lambda \sqrt{\frac{q_1}{Q_1} \frac{\varrho}{E}} = \xi$$

gesetzt ist. Ist für das freie Ende $x = 0$, für das feste $x = l$, so erhält man die möglichen ξ-Werte aus der Gleichung:

$$1 - \frac{\xi^2}{(2!)^2 3!} + \frac{\xi^4}{(3!)^2 5!} - \frac{\xi^6}{(4!)^2 7!} + \cdots \quad ,$$

[1] Lord RAYLEIGH, Theorie des Schalles. **1.** § 832. p. 311. — C. GARRETT, Phil. Mag. (6) **8.** 581. 1904. — J. MORROW, ibid. (6) **10.** 113. 1905; **11.** 354. 1906. — A. DAVIDOGLOU, Ann. éc. norm. (3) **17.** 359. 1900. — M. PANETTI, Atti di Torino **36.** 6. 1901. —
[2] G. KIRCHHOFF, Berl. Ber., Okt. 1879; WIED. Ann. **10.** 501. 1880; Ges. Abh., p. 339. — Lord RAYLEIGH, Theorie des Schalles **1.** 316. — F. VOGEL, Inaug.-Diss. Berlin 1881. — F. MEYER ZUR CAPELLEN, WIED. Ann. **33.** 661. 1888. — J. MORROW, Phil. Mag. (6) **10.** 113. 1905.

deren kleinste positive Wurzel 5,315 ist; man erhält also als Grundschwingungszahl

$$N' = 5{,}32 \frac{a}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad , \tag{79}$$

was im Vergleich mit der entsprechenden Zahl für einen am festen Ende gleich dicken parallepipedischen Stab (s. o.) etwa um 50% mehr ist. Ferner zeigt sich, daß der prismatische Stab bei gleichem Material und gleicher Schwingungsdauer, wenn eine gewisse Grenze für die Dilatation gesetzt ist, etwa viermal so große Elongationen des freien Endes gibt wie der parallepipedische. Für einen ebenfalls prismatischen Stab, der aber nicht bis zur Kante ausläuft, gelten natürlich dazwischenliegende Verhältnisse. — In ähnlicher Weise kann man den anderen Fall behandeln, der einem kegelförmigen (event. auch einem pyramidalen) Stabe, mit der Spitze am freien Ende, entspricht. Für den konischen Stab ergibt sich hier der Zahlenfaktor der Schwingungszahl 8,72, was etwa das $2\frac{1}{2}$fache des Wertes für einen zylindrischen, am festen Ende gleich dicken Stab ist; ferner, daß die Exkursionen des freien Endes hier etwa siebenmal so stark sein dürfen, wie beim zylindrischen.

Die KIRCHHOFFschen Entwickelungen sind von VOGEL ergänzt und experimentell geprüft worden. Ferner hat MEYER ZUR CAPELLEN für den keilförmigen Stab den andern denkbaren Fall behandelt, nämlich den, wo die Querschwingungen nicht parallel zur Ebene des Keildreiecks, sondern senkrecht zu ihr erfolgen; die Methode ist ganz entsprechend. Als Zahlenfaktor der Schwingungszahl ergibt sich hier 7,16, also wiederum ein Drittel mehr als bei KIRCHHOFF und mehr als das Doppelte wie bei einem parallepipedischen Stabe. Weiter werden die Knotenpunkte der verschiedenen Partialschwingungen ermittelt und ihre Abweichung von denen des parallepipedischen Stabes betrachtet. Schließlich wird der keilförmige Stab mit einem Kreissektor von sehr kleinem Winkel verglichen und das anscheinend paradoxe, in Wahrheit leicht verständliche Ergebnis abgeleitet, daß diese beiden Stäbe, die sich doch nur durch einen winzigen Defekt am breiten Ende unterscheiden, doch merklich verschiedene Schwingungszahlen haben, was sich durch die prinzipiell verschiedene Schwingungsform erklärt. — Die neueste hierher gehörige Arbeit ist die von MORROW, in der teils die KIRCHHOFFschen Formeln bestätigt, teils neue aufgestellt werden für andere Gesetze, nach denen sich die Querschnittsbreite längs der Stabachse ändert.

Übergang zwischen Saiten und Stäben. Die einfachen Theorien der Querschwingungen von Saiten einerseits, Stäben andrerseits stellen zwei Extreme dar, und diese Extreme sind, wie wir sahen, von sehr verschiedenem Charakter. Bedenkt man aber, daß man einerseits bei den Saiten den Einfluß der Steifigkeit berücksichtigen muß, und daß man andererseits auch Stäbe bei zu der natürlichen Elastizität hinzutretender künstlicher Spannung der Rechnung unterwerfen kann, so sieht man, daß es alle Übergänge zwischen jenen Extremen geben wird; und es kann in besonderen Fällen zweifelhaft sein, ob man das System noch zur einen oder schon zur anderen Art rechnen solle. Das hat wiederholt zu Unstimmigkeiten geführt, für die man, ehe obiger Sachverhalt klar erkannt wurde, nach besonderen Erklärungen suchte. Man vergleiche hierzu die altberühmten Untersuchungen von SAVART, an die in neuerer Zeit u. A. CARDANI[1] mit experimentellen Arbeiten anknüpft; das Detail dieser gehört aber in die „Akustik".

Bei dieser Gelegenheit sei noch eine Arbeit erwähnt, die sich mit dem Verhalten eines Kautschukstreifens beschäftigt, der, von quadratischem Querschnitt, stark gedehnt und zugleich Transversalschwingungen ausgesetzt wird. Zunächst ergibt sich experimentell, daß der Elastizitätsmodul proportional ist der durch die

[1] P. CARDANI, Rend. Acc. Linc. (4) **4.** I. Sem. 524. 705. 818; II. Sem. 105. 1888; Nuov. Cim. (3) **26.** 244. 1889.

Dehnung erreichten Länge; dann weiter durch Rechnung, daß das Quadrat der Schwingungszahl proportional ist mit $(L - l)/L$, wo l die ursprüngliche, L die endgültige Länge ist. Die Schwingungen werden also immer rascher, anfangs, bei beginnender Dehnung in hohem, allmählich in immer schwächerem Maße.[1]

Transversalschwingungen gekrümmter Stäbe. Dieses Problem findet bekanntlich eine wichtige Anwendung in der Akustik auf die Schwingungen der Stimmgabeln; auch vom Standpunkte der Elastizitätstheorie bietet es hohes Interesse, freilich aber auch Schwierigkeiten, die nur einfachere Fälle zu lösen erlauben; Beiträge hierzu haben u. A. BRESSE, HOPPE, LAMB, LOVE, MICHELL geliefert. Der Stab bilde einen Kreisring vom Radius R oder einen Teil davon, der Querschnitt sei ebenfalls ein Kreis vom Radius r, die Masse der Längeneinheit ϱ. Es kommen dann als selbständige Variable die Zeit t und der Polarwinkel Θ in Betracht, als abhängige die drei Verrückungskomponenten u in radialer, w in peripherischer, v in auf der Ringebene senkrechter Richtung, endlich noch der Drillungswinkel um die Mittellinie. Man sieht also, daß das Problem sehr verwickelt ist; man muß die sechs Formeln für die Spannung, die beiden Scherungskräfte, die beiden Biegungskräftepaare und das Drillungskräftepaar aufstellen und daraus die Grundgleichung bilden. Einfacher wird die Sache, wenn man in der Ringebene bleibt, so daß es sich nur um u und w handelt, oder sogar nur um eine dieser beiden Größen, da sie, wenn, wie beim Gleichgewicht, die Annahme unveränderlicher Länge der Mittellinie gemacht wird, miteinander in der Beziehung $dw/d\Theta = u$ steht. Setzt man nun:

$$w = W \cos(mt + p) \quad , \tag{80}$$

betrachtet also eine einfache Schwingung, so erhält man bei gewissen Vernachlässigungen für W die gewöhnliche Differentialgleichung sechsten Grades

$$\frac{d^6 W}{d\Theta^6} + 2\frac{d^4 W}{d\Theta^4} + \frac{d^2 W}{d\Theta^2}\left(1 - \frac{4\varrho R^4 m^2}{\pi E r^4}\right) + \frac{4\varrho R^4 m^2}{\pi E r^4} W = 0 \quad , \tag{81}$$

und die Lösung ist von der Form

$$W = \sum_{1,2,3}(A_k \cos f_k \Theta + B_k \sin f_k \Theta) \quad , \tag{82}$$

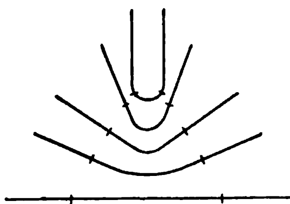
wo die drei f die Wurzeln der Gleichung

$$f^2(f^2-1)^2 = (f^2+1)\frac{4\varrho R^4 m^2}{\pi E r^4}$$

sind. Ist der Ring vollständig, also geschlossen, so muß f eine ganze Zahl (mindestens 2) sein, die Schwingungszahl ist dann durch die von HOPPE gefundene Gleichung

$$m = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{f(f^2-1)}{\sqrt{f^2+1}} \tag{83}$$

gegeben, und die Anzahl der Wellen, in die sich der Ring teilt, ist f. Ist der Ring unvollständig, so muß man die Kräftebedingungen für die beiden Enden einführen und erhält dann recht verwickelte Formeln, die allgemein schwer zu deuten sind. Für schwache Krümmung wird die Schwingungszahl etwas kleiner als für einen sonst gleichen geraden Stab.


Figur 239.

Auf den Fall der Stimmgabeln ist das obige Resultat nicht direkt anwendbar, da die Gestalt hier von der Kreisbogenform gar zu sehr abweicht. Man

[1] T. J. BAKER, Phil. Mag. (5) 49. 347. 1900.

kann sich die Stimmgabel aus dem geraden Stabe hervorgegangen denken durch sanfte Biegung der Stabmitte bei gerade bleibenden Enden, etwa nach Art der Figur 239. Die Knoten der Grundschwingung, die hier verzeichnet sind, rücken immer mehr zusammen, und die Schwingungszahl der Grundschwingung wird dabei immer kleiner, zuletzt, bei parallelen Zinken, ist sie kaum noch zwei Drittel derjenigen, die der ursprünglich gerade Stab gab; analog für die höheren Partialschwingungen (vergl. „Akustik").

Für die Schwingungen des vollständigen Ringes senkrecht zu seiner Ebene gilt, wie MICHELL gezeigt hat, die der obigen ähnliche Gleichung

(84) $$m = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{f(f^2-1)}{\sqrt{f^2+1+\mu}} .$$

Während also die Schwingungen in der Ringebene nur von E, hängen die dazu senkrechten auch von μ ab und sind infolgedessen etwas langsamer; die Elastizitätszahl spielt aber, wie man sieht, nur eine sehr geringfügige Rolle, da sie zu f^2+1 addiert ist, was selbst für die Grundschwingung $f = 2$ bei $\mu = \frac{1}{4}$ nur $5\,^0/_0$, für n selbst also nur $2\,^1/_2\,^0/_0$ ausmacht, für die höheren Schwingungen aber noch viel weniger. — Hiervon abgesehen, sind also die Schwingungszahlen des Ringes proportional mit der Wurzel aus dem Verhältnis des Dehnungsmoduls zur Liniendichte sowie mit dem Quadrat des Verhältnisses von Querschnittsradius zum Ringradius, endlich für die verschiedenen Partialschwingungen im Verhältnis von

1.	2.	3.	4.	5.	....
$\frac{2\cdot 3}{\sqrt{5}}$	$\frac{3\cdot 8}{\sqrt{10}}$	$\frac{4\cdot 15}{\sqrt{17}}$	$\frac{5\cdot 24}{\sqrt{26}}$	$\frac{6\cdot 35}{\sqrt{37}}$	....
= 2,68	7,59	14,6	23,5	34,5	....

oder, auf die Grundschwingung bezogen:

1	2,83	5,42	8,77	12,87	....

je höher hinauf, desto genauer stimmen diese Verhältnisse überein mit denen der Quadrate der ungeraden Zahlen:

9	25	49	81	121	....

Im übrigen ist auf die Literatur zu verweisen.[1]

Kinetische Bestimmung des Dehnungsmoduls. Da in den Formeln für die Longitudinal- und Transversalschwingungen der Modul E vorkommt, kann man ihn auf diesem Wege ermitteln; dabei wird die Methode der Longitudinalschwingungen als direktere im allgemeinen vorzuziehen sein, in gewissen Fällen hat aber auch die transversale ihre Vorzüge; beide Methoden sind natürlich wegen der Schnelligkeit der beiden Arten von Schwingungungen akustischen Charakters, und es ist wegen der spezifisch akustischen Methodik auf die „Akustik" zu verweisen. Hier sei nur angeführt, daß man die Stäbe, Drähte oder Fäden entweder direkt beobachtet oder in geeigneter Weise die Schwingungen auf angegliederte Körper überträgt, was in mancher Weise Vorteile bietet. Man vergleiche hierzu Arbeiten von MELDE, TOMLINSON, MERCADIER, KUNDT, WINKELMANN und SCHOTT (Glasröhren), SEARLE, CASSIE, F. A. SCHULZE (rechteckige

[1] M. BRESSE, Des mouvements vibratioires etc. in dem Cours de mécanique appliqué. Paris 1859 (1880). — Lord RAYLEIGH, Theorie des Schalles, **1.** 421. — R. HOPPE, CRELLES Journ. **73.** 158. 1871. — H. LAMB, Proc. Lond. math. Soc. **19.** 365. 1888. — H. MICHELL, Mess. of math. **19.** 1890. — A. E. H. LOVE, Th. of elast. p. 430; Proc. Lond. math. Soc. **24.** 118. 1893 (behandelt auch die Längs- und Drehschwingungen des Ringes). — Vergl. auch A. B. BASSET, ibid. **23.** 105. 1892.

Stäbe), SCHNEEBELI (kreisförmige Stäbe), KUSAKABE, CARDANI, BELL u. A.[1] Die KUNDTsche Methode liefert die einfache Formel

$$E = \frac{v^2 \cdot s}{9810} \quad , \qquad v = 330\, q \sqrt{1 + 0{,}004\, t} \tag{85}$$

für E im praktischen Maße, wo v die Schallgeschwindigkeit in Metern, s das spezifische Gewicht des Stoffes, aus dem die Röhre besteht, t die Temperatur und q das Verhältnis der Wellenlängen desselben Tones in dem Stoffe und in Luft bedeutet. — Die Methode von MELDE besteht darin, daß mit einer dauernd schwingenden schweren Gabel der leichte Körper so verbunden wird, daß er die ihm aufgelegten Schwingungen ausführt. Man kann hiermit nach KUSAKABE mit Vorteil das Prinzip der Resonanz verbinden, indem man die größte Amplitude der erzwungenen Schwingungen feststellt, die dann identisch mit den freien sind. Es wird demgemäß das Probestück an einem Ende befestigt, in freien Schwingungen erhalten, an sein freies Ende ein Draht von bekannter Dichte und bekannter Spannung geknüpft und die Länge dieses Drahtes ermittelt, bei der er am stärksten schwingt; die Formel für E läßt sich dann leicht angeben. — Eine ähnliche Methode verwendet auch CARDANI; nur wird hier Periode und Spannung des angeknüpften Drahtes gemessen und hieraus auf die Längenänderungen des Versuchskörpers geschlossen bezw. umgekehrt. — SEARLE spannt den Versuchsdraht horizontal aus, senkrecht zu zwei horizontalen und parallelen Stäben, in deren Mitten der Draht befestigt ist; jeder Stab wird in seiner Mitte von einem leichten Vertikalfaden getragen. Wird den Fäden eine kleine Drillung in entgegengesetzten Richtungen gegeben, so schwingen die Stäbe in horizontaler Ebene, der Draht aber wird in dieser Ebene abwechselnd nach beiden Seiten kreisförmig gebogen; aus der Schwingungsdauer ergibt sich E. — Ähnlich ist das Verfahren von CASSIE. Ein horizontales, passend beschwertes Stäbchen wird von zwei vertikalen Drähten getragen, macht einerseits um die vertikale Mittellinie Torsionsschwingungen n, andererseits in der Ebene beider Drähte Schwingungen n', bei der die beiden Drähte sich abwechselnd dehnen und zusammenziehen; nach Änderung des Abstands der Drähte erhält man entsprechend N und N'; dann ist der Modul der Drähte, wenn m die Masse des Stäbchens ist:

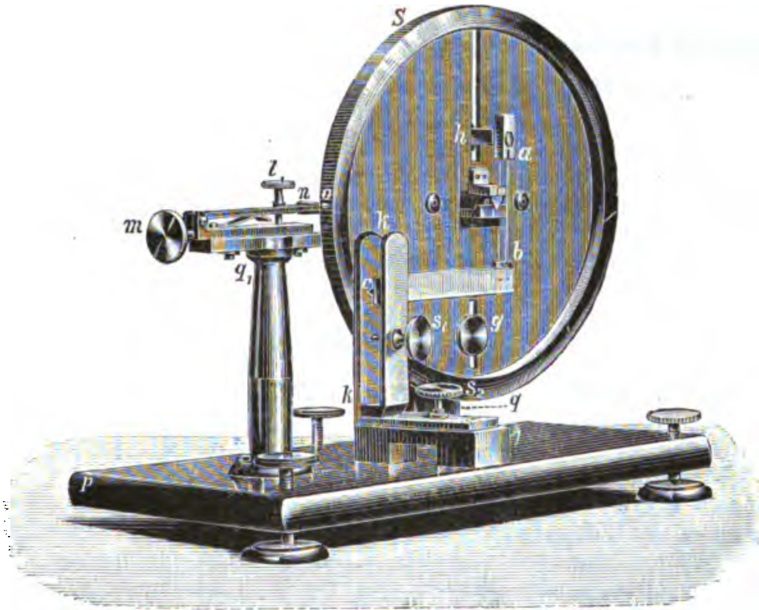
$$E = \frac{m g}{2} \cdot \frac{N'^2 - n'^2}{N^2 - n^2} \quad . \tag{85a}$$

Ganz besonders wohlüberlegt und sorgfältig durchgearbeitet ist die Methode von VOIGT. Sie beruht auf dem Gedanken, daß die statischen Formeln für die beiden Moduln unmittelbar auf Schwingungen angewandt werden dürfen, wenn nur durch Hinzufügung einer schweren Masse zu dem Versuchskörper die Schwingungsdauer derart verlängert wird, daß sie als unendlich groß gegen die Zeit angesehen werden kann, die zur Fortpflanzung der Welle über die Stablänge erforderlich ist. Bestimmt man also die Periode der Querschwingungen T und mißt die Dimensionen l, b, d des Stabes, sowie das Trägheitsmoment der ganzen Masse M, so erhält man den Elastizitätsmodul aus der Formel:

$$E = 4\pi^2 \frac{12\, M}{T^2} \cdot \frac{l}{b\, d^3} \quad . \tag{86}$$

[1] H. TOMLINSON, Proc. Roy. Soc. Lond. **42.** 362; **43.** 88. 1887. — E. MERCADIER, C. R. **108.** 344. 1889. — P. CARDANI, Rend. Accad. Linc. **5.** I. Sem. 892. 1889. — W. VOIGT. WIED. Ann. **48.** 674. 1893. — G. SEARLE, Phil. Mag. (5) **49.** 193. 1900. — W. CASSIE, ibid. (6) **4.** 402. 1902. — R. SCHNEEBELI, POGG. Ann. **140.** 598. 1870. — F. A. SCHULZE, Marb. Ber. **8.** 80. 1903; Ann. d. Phys. **13.** 583; **14.** 848. 1904. — A. WINKELMANN u. O. SCHOTT, WIED. Ann. **51.** 709. 1894. — S. KUSAKABE, Publ. Earthquake Comm. Tokyo Nr. 22B. p. 27. 1906. — C. BELL, Phil. Mag. (6) **9.** 413. 1905; diese Arbeit betrifft den Modul von sieben Glassorten. — Die weitere Literatur sehe man in der „Akustik" nach.

Der den gedachten Anforderungen in jeder Hinsicht entsprechende Apparat ist in Figur 240 abgebildet; *a b* ist der Stab, *S* die schwere mit ihm verbundene Scheibe, *n* eine den Knopf *o* in Zwangslage festhaltende Zange, durch deren Wegzug die Scheibe in kleine Schwingungen in ihrer Ebene und dadurch der Stab in kreisförmige Biegungsschwingungen versetzt wird, die mit Spiegel und Skale gemessen werden; die Einzelheiten sind im Original nachzulesen, nur sei angeführt, daß die Periode länger als von der Größenordnung einer Minute war.



Figur 240.

Was das Ergebnis aller dieser Untersuchungen, abgesehen von den schon im Artikel „Zug und Druck" benutzten Zahlenwerten betrifft, so ist ein Unterschied des kinetischen und des statisch bestimmten Wertes von *E* nicht mit Sicherheit nachgewiesen; es sind zwar gewisse Anzeichen vorhanden für gewisse Einflüsse (Spannung, Schwingungszahl); es bedarf aber jedenfalls sichereren Materials, um daraus Schlüsse zu ziehen. Man vergleiche hierzu die Zusammenstellung älterer Vergleichsversuche (Kupffer, Wertheim u. A.) bei E. Warburg[1], sowie namentlich die Bemerkungen und die sehr anschauliche Darstellung, die Kusakabe nach einem eigenartigen graphischen Verfahren von der Frage geliefert hat.

C) Torsionsschwingungen.

[Klein gesperrt, nicht fett;]

Torsionsschwingungen von Stäben. Außer longitudinal und transversal kann ein Stab auch noch in der Weise schwingen, daß sich seine Teile um die Mittellinie drillen und entdrillen bezw. abwechselnd in entgegengesetztem Sinne drillen. Die Theorie knüpft an die betreffende Gleichgewichtstheorie unmittelbar an und ist insofern einfach, als sie wieder, wie die der Längsschwingungen, auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung führt; im übrigen wird es natürlich darauf ankommen, erstens, ob der Zylinder beliebig dick oder sehr dünn und zweitens,

---

[1] E. Warburg, Wied. Ann. **10**. 20. 1880.

ob er von kreisförmigem oder anderem Querschnitt ist. Hier soll es sich zunächst nur um den dünnen Zylinder, also den Stab handeln, und zwar den geraden.

Für einen kreisförmigen Querschnitt wird, wenn Θ der Torsionswinkel als Funktion der Zeit t und der Entfernung x des betreffenden Querschnitts vom Anfangsquerschnitt, ϱ die Dichte des Materials und K sein Torsionsmodul ist, die Grundgleichung

$$(87)\qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = \frac{K}{\varrho}\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\quad ,$$

wozu noch die Grenzbedingungen

$$\text{festes Ende: } \Theta = 0 \quad , \qquad \text{freies Ende: } \frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0$$

kommen. Wie man sieht, kommt der Zylinderradius gar nicht vor, die Gleichung ist also auf dünne wie auf dicke Stäbe anwendbar. Hierin und überhaupt ist die Gleichung, also auch die Lösung ganz analog denen für Längsschwingungen. Der einzige Unterschied ist der, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Torsionswellen längs dem Stabe eine andere ist wie für Longitudinalwellen, nämlich

$$(88)\qquad A = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E}{2\varrho(1+\mu)}}\quad ,$$

wobei also K an die Stelle von E tritt; das Verhältnis beider ist also

$$(89)\qquad A : a = 1 : \sqrt{2(1+\mu)}\quad ,$$

also nur von der Elastizitätszahl abhängig und bei mittlerem Werte dieser etwa $3:5$, genauer $1:1{,}63$. In demselben Verhältnis stehen natürlich auch die Schwingungszahlen gleicher Stäbe für Drillungs- und Dehnungsschwingungen; die äußersten Grenzen des Verhältnisses für $\mu = 0{,}1$ bezw. $0{,}5$ sind: 1,49 bezw. 1,732. Im übrigen sind die Gesetze der Schwingungszahlen, Abhängigkeit von der Länge u. s. w., ganz dieselben wie dort.

Wenn der Querschnitt nicht kreisförmig ist, muß man in die linke Seite der Grundgleichung ein Glied vierter Ordnung einfügen, das man in der Form

$$-\varrho\left(\int F^2\,dq\right)\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial x^2\,\partial t^2}$$

schreiben kann, wo F eine dem Querschnitt eigentümliche Funktion und q der Querschnitt ist; man kann diese Gleichung dann auf eine solche zweiter Ordnung

$$(90)\qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = \frac{K\sigma}{\varrho(k+k')}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}$$

reduzieren, in der k und k' die beiden Trägheitsradien des Querschnitts sind und σ ein Faktor ist, der sich für einige Querschnittsformen teils exakt, teils angenähert angeben läßt (vergl. Art. „Biegung und Drillung"). In diesem allgemeineren Falle ist somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Torsionswellen

$$(91)\qquad A' = \sqrt{\frac{K\sigma}{\varrho(k_1+k_2)}}\quad ,$$

sie hängt also von der Gestalt des Querschnitts ab.

Torsionsschwingungen werden besonders an dünnen Drähten untersucht, und diese werden zu diesem Zwecke aufgehängt und durch Belastung gestreckt. Die Schwingungsdauer der Torsionsschwingungen hängt in diesem Falle auch wesentlich von dem Trägheitsmoment der belastenden Masse ab,

und es gilt, wenn M dieses Trägheitsmoment ist, und wenn das sogenannte Torsionsmoment

$$\tau = \frac{\pi K r^4}{2 l} \tag{92}$$

des Zylinders eingeführt wird, die Gleichung

$$M \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = - \tau \Theta \quad . \tag{93}$$

Die ihr entsprechende einfache Schwingungsdauer, die hier statt der ganzen üblich ist (wie bei Pendelschwingungen), ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{M}{\tau}} = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{2 \pi l M}{K}} \quad , \tag{94}$$

d. h. sie ist proportional mit der Wurzel aus dem Verhältnis von angehängtem Trägheitsmoment und eigenem Torsionsmoment des Drahtes (s. w. u.).

Experimentell ist die Dauer von Torsionsschwingungen, ihre Amplitude, Dämpfung u. s. w. sehr bequem zu messen, da bei der gedachten Anordnung diese Schwingungen sehr langsam, d. h. weit unterhalb der Hörgrenze gelegen sind. Man kann daher im allgemeinen das gewöhnliche Verfahren für Schwingungsbeobachtungen anwenden. Die Umkehrpunkte und die Ruhelage liest man entweder an einer am Apparate befestigten Kreisteilung ab oder, was natürlich für feinere Zwecke vorzuziehen ist, man bringt am Drahte einen kleinen Spiegel an und stellt ihm in einiger Entfernung eine Skale und ein Fernrohr gegenüber (s. p. 650). Die Zeit bestimmt man mit Hilfe einer die Sekunden hörbar angebenden Uhr. Wie bei Pendelbeobachtungen wird man auch hier eine größere Anzahl von Perioden kombinieren, um genauere Mittelwerte zu erhalten. Bei der Erregung der Schwingungen durch Drillung des Fadens oder des ihn spannenden Körpers muß man mit der nötigen Vorsicht verfahren, um Schwingungen und Bewegungen anderer Art völlig auszuschließen. Will man Ort und Zeit gleichzeitig mit dem Auge verfolgen, so kann man, einem Vorschlage von Wood gemäß, die Taschenuhr oder das Chronometer auf eine horizontale Unterlage legen und durch eine unter 45° geneigt aufgestellte, halb durchsichtige, halb reflektierende Glasplatte das Bild des Zeigers in das Gesichtsfeld des Fernrohrs bringen, so daß man z. B. die von dem Spiegel bei seiner Drehung jedesmal erzeugten Lichtblitze (Bilder einer Flamme) zeitlich unmittelbar festlegen kann.[1] — Wenn die Schwingungen zu rasch erfolgen, als daß man sie einzeln verfolgen könnte (Periode kleiner als etwa zehn Sekunden), und wenn es nicht genügt, Mittelwerte aus langen Serien zu nehmen, so kann man die Schwingungen photographisch fixieren und dann einzeln in Ruhe studieren.

Auf diese Weise sind nun zunächst die Gesetze der Schwingungsdauer, wie sie die Theorie liefert, bestätigt worden; so die direkte Proportionalität mit der Wurzel aus der Länge und die umgekehrte mit dem Quadrat der Dicke, insbesondere aber die Unabhängigkeit der Periode von der Amplitude, der sogen. Isochronismus der Torsionsschwingungen, der hier nicht, wie bei Pendelschwingungen, nur angenähert und nur für kleine Amplituden, sondern genau und für beliebige Winkelverdrehungen gilt. Scheinbare Abweichungen sind wiederholt behauptet worden, so z. B. nach Versuchen seiner Schüler von Lord Kelvin eine Zunahme bei mehrstündigem oder mehrtägigem Schwingen ohne Unterbrechung; es hat sich das aber späterhin nicht bestätigt.

Die meisten neueren Untersuchungen über Torsionsschwingungen betreffen zwei Phänomene, die eigentlich nicht hierher gehören und daher nur kurz erwähnt

[1] R. W. Wood, Wied. Ann. 56. 171. 1895.

werden sollen. Erstens die regelmäßige Abnahme der Schwingungsamplitude mit der Zeit, die man als Dämpfung bezeichnet, durch das Dämpfungsverhältnis oder das logarithmische Dekrement mißt und als eine Folge von Energiezerstreuung anzusehen hat; in dem Artikel über innere Reibung, durch die man die Erscheinung beschreibt, wird darauf zurückgekommen werden. Hier sei nur des Tatsächlichen halber auf die eingehenden Studien hingewiesen, die in neuerer Zeit hierüber u. A. BOUASSE, CANTONE und PEDDIE angestellt haben, und die zum Teil auch die zweite der gedachten Fragen mit einschließen, nämlich die Asymmetrie der Torsionsschwingungen, wie sie beobachtet wird, d. h. den Umstand, daß die Torsionswinkel nach beiden Seiten nicht gleich groß sind — worauf im Artikel „Elastische Nachwirkung" eingegangen werden wird. Das Dämpfungsverhältnis ist in erster Annäherung konstant, d. h. von der Amplitude und der Zeit, d. h. der Anzahl der schon verflossenen Schwingungen unabhängig. In weiterer Annäherung zeigen sich aber interessante Abweichungen, die man in verschiedene Formeln zusammenfassen kann.

So setzt z. B. CANTONE

(95) $$\tau = \tau_1 \cdot e^{-\gamma \frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad , \qquad \Theta = A e^{-\frac{\beta t}{T}} \cos 2\pi \frac{t - \lambda}{T} \quad ,$$

wo γ und β logarithmische Dekremente sind und λ ein die Abweichung von der Proportionalität zwischen Torsionsmoment und Torsionswinkel charakterisierender Parameter ist. Mit Hilfe der Grundgleichung

(96) $$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = -\frac{\tau_1}{M} e^{-\frac{\gamma t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad ,$$

worin τ_1 das maximale Torsionsmoment ist, läßt sich nun zeigen, daß $\beta = \gamma$ und $2\pi\lambda / T = \beta/\pi$ ist, daß also λ gleichzeitig mit β verschwindet; für die Schwingungsdauer aber ergibt sich, wenn Θ_1 die maximale Winkelelongation ist, der Ausdruck:

(97) $$T = 2\pi \sqrt{M \frac{\Theta_1}{\tau_1}} \left(1 + \frac{\beta^2}{16\pi^2}\right) \quad ,$$

der sich von demjenigen erster Annäherung in zwei Hinsichten unterscheidet: erstens dadurch, daß an Stelle von Θ/τ hier Θ_1/τ_1 tritt, und zweitens durch den Faktor in Klammern. Die weitere Untersuchung zeigt, daß der erstere Einfluß merklicher ist als der zweite.

Von den reichhaltigen Arbeiten von BOUASSE sei hier nur folgendes angeführt. Um für größere Torsionsschwingungen die Beziehung zwischen Winkel und Kräftepaar zu studieren, konstruiere man aus ihnen als Abszissen und Ordinaten Kurven; diese sind anfangs offen, schließen sich aber nach längerer Fortdauer der Schwingungen und stellen alsdann die Arbeitsleistung während einer ganzen Schwingung dar. Für kleine Schwingungen sind die Flächen sehr klein und finden ein einfaches Maß in den mit ihnen proportionalen Werten des logarithmischen Dekrements; für größere Amplituden ist aber der Zusammenhang jedenfalls kompliziert, im einzelnen aber noch nicht mit Sicherheit festgestellt.[1]

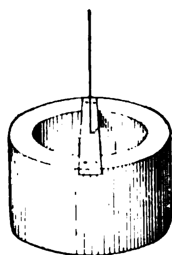
Kinetische Bestimmung des Torsionsmoduls. In ganz analoger Weise wie aus Longitudinalschwingungen den Dehnungsmodul, kann man aus Torsions-

[1] W. THOMSON (Lord KELVIN), Phil. Mag. **30**. 63. 1865. — Vgl. hierzu J. O. THOMPSON, Phys. Review **8**. 141. 1899. — G. BERSON und H. BOUASSE, C. R. **119**. 48. 1894. — H. BOUASSE, Ann. chim. phys. (7) **14**. 98. 106. 1898; Journ. de phys. (3). **8**. 241. 1899; Ann. de Toulouse **11**. 76. 1897; **12**. 33. 1898; Journ. de phys. (4) **1**. 21. 1902. — M. CANTONE, Rend. Accad. Linc. (5) **3**. II. Sem. 122. 1894; **4**. I. Sem. 437, 488. 1895; Nouv. Cim. (4) **1**. 165, 205; **2**. 180. 1895. — W. PEDDIE, Phil. Mag. (5) **38**. 36. 1894; Proc. Edinb. Soc. **22**. 212. 1898; Trans. Edinb. Soc. **39**. 425. 1898; Proc. Edinb. Soc. **23**. 16. 1900.

schwingungen den Torsionsmodul ermitteln; diese Methode spielt sogar hier eine weit größere Rolle als dort, weil die statische Methode (s. p. 649) beträchtliche Mängel besitzt. Die kinetische Methode liefert durch Umkehrung von (94) für den Torsionsmodul im absoluten Maße — im praktischen ist noch mit $981 \cdot 10^{-5}$ oder, wenn r und l in mm, M in kg·qmm gemessen sind, mit 9810 zu dividieren — die Formel:

(98) $$K = 2\pi \frac{M}{T^2} \frac{l}{r^4} \quad .$$

Man muß also l und r, d. h. Länge und Dicke des Drahtes messen, letztere, da sie wegen der vierten Potenz viel Einfluß auf die Genauigkeit hat, an möglichst vielen Stellen und in verschiedenen Querrichtungen; ferner muß man aber das Trägheitsmoment der angehängten Masse kennen. Für einige einfache, aber zu den Versuchen geeignete Formen kann man es direkt nach den Formeln auf p. 257 berechnen; für andere aus solchen Teilen zusammensetzen. Beispielsweise hat sich die Form eines Hohlzylinders (Figur 241) bewährt, der durch eine Brücke mit dem Drahte e verbunden wird; sind a und a' die beiden Radien, p und q Länge und Breite der Brücke, m und m' die beiden Massen, so ist:


Figur 241.

(99) $$M = m\frac{a^2 + a'^2}{2} + m'\frac{p^2 + q^2}{3} \quad ,$$

woran leicht noch eine Korrektion für die zur Verbindung dienenden Löcher und Stifte anzubringen ist. Eine andere geeignete Form ist die einer Kugel oder die eines massiven Zylinders. — Bei komplizierteren Körpern kann man, was auch sonst Vorteile bietet, die Kenntnis des Trägheitsmoments umgehen, wenn man zwei verschiedene, leicht aufeinander zu beziehende Anhängekörper benutzt, jedesmal die Periode bestimmt und den Modul nach der Formel

(100) $$K = \frac{2\pi l}{r^4} \frac{M' - M}{T'^2 - T^2}$$

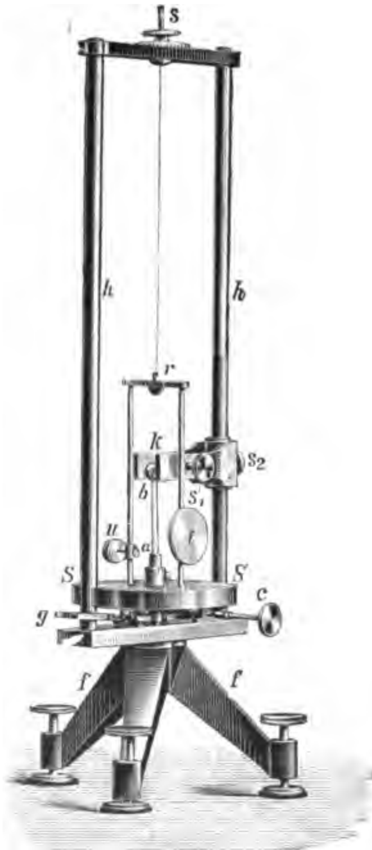
berechnet, wozu man nur die Differenz der beiden Trägheitsmomente zu kennen braucht (vgl. auch p. 341). Das wird z. B. der Fall sein, wenn man als Hauptkörper einen horizontalen zylindrischen Stab benutzt und an dessen Enden je einen vertikalen, exakt gearbeiteten Zylinder starr befestigt (nicht etwa anhängt, weil dann Sonderschwingungen auftreten); man braucht dann für $M' - M$ lediglich das Trägheitsmoment der beiden vertikalen Zylinder um die Torsionsachse einzusetzen, d. h. ihr Trägheitsmoment um die eigene Figurachse vermehrt um das Produkt ihrer Massen in das Quadrat ihres Abstands von der Torsionsachse. Die einzige Unsicherheit hierbei und in ähnlichen Fällen besteht darin, daß durch die komplizierte angehängte Masse der Begriff der Drahtlänge zweifelhaft wird; man wird hierfür eine, meist freilich sehr unbedeutende Korrektion einführen müssen. Oder man benutzt die sogen. MAXWELLsche Schwingungsnadel, d. h. eine horizontale Röhre, in die man vier Viertelröhren einschieben kann, zwei hohle und zwei mit Blei ausgefüllte, das eine Mal jene, das andere Mal diese der Torsionsachse zunächstliegend; die Differenz $M' - M$ ist alsdann das vierfache Produkt aus einer Bleimasse und dem Quadrat der Viertellänge.

Beobachtet man bei verschiedenen Temperaturen, und kommt es nur auf die relative Differenz der Moduln bei zwei verschiedenen Temperaturen an, deren Differenz $\varDelta\Theta$ ist, so braucht man auch das hinzugefügte Trägheitsmoment nicht zu kennen; es fällt nämlich heraus, und es gilt die Formel:

$$\frac{100\, K_t - K}{K_t} = \frac{100\,[(T'^2 - T_0^2) - (T_t'^2 - T_t^2)(1 + 3\,\alpha\,\varDelta\Theta)]}{T_0'^2 - T_0^2} \quad .$$

Im übrigen sei hinsichtlich der Einzelheiten der Messung auf die ausführliche Mitteilung von HORTON verwiesen; man findet dort eine elegante Koinzidenzenmethode zur Bestimmung der Schwingungsdauer, eine Vorrichtung zur Erhitzung, eine Besprechung der Fehlerquellen u. s. w. — Für Messungen in sehr tiefer Temperatur sei auf eine Arbeit von SCHAEFER aufmerksam gemacht.

Man hat übrigens die Methodik dieser Messungen noch nach verschiedenen Richtungen hin entwickelt und modifiziert, so durch besondere Art, die Drähte oder Fäden auszuspannen, durch Vorsichtsmaßregeln, wie sie für besondere Stoffe notwendig werden (Kokonfäden, Quarzfäden, Kautschuk u. s. w.); es sei in dieser Hinsicht auf die Arbeiten von SCHNEEBELI, F. A. SCHULZE, THRELFALL, BOYS, HORTON, SEARLE, CASSIE u. A. verwiesen. In einigen dieser Versuche wird der Versuchsdraht mit anderen in geeigneter Weise verbunden, und die Anordnung ist dann, entsprechend modifiziert, die nämliche, mit der auch E bestimmt wurde (s. o.); bei SCHULZE werden wegen der größeren Intensität der Torsionsschwingungen rechteckige statt kreisförmiger Querschnitte benutzt u. s. w.[1]



Figur 242.

Endlich ist auch hier auf die ausgezeichnete Methode von VOIGT[2] hinzuweisen. Sie ist seiner Methode zur Messung von E ganz analog, hier aber von den anderen oben erwähnten Methoden nicht prinzipiell verschieden, weil der Gedanke, das Trägheitsmoment durch Kombination mit einer schweren Masse zu erhöhen, hier schon älteren Datums ist. Immerhin ist die VOIGTsche Methode besonders wichtig, weil sie nur kurze Stäbe erfordert und ihre Querdimensionen — rechteckiger Querschnitt — in strenger Weise berücksichtigt. Die Formel ist

$$(101) \quad K = 4\pi^2 \frac{3M}{T^2} \cdot \frac{l}{db^3\left(1 - 0{,}63\,\frac{d}{b}\right)} \;;$$

(l Länge, b Breite, d Dicke, Verhältnis d/b kleiner als $^1/_3$, vgl. oben p. 664). Der Apparat ist in Figur 242 dargestellt; ab ist der Stab, SS die mit ihm verbundene schwere Scheibe, g der unter ihr gelegene Erregungsapparat, t der Ablesespiegel; die Elastizität des Fadens r kann vernachlässigt werden.

Die Ergebnisse der Messungen sind bereits in dem Artikel „Biegung und Drillung" mit den Ergebnissen der statischen Messungen zusammengestellt worden. Ein deutlicher Unterschied in den Resultaten beider Methoden ist, wie dort erwähnt wurde, bisher nicht aufgefunden worden, außer vielleicht für Eisen, wo er nach TOMLINSON kinetisch um etwa 2% größer ist als statisch. Auch

[1] R. SCHNEEBELI, POGG. Ann. **140.** 598. 1870. — F. A. SCHULZE, Marb. Sitz.-Ber. **8.** 80. 1903; Ann. d. Phys. **13.** 583; **14.** 848. 1904. — THRELFALL, BOYS, HORTON, s. o. p. 658 u. 659. — SEARLE, CASSIE, s. o. p. 742. — [2] W. VOIGT, WIED. Ann. **48.** 674. 1893.

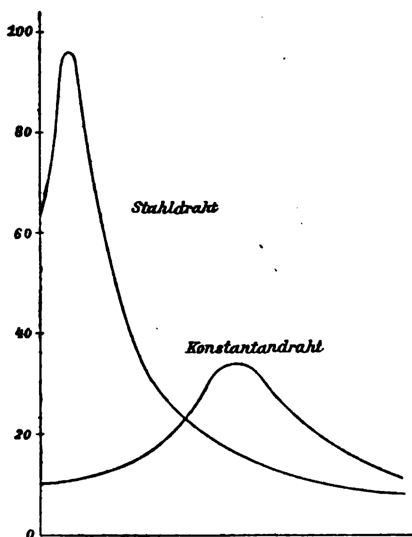
kommt dabei in Betracht, daß der kinetische Wert nach HORTON desto größer ausfällt, je längere Zeit man verstreichen läßt, und zwar ganz besonders für höhere Temperaturen — eine Erscheinung, die bei statischen Versuchen nicht mit entsprechender Deutlichkeit hervorgetreten ist, so daß ein ganz exakter Vergleich nicht durchführbar ist.[1]

D) Spiralen.

Schwingungen von Spiralen. Ein besonders interessantes Objekt geben, wie für statische Untersuchung (p. 666), so auch für dynamische die Spiralen ab, weil sich hier longitudinale, transversale und torsionale Schwingungen miteinander kombinieren; es sei namentlich auf die Arbeiten von REED, WILBERFORCE, LOVE, RICHARZ, ROGERS und BRONSON hingewiesen. REED bestimmt die Periode einer oben befestigten, unten durch eine schwere Kugel belasteten Spirale mittels elektrischen Schreibwerkes und zieht aus dem Vergleich mit theoretischen Folgerungen gewisse Schlüsse über die Übereinanderlagerung statischer und kinetischer Wirkung. — WILBERFORCE leitet für kleine Steighöhe die Bewegungsgleichung ab und findet, daß die Schwingungen, sowohl die Dehnungs- wie die Drillungsschwingungen, im allgemeinen zwei verschiedene Perioden haben; durch Änderung des angehängten Gewichts kann man gewisse interessante Beziehungen zwischen diesen Perioden herstellen und insbesondere erreichen, daß die eine von ihnen nur noch den axialen, die andere nur noch den Torsionsschwingungen zugehört; erstere bestimmt alsdann den Dehnungs-, letztere den Drillungsmodul der Spirale, die Kombination beider ergibt die Elastizitätszahl des Materials (so fand sich für Stahl 0,285, für Kupfer 0,38).

Diese Methode ist von SOMMERFELD in der Weise vervollkommnet worden, daß die beiden Arten von Schwingungen gleichzeitig angeregt werden und dadurch von dem Bilde eines Loches in einer mitbewegten Platte eine Schwingungsfigur entworfen wird, deren Gestalt direkt charakteristisch für den Wert von μ ist. Ist nämlich M die an der Längsbewegung, M' die an der Drehbewegung teilnehmende Masse, und ist N die Anzahl der Übergänge der Schwingungsfigur, so ist

$$(102) \qquad 1 + \mu = \frac{M'}{M} \cdot \frac{N-1}{N+1} \quad ;$$



Figur 243.

es läßt sich nun durch Annäherung der beiden Schwingungszahlen n und n' der Wert von N beliebig vergrößern. — Außer dieser Methode ergibt sich aber noch eine zweite, besonders feine, mit Benutzung der schon erwähnten Resonanzerscheinung. Die beiden Freiheitsgrade der Feder sind nämlich je nach dem Steigungswinkel der Spirale mehr oder weniger eng gekoppelt; man kann nun leicht durch Zusatzbelastungen das Maximum der Resonanz herstellen (vgl. die beistehende Figur 243, die die Kurven

[1] E. WARBURG, WIED. Ann. **10**. 20. 1880. — F. HORTON, Trans. Roy. Soc. Lond. A. **204**. 1. 1905. — CL. SCHAEFER, Ann. d. Phys. **5**. 220. 1901. — H. TOMLINSON, Phil. Mag. **24**. 253. 1887.

für zwei Metalle darstellt) und aus ihm alsdann den Wert von μ ableiten, wofür ebenso wie für die photographische Abbildung der Resonanzkurven u. s. w. auf das Original zu verweisen ist.[1]

Auch LOVE findet durch Rechnung die verschiedenen Typen; er trennt die Verschiebungen in normale, tangentiale und torsionale, und in jedem der beiden Wellentypen kommen im allgemeinen alle drei Klassen vor. — BRONSON stellt für die Periode der Transversalschwingungen eine lineare Funktion der Länge auf und zeigt, daß sie sich mit wachsender Länge der Konstanz nähert. — Einen interessanten Demonstrationsversuch an einer 6 m langen, von der Decke herabhängenden Spirale von 9 cm Durchmesser und 115 Windungen beschreibt RICHARZ; ein unten erteilter Longitudinalstoß braucht nämlich etwa eine Sekunde, um die Spirale zu durchlaufen, so daß man das Fortschreiten, sowie die Reflexion am festen und am freien Ende bequem beobachten kann. — Während es sich bei den bisher angeführten Arbeiten um vertikal hängende Spiralen handelt, betrifft die Mitteilung von ROGERS eine an zwei Fäden horizontal aufgehängte Spirale; hier hängen die Schwingungszahlen außer von der Elastizität auch noch von der Schwere ab, deren Wirkung sich zu jener superponiert. Die Lage der Knoten für die Oberschwingungen wird hierdurch zwar nicht beeinflußt, wohl aber die Schwingungszahlen, derart, daß sie nunmehr von der harmonischen Reihe erheblich abweichen; je größer die Anzahl der Knoten ist, desto geringer ist der Einfluß der Schwere, was leicht begreiflich erscheint. Schließlich wird eine Formel für die Schwingungszahl abgeleitet.[2]

2. Zweidimensionale Körper.

Wie bei den eindimensionalen Körpern zwischen Saiten und Stäben und unter letzteren wiederum zwischen geraden und krummen (Gabeln) zu unterscheiden ist, so ganz analog hier, bei den zweidimensionalen Körpern, zwischen Membranen und Platten und unter letzteren wiederum zwischen ebenen und krummen (Schalen, Glocken). Die Theorie ist im wesentlichen ganz entsprechend; der Umstand aber, daß hier der Abhängigkeit von der Zeit nicht die von einer Raumrichtung, sondern von zwei solchen gegenübergestellt wird, macht die Lösung viel schwieriger und verwickelter, die Ergebnisse aber auch viel mannigfaltiger und interessanter. Dafür tritt hier eine andere Vereinfachung ein, insofern von den drei Arten von Schwingungen, die eindimensionale Körper ausführen können, eine, die der Torsionsschwingungen, hier ganz wegfällt, eine zweite, die der Longitudinalschwingungen, hier nur ein sehr beschränktes Interesse darbietet, so daß in der Hauptsache nur die Transversalschwingungen übrig bleiben, bei denen die Membran bezw. Platte hin und her gebogen wird. Bei den Membranen ist dabei, wie dort bei den Saiten, die Spannung die maßgebende Größe, nur daß diese hier nicht eine gegebene Konstante ist, sondern für jede Richtung innerhalb der Fläche einen anderen Wert haben kann; die Steifigkeit kommt zu der Spannung nur als etwaiges Korrektionsglied hinzu. Andererseits ist für die Platten ebenso wie für die Stäbe der Elastizitätsmodul maßgebend, eine etwaige künstliche Spannung kommt nur als Zusatzglied in Betracht. Zur Vermeidung von gar zu viel Wiederholungen (in der Akustik) muß dieser Abschnitt ganz besonders gekürzt und auf das in elastischer Hinsicht Wichtige beschränkt werden.

---

[1] A. SOMMERFELD, WÜLLNER-Festschrift, p. 162. 1905. — [2] J. O. REED, Phys. Rev. **2.** 56. 1894. — L. R. WILBERFORCE, Phil. Mag. (5) **38.** 386. 1894. — A. E. H. LOVE, Cambr. phil. Trans. **18.** 364. 1900. — F. RICHARZ, Marb. Ber. 1901. p. 172. — F. J. ROGERS, Phys. Rev. **15.** 374. 1902. — H. L. BRONSON, SILL. Journ. **18.** 59. 1904.

a) Membranen.

Querschwingungen von Membranen. Bildet die Membran einen Teil der xy-Ebene, hat sie die überall gleiche Dichte ϱ und Dicke δ und ist die Spannung S längs ihres ganzen Randes dieselbe, so kann man die Grundgleichung ganz allgemein, ohne Rücksicht auf die Form des Randes, aufstellen. Für kleine Werte der Transversalverschiebung w lautet sie:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) , \tag{103}$$

wo wieder wie bei Saiten zur Abkürzung

$$\frac{S}{\varrho \delta} = a^2 \tag{103a}$$

gesetzt ist; dazu kommen die Grenzbedingungen

für den Rand: $w = 0$, für $t = 0$: $w = f(x,y)$ und $\frac{\partial w}{\partial t} = F(x,y)$.

Setzt man die Lösung gleich dem Produkt einer Zeitfunktion und einer Flächenfunktion, und wählt man für die erstere einen trigonometrischen Ausdruck mit dem Zeitfaktor ak, so bleibt für die Flächenfunktion W die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{d^2 W}{dy^2} + k^2 W = 0 \tag{104}$$

zu erfüllen, die sich von der zweidimensionalen LAPLACEschen Gleichung durch das dritte Glied unterscheidet und demgemäß zu einer Reihe von ganz analogen Untersuchungen und Gesetzen Anlaß gibt, wie sie für diese in der Potentialtheorie durchgeführt werden; insbesondere handelt es sich um die Randwertprobleme (p. 204), um das Analogon des GREENschen Satzes (p. 201), um den Mittelwertsatz und um die Aufsuchung derjenigen harmonischen Funktionen, die für eine Flächenmannigfaltigkeit dieselbe Bedeutung für den Aufbau der Lösung haben wie die gewöhnlichen harmonischen Funktionen bei linearen Gebilden. Es muß in bezug auf diese Fragen auf die mathematischen Lehrbücher verwiesen werden; eine kurze Darlegung findet man bei RIEMANN-WEBER: Die partiellen Differentialgleichungen in der mathematischen Physik. 4. Aufl. **2.** 270.[1]

Der Gleichung für W kann nur für bestimmte, wenn auch unendlich viele Werte von k genügt werden; man erhält also durch Summierung über diese Werte die allgemeine Lösung.

Wenn die Spannung S längs des Randes variiert, also in verschiedenen Richtungen verschieden groß ist, wird die allgemeine Formulierung schwierig; man muß alsdann bestimmte Annahmen über die Gestalt der Membran machen.

Querschwingungen einer rechteckigen, insbesondere einer quadratischen Membran. Die Kante in der x-Richtung sei α, die in der y-Richtung β, die spannende ganze Kraft dort P, hier Q, und zur Abkürzung werde

$$\frac{P}{\varrho \delta \beta} = a^2 , \qquad \frac{Q}{\varrho \delta \alpha} = b^2 \tag{105}$$

---

[1] Über die Lösungen k_1, k_2 ... obiger Gleichungen vgl. H. WEBER, Math. Ann. **1.** 1868. — A. SCHWARZ, Festschrift für WEIERSTRASS. Helsingfors 1885. — E. PICARD, C. R. **117.** 502. 1893. — H. POINCARÉ, C. R. **118.** 447. 1894; Rend. Circ. math. Palermo 1894. — Ferner sei eine Arbeit von LE ROY, C. R. **123.** 1258. 1896 zitiert. — Eine zusammenhängende Darstellung des in der Gleichung $\Delta W + k^2 W = 0$ enthaltenen Problems gibt F. POCKELS in dem gleichnamigen Buche. Leipzig 1891.

gesetzt; dann hat man die Grundgleichung:

$$(106)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ,$$

und die Randbedingung:

$$w = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \alpha \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \beta \ .$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$(107)\qquad w = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(A_{m,n} \cos \frac{2\pi}{T_{m,n}} t + B_{m,n} \sin \frac{2\pi}{T_{m,n}} t \right) \sin \frac{m\pi}{\alpha} x \sin \frac{n\pi}{\beta} y ,$$

wo zur Abkürzung

$$(108)\qquad \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m a}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n b}{\beta}\right)^2}} = T_{m,n}$$

gesetzt ist und die Koeffizienten A und B sich aus den Anfangsbedingungen gemäß den Formeln:

$$(109)\qquad \begin{cases} A_{m,n} = \dfrac{4}{\alpha\beta} \displaystyle\int_0^\alpha \int_0^\beta f(x, y) \sin \frac{m\pi}{\alpha} x \sin \frac{n\pi}{\beta} y \, dx \, dy \\ B_{m,n} = \dfrac{2\, T_{m,n}}{\pi \alpha \beta} \displaystyle\int_0^\alpha \int_0^\beta F(x, y) \sin \frac{m\pi}{\alpha} x \sin \frac{n\pi}{\beta} y \, dx \, dy \end{cases}$$

bestimmen. Spezialisierungen treten ein: 1. wenn $P:\beta = Q:\alpha$, also $a = b$ ist, d. h. wenn die Mebran in beiden Richtungen gleich stark gespannt ist; es wird dann

$$(110)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

und

$$(111)\qquad T_{m,n} = \frac{2}{a \sqrt{\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n}{\beta}\right)^2}} ,$$

während sich an den Ausdrücken für w, A und B sonst nichts ändert; 2. wenn $a:\alpha = b:\beta$ ist, d. h. die Spannungen sich wie die Kanten gleicher Richtung verhalten; dann wird

$$(112)\qquad T_{m,n} = \frac{2\alpha}{a\sqrt{m^2 + n^2}} ;$$

3. endlich, ganz speziell, wenn $a = b$ und $\alpha = \beta$ ist, so daß man es mit einer quadratischen, in beiden Richtungen gleich stark gespannten Membran (Spannung $S = P/\alpha\delta$) zu tun hat; für T gilt dann ebenfalls der Ausdruck (112), außerdem aber ist jetzt in w, A und B statt β überall α zu schreiben.

$T_{m,n}$ stellt für alle ganzzahligen Wertkombinationen von m und n die Schwingungsdauern, also

$$(113)\qquad N_{m,n} = \frac{a}{2\alpha} \sqrt{m^2 + n^2} = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{(m^2 + n^2) \frac{S}{\varrho}}$$

die Schwingungszahlen dar, mit denen die Membran schwingen kann. Die Schwingungszahl ist hiernach direkt proportional mit der Wurzel aus der Spannung, dagegen umgekehrt proportional mit der Länge der Quadratseite und der Wurzel aus der Dichte; durch Vergleichung überzeugt man sich, daß diese Gesetze mit

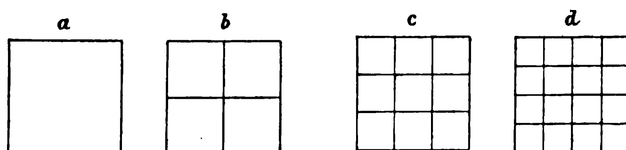
denen von Saiten ganz identisch sind. Dagegen gibt es hier nicht wie dort eine einzige Serie harmonischer Partialschwingungen, sondern deren viele, und diese sind zueinander unharmonisch. Jedes Wertepaar m, n gibt beim Rechteck eine andere Schwingungszahl, außer wenn die beiden Kantenlängen kommensurabel sind. Dieser Fall tritt z. B. beim Quadrat ein; hier erhält man erstens dieselbe Schwingungszahl, wenn man m und n miteinander vertauscht, und außerdem in besonderen Fällen, wie denn z. B. die Wertepaare $m = 8$, $n = 1$ und $m = 7$, $n = 4$ die gleiche Quadratsumme 65 ergeben. Die erste harmonische Serie ist hier allgemein durch $m = n$, die zweite durch $m = 2n$ oder $n = 2m$ u. s. w. charakterisiert; es gibt aber Ausnahmefälle, die nicht unter dieses Schema fallen und doch der betreffenden Serie zugehören, wie denn z. B. das Wertepaar $m = 7$, $n = 1$ die Schwingungszahl $\sqrt{50}$ ergibt, d. h. $5 . \sqrt{2}$, also die 5. harmonische Partialschwingung der ersten Serie (Grundschwingung $m = n = 1$), identisch mit der durch das Wertepaar $m = n = 5$ gelieferten — was offenbar daher kommt, daß 50 durch eine Quadratzahl teilbar ist. Man erhält so das Endresultat, daß die Anzahl der in sich harmonischen, zueinander aber unharmonischen Schwingungsserien einer quadratischen Membran gleich der Anzahl der Zahlen ist, die eine Summe zweier Quadratzahlen sind, ohne doch durch eine Quadratzahl teilbar zu sein. Im ganzen erhält man somit folgende Schwingungen (von einem Faktor abgesehen):

$$\sqrt{2}, \quad 2\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{2} \ldots \sqrt{5}, \quad 2\sqrt{5}, \ldots \sqrt{10} \ldots \sqrt{13} \ldots \sqrt{17} \ldots$$

oder geordnet nach der Größe und umgerechnet auf die Grundschwingnng als Einheit:

1,00 1,58 2,00 2,24 2,55 2,92 3,00 3,16 3,53 . . .

Auch die zugehörigen Schwingungsformen der Platte sind hier natürlich weitaus mannigfaltiger als bei der Saite; es gibt hier nicht Knotenpunkte, sondern Knotenlinien. Am einfachsten gestaltet sich deren System bei einer nur einseitig gespannten Membran: hier erhält man einfach geradlinige, parallele Knotenlinien, ganz entsprechend den Knotenpunkten der gleich langen, gleich stark gespannten



Figur 244.

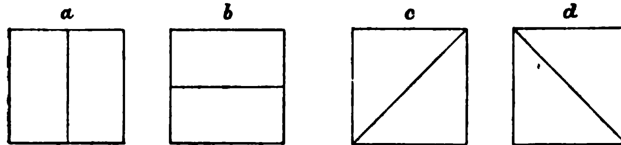
Saite. Aber schon beim Quadrat wird das Kurvensysten sehr kompliziert, weil sich in jedem Einzelfalle die beiden durch Vertauschung von m und n entstehenden x- und y-Faktoren mit ihren Koeffizienten $A_{m,n}$ und $A_{n,m}$ zu einer unendlichen Mannigfaltigkeit kombinieren. Einfache und einheitliche Formen geben also nur die Fälle $m = n$, nämlich ein System von je einer, je zwei u. s. w. sich senkrecht schneidender, die Quatratfläche in lauter gleiche Felder teilender Geraden (Figur 244). Dagegen gibt z. B. der Fall $m = 1$, $n = 2$ oder $m = 2$, $n = 1$ durch Kombination die Knotengleichung:

$$(114) \qquad A_{1,2} \sin \frac{\pi x}{\alpha} \sin \frac{2 \pi y}{\alpha} + A_{2,1} \sin \frac{2 \pi x}{\alpha} \sin \frac{\pi y}{\alpha} = 0 \quad ,$$

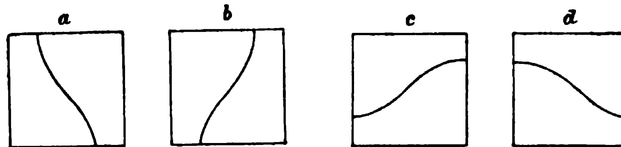
und das liefert vier Spezialfälle, nämlich:

für $A_{1,2} = 0$: die vertikale Mittellinie
für $A_{2,1} = 0$: die horizontale Mittellinie
für $A_{1,2} = -A_{2,1}$: die eine Diagonale
für $A_{1,2} = +A_{2,1}$: die andere Diagonale
} vergl. Figur 245

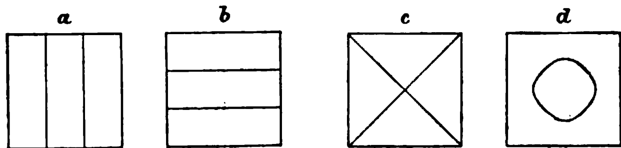
für die vier durch diese Grenzen gebildeten Intervalle aber geschwungene Linien von stärkerer oder schwächerer Krümmung und größerer Annäherung an eine



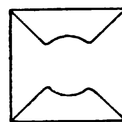
Figur 245.



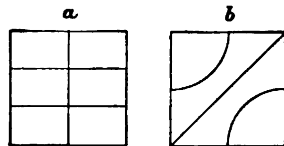
Figur 246.



Figur 247.



Figur 248.



Figur 249.

Mittellinie oder an eine Diagonale, wie das die Figur 246 beispielsweise veranschaulicht. Entsprechend hat man für $m = 1$, $n = 3$ oder umgekehrt die Knotengleichung

$$A_{1,3} \sin\frac{\pi x}{\alpha} \sin\frac{3\pi y}{\alpha} + A_{3,1} \sin\frac{3\pi x}{\alpha} \sin\frac{\pi y}{\alpha} = 0 \quad ; \tag{115}$$

sie liefert für $A_{13} = 0$ zwei vertikale, für $A_{31} = 0$ zwei horizontale Teillinien, für $A_{13} = -A_{31}$ aber die Beziehung

$$\cos\frac{\pi x}{\alpha} = \pm \cos\frac{\pi y}{\alpha} \quad ,$$

d. h. das System der beiden Diagonalen, und für $A_{13} = +A_{31}$ die Gleichung

$$\cos^2\frac{\pi x}{\alpha} + \cos^2\frac{\pi y}{\alpha} = \frac{1}{2} \quad , \tag{116}$$

d. h. eine kreisähnliche geschlossene Kurve, die die Mittellinien beiderseits halbiert, in den Diagonalrichtungen aber näher am Zentrum liegt; man vergl. die Figur 247. Auch zwischen diesen Spezialformen giebt es wieder unzählige Übergangsformen, von denen in Figur 248 eine dargestellt ist. Für $m = 2$, $n = 8$ oder umgekehrt sind zwei Spezialformen in Figur 249 veranschaulicht u. s. w.

Kreisförmige Membran. Hier wird, wenn Polarkoordinaten r und φ eingeführt werden, die Grundgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \log r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) \quad , \tag{117}$$

die Gleichung für die von dem Zeitfaktor sin oder cos $a k t$ befreite Funktion W wird:

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + k^2 W = 0 \quad ; \tag{118}$$

und wenn man hiervon noch einen in φ trigonometrischen Faktor (sin oder cos $m\varphi$) abtrennt und die übrig bleibende Funktion von r mit R bezeichnet, so hat man für diese die gewöhnliche Gleichung:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0 \quad . \tag{119}$$

Die Lösung hat bekanntlich den Charakter einer BESSELschen oder Zylinderfunktion; setzt man, wenn α der Radius ist:

$$J_m(\alpha k) = \frac{(\alpha k)^m}{2\cdot 4\ldots 2m}\left(1 - \frac{(\alpha k)^2}{2\cdot(2m+2)} + \frac{(\alpha k)^4}{2\cdot 4\cdot(2m+2)(2m+4)} - \ldots\right) , \tag{120}$$

charakterisiert die positiven Wurzeln der Gleichung $J = 0$ der Größe nach durch die Ordnungszahl n und führt gemäß der Formel

$$T = \frac{2\pi}{a k} \tag{121}$$

die Größe T an Stelle von k ein, so erhält man als allgemeine Lösung:

$$w = \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} J_m\left(\frac{2\pi r}{a T_{m,n}}\right)\left\{\begin{aligned} & A_{m,n}\cos\frac{2\pi}{T_{m,n}}t\cos m\varphi \\ & + B_{m,n}\cos\frac{2\pi}{T_{m,n}}t\sin m\varphi \\ & + C_{m,n}\sin\frac{2\pi}{T_{m,n}}t\cos m\varphi \\ & + D_{m,n}\sin\frac{2\pi}{T_{m,n}}t\sin m\varphi \end{aligned}\right. , \tag{122}$$

und die Koeffizienten lassen sich in leicht ersichtlicher Weise durch bestimmte Integrale darstellen, unter denen bei den A und B die Anfangsfunktion $f(r, \varphi)$ für die Verrückung, bei den C und D die Anfangsfunktion $F(r, \varphi)$ für die Geschwindigkeit steht, z. B.:

$$A_{m,n} = \frac{2}{\pi J_{m+1}^2\left(\frac{2\pi\alpha}{a T_{m,n}}\right)}\int_0^1\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)\, J_m\left(\frac{2\pi\alpha r}{a T_{m,n}}\right)\cos m\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi \quad . \tag{123}$$

Schreibt man die Schwingungsdauer in der Form

(124) $$T = \frac{2\pi}{a(\alpha k)} \cdot \alpha \quad ,$$

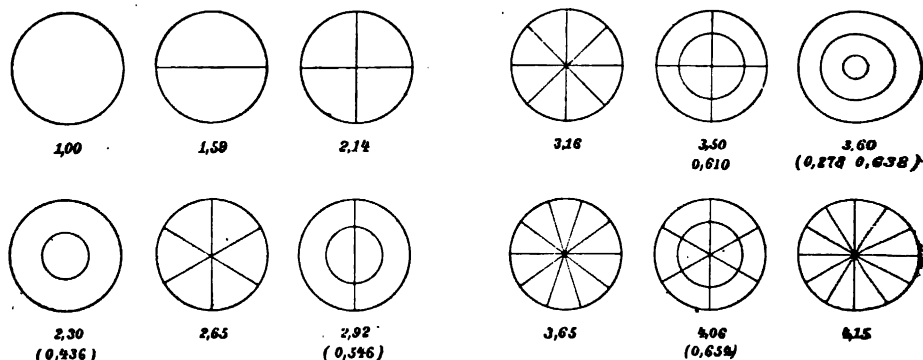
wo (αk) eine reine Zahl ist, so sieht man, daß sie mit dem Radius der Membran direkt, die Schwingungszahl N also umgekehrt proportional ist; speziell die Grundschwingung ist:

(125) $$N_{1,1} = \frac{0{,}382}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{S}{\varrho}} \quad ,$$

die ersten Partialschwingungen stehen zueinander in den Verhältnissen:

1,00 1,59 2,14 2,30 2,65 2,92 3,16 3,50 3,60 3,65 4,06 4,15...

Knotenlinien sind in erster Reihe konzentrische Kreise, deren Radien sich aus den Tabellen für die BESSELschen Funktionen berechnen lassen; in zweiter Linie, wenn nämlich die Proportion $A:B = C:D$ besteht, Kreisdurchmesser in regelmäßiger Anordnung, in dritter Reihe komplizierte Kurven, entsprechend et-



Figur 250.

waigen gemeinsamen Wurzeln zweier BESSELschen Funktionen verschiedenen Grades, deren Existenz aber sehr unwahrscheinlich ist. In Figur 250 sind die den zwölf untersten Schwingungszahlen entsprechenden Knotenlinien mit Angabe der Kreisradien der Knotenlinien im Verhältnis zum Radius der Membran (in Klammern) dargestellt.

Andere Formen. Man kann die Querschwingungen für anders geformte Membranen aus den obigen Formen nach zwei Methoden ableiten. Erstens, indem man diese, was offenbar erlaubt ist, längs gewisser Knotenlinien zerschneidet, wodurch man z. B. aus dem Quadrat das Rechteck und das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck, aus dem Kreise den Kreisring und den Kreissektor ableiten kann. Zweitens, indem man eine Koordinatentransformation ausführt oder, was dasselbe ist, die alte Form in eine neue abbildet; hierdurch kann man z. B. aus dem Kreise die Ellipse, die Parabel[1] und die Lemniskate erhalten. Schließlich kann man untersuchen, wie sich Schwingungszahlen und Knotensysteme ändern, wenn die Form der Membran von einer der obigen, z. B. der Kreisform, nur wenig abweicht; oder, wenn die Massenverteilung oder die Spannung nicht ganz gleichförmig ist u. s. w. Auf alledas kann hier nicht eingegangen werden; man vergleiche darüber Lord RAYLEIGHs Theorie des

[1] Vgl. die Arbeiten von H. WEBER, BAER, HAENTZSCHEL, SCHUBERT und KUSCH; Literatur bei letzterem, Progr. Viktoria-Gymn. Potsdam 1894.

Schalles sowie das, was in diesem Handbuche in dem Bande über „Akustik" ergänzend, namentlich auch in experimenteller Hinsicht, auszuführen sein wird.

Längsschwingungen einer Membran. In bezug auf diese muß es, in Anbetracht ihrer weit geringeren Bedeutung, genügen, die Differentialgleichungen, die viel komplizierter sind, als die der Querschwingungen, hinzuschreiben:

$$(126)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{E}{1-\mu^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{E}{2(1+\mu)}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{E}{2(1-\mu)}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} \\ \varrho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{E}{1-\mu^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{E}{2(1+\mu)}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{E}{2(1-\mu)}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \end{cases};$$

sie sind, wie man sieht, miteinander verkettet und analog für u und v; maßgebend ist hier nicht die Spannung, sondern, wie bei Saiten, der Elastizitätsmodul, hier aber außerdem die Elastizitätszahl.

b) Platten.

Querschwingungen ebener Platten. Die Grundgleichung ist hier, wie bei Stäben, von der vierten Ordnung; setzt man, kleine Schwingungen vorausgesetzt, zur Abkürzung:

$$(127)\quad \frac{\delta^2}{12\,\varrho}\cdot\frac{E}{1-\mu^2} = a^2\,,$$

so lautet sie [vgl. „Biegung", p. 638, Gleichung (94)]:

$$(128)\quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a^2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right).$$

Wiederum kann man einen Faktor sin oder $\cos(4k^2 a t)$ abspalten; der Rest U muß dann die Gleichung:

$$(129)\quad 16\,k^2 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4}$$

erfüllen; diese läßt sich in die beiden einfacheren, aber verketteten Gleichungen

$$(130)\quad 4\,k^2 V = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\,,\qquad 4\,k^2 U = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

zerlegen und die Verkettung lösen, wenn man $U + V = 2S$, $U - V = 2D$, also

$$(131)\quad U = S + D\,,\qquad V = S - D$$

setzt, so daß man die getrennten Gleichungen

$$(132)\quad 4\,k^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\,,\qquad -k^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}$$

erhält. Dazu kommen noch Anfangsbedingungen der bekannten Art, sowie Randbedingungen, die verschieden sind für festen oder freien Rand; für festen muß $w = 0$ sein, für freien — den weitaus interessanteren Fall — müssen gewisse höhere Kombinationen von Differentialquotienten null werden, als Ausdruck dafür, daß die Arbeit der auf den Rand wirkenden Druckkräfte, eben weil er frei ist, verschwindet. Es ergeben sich, wenn dl ein Randelement und Θ der Winkel ist, den seine nach dem Innern der Platte gezogene Normale mit der x-Achse bildet, die beiden Bedingungen:

$$(133)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\Theta + 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\sin\Theta\cos\Theta + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\Theta + \dfrac{\mu}{1-\mu}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0\,, \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial l}\left[\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sin\Theta\cos\Theta + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\sin^2\Theta-\cos^2\Theta)\right] \\ \quad + \dfrac{1}{1-\mu}\left[\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\Theta + \left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}+\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\Theta\right] \end{array}\right\} = 0\,. \end{cases}$$

Man vergleiche das mit den überaus einfachen Bedingungen [p. 735, Gleichung (70)] für die freien Enden eines Stabes, um zu sehen, wie sehr sich beim Übergang von einer zu zwei Dimensionen das Problem kompliziert.

Übrigens sei bemerkt, daß MATHIEU die KIRCHHOFFschen Grenzbedingungen verworfen und durch andere ersetzt hat; es ist aber von Lord RAYLEIGH und neuerdings eingehend von GRÜNEWALD nachgewiesen worden, daß die MATHIEUschen Bedingungen theoretisch und erfahrungsgemäß sehr schlecht stimmen und gegenüber den KIRCHHOFFschen nicht in Betracht kommen.[1]

Kreisförmige Platte. Die Gleichungen für S und D werden hier in Polarkoordinaten r und φ:

$$(134)\begin{cases} 4k^2 S = \dfrac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} \\ -4k^2 D = \dfrac{\partial^2 D}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial D}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} \end{cases};$$

spaltet man gemäß den Formeln

$$(135)\qquad S = S_0\cos m\varphi\cdot X\quad,\qquad D = D_0\cos m\varphi\cdot Y$$

Polarwinkelfunktionen harmonischen Charakters ab, so bleiben für die Funktionen X und Y von r Gleichungen übrig, die, wenn man $kr = s$ setzt, die Form

$$(136)\begin{cases} \dfrac{d^2X}{ds^2} + \dfrac{1}{s}\dfrac{dX}{ds} - \left(\dfrac{m^2}{s^2}+4\right)X = 0 \\ \dfrac{d^2Y}{ds^2} + \dfrac{1}{s}\dfrac{dY}{ds} - \left(\dfrac{m^2}{s^2}-4\right)Y = 0 \end{cases}$$

annehmen; Lösungen von ihnen sind wieder gewisse BESSELsche Funktionen:

$$(137)\begin{cases} X_m = \dfrac{s^m}{1\cdot 2\ldots m}\left(1+\dfrac{s^2}{1\cdot(m+1)}+\dfrac{s^4}{1\cdot 2\cdot(m+1)(m+2)}+\ldots\right) \\ Y_m = \dfrac{s^m}{1\cdot 2\ldots m}\left(1-\dfrac{s^2}{1\cdot(m+1)}+\dfrac{s^4}{1\cdot 2\cdot(m+1)(m+2)}-\ldots\right) \end{cases}.$$

Damit ist die Grundgleichung befriedigt; es bleiben noch die Randbedingungen übrig. Sie lauten in den X und Y, wenn zur Abkürzung

$$(138)\qquad \frac{1}{1-\mu} = \gamma$$

gesetzt wird:

$$(139)\begin{cases} S_0\left[m^2X_m - s(m^2-4\gamma s^2)\dfrac{dX_m}{ds}\right] + D_0\left[m^2Y_m - s(m^2+4\gamma s^2)\dfrac{dY_m}{ds}\right] = 0 \\ S_0\left[(m^2+4\gamma s^2)X_m - s\dfrac{dX_m}{ds}\right] + D_0\left[(m^2-4\gamma s^2)Y_m - s\dfrac{dY_m}{ds}\right] = 0 \end{cases};$$

[1] E. MATHIEU, Liouv. Journ. (2) 14. 1869. — Lord RAYLEIGH, Theorie des Schalles 1. 403. — C. GRÜNEWALD, Progr. Joach.-Gymn. 1901.

nennt man ihre Determinante Δ, so hat man aus der Gleichung

(140) $$\Delta = 0$$

k zu bestimmen und dann aus einer der Gleichungen (139) das Verhältnis $S_0 : D_0$. Ist $k_{m,n}$ eine Wurzel der Gleichung $\Delta = 0$, und wird

(141) $$\left\{ \begin{aligned} W_{m,n} = X_m & \left[(m^2 - 4\gamma s^2) Y_m - s \frac{dY_m}{ds} \right]_{s = a k_{m,n}} \\ - Y_m & \left[(m^2 + 4\gamma s^2) X_m - s \frac{dX_m}{ds} \right]_{s = a k_{m,n}} \end{aligned} \right.$$

gesetzt, wo $r = \alpha$ den Radius der Platte bezeichnet, so erhält man als Produkt der drei Faktoren in t, φ und r eine partikuläre und schließlich durch Summation die allgemeine Lösung

(142) $$w = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \begin{aligned} & \cos(4 k_{m,n}^2 a t)(A_{m,n} \cos m\varphi + B_{m,n} \sin m\varphi) \\ + & \sin(4 k_{m,n}^2 a t)(C_{m,n} \cos m\varphi + D_{m,n} \sin m\varphi) \end{aligned} \right\} W_{m,n} \quad ,$$

deren Koeffizienten A, B, C, D sich in ähnlicher Weise wie in den früheren Fällen aus den Funktionen von x, y bestimmen, die die Anfangsverrückung bezw. Anfangsgeschwindigkeit darstellen. Um die Schwingungszahlen zu erhalten, muß man die Werte von k bestimmen; es zeigt sich, daß die Schwingungszahlen direkt proportional sind mit der Dicke, umgekehrt mit dem Quadrat des Radius und der Wurzel aus der Dichte; ferner sind sie abhängig von der stets bei der Biegung von Platten auftretenden Kombination $E/(1 - \mu^2)$; endlich bilden die verschiedenen Partialschwingungen eine unharmonische Reihe. Die Knotenlinien sind durch das Nullwerden der BESSELschen Funktion oder der trigonometrischen Winkelfunktion bestimmt, also teils konzentrische Kreise, teils Radien; die Radien der Kreise und die Beziehung zu den Schwingungszahlen ist aber hier eine andere wie bei Membranen. Bei gleicher Anzahl von Durchmessern, d. h. gleichem Werte von m, verhalten sich die Schwingungszahlen mit wachsender Ordnungszahl immer genauer wie die Quadrate aufeinander folgender gerader oder ungerader Zahlen, je nachdem die Anzahl der Durchmesser gerade oder ungerade ist. Die Kreise haben auf die Schwingungszahl im ganzen gerade den doppelten Einfluß wie die Durchmesser.

Die Theorie der Schwingungen von Kreisplatten hat im wesentlichen die gleiche Geschichte und Literatur wie ihr Gleichgewicht; es sei daher auf die dortigen Angaben (p. 636 u. 639) verwiesen und nur angeführt, daß man die obige Lösung KIRCHHOFF[1] verdankt. KIRCHHOFF knüpft daran auch den Versuch, aus den Ergebnissen der Messungen, die STREHLKE auf seine Veranlassung zur Prüfung der Theorie ausführte, einen Schluß auf den wahren Wert der Elastizitätszahl μ, die doch in der Formel für die Knotenlinien vorkommt, zu ziehen; es zeigte sich aber, daß das unmöglich ist, weil der Einfluß zu gering ist, d. h. weil selbst extreme Werte von μ nahezu dieselbe Lage der Knotenkreise liefern, z. B.

m	n	beobachtet	berechnet	
			$\mu = \frac{1}{4}$	$\mu = \frac{1}{3}$
1	1	0,782	0,781	0,781
2	1	0,805	0,822	0,823
3	1	0,840	0,845	0,847
1	2	0,490	0,498	0,497
		0,869	0,871	0,870

[1] G. KIRCHHOFF, KRELLES Journ. 40. 1850; POGG. Ann. 81. 1850; Ges. Abh., p. 237 u. 279.

Im übrigen kommt es für die Schwingungsform der Platte natürlich ganz auf die Art der Erregung an, z. B. auf die Stelle oder Stellen, die eine Elongation oder Geschwindigkeit erhält, auf die Stelle oder Stellen, die unterstützt werden u.s.w.; man vergleiche hierüber die „Akustik“.

Wenn die Platte nicht genau kreisförmig ist, kann man die Verhältnisse nach einem von Lord RAYLEIGH angegebenen Variationsverfahren entwickeln und leidlich übersehen. Es ergibt sich dabei freilich die eigentümliche Schwierigkeit, daß die Lage der diametralen Knotenlinien jetzt nicht mehr willkürlich, d. h. nur von der Erregungsweise abhängig ist, sondern durch die Asymmetrie der Form bestimmt ist. Dieses und verwandte Probleme hat ZENNECK[1] durch Rechnung verfolgt und gefunden, daß in allen Fällen, wo die beiden sich zu derselben Schwingungszahl zusammensetzenden Schwingungsarten (Vertauschung von m und n, s. oben) verschieden sind, die beiden Knotensysteme völlig bestimmt sind, daß sie aber bei Gleichheit dieser beiden Glieder im allgemeinen unbestimmt bleiben und nur in speziellen Fällen ebenfalls bestimmt sind.

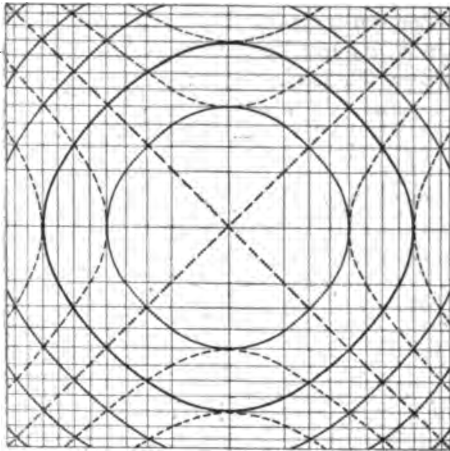
Rechteckige Platte. Für diese Form läßt sich das Problem nur in dem schon von NAVIER u. A. behandelten Falle lösen, daß die vier Ränder fest sind; dieser Fall hat aber kein großes theoretisches Interesse, weil sich dann die Platte, von ihrer Elastizität abgesehen, ganz analog wie die Membran verhält; und er hat kein praktisches Interesse, weil sich die Bedingung experimentell nicht durchführen läßt, indem es unmöglich ist, bei völlig festem Rande dauernde Schwingungen ohne Druckwirkungen am Rande zu erhalten, auch wenn man etwa die Platte aus Eisen und elektromagnetische Erregung wählen wollte.

Realisierbar dagegen und von selbständigem Interesse ist der Fall, daß zwei parallele Kanten frei, die beiden andern gegen eine rauhe Wand gestemmt sind. Diesen Fall hat VOIGT[2] rechnerisch entwickelt und gezeigt, daß die Knotenlinien teils den Kanten parallele Linien sind, die je nach den Umständen in gerader oder ungerader Anzahl auftreten, teils durch Kombination entstehende Kurven sind.

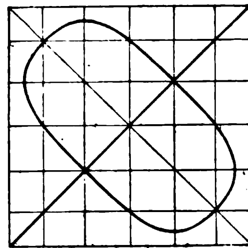
Für gänzlich freie Begrenzung ist die Lösung bisher nicht gelungen. Man kann aber aus gewissen Annahmen eine Reihe von Schlüssen, namentlich hinsichtlich der Schwingungszahlen und des Verlaufs der Knotenlinien ziehen. So geht z. B. Lord RAYLEIGH[3] von der Vorstellung aus, daß die Elastizitätszahl des Stoffes null sei, und setzt nun die Schwingungen aus den Bestandteilen zusammen, die der einen und der anderen Richtung entsprechen, und die man einfach aus den Formeln für Stäbe mit freien Enden entnehmen kann; die Zusammensetzung der beiden Glieder erfolgt dann nach dem bekannten MAXWELLschen Verfahren (Äquipotentiallinien in der Elektrostatik u. s. w.). So ergibt sich als unterste Schwingungsform die mit dem Kreuz der den Kanten parallelen Mittellinien, als nächste die mit dem Kreuz der Diagonalen oder die mit der kreisähnlichen Kurve (vgl. die beiden entsprechenden Fälle bei der quadratischen Membran). Man kann das Bild noch ergänzen, indem man zu den Knotenlinien, d. h. den Linien der Verrückung null, die Linien gleicher von null verschiedener, einerseits positiver, andererseits negativer, Verrückung hinzufügt. Die Figur 251 zeigt das System der den Kanten parallelen Komponenten und die aus ihnen einmal durch Addition, das andere Mal durch Subtraktion zusammengesetzten Resultanten; das eine System ist ausgezogen, das andere unterbrochen gezeichnet, die Knotenlinie beidemal durch größere Stärke aus den übrigen Linien gleicher Verrückung herausgehoben; die letzteren schreiten nach gleichen Differenzen des Verrückungswertes vor. Z. B. ist bei den kreisähnlichen Kurven in der Mitte das positive Maximum $w = 2$, dann folgt die Kurve $w = 1$, dann die Knotenlinie, dann die Linien -1, -2, -3; in den vier Ecken ist sogar $w = -3{,}29$;

[1] J. ZENNECK, WIED. Ann. **67**. 165. 1899. — [2] W. VOIGT, Gött. Nachr. 1893. p. 226. — [3] Lord RAYLEIGH, Theorie des Schalles **1**. 406 ff.

umgekehrt ist bei dem anderen System in der Mitte ein Knoten, und die Bögen in den vier Quadranten bezeichnen in zwei Gegenquadranten positive, in den beiden anderen negative Verrückungen. Die nächst höhere Schwingung ist in Figur 252 veranschaulicht. In Wahrheit ergeben die Versuche leicht Kurven, die sich von den obigen dadurch unterscheiden, daß an Stelle der Abrundungen Ecken treten, die die Kanten berühren, wodurch sich z. B. die Figuren 253 ergeben (die beiden ersten den beiden obigen theoretischen entsprechend), wie sie z. B. WHEATSTONE

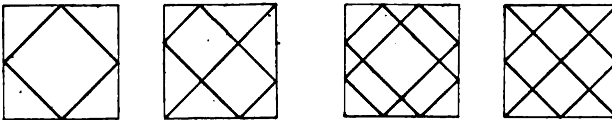


Figur 251.



Figur 252.

erhielt; bei exakt gearbeitetem Material und exakter Behandlung findet man aber die Rundungen und überhaupt eine leidliche Übereinstimmung mit der Theorie; man sehe z. B. die Arbeit von STREHLKE.[1]



Figur 253.

Die elliptische Platte ist von MATHIEU und BARTHÉLÉMY[2] behandelt worden. Für polygonale kann man jedenfalls so viel sagen, daß die Mittellinien und die Diagonalen mögliche Knotenlinien sind.

Schließlich ist auf das Problem der unbegrenzten ebenen Platte hinzuweisen, das für den Fall, wo die unendlich fernen Punkte ruhen, bereits von FOURIER und POISSON gelöst worden ist, wenigstens, wenn von den beiden gegebenen Anfangsfunktionen (Verrückung und Geschwindigkeit) nur die eine von null verschieden ist; die Richtigkeit der Lösungen ist später von BOUSSINESQ[3] noch besonders nachgewiesen worden.[4]

c) Schalen (Glocken).

Schwingungen von Schalen und Glocken. Für dünne Platten, die bereits im Naturzustand gekrümmt sind, erhöhen sich die Schwierigkeiten begreiflicherweise in hohem Maße, und zwar aus verschiedenen Gründen. Erstens muß man hier

---

[1] CH. WHEATSTONE, Trans. Roy. Soc. Lond. 1833. — F. STREHLKE, POGG. Ann. **18.** 198. 1830; **146.** 319. 1872. — [2] E. MATHIEU, LIOUV. Journ. (2) **14.** 1869. — M. BARTHÉLÉMY, Mém. Acad. Toulouse **9.** 1877. — [3] CH. FOURIER, Th. anal. de la chaleur. — S. D. POISSON, Mém. Acad. Paris 1820. — J. BOUSSINESQ, C. R. **108.** 639. 1889. — [4] Weitere Literatur: G. LAURICELLA, Nuov. Cim. (4) **4.** 134. 1896. — G. BISCONCINI, Rend. Accad. Linc. (5) **12.** I. Sem. 385. 1903.

an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z GAUSSische Flächenkoordinaten $p q$ einführen und alle Drucke in ihnen ausdrücken; zweitens ist die Zahl dieser letzteren hier im allgemeinen zehn, d. h. zweimal fünf, nämlich für jede der beiden Richtungen $p q$ ein Druck, zwei Scherkräfte, ein Biegungs- und ein Drillungskräftepaar. Nennt man diese der Reihe nach T, N, S, G, H mit den Indizes 1 und 2, bezeichnet man mit P und Q die bekannten Koeffizienten in dem Ausdruck für das GAUSSische Linienelement und mit $R_1 R_2$ die beiden Hauptkrümmungsradien, so hat man als Grundlage der Theorie die Gleichungen:

$$(143)\quad \left\{\begin{aligned} 2\varrho\delta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{PQ}\left\{\frac{\partial(T_1 Q)}{\partial p} - \frac{\partial(S_2 P)}{\partial q} + S_1\frac{\partial P}{\partial q} - T_2\frac{\partial Q}{\partial p}\right\} - \frac{N_1}{R_1}\\ 2\varrho\delta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{1}{PQ}\left\{\frac{\partial(S_1 Q)}{\partial p} - \frac{\partial(T_2 P)}{\partial q} + T_1\frac{\partial P}{\partial q} - S_2\frac{\partial Q}{\partial p}\right\} - \frac{N_2}{R_2}\\ 2\varrho\delta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{1}{PQ}\left\{\frac{\partial(N_1 Q)}{\partial p} + \frac{\partial(N_2 P)}{\partial q}\right\} + \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\quad, \end{aligned}\right.$$

und es bestehen daneben die Beziehungen

$$(144)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial(H_1 B)}{\partial p} - \frac{\partial(G_1 P)}{\partial q} + G_1\frac{\partial P}{\partial q} - H_2\frac{\partial Q}{\partial p}\right\} + N_2 = 0\\ &\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial(G_1 Q)}{\partial p} + \frac{\partial(H_2 P)}{\partial q} - H_1\frac{\partial P}{\partial q} - H_2\frac{\partial Q}{\partial p}\right\} - N_1 = 0\\ &\frac{H_1}{R_1} + \frac{H_2}{R_2} + S_1 + S_2 = 0\quad. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen muß man nun aber erst durch Elimination der Drucke auf die endgültige Form bringen. Drittens ist es hier nicht so einfach, die einzelnen Schwingungstypen herauszuschälen. Insbesondere erhebt sich die schon bei dem entsprechenden statischen Problem berührte Frage, ob es bei den Querschwingungen erlaubt sei, die Mittelfläche als unausdehnbar zu betrachten — eine Frage, die z. B. von Lord RAYLEIGH bejaht, von LOVE verneint wird, während BASSET zeigt, daß man sie nur von Fall zu Fall erledigen kann; im allgemeinen wird man also beide Glieder, die Biegungs- und die Dehnungsglieder heranziehen müssen, die (p. 645) in verschiedener Weise von der Dicke der Schale abhängen. Viertens fragt es sich, inwieweit hier reine Normal- und reine Tangentialschwingungen möglich sind, worauf LOVE die Antwort gibt, daß jene nur bei gleichförmiger Krümmung und stetig verlaufendem Rande, diese dagegen immer dann auftreten können, wenn die Mittelfläche eine kreisförmig begrenzte Revolutionsfläche ist. Fünftens endlich liefert die Randlinie der Schale Bedingungen, die im allgemeinen kaum erfüllbar sein werden. Es lassen sich daher ganz allgemein nur gewisse beschränkte Schlüsse ziehen, und es sei in dieser Hinsicht auf das Buch von LOVE verwiesen.

Schwingungen ohne Ausdehnung. Für einige besondere Fälle treten natürlich Vereinfachungen ein, die das Problem direkt oder indirekt lösbar machen; dazu gehören die Formen der Zylinderschale, der Kugelschale und der Ringschale. Man kann den Schwingungscharakter, wie Lord RAYLEIGH gezeigt hat, ohne Eingehen auf die Grundgleichungen, aus der potentiellen und kinetischen Energie ableiten; und man kann die Betrachtung durch Einführung der Bedingung der Unausdehnbarkeit der Mittelfläche wesentlich vereinfachen. Für die Zylinderschale erhält man dabei für die Axial-, Tangential- und Radialkomponente u, v, w Ausdrücke, die als Spezialfall den enthalten, wo die Bewegung zweidimensional ist, wo nämlich alle Teilchen senkrecht zur Achse schwingen; in Formel, wenn a der Radius, φ der Polarwinkel, m eine ganze Zahl und

(145) $$\left(\frac{n_m}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{E\delta^2}{3\varrho(1-\mu^2)a^4}\,\frac{m^2(m^2-1)^2}{m^2+1}$$

ist:

(146) $$u = 0 \quad , \quad v = A_m \cos nt \cos m\varphi \quad , \quad w = -m A_m \cos nt \sin m\varphi \quad ;$$

$n_m/2\pi$ ist also die Schwingungszahl der m. Partialschwingung. Ähnliche, aber verwickeltere Formeln ergeben sich für dreidimensionale Schwingungen, bei denen also auch u von null verschieden ist.

Bei der Kugelschale kommt außer der geographischen Länge φ noch die geographische Breite ψ als Variable sowie die beiden Werte von ψ für die beiden die Schale begrenzenden Kreise $\psi = \alpha$ und $\psi = \beta$ als Parameter in Betracht; die Rechnung wird dadurch sehr verwickelt, vereinfacht sich aber etwas, wenn die Kugelschale einerseits bis zum Pole reicht, also etwa $\beta = 0$ ist. Man kann alsdann für die drei Verrückungskomponenten setzen:

(147) $$\left\{\begin{aligned} u &= A_m \cos nt \sin\psi \operatorname{tang}^m\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos m\psi \\ v &= A_m \cos nt \sin\psi \operatorname{tang}^m\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin m\varphi \\ w &= A_m \cos nt(m+\cos\psi)\operatorname{tang}^m\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos m\varphi \quad , \end{aligned}\right.$$

und erhält für die Schwingungszahl die Formel (K der Drillungsmodul):

(148) $$\left(\frac{n_m}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{6\pi^2}\,\frac{K}{\varrho}\,\frac{\delta^2}{a}\,m^2(m^2-1)^2\,\frac{\int\limits_0^\alpha \operatorname{tang}^{2m}\left(\frac{\psi}{2}\right)\frac{d\psi}{\sin^3\psi}}{\int\limits_0^\alpha \sin\psi[2\sin^2\psi+(\cos\psi+m)^2]\operatorname{tang}^{2m}\left(\frac{\psi}{2}\right)d\psi} \; ,$$

die man für einfache ganzzahlige Werte von m integrieren kann. Für bestimmte Werte von α ergeben sich dann bestimmte Zahlenfaktoren s in dem Ausdruck

(149) $$n_m = \frac{\delta}{a^2}\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{K}{\varrho}}\cdot s_m \quad ,$$

z. B. nach einer von Lord Rayleigh ausgeführten Rechnung für die Halbkugel

$$s_2 = 5{,}24 \quad , \quad s_3 = 14{,}73 \quad , \quad s_4 = 28{,}46 \quad ,$$

für die Zweidrittelkugel ($\alpha = \frac{1}{3}\pi$)

$$s_2 = 7{,}99 \quad , \quad s_3 = 20{,}91 \quad ;$$

endlich erhält man für die fast geschlossene Kugelfläche (α nahezu gleich π), d. h. für eine volle Kugelfläche mit einem kleinen kreisrunden Loch:

(150) $$\left(\frac{n_m}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{6\pi^2}\,\frac{K}{\varrho}\,\frac{\delta^2}{a^4}\,\frac{m^2(m^2-1)}{(\pi-\alpha)^4} \quad .$$

Freilich haben alle diese Ergebnisse für Zylinder- und Kugelschale nur angenäherte Bedeutung, weil, wie eine strengere Betrachtung zeigt, die Annahme der Schwingungen ohne Ausdehnung nicht zur Befriedigung der Grundgleichungen und der Grenzbedingungen führt; die erstere Abweichung ist in manchen Fällen sehr unbeträchtlich, die zweite aber im allgemeinen sehr merklich. Für die

wirklich volle Kugelschale ist die angenäherte Betrachtung überhaupt gegenstandslos, weil hier ausdehnungslose Schwingungen offenbar gar nicht möglich sind.

Ausdehnungsschwingungen. Um diese zu berechnen, muß man auf die Gleichungen (143) zurückgehen und diese mit Rücksicht auf Form und Begrenzung der Schale entwickeln. Der wichtigste Fall sind hier die reinen Ausdehnungsschwingungen, die also den bisher betrachteten diametral gegenüberstehen. Für den Zylinder wird weiter der einfachste Fall der, wo die Schwingungen von allseitiger Symmetrie, d. h. die Verrückungen unabhängig von der geographischen Länge sind; von diesen gibt es zwei Sonderarten, nämlich rein tangentiale und rein radiale, im letzteren Falle bestimmt sich die Frequenz aus der Gleichung (l die Länge):

$$(151) \qquad n^4 - n^2 \frac{E}{\varrho(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right) + \frac{E^2 m^2 \pi^2}{\varrho^2(1-\mu^2)a^2 l^2} = 0 \quad .$$

Auch bei der vollen Kugelschale gibt es zwei Spezialtypen, nämlich den, wo die Radialkomponente der Verrückung und den, wo die Radialkomponente der Drehung fehlt; für jenen ist

$$(152) \qquad n^2 a^2 \varrho = (m-1)(m+2)K \quad ,$$

für diesen

$$(153) \qquad \begin{cases} \dfrac{n^4 a^4 \varrho^2}{K^2} - \dfrac{n^2 a^2 \varrho}{K}\left[(m^2+m+4)\dfrac{1+\mu}{1-\mu} + (m^2+m-2)\right] \\ \qquad\qquad + 4(m^2+m-2)\dfrac{1+\mu}{1-\mu} = 0 \quad . \end{cases}$$

Die Verrückungen selbst haben natürlich den Charakter von Kugelfunktionen. Bei der offenen Kugelschale endlich erhält man im allgemeinen eine komplizierte Übereinanderlagerung von Schwingungen ohne und mit Ausdehnung, von denen jene oder diese überwiegen, je mehr sich die Schale entweder der ebenen Platte oder der fast vollen Kugelschale mit einem Loche nähert. In bezug auf alle diese Theorien und Rechnungen muß auf die Arbeiten von Lord RAYLEIGH, LOVE, BASSET, LAMB u. A. verwiesen werden, in bezug auf die akustische Anwendung auf Glocken aber auf die „Akustik".[1]

3. Bewegung elastischer Körper im Raume.

Zum Schlusse dieses Artikels ist noch in Kürze auf ein Kapitel hinzuweisen, das sehr mannigfaltige Erscheinungen und Theorien in sich schließt, und zum Teil auf wichtige geophysische und technische Anwendungen führt, die namentlich in neuester Zeit an Bedeutung noch gewonnen haben. Es ist das die Frage, wie sich elastische Körper verändern, wenn sie sich im Raume bewegen, und wenn hierbei äußere Kräfte auf sie wirken; also die Frage, ob und inwieweit dabei die elastischen Körper ihre Eigenschaft, nicht starr zu sein,

[1] Lord RAYLEIGH, Proc. Lond. Math. Soc. **13.** 4. 1881; **20.** 225. 1889; Proc. Roy. Soc. **45.** 105. 1888; Scient. Papers **1.** 551; **3.** 217. 249; Theorie des Schalles **1.** 420. — E. A. H. LOVE, Math. Th. of Elast. p. 485. 511; Proc. Roy. Soc. **43.** 352. 1888; Trans. Roy. Soc. A **179.** 491. 1888; Proc. Roy. Soc. **49.** 100. 1891. — H. LAMB, Proc. Lond. Math. Soc. **14.** 50. 1883; **21.** 119. 1891. — A. B. BASSET, Trans. Roy. Soc. A **181.** 1890; Proc. Lond. Math. Soc. **21.** 53. 1891; Rep. Brit. Assoc. **59.** 499. 1889. — E. MATHIEU, Journ. Ecole polytechn. **51.** 1883. — Man vergl. ferner über erzwungene Schwingungen von Kugelschalen: C. CHREE, Trans. Cambr. Phil. Soc. **16.** 14. 1896. — T. J. BROMWICH, Schwingungen einer Kugel mit Rücksicht auf ihre eigene Schwere (Proc. Lond. Math. Soc. **30.** 98. 1899). — Auf die Arbeit von Lord RAYLEIGH über Glocken, Phil. Mag. (5) **29.** 1. 1890, wird in der „Akustik" eingegangen werden.

äußern. Von den beiden Bewegungsarten, der Translation und der Rotation, wird offenbar die letztere das größere Interesse wachrufen, insofern bei ihr nicht bloß die Schwerkraft, sondern auch die Zentrifugalkraft ins Spiel kommt. Es kann hier nur auf einige der bezüglichen Untersuchungen kurz hingewiesen werden.

Den elastischen Zustand eines gleichförmig rotierenden Ellipsoids hat CHREE berechnet und auf die verschiedenen Spezialfälle der elliptischen und Kreisscheibe, sowie des elliptischen und Kreiszylinders angewendet; die Schwungkraft erzeugt hierbei ganz bestimmte Deformationen. So wird z. B. ein um eine durch seinen Mittelpunkt gehende Querachse rotierender Stab länger und dünner, und die Verkleinerung des Querschnitts nimmt von außen nach der Mitte hin stetig zu.

Was insbesondere die Kugel betrifft, so gab CHREE zunächst eine Lösung für die Vollkugel einerseits und die sehr dünne Hohlkugel andererseits; sie läßt die Verteilung der Drucke und Deformationen sowie die Gestalt der deformierten Oberfläche genau erkennen. Für Zwischenfälle, wenn also das Verhältnis der beiden Radien von null und eins verschieden ist, kann man auch gewisse Resultate ableiten, so dies, daß mit wachsendem Radienverhältnis die Elliptizität der sphäroidischen Außenfläche anfangs nur langsam, von $r:R$ gleich $\frac{1}{2}$ ab aber rascher zunimmt; dabei macht es wenig aus, wie groß man das Verhältnis der beiden Elastizitätskonstanten ansetzt. Die Hauptdrucke und Hauptdilatationen lassen sich für alle Punkte bestimmen; in jedem Oberflächenpunkte sind sie normal zur Oberfläche, tangential zum Meridian und senkrecht zur Meridianebene gerichtet, für innere Punkte gilt das nur in der Äquatorebene und auf der Achse. Die größte Hauptdilatation ist auf der Innenfläche größer als auf der Außenfläche, und am größten (D) im Äquator der Innenfläche; eben dort hat auch die Differenz (Δ) des größten und kleinsten Hauptdrucks ihr Maximum. Setzt man für die Vollkugel sowohl D wie Δ gleich eins, so erhält man für verschiedene Radienverhältnisse:

$r:R$	0,1	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	< 1
D	2,07	2,09	2,24	2,58	2,94	3,18	3,34
Δ	1,95	2,00	2,18	2,44	2,55	2,51	2,36

Die graphische Darstellung läßt diesen merkwürdigen Zusammenhang noch deutlicher hervortreten. Es liegt nahe, hiervon Anwendungen auf die Erde und andere Himmelskörper zu machen.

Für die Technik am wichtigsten ist der Fall der rotierenden Welle; er ist von GREENHILL, DUNKERLEY, CHREE, LORENZ u. A. behandelt worden. Nimmt man mit CHREE an, daß irgendwie eine Querschwingung erzeugt sei, so wirkt die Schwungkraft der elastischen Rückkraft entgegen und verlängert die Periode des „Schleuderns"; bei einer gewissen „kritischen" Rotationsgeschwindigkeit $\omega = \Omega$ wird die Periode unendlich, das Schleudern hört auf. Ist $N/2\pi$ die statische, $n/2\pi$ die durch die Rotation veränderte Schwingungszahl und f ein von der Befestigungsweise des Stabes und der Verteilung der an ihm angebrachten Lasten abhängiger Koeffizient, so ergibt sich

$$n^2 = N^2 - f\omega^2 \quad , \qquad \Omega = N\sqrt{f} \quad ; \tag{154}$$

hierin läßt sich f für zahlreiche Fälle angeben; für sehr kleine Trägheitsmomente wird es gleich eins.

In anderer Weise, welche die Resonanzerscheinung besser hervortreten läßt, behandeln GREENHILL, LORENZ und SOMMERFELD das Problem. Die Grundgleichungen lauten bei gewissen Vereinfachungen, wenn q der Querschnitt, Q sein Trägheitsmoment, S die Längsspannung der Welle ist und wenn ein mitrotierendes Koordinatensystem benutzt wird:

$$(155)\begin{cases} \varrho q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Q(E+S)\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - (Sq + \varrho Q \omega^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varrho q \omega^2 v - 2\varrho q \omega \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \\ \varrho q \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Q(E+S)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (Sq + \varrho Q \omega^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varrho q \omega^2 w + 2\varrho q \omega \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \end{cases}.$$

Durch Intregation findet man v und w, aus den Bedingungen die Koeffizienten und schließlich die Schwingungskomponenten im Raume; die Ausdrücke sind zu verwickelt, um hier Platz zu finden. Das wichtigste Ergebnis ist theoretisch, daß bei gewissen Geschwindigkeiten die Durchbiegung der Welle durch Resonanzwirkung außerordentlich groß werden kann, und praktisch, daß auch schon die kleinste dieser Geschwindigkeiten so groß ist, daß sie in Wirklichkeit nicht vorkommen wird. Ferner sei noch die merkwürdige Konsequenz angeführt, daß, wenn die anfängliche Erregung eine Geschwindigkeit ist, die Schwingungen dauernd in deren Ebene erfolgen, daß dagegen, wenn die anfängliche Erregung eine Verrückung ist, zu der Schwingungskomponente in dieser Ebene noch eine dazu senkrechte hinzutritt, und daß sich das Verhältnis beider bestimmen läßt. Alles das gilt übrigens nur für durchaus zentrische Belastung; bei teilweise exzentrisch angebrachten Lasten können ganz andere Verhältnisse auftreten.[1]

Schließlich sei aus der zitierten Abhandlung von SOMMERFELD das folgende, auch für den Physiker Interessante herausgehoben. Die Frage der elastischen Beanspruchung von Körpern durch Schwingungen, die mit ihren freien Schwingungen in Resonanzbeziehung stehen, ist zwar schon alt, wird aber gerade neuerdings aus Anlaß der SCHLICKschen Untersuchungen über Schiffswellen wieder eifrig diskutiert. Es handelt sich dabei um die Entwickelung der statischen Festigkeitsgesetze nach der dynamischen Seite, und dazu ist als Vorarbeit die Untersuchung der Elongationen u. s. w. erforderlich; dies tut SOMMERFELD sowohl für Biegungs- wie für Drillungsschwingungen. Als Beispiel für jene wird der Fall einer zweizylindrischen Dampfmaschine in einem auf Trägern stehenden Gebäude betrachtet, und es werden die Verhältnisse an einem Elektromotor demonstriert, der auf einem Tische mit vier Beinen steht: die statische Ausbiegung der Beine ist hier gar nicht merklich, die dynamische wird bei Steigerung der Tourenzahl des Trägers immer größer, dann aber rasch wieder kleiner und bald wieder null. Dafür fängt jetzt die Tischplatte an, Biegungsschwingungen um die Beinansätze als Knoten auszuführen; hält man den Tisch fest, so steigt die Tourenzahl des Motors, der jetzt freies Spiel hat, plötzlich in die Höhe. — Ähnlich verhält es sich bei Torsionsschwingungen; es ergeben sich hier sehr merkwürdige, zum Teil geradezu paradoxe Verhältnisse.

---

[1] A. G. GREENHILL Proc. Inst. mech. Engin. Lond. 1883. p. 182. — C. CHREE, Quart. Journ. Nr. **89**. 11. 1888; Proc. Cambr. phil. Soc. **6**. 115. 1887; **7**. 201. 1891; **7**. 283. 1892; Trans. Cambr. phil. Soc. **14**. 250. 1888; **14**. 467. 1889; Phil. Mag. (5) **34**. 70. 154. 1892; (6) **7**. 504. 1904; Proc. phys. Soc. **19**. 114. 1904. — ST. DUNKERLEY, Proc. Roy. Soc. Lond. **54**. 365. 1894. — L. LECORNU, C. R. **123**. 96. 1896; Bull. Soc. math. **29**. 176. 1901. — H. LORENZ, Dynamik der Kurbelgetriebe. Leipzig 1902. — H. FRAHM, Ztschr. Ver. der Ingenieure 1902. — R. LORENZ, Die Eigenschwingungen rotierender Stäbe, In.-Diss. Jena (Gött.) 1904. — A. SOMMERFELD, Phys. Ztschr. **3**. 266. 286. 1902.

Elastischer Stoß.

Von F. AUERBACH.

Allgemeines. Wenn zwei Körper bei ihrer Bewegung miteinander in Berührung kommen, so tritt eine Reihe von Erscheinungen auf, welche man als die Erscheinungen des Stoßes zusammenfaßt. Bestimmend für sie sind die Massen der beiden Körper, ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoße nach Größe und Richtung, ihre Elastizitäts- und zuweilen auch ihre Reibungsverhältnisse, endlich die Lage und Beschaffenheit der Berührungsstellen. Zu ermitteln sind einmal die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, wiederum nach Größe und Richtung, und zweitens die Vorgänge und Begleiterscheinungen während der Berührung selbst (Stoßzeit, Stoßfläche, Stoßtiefe, Erwärmung, Schall, dauernde Deformation u. s. w.). Bei Beschränkung auf den ersten Punkt kann man schon durch elementare Betrachtungen zu Ergebnissen gelangen; diese sind aber nur in gewissen Spezialfällen erfahrungsgemäß streng richtig, in anderen sind sie es nur näherungsweise, in noch anderen endlich werden sie durch die Beobachtungen widerlegt. Alsdann, und ebenso wenn es sich um Probleme der zweiten Klasse handelt, muß die höhere Elastizitätstheorie zugrunde gelegt werden, die jedoch ebenfalls, ihrem heutigen Stande nach, die Beobachtung nur in einigen Fällen befriedigend wiedergibt.

Man unterscheidet zunächst den zentralen Stoß, bei dem im Moment der Berührung die Stoßrichtung, d. h. die Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Körper, auf der Tangentialebene senkrecht steht, von dem exzentrischen Stoße, bei dem entweder nur eine oder keine der beiden von den Schwerpunkten nach der Berührungsstelle gezogenen Linien auf der Tangentialebene senkrecht steht. Bei zwei homogenen Kugeln z. B. ist jeder Stoß zentral, bei Ellipsoiden nur, wenn die Berührung an den Enden der Achsen stattfindet u. s. w. Zweitens unterscheidet man den geraden Stoß, bei dem die vor dem Stoße stattfindenden Bewegungsrichtungen gemeinschaftlich in die Stoßrichtung fallen, von dem schiefen Stoße, wo eine oder beide Bewegungsrichtungen mit der Stoßrichtung einen Winkel bilden. Beim schiefen exzentrischen Stoße können dabei noch verschiedene Möglichkeiten eintreten, auf die jedoch hier nicht näher eingegangen werden kann. Drittens hat man den Stoß auf einen freien, auf einen drehbaren oder auf einen festen Körper bezw. zwischen solchen zu unterscheiden. Endlich werden die Erscheinungen kompliziert, wenn die stoßenden Körper vor dem Stoße außer der fortschreitenden auch noch eine drehende (rollende oder kreiselnde) Bewegung haben.

1. Elementare Theorie.[1]

Gerader zentraler Stoß. Hier verläuft die ganze Erscheinung in einer Linie, und es handelt sich nur darum, bei gegebenen Massen m_1 und m_2 der Körper K_1 und K_2 (die man sich der Anschaulichkeit halber als Kugeln vorstellen kann) und gegebenen Geschwindigkeiten c_1 und c_2 vor dem Stoße die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach demselben zu ermitteln. Hierzu können nach Wahl verschiedene Prinzipien der Mechanik dienen. Wählt man das der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (Prinzip 9, p. 224), so argumentiert man folgendermaßen: Während der Berührung übt jeder der beiden Körper auf den anderen einen Druck aus, und nach dem obigen Prinzip sind diese beiden Drucke gleich und entgegengesetzt. Folglich werden auch die Wirkungen, die sie hervorbringen, gleich und entgegengesetzt sein; jede dieser Wirkungen besteht nun in einer Geschwindigkeitsänderung ($v_1 - c_1$ bezw. $v_2 - c_2$), also in einer Änderung der Bewegungsgröße (p. 43). Man erhält also

$$m_1(v_1 - c_1) = m_2(c_2 - v_2)$$

oder auch

(1) $$m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const} \quad .$$

Wählt man das Prinzip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes (Prinzip 13, p. 226), so hat man für Ort und Geschwindigkeit des Schwerpunktes von K_1 und K_2 vor dem Stoße, also auch nach ihm:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \,, \qquad \text{also} \quad v = c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \,,$$

also wieder wie oben. In Worten besagt diese Gleichung: Die Summe der Bewegungsgrößen beider Körper wird durch den Stoß nicht geändert. Hiermit hat man aber nur eine einzige Bestimmungsgleichung für die beiden gesuchten Größen v_1 und v_2, und es können folglich unendlich viele verschiedene Fälle eintreten. Welcher von ihnen eintritt, hängt von der Elastizität des Materials von K_1 und K_2 ab. Die beiden hier möglichen äußersten Fälle sind diejenigen völlig unelastischer und vollkommen elastischer Körper.

a) Unelastischer Stoß. Der Druck der Körper aufeinander deformiert diese, ohne eine innere Gegenkraft wachzurufen; es wird also ein völliger Ausgleich sowohl des Druckes als der Geschwindigkeiten stattfinden, die relative Geschwindigkeit der Körper gegeneinander, die vor dem Stoße $c_1 - c_2$ betrug, ist nach ihm null geworden, und die Körper werden sich gemeinsam (ohne sich wieder zu trennen), mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, nämlich mit der Geschwindigkeit

(2) $$v_1 = v_2 = v = c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad .$$

Stoßen also z. B. zwei Kugeln von gleicher Masse mit gleichen, entgegengesetzten Geschwindigkeiten aufeinander ($m_1 = m_2$, $c_1 = -c_2$), oder stoßen zwei

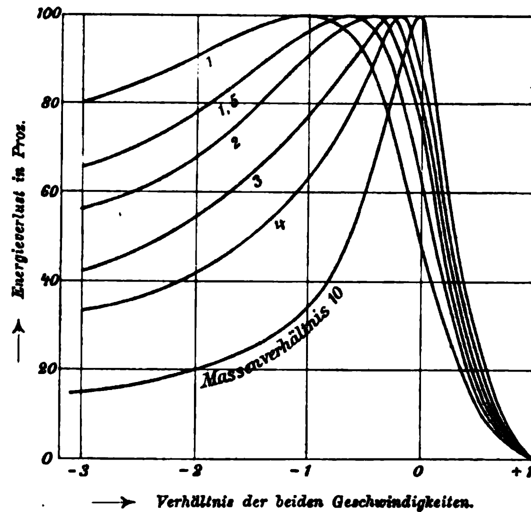
[1] Die mechanische Theorie des Stoßes ist, nachdem die schon 30 Jahre vorher von dem Prager Arzte MARC MARCI aufgestellten Gesetze fast unbekannt geblieben waren, fast gleichzeitig 1668 infolge einer Preisfrage der Londoner Akademie von HUYGENS (De motu corporum ex percussione), WALLIS (Opera 1. 1012: De percussione) und WREN entwickelt und in den Trans. Roy. Soc. 1. zuerst veröffentlicht. — Bald darauf hat auch NEWTON die Stoßtheorie entwickelt (Philos. nat. princ. math., Einleitung); weiterhin lieferten EULER, KARSTEN, MUSCHENBROEK, MAUPERTUIS, LAMBERT u. A. Beiträge, vgl. die historische Abhandlung von E. GELCICH, Ztschr. f. Math. u. Phys. (hist. Abtg.) 33. 41. 81. 1888. — Die Anwendung auf das Billardspiel gaben MUSCHENBROEK und — weit vollständiger — v. CORIOLIS, Théorie math. des effets du jeu de billard. Paris 1835. Die neuere Literatur s. w. u.

Kugeln von verschiedenen Massen mit entgegengesetzten, ihren Massen umgekehrt proportionalen Geschwindigkeiten aufeinander ($m_1 c_1 = - m_2 c_2$), so kommen sie zum Stillstand. Stoßen zwei Kugeln von gleichen Massen mit verschiedenen Geschwindigkeiten aufeinander, so bewegen sie sich mit dem arithmetischen Mittel der Geschwindigkeiten weiter. Da der Stoß die unelastischen Körper teils erwärmt, teils dauernd deformiert, so leistet er Arbeit; ein Teil der kinetischen Energie muß also verloren gehen, und zwar findet man diesen Verlust

$$\frac{1}{2}(m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(c_1 - c_2)^2 \quad .$$

Der Verlust an kinetischer Energie ist also einerseits einer reinen Funktion der Massen, andererseits einer reinen Funktion der Geschwindigkeiten, nämlich dem Quadrat ihrer Differenz proportional; genauer: er ist gleich der kinetischen Energie einer Kugel, deren reziproke Masse die Summe der reziproken Kugelmassen und deren Geschwindigkeit die Differenz der Kugelgeschwindigkeiten ist. Der verhältnismäßige Verlust an kinetischer Energie endlich hängt nur von dem Verhältnis δ der beiden Massen und dem Verhältnis ε der beiden Geschwindigkeiten ab und ist gleich

$$(3) \qquad \frac{(1-\varepsilon)^2}{(1+\delta)(1/\delta + \varepsilon^2)} \quad .$$



Figur 254.

Da diese Formel von eigentümlichem Charakter ist, sind einige Werte in der folgenden Tabelle zusammengestellt, und in der Figur 254 veranschaulicht; in der Tabelle sind in der obersten Horizontalreihe die Geschwindigkeits-, in der linken Vertikalreihe die Massenverhältnisse angegeben, in den übrigen die zugehörigen Energieverluste in Prozenten:

	−3	−2	−1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
1	80	90	100	96	90	63	50	26	10	0
$\frac{3}{2}$	66	77	96	100	98	86	60	31	11	0
2	56	67	89	98	100	93	67	33	11	0
3	43	54	75	89	96	99	75	35	11	0
4	34	42	64	80	90	100	80	36	10	0
10	16	20	33	51	59	86	91	72	7	0

In der Figur stellt jede Kurve den Energieverlust als Funktion des Geschwindigkeitsverhältnisses dar, die verschiedenen Kurven beziehen sich auf die verschiedenen Massenverhältnisse. Wie man sieht, sind die Kurven stark unsymmetrisch, uud das Maximum ist desto steiler und desto weiter nach rechts verschoben, je verschiedener die Massen sind. Wenn das Geschwindigkeitsverhältnis dem Massenverhältnis entgegengesetzt reziprok ist, geht die ganze kinetische Energie verloren, die Kugeln bleiben, sich berührend, stehen.

b) Elastischer Stoß. Hier ist der eigentliche Vorgang des Stoßes damit, daß die beiden Körper ihre relativen Geschwindigkeiten gegen den Schwerpunkt,

$c_1 - c$ und $c_2 - c$, einbüßen, noch nicht beendet, der Druck der Körper aufeinander ruft nämlich deren Elastizität wach, und wenn diese eine vollkommene ist, so treibt sie die Körper mit dem gleichen, aber entgegengesetzten Drucke auseinander. Auf jene erste Periode der Berührung folgt also eine zweite, in der die relative Geschwindigkeit jeder der beiden Körper von null auf den dem ursprünglichen entgegengesetzten Wert steigt, d. h. auf $c - c_1$ bezw. $c - c_2$. Die absoluten Geschwindigkeiten der Körper vom Augenblicke ihrer Trennung an sind also

$$(4)\quad \begin{cases} v_1 = c + (c - c_1) = \dfrac{(m_1 - m_2)c_1 + 2\,m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad , \\ v_2 = c + (c - c_2) = \dfrac{(m_2 - m_1)c_2 + 2\,m_1 c_1}{m_2 + m_2} \quad . \end{cases}$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man die Gleichungen (1) mit dem Prinzip von der Erhaltung der kinetischen Energie (Prinzip 15, p. 226), also mit der Gleichung

$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

kombiniert, und umgekehrt findet man auch durch die Gleichungen (4) dieses Prinzip befriedigt, d. h. den Verlust an kinetischer Energie gleich null. Die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße findet sich: $v_1 - v_2 = c_2 - c_1$, sie ist also der relativen Geschwindigkeit vor dem Stoße gleich und entgegengesetzt. Der Umsatz von Bewegungsgröße ist hiernach in der zweiten Periode ebensogroß wie in der ersten und im ganzen doppelt so groß wie bei unelastischen Körpern.

Ist $m_1 < m_2$ und ruht einer der Körper vor dem Stoße, so wird:

wenn der schwere stößt, der leichte ruht:

$$(5\text{a})\qquad v_1 = \frac{2\,m_2}{m_1 + m_2}c_2 \quad , \qquad v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}c_2 \quad ,$$

wenn der leichte stößt, der schwere ruht:

$$(5\text{b})\qquad v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}c_1 \quad , \qquad v_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}c_1 \quad .$$

Sind beide Körper in Bewegung, ihre Massen aber gleich, so wird besonders einfach

$$(5\text{c})\qquad v_1 = c_2 \quad , \qquad v_2 = c_1 \quad ;$$

die Kugeln prallen also mit vertauschten Geschwindigkeiten auseinander oder, wie man auch sagen kann, sie verhalten sich so, als ob sie mit unveränderter Geschwindigkeit durcheinander hindurch gegangen wären. Stößt z. B. eine Kugel auf eine gleich schwere ruhende, so gibt sie ihre ganze Geschwindigkeit an diese ab und kommt selbst zur Ruhe. Stoßen zwei gleich schwere Kugeln mit gleichen, aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten aufeinander, so prallen sie mit unveränderter Geschwindigkeit zurück.

Unvollkommen elastischer Stoß. In den beiden untersuchten extremen Fällen sind, wie man sieht, die Erscheinungen völlig verschieden. Sie werden aber vermittelt durch die Erscheinungen beim Stoße unvollkommen elastischer Körper oder, was im wesentlichen dasselbe ist, bei Stößen, deren Wirkung die Elastizitätsgrenze der Stoffe überschreitet. Die erste Periode der Berührung verläuft dann wieder ebenso wie in den beiden extremen Fällen, in der zweiten aber erlangen die Kugeln, wenn k ein echter Bruch ist, nur die relativen Ge-

schwindigkeiten $k\,(c - c_1)$ bezw. $k(c - c_2)$ wieder, ihre absoluten Geschwindigkeiten werden also

$$(6)\qquad \begin{cases} v_1 = c + k(c - c_1) = \dfrac{(m_1 - k\,m_2)\,c_1 + (1 + k)\,m_2\,c_2}{m_1 + m_2} \quad , \\[2ex] v_2 = c + k(c - c_2) = \dfrac{(m_2 - k\,m_1)\,c_2 + (1 + k)\,m_1\,c_1}{m_1 + m_2} \quad . \end{cases}$$

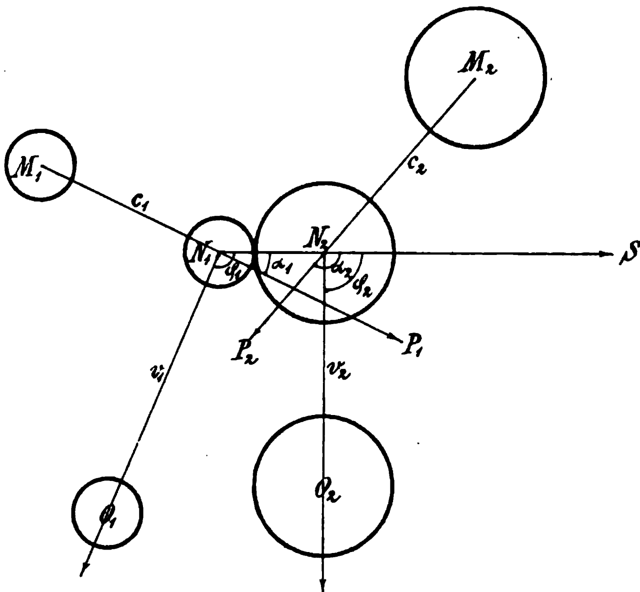
Die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße wird

$$(7)\qquad v_1 - v_2 = k(c_2 - c_1)\ . \ ,$$

also der ursprünglichen entgegengesetzt und gleich ihrem k-fachen. Dieser Bruch heißt[1] Restitutionskoeffizient. Für wollene Kugeln z. B. ist er nach NEWTON etwa 0,56, für gläserne etwa 0,94. Für $k = 0$ erhält man wieder (2), für $k = 1$ wieder (4).

Eine andere Klasse von Zwischenerscheinungen erhält man bei dem elastisch-unelastischen Stoße, d. h. dem Stoße zwischen einem als völlig elastisch und einem als völlig unelastisch betrachteten Körper.

Schiefer Stoß. Zu den Zahlengrößen kommen hier noch (Figur 255) die Winkel $P_1 N_1 S = \alpha_1$ und $P_2 N_2 S = \alpha_2$ hinzu, welche die Geschwindigkeiten c_1 und c_2, und die Winkel $O_1 N_1 S = \varphi_1$ und $O_2 N_2 S = \varphi_2$, welche die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 mit der Stoßrichtung bilden (die Komplementwinkel bilden sie



Figur 255.

mit der Berührungsebene). Die Wirkung des Stoßes erstreckt sich nur auf die in die Stoßrichtung fallenden Komponenten, die man daher nach obigen Formeln zu behandeln hat; die anderen Komponenten bleiben, wenn keine Reibung vorhanden ist, unverändert; schließlich hat man wieder die Resultante zu bilden. Man erhält auf diese Weise:

[1] THOMSON und TAIT, Handbuch der theoretischen Physik. 1. 236.

a) Für unelastische Körper, wenn man zur Abkürzung

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{m_1 c_1 \cos\alpha_1 + m_2 c_2 \cos\alpha_2}{m_1 + m_2} = K \\ \text{setzt:} \\ v_1 = \sqrt{K^2 + c_1^2 \sin^2\alpha_1}\,, \qquad v_2 = \sqrt{K^2 + c_2^2 \sin^2\alpha_2} \\ \operatorname{tang}\varphi_1 = \dfrac{c_1 \sin\alpha_1}{K}\,, \qquad \operatorname{tang}\varphi_2 = \dfrac{c_2 \sin\alpha_2}{K}\,. \end{cases}$$

Die Kugeln trennen sich hiernach im allgemeinen nach dem Stoße wieder; sie bleiben nur zusammen, wenn $v_1 = v_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$ wird, also wenn die Anfangsgeschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Sinus der Anfangsrichtungen verhalten, oder in dem Spezialfalle $m_1 = m_2$, $c_1 = c_2$, $\alpha_1 = -\alpha_2$; im letzteren gehen die vereinigten Kugeln in der Berührungsebene weiter. Ruht die zweite Kugel, so ist $c_2 = 0$ und es wird:

$$(9)\quad K = \frac{m_1 c_1 \cos\alpha_1}{m_1 + m_2}\,,\; v_1 = \sqrt{K^2 + c_1^2 \sin^2\alpha_1}\,,\; v_2 = K,\; \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{c_1 \sin\alpha_1}{K}\,, \operatorname{tang}\varphi_2 = 0\,;$$

die getroffene Kugel geht also in der Stoßrichtung ab, und zwar desto langsamer, je schiefer sie getroffen wurde.

b) Für elastische Körper, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{(m_1 - m_2) c_1 \cos\alpha_1 + 2 m_2 c_2 \cos\alpha_2}{m_1 + m_2} = K_1\,, \qquad \frac{(m_2 - m_1) c_2 \cos\alpha_2 + 2 m_1 c_1 \cos\alpha_1}{m_1 + m_2} = K_2$$

setzt:

$$(10)\quad \begin{cases} v_1 = \sqrt{K_1^2 + c_1^2 \sin^2\alpha_1}\,, \qquad v_2 = \sqrt{K_2^2 + c_2^2 \sin^2\alpha_2} \\ \operatorname{tang}\varphi_1 = \dfrac{c_1 \sin\alpha_1}{K_1}\,, \qquad \operatorname{tang}\varphi_2 = \dfrac{c_2 \sin\alpha_2}{K_2}\,. \end{cases}$$

Für gleiche Massen wird:

$$v_1 = \sqrt{c_1^2 \sin^2\alpha_1 + c_2^2 \cos^2\alpha_2}\,, \qquad v_2 = \sqrt{c_1^2 \cos^2\alpha_1 + c_2^2 \sin^2\alpha_2}\,,$$

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{c_1 \sin\alpha_1}{c_2 \cos\alpha_2}\,, \qquad \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{c_2 \sin\alpha_2}{c_1 \cos\alpha_1}\,,$$

und wenn auch noch $c_1 = c_2$, $\alpha_1 = -\alpha_2$ ist, so laufen die Kugeln mit vertauschten Richtungen weiter. Wenn die gestoßene Kugel vorher ruht, so wird allgemein

$$(11)\quad \begin{cases} K_1 = \dfrac{(m_1 - m_2) c_1 \cos\alpha_1}{m_1 + m_2}\,, \qquad v_1 = \sqrt{K_1^2 + c_1^2 \sin^2\alpha_1}\,, \\ v_2 = K_2 = \dfrac{2 m_1 c_1 \cos\alpha_1}{m_1 + m_2}\,, \qquad \operatorname{tang}\varphi_1 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \operatorname{tang}\alpha_1\,, \quad \operatorname{tang}\varphi_2 = 0\,. \end{cases}$$

Auch hier geht die getroffene Kugel in der Stoßrichtung, aber doppelt so schnell wie die unelastische, fort; insbesondere bei gleichen Massen wird

$$v_1 = c_1 \sin\alpha_1\,, \quad v_2 = c_1 \cos\alpha_1\,, \quad \operatorname{tang}\varphi_1 = \infty\,, \quad \operatorname{tang}\varphi_2 = 0\,;$$

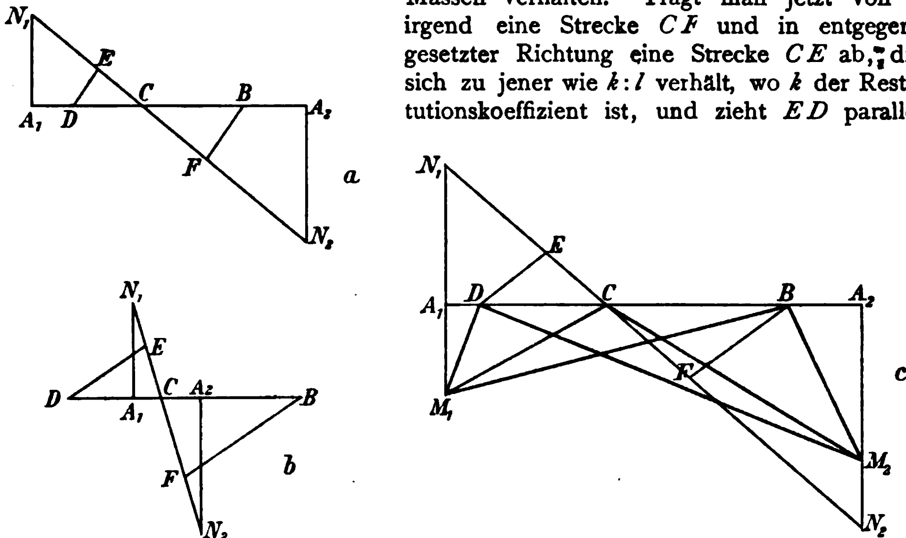
die stoßende Kugel geht also in der Berührungsebene, die gestoßene in der Stoßrichtung, mithin beide rechtwinklig gegeneinander weiter.[1]

c) Beim elastisch-unelastischen Stoße und beim Stoße unvollkommen elastischer Körper treten wieder gewisse mittlere Erscheinungen auf.

---

[1] Etwas andere Formeln entwickelt F. RE, Riv. scient.-industr. **27**. 107. 1895.

Graphische Darstellung. Um die Abhängigkeit der schließlichen Geschwindigkeiten von den anfänglichen anschaulich darzustellen, kann man, besonders für didaktische Zwecke, die graphische Methode benutzen, indem man entweder das Diagramm der Geschwindigkeiten[1] oder, was noch vorteilhafter ist, das Diagramm der Bewegungsgrößen (Momente) verzeichnet. In den Figuren 256 *a, b, c* sind diese letzteren Diagramme nach LEES[2] wiedergegeben, und zwar bezieht sich 256 *a* auf den geraden Stoß mit gleichem, 256 *b* auf den geraden Stoß mit entgegengesetztem Richtungssinn, 256 *c* auf den schiefen Stoß. Beim geraden Stoße stellt man durch $A_1 B$ und $B A_2$ die beiden Bewegungsgrößen nach Größe und Richtung dar, durch die entgegengesetzten Perpendikel $A_1 N_1$ und $A_2 N_2$ die Massen, dann stellen, wenn C der Schnittpunkt der Linien $A_1 A_2$ und $N_1 N_2$ ist, die beiden Strecken $A_1 C$ und $C A_2$ die Bewegungsgrößen im mittelsten Momente des Stoßes dar, wo die beiden Kugeln gemeinsam laufen, ihre Moment sich also wie ihre Massen verhalten. Trägt man jetzt von C irgend eine Strecke CF und in entgegengesetzter Richtung eine Strecke CE ab, die sich zu jener wie $k:l$ verhält, wo k der Restitutionskoeffizient ist, und zieht ED parallel



Figur 256.

zu BF, so sind $A_1 D$ und $D A_2$ die endgültigen Bewegungsgrößen. Da beim schiefen Stoße ebenfalls nur die Bewegungsgrößen längs der Zentrallinie affiziert werden, ist hier die Konstruktion ganz entsprechend, und die Figur 256 *c* leicht verständlich.

Stoß gegen feste Wände. Man erhält die bezüglichen Formeln, indem man in den bisherigen $m_2 = \infty$, $c_2 = 0$ setzt. Bei einem unelastischen Körper wird, wenn er senkrecht auf eine unelastische Wand stößt, $v = 0$, er kommt zur Ruhe; stößt er schief auf, so wird $v = c \sin \alpha$, $\operatorname{tang} \varphi = \infty$, er läuft also längs der Wand weiter, und zwar desto schneller, je schiefer er aufstieß. Ein elastischer Körper dagegen wird, da $K_1 = - c_1 \cos \alpha_1$, $v_1 = c_1$, $\operatorname{tang} \varphi_1 = - \operatorname{tang} \alpha_1$ wird, mit gleicher Geschwindigkeit unter gleichem, aber entgegengesetztem Winkel zurückgestoßen. Bekanntlich gilt dasselbe Reflexionsgesetz auch für Schall, Licht, Wärme und Elektrizität.

Stoß zwischen drehbaren Körpern. Sind die beiden aufeinander stoßenden Körper nicht frei, sondern nur um eine Achse drehbar, so sind die Massen auf

[1] Vergl. E. OEHLER, Ztschr. f. Instrumentenk. 8. 187. 1890. — [2] C. H. LEES, Phil. Mag. (6) 8. 215. 1904.

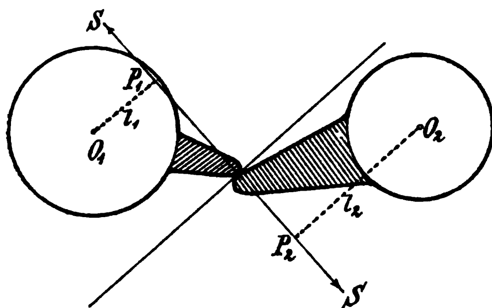
die Stoßrichtung zu reduzieren, indem man sie mit den Quadraten der Trägheitsradien r_1 und r_2 multipliziert und (Figur 257) mit den Quadraten der von den Achsen auf die Stoßrichtung gefällten Lote $O_1 P_1 = l_1$ und $O_2 P_2 = l_2$ dividiert. Sind dann die Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stoße ε_1 und ε_2, so sind sie nach dem Stoße

$$(12)\quad \begin{cases} w_1 = \varepsilon_1 - l_1(l_1\varepsilon_1 - l_2\varepsilon_2)(1+k)\dfrac{m_2 r_2^2}{m_1 r_1^2 l_2^2 + m_2 r_2^2 l_1^2}\,, \\ w_2 = \varepsilon_2 + l_2(l_1\varepsilon_1 - l_2\varepsilon_2)(1+k)\dfrac{m_1 r_1^2}{m_1 r_1^2 l_2^2 + m_2 r_2^2 l_1^2}\,, \end{cases}$$

wo für unelastische Körper $k = 0$, für vollkommen elastische $k = 1$, für unvollkommen elastische k ein echter Bruch ist. Trifft ein freier Körper auf einen drehbaren, so sind nur für letzteren die bezeichneten Substitutionen zu machen, es wird also

$$(13)\quad \begin{cases} v_1 = c_1 - (c_1 - l_2\varepsilon_2)(1+k)\dfrac{m_2 r_2^2}{m_1 l_2^2 + m_2 r_2^2}\,, \\ w_2 = \varepsilon_2 + l_2(c_1 - l_2\varepsilon_2)(1+k)\dfrac{m_1}{m_1 l_2^2 + m_2 r_2^2}\,. \end{cases}$$

Durch Spezialisierung erhält man hieraus den Stoß eines freien auf einen drehbaren, ruhenden Körper und den Stoß eines rotierenden Körpers auf einen freien ruhenden.



Figur 257.

Exzentrischer Stoß zwischen freien Körpern. Die Wirkungen des exzentrischen Stoßes lassen sich zusammensetzen aus der Wirkung eines zentralen Stoßes zwischen den beiden Körpern und der Wirkung, die ein Stoß zwischen ihnen haben würde, wenn sie nur um ihre Schwerpunkte drehbar wären; die Darstellung der Formeln würde indessen hier zu weit führen.

Noch weit verwickelter gestaltet sich natürlich das ganz allgemeine Problem des Stoßes im Raume, da hier zwölf Geschwindigkeits- und sechs Drehungskomponenten in Betracht kommen.

Mitwirkung der Reibung. Bisher ist angenommen worden, daß die beiden Körper vollkommen glatt sind, so daß die im Berührungspunkte auftretenden Widerstandskräfte immer senkrecht stehen auf der gemeinsamen Berührungsebene. Es soll nun untersucht werden, wie sich der Vorgang bei rauhen Körpern gestaltet. Dieses Problem ist schon von POISSON in Angriff genommen, von CORIOLIS verfolgt, aber erst von PHILIPPS, DARBOUX und ROUTH allgemein behandelt worden. Da die Arbeiten dieser Forscher indessen von wesentlich mathematischem Charakter sind und das Physikalische des Problems wenig hervortreten lassen, hat SZILY eine neue Bearbeitung geliefert, von der das folgende eine kurze Darstellung gibt.

Der Einfachheit halber wird der Stoß eines rauhen, aber unelastischen Körpers in der Ebene xy gegen eine zu dieser Ebene normale, ebene Wand $x = 0$ betrachtet; die anderen Fälle lassen sich dann leicht sekundär ableiten. Sind u, v die Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes, ω die Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse, u_0, v_0, ω_0 ihre Anfangswerte, sind ferner N und F der Normal- und Tangentialimpuls im Berührungspunkte, U und V dessen Normal- und

Tangential(Gleit-)geschwindigkeit, ist endlich η der Reibungskoeffizient und k der Trägheitsradius, so gelten die Grundgleichungen:

$$(14)\quad \begin{cases} m(u-u_0)=N \quad , \quad m(v-v_0)=F \quad , \quad m k^2(\omega-\omega_0)=Ny-Fx \quad , \\ U=u+y\omega \quad , \quad V=v-x\omega \quad , \end{cases}$$

also durch Kombination, wenn zur Abkürzung

$$a=\frac{1}{m}\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right) \quad , \quad b=\frac{1}{m}\left(1+\frac{y^2}{k^2}\right) \quad , \quad c=\frac{1}{m}\cdot\frac{xy}{k^2}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{m}\right)\left(b-\frac{1}{m}\right)} \quad ,$$

$$U_0=-(u_0+y\omega_0) \quad , \quad V_0=v_0-x\omega_0$$

gesetzt wird, die Gleichungen:

$$(15)\qquad U=-U_0-cF+bN \quad , \quad V=V_0+aF-cN \quad ,$$

wo a, b, c, U_0, V_0 die Konstanten des Stoßes sind und N und F zu ermitteln sind; ihre Endwerte N_1 und F_1 geben die Lösung des Problems. Es sind nun, je nach der Lage des Schwerpunktes diesseits, in oder jenseits der Normale des Stoßes, drei Fälle möglich: $c>0$, $c=0$ und $c<0$. Im ersten Falle sind wieder drei Unterfälle zu unterscheiden, in dem ersten dauert das anfangs bestehende Gleiten während des ganzen Stoßes fort, im zweiten wird es während des Stoßes null und bleibt null, im dritten wird es während des Stoßes null, tritt aber noch während der Stoßdauer wieder auf; der erste Unterfall tritt ein, wenn

$$(16)\qquad \frac{V_0}{U_0}=\operatorname{tang}\varphi \geqq \frac{a\eta+c}{c\eta+b}$$

ist, wo φ der Stoßwinkel ist; seine Grenzwerte ergeben besondere Spezialerscheinungen; im zweiten und dritten Unterfalle gilt dieselbe Beziehung mit dem Zeichen $<$. Im ersten Unterfalle erhält man:

$$(17)\qquad N_1=\frac{U_0}{c\eta+b} \quad , \quad F_1=-\eta\frac{U_0}{c\eta+b} \quad ,$$

also, wie es während des Bestehens des Gleitens sein muß, $F_1=-\eta N_1$; im zweiten Unterfalle dagegen wird:

$$(18)\qquad N_1=\frac{aU_0-cV_0}{ab-c^2} \quad , \quad F_1=\frac{cU_0-bV_0}{ab-c^2} \quad ;$$

wie man sieht, ist hier das Ergebnis völlig unabhängig vom Reibungskoeffizienten, und unter Umständen überhaupt identisch mit dem für glatte Körper gültigen. Im dritten Unterfall endlich erhält man:

$$(19)\qquad N_1=\frac{(a\eta+c)U_0-2c\eta V_0}{(a\eta+c)(b-\eta c)} \quad , \quad F_1=\frac{(a\eta+c)U_0-2bv_0}{(a\eta+c)(b-\eta c)} \quad ;$$

hier ist also der Reibungskoeffizient wieder maßgebend, aber es besteht keine einfache Beziehung zwischen N_1 und F_1, es kann sogar das letztere positiv, null oder negativ sein, und in jedem dieser drei Fälle ergeben sich Besonderheiten des Phänomens. Soweit der erste Hauptfall. Im zweiten, $c=0$, hat die Reibung keinerlei Einfluß auf U, der Stoß endigt einfach, wenn $U=0$ ist, es ist daher $N_1=U_1/b$, und F_1 ist hiervon das $-\eta$ fache oder weniger, je nachdem das Gleiten anhält oder aufhört. Im dritten Hauptfalle ergeben sich ganz ähnliche Möglichkeiten wie im ersten. In dem Sonderfalle $U_0=\varphi_0=0$ (senkrechter Stoß) und $\eta \geqq c/a$ wird der Reibungskoeffizient einflußlos, der Stoß erfolgt so wie für vollkommen rauhe Körper.

Im vorstehenden ist die Frage so gestellt, daß der geometrische Zustand des Körpers für den Anfang als gegeben angesehen und der anfängliche

mechanische Zustand mit Rücksicht auf eine gewisse, erwartete Bewegung gesucht wird. Man kann aber auch umgekehrt verfahren, wozu nur eine entsprechende Analyse der obigen Formeln erforderlich ist; man findet alsdann sehr anschauliche Resultate; insbesondere ergeben sich als geometrischer Ort für die die obigen drei Hauptfälle trennenden Schwerpunktslagen gewisse Scharen von Hyperbeln, deren Brennpunkte und Asymptotenrichtungen durch Berührungspunkt, Reibungswinkel u. s. w. bestimmt sind; in den verschiedenen Fällen liegen diese Hyperbeln verschieden und desto schiefer, je größer die Reibung ist. Es muß jedoch an diesen Andeutungen genügen; und auch auf die Art und Weise, wie nun aus dem unelastischen der elastische und aus dem Stoße gegen eine Wand der Zusammenstoß zweier Körper abgeleitet wird, kann nicht eingegangen werden.

RESAL geht bei seiner Behandlung des Problems von der folgenden Hypothese aus: Zieht man von einem Punkte aus drei gerade Linien, die nach Richtung und Größe die Geschwindigkeiten darstellen, die irgend ein Teilchen eines der beider Körper vor und nach dem Stoße, sowie im Augenblick größter Zusammendrückung hat, so liegen ihre Endpunkte in einer geraden Linie. Diese Hypothese führt zu einer Gleichung, die den Verlust an kinetischer Energie als Summe zweier Glieder darstellt, ein vom Elastizitätsgrad (Restitutionskoeffizienten) und ein von der Reibung abhängiges. Die Folgerungen, die aus der Gleichung gezogen werden, führen zu Ergebnissen, die mit den obigen zum Teil nicht vereinbar sind, z. B. in bezug auf die Richtungskonstanz oder Richtungsänderung der Reibung während der Stoßdauer.

Endlich ist noch auf eine sehr elegante Arbeit von MAYER hinzuweisen, die sich an die von DARBOUX und ROUTH anschließt und sich die Aufgabe stellt, die Vorzüge beider miteinander zu vereinigen; insbesondere wird der von ROUTH eingeführte „darstellende Punkt", der die Bewegung Schritt für Schritt zu verfolgen erlaubt, beibehalten, und es wird gezeigt, wie er sich verhält, wenn das Gleiten fortdauert, momentan aufhört oder dauernd aufhört, d. h. in Rollen übergeht. Durch die ältere Arbeit von SZILY, die MAYER nicht gekannt zu haben scheint, sind seine Ergebnisse, soweit physikalisches Interesse in Betracht kommt, überholt.[1]

Billard. Die weiteste und eingehendste Ausgestaltung hat die elementare Theorie des Stoßes begreiflicherweise im Hinblick auf das Billardspiel erfahren; es liegen hierfür umfangreiche Monographien mathematischen Charakters vor von CORIOLIS, HEMMING und RESAL, sowie zahlreiche kleinere Abhandlungen.[2] Die Gesetze des elastischen Stoßes kommen hier in sehr mannigfaltiger Form zum Ausdruck, insofern es sich teils um geraden, teils um schiefen Stoß, teils um den Stoß des Queus gegen den Ball, teils um den Stoß des Balles gegen die Bande handelt; ferner, insoweit die Bälle außer ihrer fortschreitenden Bewegung im allgemeinen noch zwei verschiedene Drehbewegungen ausführen, nämlich die des Rollens (um eine horizontale Achse) und die des Kreiselns (um eine vertikale Achse). Die Rollbewegung wird sogar wegen der Reibung auf dem Tuche einen wesentlichen Faktor des Phänomens ausmachen; bei hohem Stoße erfolgt kräftiges, bei mittlerem und tiefem schwächeres Vorwärtsrollen, bei ganz tiefem Rückwärtsrollen, und nur bei ganz bestimmter Stoßhöhe wird das Rollen gerade aufgehoben und reines Gleiten erzielt. Das Kreiseln andererseits tritt immer bei seitlicher Asymmetrie des Stoßes auf und kombiniert sich mit dem Rollen im allgemeinen

[1] S. D. POISSON, Traité de Mécan. 2. éd. Paris 1833. — G. CORIOLIS, a. a. O. — ED. PHILIPPS, LIOUV. Journ. **14.** 1849. — G. DARBOUX, C. R. **78.** 1421. 1559. 1645. 1767; Bull. sciences math. (2) **4.** 126. 1880. — E. ROUTH, Rigid Dynamics. 4. Aufl. London 1882. — K. v. SZILY, Math. u. naturw. Ber. aus Ungarn. **19.** 283. 1901. — H. RESAL, C. R. **95.** 547. 578. 615. 700. 745. 1882. — A. MAYER, Leipz. Ber. **54.** 208. 327. 1902. — [2] G. CORIOLIS, Th. math. des effets du jeu de billard. Paris 1835. — G. W. HEMMING, Billiards mathematically treated. London 1899. — H. RESAL, Comm. à la th. math. du jeu du billard. (LIOUV. Journ. (3) **9.** 65. 1883). — Vergl. auch G. T. WALKER, Artikel „Spiel und Sport" in der Enzykl. d. math. Wiss. IV. 1. II. p. 128. 1904.

zu komplizierter Rotation um variable Achsen. Rollen wie Gleiten hat wesentlichen Einfluß auf die Geschwindigkeit, einen noch größeren aber auf die Richtung der Bewegung; im allgemeinen wird sogar die Bahn krummlinig sein. Endlich ist von wesentlichem Einfluß die Höhe der Bande; bei neueren Billards liegt sie in $^7/_5$ Radiushöhe, und damit in einer Höhe, die unter mittleren Verhältnissen geradlinige Bahn des reflektierten Balles erzeugt. In bezug auf die Einzelheiten muß auf die genannten Werke verwiesen werden.

2. Höhere Theorie.

Auf Grund der allgemeinen Elastizitätstheorie ist die Lehre vom Stoße zuerst, aber in unvollkommener und zum Teil anfechtbarer Weise von Poisson, Navier, Cauchy, Poinsot u. A. behandelt worden. Mehr als historisches Interesse können, von Sonderfragen (s. w. u.) abgesehen, heute im wesentlichen nur die Theorien und Entwickelungen von de Saint-Venant, Sebert und Hugoniot, F. Neumann, Boussinesq, Darboux, Flamant, Hertz und Voigt[1] in Anspruch nehmen. Diese beziehen sich teils auf beliebige Körper, teils aber und in der Hauptsache auf zwei Körperformen: Zylinder und Kugeln; und in bezug auf die erstgenannte Form behandeln sie einerseits den longitudinalen, andererseits den transversalen Stoß. Gemeinsam ist allen der höheren Theorie angehörigen Untersuchungen im Gegensatz zu den elementaren, daß der Stoßvorgang selbst untersucht, also die in jedem Moment wirkende Kraft ermittelt und hieraus durch Integration über kleine Zeiträume der jeweilige Impuls gebildet wird. Dabei ergibt sich dann noch ein zweites, nämlich die Wellennatur des Stoßes, die im allgemeinen zur Folge hat, daß die Körper auch nach dem Stoße sich noch nicht wie starre Körper verhalten.

Was zunächst die Lehre von den Impulsen betrifft, so hat sie Darboux in sehr eleganter Form dargestellt. Er geht zunächst aus von Impulsen, d. h. Kraftintegralen über eine endliche Zeit, und stellt fest, daß sie die Änderung der Bewegungsgröße während dieser Zeit darstellen. Läßt man nun die Zeitdauer immer kleiner, die Kraft immer größer werden, wobei aber die Impulse endlich und unter einer gewissen Grenze bleiben, so kommt man zu dem Endfalle, wo der Körper in einem bestimmten Moment ohne Ortsänderung eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung erfährt. Derartige Impulse bezeichnet Darboux als Perkussionen; es ist einleuchtend, daß die von endlichen Kräften, z. B. der Schwerkraft herrührenden Perkussionen null sind. Natürlich ist der Begriff der Perkussion nur eine Abstraktion, aber eine ebenso nützliche wie so viele andere in der Theorie. Es werden nun zuerst die drei Fälle des Körpers mit fester Achse, des Körpers mit festem Punkte und des völlig freien Körpers betrachtet und das Verhalten hinsichtlich der Perkussionen festgestellt. Alsdann wird die kinetische Energie untersucht, und es werden einige Fundamentalsätze für sie aufgestellt, z. B.: 1. Die Änderung der kinetischen Energie ist gleich der Summe der Arbeiten, die die Perkussionskräfte leisten würden, wenn die Geschwindigkeit

---

[1] S. D. Poisson, Traité de Mécan. **2.** § 499. — M. Cauchy, Bull. soc. philom. 1826. p. 180. — L. Poinsot, Liouv. Journ. (2) **2.** 1857; (2) **4.** 1859. — H. de Saint-Venant, Liouv. Journ. (2) **12.** 237. 1867; C. R. **95.** 359. 423. 1882. — B. de Saint-Venant u. Flamant, C. R. **97.** 127. 214. 281. 1883. — Flamant, Journ. de l'Ecole polyt. **59.** 1890. — Sebert u. Hugoniot, C. R. **95.** 213. 338. 381. 775. 1882. — J. Boussinesq, C. R. **94.** 1044. 1882; **97.** 154. 1883. — Vgl. auch H. Resal, a. a. O. — F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität. Leipzig 1885. p. 332 ff. (entstanden nach Voigt in den fünfziger Jahren). — G. Darboux, Bull. sciences math. (2) **4.** 126. 1880. — Joukowski, Liouv. Journ. (3) **4.** 1878. — J. Appell, C. R. **116.** 1483. 1893. — W. Voigt, Wied. Ann. **19.** 43. 1883. — V. Hausmaninger, ibid. **25.** 189. 1885. — H. Hertz, Crelles Journ. **92.** 156. 1882; Verh. Ver. Beförd. Gewerbfl. 1882; Ges.-Werke. **1.**

des Körpers während des ganzen Prozesses konstant und zwar gleich der geometrischen Summe der Anfangs- und Endgeschwindigkeit bliebe. 2. Der Verlust an kinetischer Energie ist gleich der der verlorenen Geschwindigkeit entsprechenden kinetischen Energie, vermindert um die doppelte Arbeit, die die Kräfte leisten würden, wenn die Geschwindigkeit während des ganzen Prozesses gleich der Endgeschwindigkeit bliebe. 3. Der Gewinn an kinetischer Energie ist gleich der der gewonnenen (oder verlorenen) Geschwindigkeit entsprechenden kinetischen Energie, vermehrt um das Doppelte der Arbeit, die die Kräfte leisten würden, wenn die Geschwindigkeit immer die Anfangsgeschwindigkeit bliebe. — Diese, zunächst für einen Massenpunkt aufgestellten Sätze lassen sich sinngemäß auch auf ganze Körper ausdehnen. Schließlich kann man, indem man von diesen Sätzen Anwendung macht auf den Zusammenstoß von Körpern, die elementare Theorie prüfen und vertiefen.

Über die Frage, inwieweit die LAGRANGEschen verallgemeinerten Gleichungen (vrgl. p. 326) das Stoßproblem vollständig bestimmen, sei auf eine Abhandlung von APPELL hingewiesen; es zeigt sich, daß es darauf ankommt, ob die neuen, durch den Stoß hinzukommenden Verbindungen zwischen den Massenpunkten auch nach dem Stoße bestehen bleiben oder nicht; in jenem Falle (ballistisches Pendel) ist der Bewegungszustand nach dem Stoße bestimmt, in diesem (freie Körper) nicht.

Longitudinaler Stoß von freien Zylindern. Es wird vollkommene Elastizität vorausgesetzt und von sekundären Einflüssen abgesehen. Führt man Zylinderkoordinaten $x\,r\,\vartheta$ ein, nennt die Verschiebungskomponenten entsprechend $u\,\varrho\,\psi$ und drückt die Druckkomponenten, sowie die Elastizitätsgleichungen [Art. „Elastizität", p. 524, Gleichung (76)] in diesen Koordinaten aus, so findet man bei Beschränkung auf die hier allein interessierenden Größen x und r bezw. u und ϱ, und wenn keine äußeren Kräfte wirken, die Gleichungen (ε Dichte, K und Θ KIRCHHOFFsche Elastizitätskonstanten):

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{K}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 2(1+\Theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + (1+2\Theta)\left(r\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x\,\partial r} + 2\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) \\ \frac{\varepsilon}{K}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + 2(1+\Theta)\left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial r}\right) + (1+2\Theta)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial r}\quad. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen kann man vereinfachen, wenn man u und ϱ in Potenzreihen von r entwickelt, beachtet, daß hierin nur die geraden Glieder vorkommen können, und von diesen nur die beiden ersten $u = u_0 + u_2 r^2$, $\varrho = \varrho_0 + \varrho_2 r^2$ beibehält, indem man sich auf dünne Zylinder beschränkt; es werden dann die Gleichungen:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{K}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= 2(1+\Theta)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 4u_2 + 2(1+2\Theta)\frac{\partial \varrho_0}{\partial x} \\ \frac{\varepsilon}{K}\frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial x^2} + 16(1+\Theta)\varrho_2 + 2(1+2\Theta)\frac{\partial u_2}{\partial x}\quad. \end{aligned}\right.$$

Hierzu kommen die Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$(22)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = c_1 \text{ für } 0 < x < a_1\quad,\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = c_2 \text{ für } l_1 < x < l_1 + l_2\quad,$$

(l_1 und l_2 Längen der Stäbe, deren Dicke und Material gleich sei)

$$(22\text{a})\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ für } 0 < x < l_1 + l_2 \text{ (keine Spannung vorhanden)}\quad;$$

ferner für die von Druck freien Mantelflächen:

$$(23) \qquad 2\,u_2 + \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} = 0 \quad , \qquad (1 + 2\,\Theta)\,\varrho_0 + \Theta\,\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad ;$$

für die freien Endflächen ($x = 0$ und $x = l_1 + l_2$)

$$(24) \qquad X_x = 2\,K\frac{1 + 3\,\Theta}{1 + 2\,\Theta}\,\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad , \qquad \text{also} \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad ;$$

endlich für die zusammenstoßenden Enden ($x = a_1$):

$$(u_0)_1 = (u_0)_2 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)_2 \quad .$$

Die Gleichungen (21) und (23) führen zunächst, wenn zur Abkürzung

$$(25) \qquad \frac{2\,K}{\varepsilon}\,\frac{1 + 3\,\Theta}{1 + 2\,\Theta} = \omega^2$$

gesetzt wird, zu der Gleichung:

$$(26) \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \omega^2\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad ,$$

deren Lösung nach D'ALEMBERT eine elastische Doppelwelle mit der Geschwindigkeit ω (Schallgeschwindigkeit), also:

$$(27) \qquad u_0 = f(x + \omega\,t) + \varphi(x - \omega\,t)$$

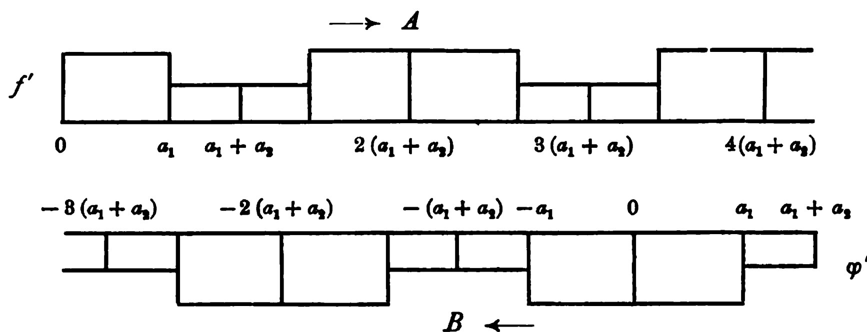
ist, wo die Funktionen f und φ sich aus (22) und (22a) bestimmen, nämlich zunächst, wenn f' und φ' die Ableitungen sind,

$$(28) \qquad \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{c_1}{\omega} \quad , & \varphi'(x) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{c_1}{\omega} \quad (\text{für } 0 < x < l_1) \\[2ex] f'(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{c_2}{\omega} \quad , & \varphi'(x) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{c_2}{\omega} \quad (\text{für } a_1 < x < l_1 + l_2) \quad , \end{cases}$$

und dann weiter für andere Argumente aus (24) durch die Gleichung

$$(29) \quad f'(\omega\,t) + \varphi'(-\,\omega\,t) = 0 \;, \qquad f'(l_1 + l_2 + \omega\,t) + \varphi'(l_1 + l_2 - \omega\,t) = 0 \quad ,$$

so daß f' und φ', graphisch ausgedrückt, gebrochene gerade Linien werden (Figur 258 A und B).[1]



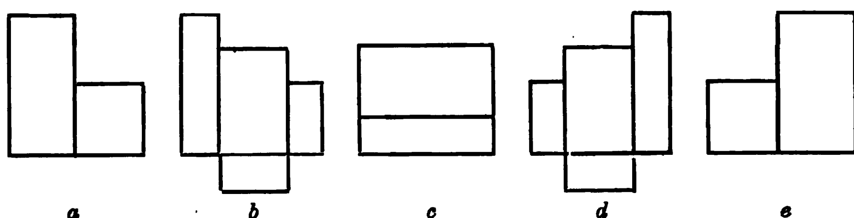
Figur 258.

[1] In den Figuren 258 bis 261 sind die Längen, statt mit l, mit a bezeichnet.

Schließlich wird die Geschwindigkeit

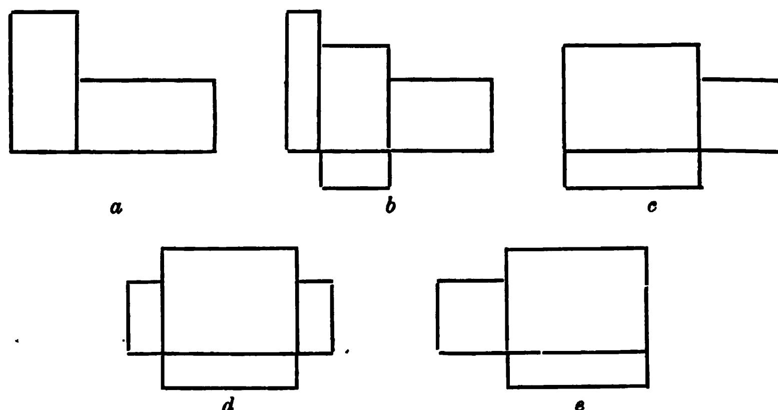
$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = \omega\,[f'(x+\omega t) - \varphi'(x-\omega t)] \\ \text{und der Druck} \\ X_x = \varepsilon\,\omega^2\,[f'(x+\omega t) + \varphi'(x-\omega t)] \end{cases} .$$

Stellt man nach dem Vorgang von F. NEUMANN hiernach für die fünf Zeitpunkte $\omega t = 0,\ \frac{1}{2} l_1,\ l_1,\ \frac{3}{2} l_1,\ 2 l_1$ die Geschwindigkeiten durch Ordinaten über, die Drucke durch Ordinaten unter den die Stäbe repräsentierenden Abszissen dar, so erhält man bei zwei gleich langen Stäben die Figur 259 *a* bis *e*, bei



Figur 259.

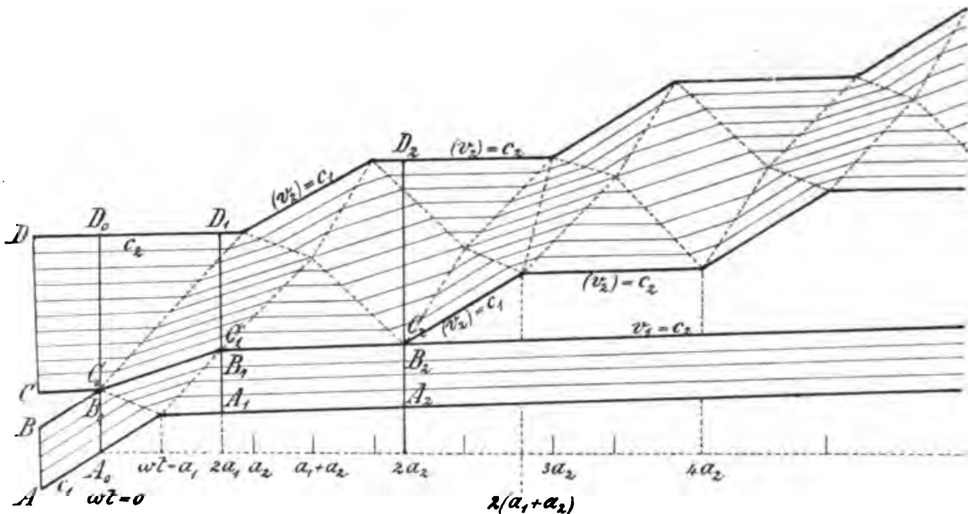
Stäben von $l_2 = 2 l_1$ die Figur 260 *a* bis *e*. Wie man sieht, findet im ersten Falle ein einfacher Austausch der Geschwindigkeiten statt, der zweite dagegen ist in jeder Hinsicht komplizierter, insbesondere besteht hier am Ende des Stoßes in dem längeren Stabe noch eine Spannung. Was das zur Folge hat, wird anschaulicher gemacht durch die von ST.-VENANT angewandte, eigentliche graphische Methode (Figur 261). Hier ist die Zeit die Abszisse, die Stäbe sind



Figur 260.

die Ordinaten, die starken Linien die „Zeitbahnen" ihrer Endpunkte, die schwachen die der inneren Punkte der Stäbe, die Neigungen dieser Linien also die Geschwindigkeiten, ihre Abstände die Verdichtungen und Verdünnungen; endlich die gebrochenen Linien die Wellen. *ABCD* sind die Stäbe kurz vor dem Stoße, $A_0 B_0 C_0 D_0$ bei Beginn desselben ($t = 0$). Jetzt dringt in jeden Stab eine Verdichtungswelle, welche das Ende des kürzeren l_1 zur Zeit $\omega t = l_1$ erreicht, dort reflektiert wird und zur Zeit $\omega t = 2 l_1$ wieder an die Stoßstelle gelangt; da im längeren Stabe noch Druck herrscht, geht sie in diesen über, bis sie sich mit

dessen eigener, zurückkehrender Welle trifft. Nunmehr entsteht eine Verdünnungswelle, welche, an der Stoßstelle zur Zeit $\omega t = 2 l_2$ angelangt, nicht mehr in den kürzeren Stab übergeht (da hier seit der Zeit $\omega t = 2 l_1$ kein Druck mehr besteht), sondern reflektiert wird. Wie man sieht, ist der Druck der Stäbe aufeinander



Figur 261.

schon zur Zeit $t = 2 l_1 / \omega$ (Stellung $A_1 B_1 C_1 D_1$), ihre Berührung aber erst zur Zeit $t = 2 l_2 / \omega$ (Stellung $A_2 B_2 C_2 D_2$) beendet. Ferner sieht man, daß der kürzere Stab als starres Ganzes weiter geht und zwar mit der Anfangsgeschwindigkeit c_2 des längeren, daß dagegen der längere nicht aufhört, sich zu dehnen und zusammenzuziehen, so daß seine Endpunkte sich abwechselnd mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 bewegen. Man kann also nicht von seiner Geschwindigkeit schlechthin, sondern nur von der seines Schwerpunktes sprechen; nennt man diese jetzt v_2, so findet sich

(31) $$v_1 = c_2 \quad , \qquad v_2 = c_2 + \frac{l_1}{l_2}(c_1 - c_2) \quad ,$$

letzteres am einfachsten aus dem Prinzip von der Bewegung des Schwerpunktes. Hiernach tritt ein Verlust an kinetischer Energie der fortschreitenden Bewegung ein, welcher in Bruchteilen der ursprünglich vorhandenen

(32) $$\left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \frac{\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)^2}{1 + \frac{l_2}{l_1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2}$$

ist, also am größten, nämlich gleich $1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}$ ist, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten entgegengesetzt und umgekehrt proportional den Längen sind, andererseits null wird, wenn die Stäbe gleich lang sind; ein Fall, in welchem $v_1 = c_2$, $v_2 = c_1$ wird, in Übereinstimmung mit der mechanischen Theorie. Ruht der kürzere Stab a_1 vor dem Stoße ($c_1 = 0$), so wird

(33) $$v_1 = c_2 \quad , \qquad v_2 = c_2\left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \quad ;$$

ruht der längere, so wird ($c_2 = 0$):

(34) $$v_1 = 0 \quad , \quad v_2 = \frac{l_1}{l_2} c_1 \quad .$$

Stellt man dieses Ergebnis, in Worte gekleidet, dem der mechanischen Theorie [Gleichungen (5)] gegenüber, so findet man:

Mechanische Theorie.	Elastische Theorie.
1. Bei gleich langen Stäben überträgt der stoßende seine ganze Geschwindigkeit auf den ruhenden und kommt selbst zur Ruhe.	1. Ebenso.
2. Stößt der längere Stab, so überträgt er eine gesteigerte Geschwindigkeit auf den ruhenden und geht doch selbst noch langsam mit.	2. Stößt der längere Stab, so überträgt er seine volle Geschwindigkeit auf den ruhenden und geht selbst langsam mit (etwas schneller als nach der mechanischen Theorie).
3. Stößt der kürzere Stab, so überträgt er einen Teil seiner Geschwindigkeit auf den längeren und springt selbst zurück.	3. Stößt der kürzere Stab, so überträgt er einen Teil seiner Geschwindigkeit (einen größeren als nach der mechanischen Theorie) auf den längeren und kommt selbst zur Ruhe.

Ähnlich verhält es sich bei Stäben von verschiedenem Querschnitt und verschiedenem Material, also verschiedenem ω; die hierfür von ST. VENANT entwickelten Formeln sind aber natürlich viel komplizierter, und es sei nur angeführt, daß dann beide Stäbe nach dem Stoße vibrieren.

Theorie von Voigt und Hausmaninger. Der Umstand, daß die beobachteten Werte der Geschwindigkeit (s. w. u.) stets zwischen den nach beiden Theorien, der mechanischen und der elastischen, berechneten Werten liegen, hat VOIGT auf eine Theorie geführt, die zwischen jenen beiden zu vermitteln sucht, und sie als Grenzfälle enthält. Es wird an die Tatsache angeknüpft, daß die Endflächen der Zylinder nicht vollkommen eben und nicht vollkommen glatt zu sein pflegen, sondern eine gewisse unbestimmbare Krümmung und trotz aller Politur immer noch eine gewisse Rauhigkeit haben; es wird ferner an den besonderen Zustand der Oberflächenschicht fester Körper erinnert, der von dem des Innern vermutlich nicht unmerklich abweicht; endlich wird an die der Oberfläche anhaftende kondensierte Gasschicht gedacht und alles das zum Anlaß genommen, an der Berührungsstelle der Stäbe eine besondere Zwischenschicht anzunehmen, die gewissermaßen beiden Stäben zugleich angehört, die kleine Ausdehnung λ, den Querschnitt q und den mittleren Elastizitätsmodul $e = dp \cdot \lambda / d\lambda$ (dp der Druckzuwachs auf die Flächeneinheit, $d\lambda$ die hierdurch bewirkte Änderung von λ) hat; e ist alsdann nicht bloß von der Natur der Stäbe, sondern auch von der Stärke des Stoßes abhängig. Setzt man zur Abkürzung $c = e \cdot q / \lambda$, so tritt die neue Grenzbedingung

(35) $$E_1 q_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = c(u_2 - u_1) = E_2 q_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

auf, wo $E_1\, E_2$ die beiden Moduln, $q_1\, q_2$ die Querschnitte der Stäbe sind; alles übrige in der Formulierung des Problems bleibt beim alten. Die Lösung wird als trigonometrische Summe dargestellt, und der zeitliche Periodizitätsfaktor (m_n in dem Ausdruck $\cos m_n t$) muß eine gewisse transzendente Gleichung erfüllen. Allgemeine Schlüsse lassen sich aus dem Ergebnis nicht ziehen, da man die Konstante c nicht kennt; man muß sich also mit einigen speziellen Folgerungen begnügen.

Für $c = \infty$ kommt man auf die NEUMANN-SAINT-VENANTsche Theorie, für sehr kleines c auf die elementar mechanische Theorie, und zwar wird hier die allein maßgebende niedrigste Wurzel jener transzendenten Gleichung, wenn m_1 und m_2 die Massen der Stäbe sind:

$$(36) \qquad m_0 = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \quad ;$$

auch bewegen sich in diesem Falle die Stäbe starr, ohne Schwingungen weiter.

Die VOIGTsche Rechnung bezieht sich in ihrer Ausführung nur auf den Fall, daß die Stoßdauer groß gegen die Zeit ist, die eine Welle zum Durchlaufen eines Stabes braucht, d. h., daß die Strecke L, die eine Welle während der Stoßdauer zurücklegt, groß sei gegen die Stablänge l. Da nun Gründe für die Annahme vorliegen, daß bei den üblichen Versuchen das Verhältnis $L:l$ nicht sehr groß ist, sondern nur wenige Einheiten ausmacht, hat HAUSMANINGER die VOIGTsche Theorie weitergeführt und dabei zwei methodische Änderungen vorgenommen: erstens an die Stelle der trigonometrischen Summe die willkürlichen Funktionen zu setzen, und zweitens von der Ableitung des allgemeinen Bildungsgesetzes dieser Funktionen abzusehen und statt dessen zu fragen, wie groß die VOIGTsche Konstante c gewählt werden muß, damit der Stoß zu Ende sei, wenn die Welle einen bestimmten, willkürlich festgesetzten Weg L durchlaufen hat; schließlich wurden dann die dazu gehörigen Endgeschwindigkeiten der Schwerpunkte der Stäbe berechnet, d. h. es wurde der Wert der Größe β in der Formel

$$(37) \qquad v_1 = \beta c_1 + (1 - \beta) c_2$$

ermittelt. Das Resultat ist unter Beschränkung auf Stäbe von gleichem Stoffe in drei Tabellen zusammengestellt: 1. für gleich lange und dicke Stäbe für $L = 2l$ bis $8l$; 2. für Längen wie 2:1 und gleiche Dicken; 3. für Längen wie 2:1 und Dicken wie 1:2; in den beiden letzteren Fällen nur für L-Werte zwischen $2l$ und $3l$. Einige wenige Werte seien hier mitgeteilt:

1.

$l_1 = l_2 = l, \quad q_1 = q_2 = q$

$c\frac{2l}{Eq}$	$L:l$	β
1150,69	2,001	0,00002
114,524	2,015	0,00022
10,9074	2,154	0,00241
4,0000	2,420	0,0065
2,1569	2,776	0,0114
1,2892	3,284	0,0145
1,0200	3,606	0,0132
0,8081	4	0,0083
0,3035	6	0,00165
0,1629	8	0,00052

2.

$l_1 = 2 l_2 = l, \quad q_1 = q_2 = q$

$c\frac{2l}{Eq}$	$L:l$	β
2303	2,000	0,4998
9,21	2,005	0,4649
6,91	2,013	0,4282
4,61	2,051	0,3977
2,30	2,253	0,3509
0,90	3,000	0,3349

3.

$l_1 = 2 l_2 = l, \quad q_2 = 2 q_1$

$c\frac{2l}{Eq}$	$L:l$	β
23025	2,00	0,111
6,9	2,11	0,064
3,9	2,21	0,035
2,3	2,40	0,011
1,07	3,00	0,0036

Wie man sieht, gibt die erste Tabelle recht merkliche Abweichungen von der alten Theorie ($\beta = 0$), namentlich in der Mitte; die zweite ergibt eine Abweichung der Größe β von dem Normalwerte $^1/_3$ nur für sehr kleine L, schon für $L = 3\,l$ ist jener Wert nahezu erreicht; ähnlich im dritten Falle, wo ebenfalls für $L = 3\,l$ kaum noch eine Abweichung vorliegt.

Stoß gegen einen festen Zylinder. Dieses Problem ist insofern einfacher als das vorige, als es sich nur um den gestoßenen Zylinder handelt, komplizierter dagegen, weil die Funktionen f hier weit verwickelter sind. Die Grundgleichung ist wieder Gleichung (26), dazu kommen die Bedingungen:

für $x = l$ immer: $u = 0$,

für $t = 0$ überall: $u = 0$,

für $x = 0$ und $t = 0$: $du/dt = C$ (Stoßgeschwindigkeit),

für $t = 0$ im übrigen: $du/dt = 0$,

für $x = 0$ zwischen $t = 0$ und $t = T$ (Stoßdauer) als Ausdruck des Energiesatzes, wie sich leicht einsehen läßt (s das Verhältnis der gestoßenen zur stoßenden Masse):

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{s}{l}\,\omega^2\,\frac{du}{dx} \quad ; \tag{38}$$

endlich für $x = 0$ und t größer als T: $du/dx = 0$.

Die Lösung kann als unendliche Summe in der Form:

$$u = C\,l\,\sqrt{\frac{\varepsilon}{E}}\sum\frac{2\cos m}{m\,(m + \sin m\cos m)}\sin\frac{m\,x}{l}\sin\frac{m}{l}\sqrt{\frac{E}{\varepsilon}}\,t \tag{39}$$

dargestellt werden, wo sich m als Wurzel der Gleichung:

$$m\,\mathrm{tang}\,m = s \tag{40}$$

bestimmt; und hiernach hatte ST.-VENANT Kurven entworfen, die die Abhängigkeit des u von x und t darstellen; sie sind später von FLAMANT ihres historischen Interesses halber veröffentlicht worden, obwohl sie nur auf den ersten fünf Gliedern von (39) bezw. Wurzeln von (40) beruhen und deshalb nur sehr beschränkte Gültigkeit haben. Überdies ist inzwischen von BOUSSINESQ ein geschlossener Ausdruck für die Lösung angegeben worden, und diesen haben ST.-VENANT und FLAMANT ebenfalls zeichnerisch zur Anschauung gebracht in Kurven, die natürlich exaktere Bedeutung haben. Die Lösung ist (ähnlich wie die NEUMANNsche):

$$u = f(\omega t - x) - f(\omega t + x - 2\,l) \quad , \tag{41}$$

aber die Funktion ist hier exponentiellen Charakters. Nennt man das Argument z, so hat die Funktion, solange $z\,l \leqq \omega\,T$ ist, folgende Werte:

$$\left\{\begin{aligned}
&f(z \leqq 0) = 0\\
&f(0 < z < 2) = \frac{l}{s}\,\frac{C}{\omega}(1 - e^{-sz})\\
&f(2 < z < 4) = f(0 < z < 2) + \frac{l}{s}\,\frac{C}{\omega}\{-1 + [1 + 2\,s(z-2)]\,e^{-s(z-2)}\}\\
&f(4 < z < 6) = f(2 < z < 4) + \frac{l}{s}\,\frac{C}{\omega}\{1 - [1 + 2\,s^2(z-4)^2]\,e^{-s(z-4)}\}\\
&f(6 < z < 8) = f(4 < z < 6) + \frac{l}{s}\,\frac{C}{\omega}\{-1 + [1 + 2s(z-6) - 2\,s^2(z-6)^2\\
&\qquad\qquad + \tfrac{4}{3}\,s^3(z-6)^3]\,e^{-s(z-6)}\}
\end{aligned}\right. \tag{42}$$

und entsprechend fortgesetzt. Sobald aber $z\,l > \omega\,T$ geworden ist, wird einfach

$$(43)\qquad f\left(z > \frac{\omega T}{l}\right) = -f(z-2) + f\left(\frac{\omega T}{l}\right) + f\left(\frac{\omega T}{l} - 2\right) \quad ,$$

und somit

$$(44)\qquad f(z) = f(z+4) \quad ,$$

also einfach periodisch. Hiernach ist die Funktion f stets kontinuierlich. Dagegen ist der Differentialquotient $f'(z)$ an den Stellen $z = 2, 4, 6, 8 \ldots$ unstetig, er springt nämlich hier von einem Minimum zu einem Maximum, und zwar um C/ω.

Aus den Werten von f und f' lassen sich nun die Werte der Verrückung u sowie der linearen Dilatation $D = du/dx$ ableiten. Die letztere ist anfangs immer negativ (Kompression), nimmt aber ab und erreicht in einem Intervall, das von dem Werte von s abhängt, den Wert null, womit der Stoß sein Ende erreicht. Und zwar findet man:

für s zwischen ∞ und 0,5786: T zwischen $\frac{2l}{\omega}$ und $\frac{4l}{\omega}$,

für s zwischen 0,5786 und 0,241: T zwischen $\frac{2l}{\omega}$ und $\frac{6l}{\omega}$,

für s zwischen 0,241 und 0,136: T zwischen $\frac{6l}{\omega}$ und $\frac{8l}{\omega}$ . . .

de Saint-Venant und Flamant haben nun sechs Systeme von Kurven gezeichnet, die das Phänomen in höchst anschaulicher und vollständiger Weise wiedergeben, nämlich:

1. Die Ableitung f' für die s-Werte 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, denen die Stoßdauern $1/\omega$ mal 3,068, 4,709, 5,900 und 7,419 entsprechen.

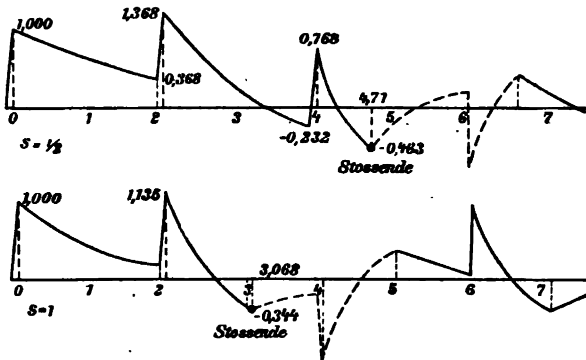
2. Die Funktionswerte f selbst für die s-Werte 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$.

3. Die Verrückungen u für dieselben drei Massenverhältnisse und in jedem dieser drei Fälle für die vier Punkte $x/l = 0$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ des Stabes.

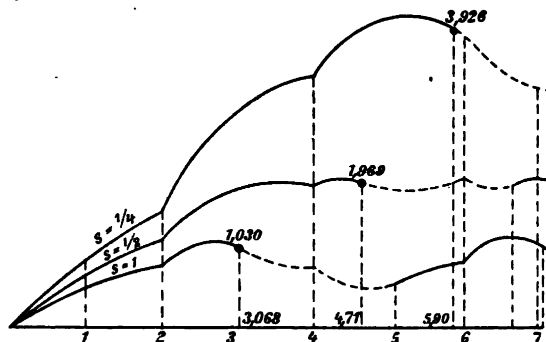
4. Die Dilatation du/dx für dieselben drei Massenverhältnisse und für die fünf Punkte $x/l = 0$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 des Stabes.

5. Die Maximalverrückung des freien Endes als Funktion von s.

6. Die Maximaldilatation des festen Endes als Funktion von s.

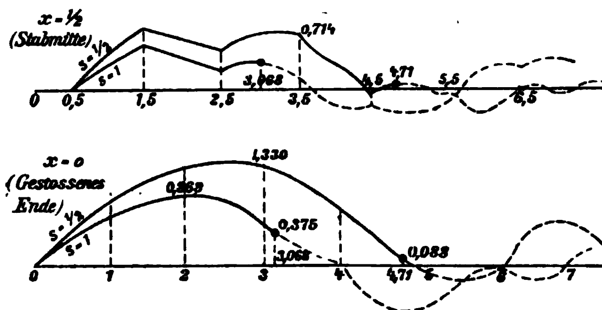


Figur 262.

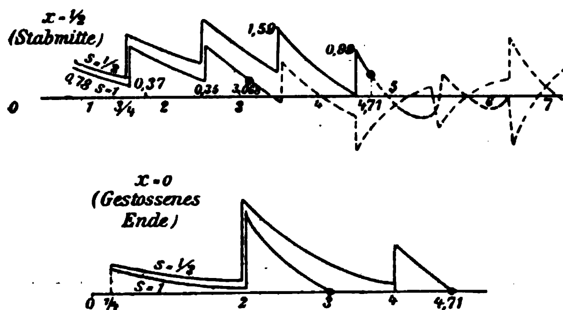


Figur 263.

Es muß hier genügen, eine kleine Auswahl aus diesen Kurven zu geben: Figur 262 stellt die Ableitung f' für die beiden Fälle $s = \frac{1}{2}$ und $s = 1$ dar, Figur 263 die Funktion f selbst für die drei Fälle $s = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$; Figur 264 die Verrückung u und Figur 265 die Dilatation du/dx, beide für die beiden Fälle $s = \frac{1}{2}$ und $s = 1$, sowie für die Stoßstelle und die Stabmitte. Die Zahlen an der Grundlinie bedeuten überall Abszissen, d. h. im wesentlichen Zeiten, die andern Zahlen sind Ordinaten; das Ende des Stoßes ist durch einen schwarzen Kreis markiert, die sich dann noch anschließenden Kurventeile, die gestrichelt sind, beziehen sich auf den freien Zustand nach dem Stoße. Es muß dem Beschauer der Kurven überlassen bleiben, die Fülle von Inhalt aus ihnen herauszulesen, den sie enthalten.



Figur 264.



Figur 265.

Aus der grundlegenden Abhandlung von BOUSSINESQ, die zu der obigen Darstellung den Anlaß gab, sei noch die angenäherte Formel

$$(45)\qquad u(x=0) = \frac{Cl}{\omega s s'} \sin\frac{\omega t}{l s'}\;, \qquad \left(s' = \sqrt{\frac{1}{s} + \frac{1}{3}}\right)$$

für die Verrückung des gestoßenen Endes sowie die für $s < \frac{1}{5}$ angenähert richtige Formel für die Maximaldeformation

$$(46)\qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_{\max} = \frac{C}{\omega}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{s}}\right)$$

angeführt, während für $s > 5$ die Exponentialformel

$$(47)\qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_{\max} = \frac{2C}{\omega}(1 + e^{-2s})$$

angewandt werden muß.

Transversaler Stoß von Zylindern. Wenn der Zylinder nicht in der Endfläche, sondern am Mantel von dem stoßenden Körper getroffen wird, und infolgedessen nicht longitudinal, sondern transversal erregt wird, gestaltet sich das Problem begreiflicherweise viel komplizierter, da die Grundgleichung hier nicht von der zweiten, sondern von der vierten Ordnung (p. 735) ist. Zur Vereinfachung nimmt BOUSSINESQ an, der Stab sei unendlich lang und werde auf einer kleinen mittleren Strecke erregt; er findet dann für die Verrückung, wenn a das Produkt der Schallgeschwindigkeit ω, der halben Dicke und eines Koeffizienten k

ist, der für runden Querschnitt $^1/_2$ ist, und wenn 2σ das Verhältnis der erregenden Masse zu der der Längeneinheit des Stabes ist:

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} v &= \int_0^\infty f\left(at - \frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\cos\frac{x^2}{2\lambda^2} + \sin\frac{x^2}{2\lambda^2}\right)d\lambda \\ &\quad - \sigma\int_0^\infty f\left(at - \frac{x^2}{2\lambda^2}\right)\sin\frac{\lambda^2}{2}\,d\lambda \quad , \end{aligned}\right.$$

wo die Funktion f sich durch die gegebene Funktion $F(t)$, die den Gang der Erregung angibt, gemäß der Formel ausdrückt:

$$(49)\quad f(at) = \frac{\sigma}{a\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{t} F(\Theta)\,d\Theta + \int_t^\infty e^{2\lambda\frac{t-\Theta}{\sigma^2}} F(\Theta)\,d\Theta\right\} \quad .$$

Hieraus lassen sich gewisse Schlüsse in bezug auf die zulässige Beanspruchung des Stabes ziehen, der eigentliche Stoßvorgang bleibt aber ziemlich dunkel.

Andererseits kann man nach FLAMANT (im Anschluß an SAINT-VENANT) für einen endlichen Zylinder von der Länge $2l$, der an beiden Enden fest ist und in der Mitte mit der Geschwindigkeit C getroffen wird,

$$(50)\quad v = C\sqrt{\frac{p\,l^3}{2gEQ}}\sum\frac{4}{m^2}\,\frac{\dfrac{\sin\frac{mx}{l}}{\cos m} - \dfrac{\sin\text{hyp}\,\frac{mx}{l}}{\cos\text{hyp}\,m}}{\dfrac{1}{\cos^2 m} - \dfrac{1}{\cos\text{hyp}^2 m} + \dfrac{2}{m^2}\,\dfrac{p}{q}}\,\sin m^2\sqrt{\frac{2gEQ}{p\,l^3}}\,t$$

setzen, wo Q das Trägheitsmoment des Querschnitts, p die gestoßene und q die stoßende Masse ist, und wo sich die Summierung über alle Wurzeln der Gleichung

$$(51)\quad m(\text{tg}\,m - \text{tg hyp}\,m) = \frac{2p}{q}$$

erstreckt. Hiernach hat FLAMANT unter Berücksichtigung der sieben ersten Wurzeln die Verrückung v für $p/q = s = 2,\ 1,\ \frac{1}{2}$ graphisch dargestellt; man wird aber nach den Erfahrungen bei der Längsverrückung (s. o.) auf diese Werte nicht allzuviel Gewicht legen dürfen; und mit dem geschlossenen Ausdruck, der bessere Werte liefern würde, ist wegen seiner Komplikation, zumal bei seiner etwaigen Ausdehnung auf Stäbe von endlicher Länge, nichts anzufangen.

Unter diesen Umständen hat man versucht, auf indirektem, angenähertem Wege zu gewissen Vorstellungen über den Effekt des Querstoßes zu gelangen. Dahin gehört der Gedanke, den Stoß, nachdem er einmal erfolgt ist, als einen statischen Druck aufzufassen, die betreffende Gleichung anzuwenden und in die Anfangsbedingung die Stoßgeschwindigkeit einzuführen. Wir werden dieses, in England als COXsche Methode bezeichnetes Verfahren bei der HERTZschen Behandlung des Stoßes von Kugeln wiederfinden.[1]

Schließlich ist auf den Zusammenhang unseres Problems mit dem der gehämmerten Saite oder des gehämmerten Stabes (p. 730 u. 737) hingewiesen, bei dem die Schlagdauer und die Natur des schlagenden Hammers von maßgebender Bedeutung ist.

---

[1] Vgl. E. A. H. LOVE, Th. of Elast., p. 420. — H. COX, Trans. Cambr. Soc. 9. 1850.

Theorie von Hertz für beliebige Körper. Diese Theorie geht, wie eben schon bemerkt wurde, von der statischen Berührung der Körper unter Druck aus und macht erst zuletzt die Anwendung auf den Stoß. Sie geht also von den im Artikel „Zug und Druck", p. 597 skizzierten Verhältnissen aus. Dabei wird der bei dem longitudinalen Stoße von Zylindern realisierte Fall, daß der Stoß sich auf zwei von vornherein endliche Ebenen erstrecke, glücklich vermieden, indem die beiden Oberflächen als konvex angenommen werden. Die Berührung im ersten Moment des Stoßes ist alsdann punktförmig, durch den Druck entsteht die Druckfläche als gemeinsame Fläche beider Körper; nur auf Punkte in ihr und in ihrer Nähe braucht sich die Betrachtung zu erstrecken. In bezug auf die statischen Formeln sei auf die zitierte Stelle verwiesen; hier genügt es, die Anwendung auf den Stoß zu machen. Sie ist offenbar nur unter zwei Voraussetzungen erlaubt: erstens, daß vollkommene Elastizität vorhanden sei, da sich sonst die Reibung als unterscheidend zwischen statischen und dynamischen Zustand einschiebt; und zweitens, daß die Zeit, während deren der Stoß die Körper in Berührung miteinander bringt, groß sei gegen die Zeit, in der Längswellen die Körper durchlaufen — eine Annahme, die offenbar nur in seltenen Fällen, nämlich für sehr kurze Körper und sehr kleine Stoßgeschwindigkeiten, erfüllt sein wird.

Die „Annäherung" — dort α, jetzt ε genannt — der beiden Körper, für die dort die Formel (79) oder, durch die Exzentrizität der Druckellipse e ausgedrückt, die Formel

$$(52)\qquad \varepsilon = \frac{3p}{8\pi}\,\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{a}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(1+z)(1-e^2+z)}}$$

gefunden wurde, ist hier eine Funktion der Zeit, ebenso wie der Druck p, und es besteht die Beziehung

$$(53)\qquad p = k_2\,\varepsilon^{3/2}$$

wo k_2 bestimmt ist durch

$$(54)\qquad \frac{9}{64\pi^2}k_2^2 A(\vartheta_1+\vartheta_2)^3\left[\int\limits_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(1+z)(1-e^2+z)}}\right]^3 = \int\limits_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^{3/2}\sqrt{z(1-e^2+z)}}\,.$$

Andererseits besteht für die zeitliche Änderung von ε die Gleichung:

$$(55)\qquad \frac{d}{dt}\left(m_1\frac{m_2\dfrac{d\varepsilon}{dt}}{m_1+m_2}\right) = -p\quad,$$

wo die m die Massen der Körper sind, oder auch, wenn

$$(56)\qquad k_1 = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$(57)\qquad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -k_1 k_2\,\varepsilon^{3/2}\quad.$$

Ihr Integral kann, wenn $c = (d\varepsilon/dt)_0$ die Stoßgeschwindigkeit ist, in der Form

$$(58)\qquad \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 - c^2 = -\frac{4}{5}k_1 k_2\,\varepsilon^{5/2}.$$

geschrieben werden.

Der Wert ε_1 von ε für die größte Annäherung ist:

(59) $$\varepsilon_1 = \left(\frac{5}{k_1 k_2}\right)^{2/5} \left(\frac{c}{2}\right)^{4/5}$$

und, in den Massen, Dichten, Elastizitätszahlen und Schallgeschwindigkeiten der beiden Körper ausgedrückt:

(60) $$\varepsilon_1 = \left[\frac{5\, m_1\, m_2\, c^2\, 3\sqrt{A}}{4\,(m_1 + m_2)\, 4\,\pi} \left\{\frac{(1-\mu_1)^2}{\omega_1^{\,2}\,\varrho_1\,(1-2\,\mu_1)} + \frac{(1-\mu_2)^2}{\omega_2^{\,2}\,\varrho_2\,(1-2\,\mu_2)}\right\} \Omega\right]^{2/5} ,$$

wo

(61) $$\Omega^2 \int\limits_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^{3/2}\sqrt{z\,(1-e^2+z)}} = \left[\int\limits_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z\,(1+z)(1-e^2+z)}}\right]^3$$

ist. Ferner ist die Stoßdauer

(62) $$T = 2 \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{c^2 - \frac{4}{5}\,k_1\,k_2\,\varepsilon^{5/2}}} = 2\,\frac{\varepsilon_1}{c} \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{5/2}}} = \frac{4}{5}\sqrt{\pi}\,\frac{\varepsilon_1}{c}\,\frac{\Gamma(\frac{2}{5})}{\Gamma(\frac{9}{10})} ,$$

also nach den Γ-Tabellen

(63) $$T = 2{,}943\,\frac{\varepsilon_1}{c} = 2{,}943\,\sqrt[5]{\frac{25}{16\,c\,k_1^{\,2}\,k_2^{\,2}}} .$$

Anwendung auf Kugeln. Sind die Radien r_1 und r_2, so wird

(64) $$k_2 = \frac{8}{3}\,\frac{1}{\vartheta_1+\vartheta_2}\sqrt{\frac{r_1\,r_2}{r_1+r_2}} , \qquad a = \sqrt{\varepsilon\,\frac{r_1\,r_2}{r_1+r_2}} ,$$

(65) $$\varepsilon_1 = \left[\frac{15\,c^2(\vartheta_1+\vartheta_2)\,m_1\,m_2}{32\,(m_1+m_2)}\right]^{2/5} \left(\frac{r_1+r_2}{r_1\,r_2}\right)^{1/5} ,$$

und hieraus erhält man die Stoßzeit. Speziell für zwei nach Stoff und Größe gleiche Kugeln wird:

(66) $$T = 2{,}943\,r\,\sqrt[5]{\frac{25\,\pi^2\,\varrho^2\,(1-\mu^2)^2}{8\,c\,E^2}} ,$$

d. h. die Stoßzeit ist direkt proportional mit dem gemeinsamen Radius der Kugeln und der $^2/_5$. Potenz der Dichte, umgekehrt proportional der fünften Potenz der Stoßgeschwindigkeit und der $^2/_5$. Potenz des Eindringungsmoduls (p. 603). Endlich wird der Radius der Stoßfläche

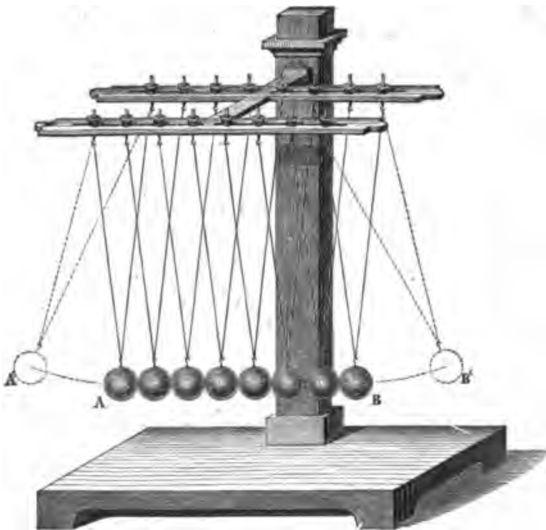
(67) $$f = r\,\sqrt[5]{\frac{5\,\pi\,\varrho\,c^2\,(1-\mu^2)}{16\,E}} .$$

Besondere Theorien. Zum Schlusse des theoretischen Teiles sei erwähnt, daß wiederholt Stoßtheorien auf Grund besonderer hypothetischer Vorstellungen entwickelt worden sind. Eine solche ist die Theorie von KORN, die von der Annahme eines inkompressiblen Kontinuums ausgeht, in dem sich zwei Teilchen befinden, die sehr großen Drucken gegenüber einer, wenn auch geringen, Kompression bezw. Dilatation fähig sind; es wird eine Art von Potential φ eingeführt und in eine Reihe entwickelt, beginnend mit einer Konstanten φ_0, einem Anziehungsgliede φ_1, invers mit dem Quadrat der Entfernung, einem Abstoßungsgliede φ_2, invers mit der fünften Potenz der Entfernung u. s. w. Man gelangt so zur richtigen Darstellung des vollkommen elastischen Stoßes.

Ferner sei auf eine Arbeit von BURBURY hingewiesen und schließlich auf die Rolle aufmerksam gemacht, die der Stoßvorgang in der kinetischen Theorie, besonders der Gase spielt; es muß aber genügen, in dieser Hinsicht auf die grundlegende Abhandlung von MAXWELL zu verweisen.[1]

3. Experimentelles.

Stoßapparate. Der erste derartige Apparat ist die von MARIOTTE[2] angegebene Perkussionsmaschine (Figur 266). In der jetzigen, brauchbarsten Form besteht sie aus einem in seinen Teilen verstellbaren Stativ, an dem Kugeln oder andere Körper mittels Fäden aufgehängt sind; für die Versuche über den geraden Stoß eignet sich die Aufhängung jeder Kugel an zwei schrägen Fäden, deren Ebene senkrecht auf der Bewegungs- und Stoßrichtung steht; für den schiefen Stoß ist die Aufhängung je an einem Faden erforderlich. Als Material eignet sich z. B. Lehm für unelastische, Elfenbein für vollkommen elastische, Blei für unvollkommen elastische Körper. Man kann hiermit die meisten obigen Versuche anstellen und findet die Theorie qualitativ, zum Teil aber auch quantitativ bestätigt. Durch Anbringung von mehr als zwei, z. B. n Kugeln, die sich im Ruhezustand sämtlich berühren, kann man auch die Fortpflanzung des Stoßes studieren. Trifft z. B. die erste Kugel die zweite mit der Geschwindigkeit c, so erhalten bei gleicher Größe und unelastischem Stoff alle Kugeln die gemeinsame Geschwindigkeit c/n; bei vollkommen elastischem Stoffe dagegen kommt die erste zur Ruhe, die zweite bleibt in Ruhe, und die letzte springt mit der Geschwindigkeit c ab. Stoßen die beiden ersten Kugeln, so springen die beiden letzten ab u. s. w. Stößt von jeder Seite eine, so springen diese beiden äußersten mit vertauschten Geschwindigkeiten zurück. Nehmen die Kugeln an Größe zu, und stößt die kleinste, so springen alle zurück und trennen sich voneinander; stößt die größte, so gehen sie nach vorwärts auseinander.



Figur 266.

Eine Modifikation an dem Apparat hat PILLEUX vorgenommen, indem er die Kugeln, die erste ausgenommen, durch Würfel ersetzte, die sich mit je einer Fläche berühren. Je nach den Stoßgeschwindigkeiten zeigen sich hier verschiedene Sondererscheinungen, die sich zum Teil in einfacher Weise deuten lassen, zum Teil vom Verfasser zu besonderen Schlüssen über die inneren Vorgänge in den Körpern benutzt werden.

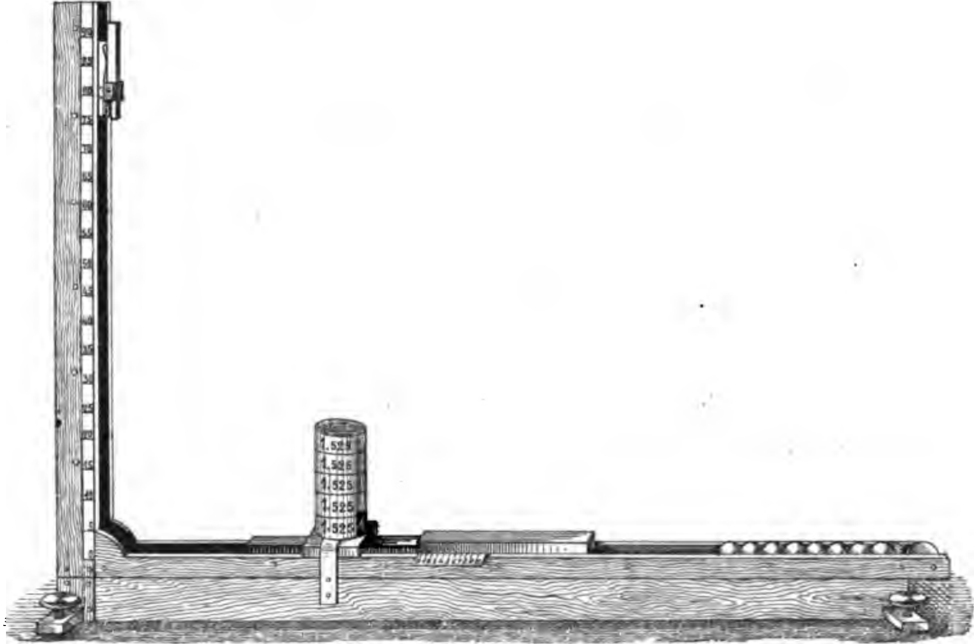
Andere, wesentlich für didaktische Zwecke bestimmte Apparate sind von HANDL und REICHEL. Der erstere besteht aus Holzwürfel und Bleikugel, beide

---

[1] A. KORN, Münch. Ber. **29.** 223. 1893. — S. H. BURBURY, Proc. Roy. Soc. **50.** 175. 1891. — J. CL. MAXWELL, Phil. Mag. (4) **19.** 20; **20.** 35. 1860. — [2] MARIOTTE, Traité de la percussion ou choc des corps. Paris 1677.

bifilar, aber jener mit parallelen, diese mit divergierenden Fäden aufgehängt; die den Würfel tragenden Fäden sind an einer drehbaren Scheibe, die die Kugel tragenden Fäden an einer verschiebbaren Leiste befestigt; auf diese Weise lassen sich alle Arten des Stoßes demonstrieren.

Endlich sei noch der in Figur 267 abgebildete Apparat von SEDLACZEK erwähnt; er hat gegenüber dem von MARIOTTE die Vorteile und Nachteile, die



Figur 267.

daraus sich ergeben, daß die Kugeln nicht hängen, sondern in Rinnen laufen. Bei der einfachen Stoßmaschine handelt es sich nur um qualitative Versuche, bei der zusammengesetzten, welche mit einer graduierten Fallröhre und einem Quadranten zur Umwandlung der vertikalen in horizontale Geschwindigkeit versehen ist, um quantitative Messungen.[1]

Versuche über die Stoßgeschwindigkeit von Zylindern. Wie man aus obigen Angaben entnimmt, stehen die Formeln, welche die mechanische Theorie einerseits und die elastische andererseits liefert, in schreiendem Widerspruch miteinander, und es fragt sich, wie sich das Experiment zu ihnen stellt. Derartige Versuche sind von VOIGT[2], BOLTZMANN[3] und HAUSMANINGER[4] angestellt worden. Die Versuche von den letzteren beiden, auf Kautschukstäbe bezüglich, sind zu obigem Zwecke deshalb nicht geeignet, weil sie auch schon für zwei gleich lange Stäbe, für welche doch beide Theorien dasselbe Resultat (volle Übertragung der Bewegung auf den ruhenden Stab, Stillstand des stoßenden) liefern, von diesen abweichen. Von einem $c_1 = 100$ verblieben nämlich für Stab 1 zirka $v_1 = 14$, und nur $v_2 = 85$ wurden auf 2 übertragen; ebenso entsprechen dem Werte $c_1 = 50$ die Werte $v_1 = 6$, $v_2 = 42$. Ob diese Abweichung von beiden Theorien dem Kautschuk eigentümlich ist, wird erst noch zu entscheiden sein.

[1] M. PILLEUX, C. R. **94.** 429. 1882. — A. HANDL, Ztschr. f. phys. Unterr. **1.** 115. 1888. — O. REICHEL, ibid. **2.** 265. 1889; **6.** 197. 1893. — Vgl. auch R. HEYNE, ibid. **7.** 73. 1893. — SEDLACZEK, POGG. Ann. **156.** 476. 1875. — [2] W. VOIGT, WIED. Ann. **19.** 43. 1883. — [3] L. BOLTZMANN, Wien. Ber. **84.** 1225. 1881; WIED. Ann. **17.** 343. 1882. — [4] V. HAUSMANINGER, Wien. Ber. **88.** 768. 1883.

Dagegen ergaben die VOIGTschen Versuche (Material: glasharter Stahl) für gleich lange Stäbe volle Übereinstimmung mit beiden Theorien. Für ungleich lange (aber gleich dicke) ist ein Teil der beobachteten Zahlen in folgender Tabelle mit den „mechanisch“ nach Formeln (5), in denen statt der Massen die Längen eingesetzt sind, berechneten, und mit den „elastisch“ nach (33 und 34) berechneten zusammengestellt. Die beobachteten Zahlen bedeuten eigentlich Ausschläge, können aber mit ziemlicher Genauigkeit auch den Geschwindigkeiten kurz vor bezw. nach dem Stoße proportional (und nach Multiplikation mit 2 sogar gleich) gesetzt werden; der Index 1 bezieht sich, in Übereinstimmung mit den genannten Gleichungen, stets auf den kürzeren Stab.

1. Gleich lange Stäbe: $l_2 : l_1 = 1$.

c_1	beobachtet		mechanisch		elastisch	
	v_1	v_2	v_1	v_2	v_1	v_2
20	0	19,9	0	20	0	20
40	0	39,8	0	40	0	40
80	0	80,1	0	80	0	80
120	0	119,9	0	120	0	120
160	0	158,8	0	160	0	160

2. Ungleich lange Stäbe: $l_2 : l_1 = 1,5$.

a) Lang stößt, kurz ruht.							*b*) Kurz stößt, lang ruht.						
c_2	beobachtet		mechanisch		elastisch		c_1	beobachtet		mechanisch		elastisch	
	v_2	v_1	v_2	v_1	v_2	v_1		v_1	v_2	v_1	v_2	v_1	v_2
20	3,9	23,5	4	24	6,7	20	20	− 3,6	16,2	− 4	16	0	13,3
40	7,9	47,0	8	48	13,3	40	40	− 7,6	31,7	− 8	32	0	26,7
80	16,8	93,5	16	96	26,7	80	80	−13,9	62,9	−16	64	0	53,3
160,4	35,3	187,4	32,1	192,5	53,3	160,4	160,8	−25,5	124,0	−32	128	0	106,7

3. Ungleichlange Stäbe: $l_2 : l_1 = 2$.

a) Lang stößt, kurz ruht.							*b*) Kurz stößt, lang ruht.						
c_2	beobachtet		mechanisch		elastisch		c_1	beobachtet		mechanisch		elastisch	
	v_2	v_1	v_2	v_1	v_2	v_1		v_1	v_2	v_1	v_2	v_1	v_2
20	1,7	26,4	6,7	26,7	10	20	20	− 6,4	13,2	− 6,7	13,3	0	10
40	13,6	52,6	13,3	53,3	20	40	40	−12,2	26,2	−13,3	26,7	0	20
80,2	28,7	101,1	26,7	106,7	40,1	80,2	80,4	−21,6	51,4	−26,7	53,3	0	40,2
160,4	61,1	197,9	53,3	213,3	80,2	160,4	160,8	−38,9	99,0	−53,3	106,7	0	80,4

Wie man sieht, stimmt keine von beiden Theorien vollkommen, aber die mechanische stimmt sehr viel besser als die elastische; erstere gibt für kleine Geschwindigkeiten nur wenige (0—5), für größere etwas mehr Fehlerprozente; bei letzteren bewegen sie sich zwischen 14 und 72%, und von dem Zurückspringen des kürzeren Stabes gibt sie überhaupt keine Rechenschaft.

Was nun die Theorie von VOIGT betrifft, so stimmt sie insofern, als, wie sie verlangt, die beobachteten Endgeschwindigkeiten immer zwischen den von beiden älteren Theorien geforderten liegen; und da sie der mechanischen Theorie näher liegen, müßte man schließen, daß die Größe c nur kleine Werte hat; man könnte also die Anwendung machen auf kleine Stoßgeschwindigkeiten, also lange Stoßzeiten, d. h. auf große Werte des Verhältnisses $L : l$. Nun zeigt aber HAUSMANINGER, daß die Annäherung an die mechanische Theorie schon bei sehr mäßigen Werten dieses Verhältnisses, etwa bei 3 : 1, nahezu vollkommen erreicht ist; der Spielraum, in dem der Übergang von den tatsächlichen Verhältnissen,

wie sie die elementare Theorie darstellt, zu denen der Elastizitätstheorie stattfindet, ist also überaus eng, und er liegt außerhalb desjenigen, für den die Voigtsche Theorie ursprünglich gilt. Man muß also sagen, daß diese Theorie die Frage in der Hauptsache noch nicht geklärt hat; ihr Wert liegt immerhin darin, daß sie die Brücke zwischen den alten Theorien hergestellt hat.

Schließlich sei noch auf zwei ergänzende Versuchsreihen hingewiesen, die Voigt angestellt hat. Die eine von ihnen bezieht sich auf Zylinder, deren Endflächen mit besonderer Sorgfalt geebnet worden waren. Das Ergebnis ist, wie zu erwarten war, eine stärkere Abweichung der Geschwindigkeiten von der elementaren gegen die höhere Theorie hin. Die andere bezieht sich auf den Fall, daß Stäbe aus verschiedenem Material (Stahl und Glas) zusammenstoßen; sie zeigt wiederum in Übereinstimmung mit der Theorie, daß für kleine Stoßgeschwindigkeiten die elastische Natur des Materials ohne spezifischen Einfluß, die elementar-mechanische Theorie also ausreichend ist.

Die wenigen sonst noch vorliegenden Arbeiten über die Geschwindigkeit haben nur beschränkte Bedeutung. Erwähnt sei eine solche von Vincent[1], der Gummi- oder Stahlkugeln auf Platten aus verschiedenem Material fallen ließ und die Ergebnisse nach der Formel $v = c(\alpha - \beta c)$ darstellte, wo α und β Konstanten sind; die Formel muß aber für kleine c durch eine kompliziertere ersetzt werden.

Stoßdauer. Soweit die Frage der Geschwindigkeiten nach dem Stoße. Was andererseits den Vorgang des Stoßes selbst betrifft, so sind die drei wichtigsten ihn charakterisierenden Größen die Stoßdauer, die Stoßfläche und die Stoßtiefe.

Was zunächst die Stoßdauer betrifft, so hat die Theorie, insbesondere für zylindrische Stäbe, gezeigt, daß man im allgemeinen zwischen der kürzeren eigentlichen Stoßdauer, während deren die Stäbe aktiv aufeinander wirken, und der Berührungsdauer unterscheiden muß; diese letztere besteht aus der Stoßdauer und der sich an sie anschließenden Zeit, während deren die Stäbe noch passiv miteinander in Berührung bleiben. Ist l_1 die Länge des kürzeren, l_2 die des längeren Stabes, so ist die Stoßdauer T und die Berührungsdauer T':

$$(68) \qquad T = \frac{2\,l_1}{\omega} \quad , \qquad T' = \frac{2\,l_2}{\omega} \quad ;$$

für gleich lange Stäbe wird $T = T'$. In Worten: die Stoßdauer zwischen Stäben, die sich nur durch die Länge unterscheiden, ist gleich der Zeit, die die Welle zum Hin- und Herweg durch den kürzeren Stab braucht oder auch gleich der ganzen Schwingungsdauer des longitudinalen Grundtons des kürzeren Stabes. Experimentell läßt sich die Stoßzeit auf elektrischem Wege nach der von Pouillet[2] angegebenen, von Schneider[3] modifizierten Methode bestimmen. Während des Schneebeli Stoßes findet der Schluß eines Stromes statt, der vor und nachher unterbrochen ist, und der einen der Zeitdauer des Schlusses proportionalen Galvanometerausschlag erzeugt; den absoluten Zeitwert dieser Ausschläge verschafft man sich vorher durch ihre Erzeugung mittels eines Pendels, das infolge einer Spitze, die unten angebracht ist, ebenfalls den Strom (denselben, der später benutzt werden soll) schließt, und zwar während einer Zeit, die sich in diesem Falle aus den Pendelgesetzen berechnen läßt. Ein wesentlicher Mangel dieser Methode, abgesehen davon, daß sie nur auf metallische Körper (auf andere nur mit bedenklichen Modifikationen) anwendbar ist, liegt darin, daß die Hauptbedingung, die Konstanz der Stromstärke, während des Stoßes infolge des wechselnden Übergangswiderstands zwischen den Körpern nicht streng erfüllt, und daß insbesondere nicht sicher ist, ob während der auf die Stoßzeit folgenden Kontaktzeit ohne Druck der Strom noch wirkt und in welchem Maße er dies tut. Die erhaltenen

[1] J. H. Vincent, Proc. Cambr. Phil. Soc. **10.** 332. 1900. — [2] Pouillet, Pogg. Ann. **64.** 1885. — [3] F. Schneebeli, ibid. **143.** 239. 1871; **145.** 328. 1872.

Zahlen werden also bei verschieden langen Stäben zwischen der Stoßzeit und der Kontaktzeit liegen. Für Zylinder erhielt HAMBURGER[1] folgende Resultate:

1. Die Stoßzeit fand sich bei Stahlzylindern von 100 bis 400 mm Länge je nach den übrigen Umständen zu 0,00057 bis 0,00071 sec, und speziell bei je 300 mm Länge zu etwa 0,0006 sec. Nach der Theorie sollte sie gleich $2a/\omega = 2 \cdot 300/5000000 = 0{,}00012$ sec sein. Sie ist also in Wahrheit fünfmal so groß, und die Theorie erweist sich auch hier als hinfällig.

2. Die Stoßzeit wächst mit der Länge des stoßenden Stabes, aber sehr wenig (zwischen 100 und 400 mm um 6%); nach der Theorie sollte sie der Länge des kürzeren Stabes proportional sein.

3. Die Stoßzeit wächst ein wenig mit der Dicke.

4. Die Stoßzeit nimmt ab, wenn die Stoßgeschwindigkeit wächst (zwischen 12 und 400 mm um 8 bis 15%); von dieser Abhängigkeit gibt die Theorie gar keine Rechenschaft; die VOIGTsche tut es teilweise, soweit die in ihr vorkommenden Konstanten eine Vergleichung zulassen.

Für Kugeln liefert die Theorie von HERTZ für die Stoßdauer zwischen gleich großen und stofflich gleichen Kugeln die Formel (66). Die Beobachtungen von HAMBURGER und SCHNEEBELI liefern eine hiermit ziemlich gut übereinstimmende Abhängigkeit der Stoßzeit von Stahl- und Messingkugeln von R und c, und diese Übereinstimmung erstreckt sich einigermaßen auch auf die absoluten Werte von T. Bei Messingkugeln ($R = 13$ mm, $\varrho = [8{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 9810^{-1}]$ in kg und mm, $E = 10000$, $\mu = \frac{1}{3}$) ergab sich z. B.

Geschwindigkeit	73,7	122,9	192,1	295 mm
Stoßzeit, berechnet . .	0,000185	0,000167	0,000153	0,000140 sec
„ beobachtet . .	0,000196	0,000173	0,000157	0,000148 sec

Der Kuriosität halber sei nach HERTZ angeführt, daß, während bei den dem Experiment zugänglichen Verhältnissen die Stoßzeit sehr klein ist, sie bei zwei Stahlkugeln von der Größe der Erde und einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 mm nicht weniger als nahezu 27 Stunden betragen würde.

Eine andere Methode hat neuerdings NELJUBOW[2] angewandt; die ruhende Kugel war zur Erde abgeleitet, die stoßende mit einer auf ein bestimmtes Potential geladenen bekannten Kapazität verbunden; es wurde die Zeit bestimmt, während deren sich das Potential um einen gewissen Betrag vermindert. Für Stahlkugeln ergab sich gute Übereinstimmung mit der HERTZschen Formel, die die kleinen Abweichungen sollen sich durch die endliche Größe der Deformationen erklären; bei Kupfer- und Messingkugeln erhielt man zu stark schwankende Werte, um Schlüsse ziehen zu können.

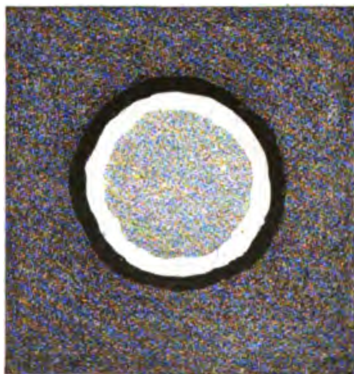
Schließlich ist noch eine umfangreiche Untersuchung von TAIT[3] anzuführen. Der stoßende Körper war ein fünf Pfund schwerer Holzkörper, der ruhende ein mit der Basis fest gekitteter, an der oberen Endfläche schwach gewölbter Zylinder aus Platanenholz, Guttapercha, Kautschuk oder Kork; der Holzblock fiel zwischen Leitschienen hernieder. Ein mit ihm verbundener Stift verzeichnete auf einer mit einem rotierenden Schwungrade verbundenen geschwärzten Glastafel außerhalb der Stoßzeit einen Kreis, während dieser dagegen eine den Kreis zu Anfang und Ende schneidende Kurve, so daß aus der Tourenzahl des Schwungsrades die Stoßdauer ermittelt werden konnte. Die Kurve ließ sich, wenn r und ϑ Polarkoordinaten sind, in der Form $r = a + b\vartheta^2$ darstellen; a hat für jeden Rückprall und Rückfall denselben Wert, ändert sich aber von einem Falle zum nächsten; b da-

[1] M. HAMBURGER, Bresl. In.-Diss. 1885 u. WIED. Ann. 28. 653. 1886. — [2] W. NELUBOW, Journ. russ. phys.-chem. Ges. 34. 561. 1902. — [3] P. G. TAIT, Proc. Edinb. Soc. 17. 1192. 1889; Trans. Edinb. Soc. 36. 1. 225. 1891.

gegen hat für alle Fälle einen und für alle Rückpralle einen anderen gemeinsamen Wert. Bei einer Stoßgeschwindigkeit von 16 Fuß in der Sekunde schwankte die Stoßdauer zwischen $^1/_{70}$ Sekunde für Kork, $^1/_{130}$ für Kautschuk, $^1/_{550}$ für Platanenholz bis zu $^1/_{700}$ für Hartgummi. Bei Kork und Guttapercha zeigte sich die Anomalie, daß mit Verminderung der Stoßgeschwindigkeit bis auf acht Fuß die Stoßdauer zwar wuchs, bei weiterer Verminderung aber wieder abnahm.

Stoßfläche. Die zweite der für den Stoßvorgang charakteristischen Größen ist die Stoßfläche oder Druckfläche, d. h. diejenige Fläche, in der während des Zustands der stärksten Kompression Druckwirkung zwischen den Körpern besteht. Diese Fläche ist im allgemeinen gekrümmt und nur bei zwei nach Form und Stoff gleichen Körpern eine Ebene. Am interessantesten und zugleich am leichtesten festzustellen ist ihr Rand, die Stoßfigur oder Druckfigur. Nach der Theorie von Hertz ist sie eine Ellipse, und speziell für Kugeln ein Kreis mit dem durch (67) bestimmten Radius; Hertz selbst fand diese Formel für Glaslinsen und Glasplatten (und eine ähnliche für Glaszylinder, die sich längs eines Stückes der Mantelfläche berührten) durch Beobachtung mittels Rußüberzugs gut bestätigt. Für die von Schneebeli aneinander gepreßten Kautschukkugeln sollte $f = 1{,}34$ mm sein, und in guter Übereinstimmung ergab das Experiment mit Hilfe von Färbung durch Platinchlorür $f = 1{,}42$; beides bei $p = 2000$ kg.

Nach der Formel soll der Radius der Stoßfläche dem Radius der Kugeln proportional sein und schwach wachsen mit der Geschwindigkeit des Stoßes, noch schwächer direkt mit der Dichte, verkehrt mit E und μ. Ähnlich verhält es sich, wenn die beiden Kugeln von verschiedenem Radius und Material sind, wenn z. B. eine Kugel gegen eine ebene Platte stößt. Auch einige der hierauf bezüglichen Ergebnisse fanden Schneebeli und Hamburger durch den Versuch (ersterer mittels paraffinierter Stahlkugeln, letzterer mittels Elfenbeinkugeln und berußten Glasplatten) bestätigt. Die (etwa zehnmal vergrößerte) Abbildung einer solchen Stoßfläche nach Hamburger (Figur 268) zeigt infolge der Dicke der Rußschicht den Unterschied zwischen Druckfläche und bloßer Berührungsfläche; auf ersterer (im inneren Kreise) ist der Ruß teilweise festgepreßt, auf letzterer ist er fast gänzlich fortgenommen (mittlerer Ring); endlich bildet sich außen noch ein Wall fortgeschleuderten Rußes; die wirkliche Stoßfläche ist die innerste Kreisfläche. — Vincent (a. a. O.) findet für Kugeln, die auf Platten aufschlagen, den Durchmesser des Eindrucks proportional mit dem Kugelradius und mit der Quadratwurzel aus der Stoßgeschwindigkeit.



Figur 268.

Kompression und Druck. Diese letzten, für den Stoß charakteristischen Größen sind begreiflicherweise am schwersten exakt zu messen, und es liegen darüber nur wenige Angaben vor. So findet Vincent (a. a. O.) den Druck bei Blei und Paraffin auf den Kontaktflächen konstant, das Volumen des Eindrucks proportional mit der kinetischen Energie unmittelbar vor dem Stoße. — Ringelmann[1], der den Druck beim Aufschlagen durch ein selbstregistrierendes Dynamometer maß, fand, wenn m das Gewicht und c die Geschwindigkeit ist, den Druck $p = 13{,}55\, m\, c$ in Kilogrammen und Metern. — Schließlich sei auf eine Arbeit von Schoentjes[2] über die Deformationen von hohlen Halbkugeln durch Stöße hingewiesen, die jedoch mehr in die Lehre von der Festigkeit gehört.

[1] Ringelmann, C. R. **137**. 644. 1903. — [2] H. Schoentjes, Bull. Acad. Belg. (3) **20**. 295. 1890.

Elastische Nachwirkung.

Von F. AUERBACH.

Einleitung. Die physikalische Wissenschaft beschreibt die Vorgänge in der Natur als das Ergebnis von Ursachen; diese Ursachen bezeichnet sie als Kräfte, die Vorgänge selbst als deren Wirkungen. Was insbesondere den mechanischen Teil der Physik betrifft, so bestehen die Wirkungen in Bewegungen, und es befindet sich darunter auch der Sonderfall der Ruhe, der eintritt, wenn keine Kraft wirkt oder, wie man in gewissen Fällen auch sagt: wenn die wirkenden Kräfte miteinander in Gleichgewicht stehen. Hiermit sind aber die Hauptzüge physikalischer Darstellung der Bewegungserscheinungen noch nicht erschöpft. Denn wenn sich ein Körper geradlinig und gleichförmig bewegt, so wird das ebenfalls auf das Nichtvorhandensein von Kräften zurückgeführt; solche haben wohl früher einmal die Bewegung hervorgerufen, ihre jetzige Fortsetzung wird aber als Wirkung einer dem Körper selbst innewohnenden Eigenschaft, seines Beharrungsvermögens, bezeichnet. Jene Kraft hat vielleicht nur ganz kurze Zeit hindurch gewirkt, so daß man von einem bloßen Impulse spricht; sie wirkt aber, sozusagen, nach dem Aufhören ihrer eigentlichen Wirkung noch nach, und diese ihre Nachwirkung ist eben die geradlinig-gleichförmige Bewegung.

Geht man von der Bewegung starrer Körper im Raume zu elastischen Vorgängen und Kräften über, so hat man zunächst den Fall des elastischen Gleichgewichts, wo die äußere Kraft durch die im Innern des Körpers wachgerufene elastische Gegenkraft äquilibriert wird und der Körper infolgedessen in dem Zustand, in dem er sich befindet, verharrt; ein Spezialfall ist der, wo keine äußere Kraft, also auch keine Gegenkraft vorhanden ist, und der Körper somit in seinem natürlichen Zustand verbleibt. Dem Falle der Ruhe deutlich gegenüber steht der Fall der erzwungenen Schwingungen (p. 712); denn diese sind die Wirkungen gleichzeitiger Kräfte (Kraft wie Wirkung von periodischem Charakter). Wie aber steht es mit den freien Schwingungen? Hier haben wir ein zweites Beispiel von Impulsen, die das Gleichgewicht stören und, nachdem die kurze Zeit ihres Wirkens (Zupfen, Schlagen u. s. w.) vorüber ist, trotzdem noch lange Zeit hindurch eine Nachwirkung in Gestalt eben jener freien Schwingungen ausüben. Was bei der gleichförmigen Bewegung des starren Körpers das Beharrungsvermögen ist, das ist hier die durch den Impuls wachgerufene innere Elastizität, nur daß diese nicht konstanten, sondern periodischen Charakters ist und deshalb auch in entsprechender Weise in die Erscheinung tritt.

Eine dritte Klasse von Nachwirkungserscheinungen aber — und das sind gerade diejenigen, welche diesen Namen usuell erhalten und bewahrt haben — ergibt sich, wenn man den Übergang von einem Gleichgewichtszustand in einen anderen ins Auge faßt. Nach der gewöhnlichen in den vorangegangenen

Artikeln dargestellten Elastizitätstheorie, die bloß Wirkungen und keine Nachwirkungen, wenigstens von der eben genannten dritten Klasse, kennt, stellt sich der neue Zustand unmittelbar her: der erzwungene, bei Beanspruchung eines bisher im natürlichen Zustand befindlich gewesenen Körpers eintretende ebenso unmittelbar wie, nach Aufhebung der Beanspruchung, aus dem erzwungenen wieder der natürliche Gleichgewichtszustand. Entsprechend ergibt sich für die freien Schwingungen vollkommene Gleichförmigkeit vom Moment an, wo der Impuls vorüber ist. Wenn nun die Beobachtung lehrt, daß alles dies nicht der Fall ist, daß sich vielmehr jeder neue Zustand erst nach und nach herstellt, daß also, auch wenn die wirkende Kraft konstant bezw. null ist, trotzdem zeitliche Zustandsänderungen des Körpers oder zeitliche Änderungen seiner Bewegungsart stattfinden, so eröffnet sich damit ein neues Kapitel der Elastizitätslehre: das Kapitel von der elastischen Nachwirkung. Der Gesamtheit der hierher gehörigen Erscheinungen ist der vorliegende Artikel gewidmet; bei der Fülle der einschlägigen Tatsachen und Ideen mußte man sich auf das Wesentliche beschränken. Es sei bemerkt, daß ganz entsprechende Phänomene auch auf anderen Gebieten eine bedeutsame Rolle spielen, so die thermische Nachwirkung, der elektrische Rückstand, und namentlich die magnetische Nachwirkung im Gebiet des Magnetismus; hier bezeichnet man die Erscheinungen in ihrer Gesamtheit (oder in einzelnen Teilen) gewöhnlich als Hysteresis, der entsprechende Ausdruck „elastische Hysteresis" hat sich bisher nicht allgemein eingebürgert. Ein Sonderfall der Nachwirkung ist dort wie hier die Remanenz, d. h. das Zurückbleiben von Deformationen bezw. Magnetisierung; im vorliegenden Falle wird dieses Phänomen jedoch besser der Lehre von der Kohäsion vorbehalten und hier nur insoweit berührt, als es mit dem der Nachwirkung eng verknüpft ist.[1]

I. Eine Reihe von Tatsachen.

1. Bei einer Untersuchung über die Elastizität von ungedrehten Seidenfäden beobachtete W. WEBER[2] die folgende Erscheinung: Wurde ein Kokonfaden einige Zeit lang gespannt und dann rasch abgespannt, so ging er nicht sofort auf seine ursprüngliche Länge zurück. Einen gewissen Weg legte er schnell — sagen wir momentan — zurück; dann zog er sich langsam, im Laufe mehrerer Stunden, bis zu einer Länge zusammen, welche aber auch noch größer als die ursprüngliche war; von da ab machte er keine merkliche Bewegung mehr. Diese drei Strecken wollen wir bezeichnen: die erste als elastische Verschiebung, die zweite als elastische Nachwirkungsverschiebung; die dritte als dauernde (permanente) Deformation. Daß diese drei Größen nicht streng voneinander zu trennen sind, ist selbstverständlich. Bei Magnetisieren von Eisen zeigen sich ähnliche Erscheinungen; den drei Abschnitten entsprechen dort die temporäre, remanente und permanente Magnetisierung.

[1] Dem vorliegenden Artikel liegt der gleichnamige, für die erste Auflage des Handbuchs von F. BRAUN bearbeitete Artikel der Hauptsache nach zugrunde; er mußte aber, da seit seiner Abfassung fast 20 Jahre verstrichen sind, stark ergänzt und umgearbeitet werden. — Wegen der entsprechenden magnetischen Erscheinungen vgl. Bd. 5. 210 ff. — Die Übersicht über die in der Natur möglichen Nachwirkungserscheinungen ist mir in der obigen Form (Beharrung, freie Schwingung, eigentliche Nachwirkung) in der Literatur noch nicht begegnet. — Eine neuartige, aber, wie mir scheint, nicht notwendige Nomenklatur hat E. WIECHERT, WIED. Ann. 50. 335. 546. 1893 und Ber. phys. Ges. Königsberg 1893, vorgeschlagen: katastatische und akatastische Erscheinungen (etwa entsprechend Wirkung und Nachwirkung im allgemeineren Wortsinn); zu den akatastischen Erscheinungen gehören außer elastischen, thermischen, elektrischen und magnetischen auch gewisse chemische, z. B. die Zerfällung von Rohrzucker durch eine Säure in Dextrose und Lävulose. Man vgl. im übrigen w. u. die Theorie von WIECHERT (Nr. 20). — [2] W. WEBER, POGG. Ann. 34. 247. 1835.

Wenn WEBER einen Kokonfaden ein paar Stunden lang an- und dann wieder abspannte, so ergab sich, daß der Faden beträchtlich und zwar bleibend verlängert worden war. Diese Operation wurde darauf ein zweites und ein drittes Mal wiederholt. Auch das zweite Mal erhielt er eine bleibende, aber kleinere Verlängerung. Nach dreimaliger Wiederholung entstand keine neue bleibende Verlängerung mehr.

Auf diese Weise läßt sich also in einem gewissen Maße die Elastizitätsgrenze erweitern und der Vorgang der Nachwirkung unabhängig von der der dauernden Gestaltsänderung beobachten. Die temporäre Verschiebung darf selbstredend nicht die zuerst gewählte überschreiten; sonst wird eine neue dauernde Verlängerung eintreten.

Man sollte nun eigentlich unterscheiden zwischen einer Nachwirkungsdeformation und der Nachwirkung selber, indem man den letzteren Namen für die Ursache der Deformation sich reserviert. Da aber meistens keine Zweifel entstehen, was gemeint sei, so soll Nachwirkung auch gebraucht werden für „Deformation durch Nachwirkung“, gleichgültig, ob letztere in absolutem oder in einem beliebigen relativen Maße dargestellt ist. Dieses Maß selbst ist von verschiedenen Autoren verschieden gewählt worden. Vielleicht am meisten empfiehlt sich die von ABBE herrührende, von WEIDMANN[1] mitgeteilte Definition, wonach die elastische Nachwirkung ein Quotient ist, nämlich die zu einer bestimmten Zeit nach dem Entspannen noch verbleibende, dividiert durch die anfängliche Entfernung von der ursprünglichen Gleichgewichtslage.

Das Charakteristikum der Nachwirkung besteht also darin, daß sie eine Funktion der Zeit ist. Praktisch wird diese Abgrenzung oft Schwierigkeiten haben, namentlich für den Beginn einer Nachwirkung.

Der folgende Artikel wird sich möglichst auf die Nachwirkung beschränken; dauernde Deformationen werden nur, wo es unumgänglich nötig ist, mit in seinen Bereich gezogen.

Die elastische Nachwirkung tritt nicht bloß bei der Entlastung, sondern ebenso auch bei der Belastung auf, es scheint sogar, daß sie hier schon 1 Jahr vorher, und zwar von VICAT, festgestellt worden ist.[2]

2. Die Beobachtungsmethode von W. WEBER war die folgende, durch GAUSS ihm angegebene: Ein Seidenfaden war horizontal ausgespannt; sein eines Ende war an ein Schraubenmikrometer, sein anderes an ein, an einem langen Drahte aufgehängtes Gewicht geknüpft. Bewegte man das Schraubenmikrometer, so neigte sich der Faden, an welchem das Gewicht hing und der Faden bekam eine aus dieser Neigung und der Größe des Gewichts bestimmbare Spannung.

Die Abhängigkeit der Nachwirkungsverlängerung x von der Zeit t, welche verflossen ist seit Aufhebung der Spannung, stellte WEBER in seinen ersten Versuchen dar durch $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{b}$ oder $x = -\frac{b}{t + C}$, wo b und C Konstanten sind.

In einer späteren Abhandlung[3] zeigte er, daß genauere Beobachtungen sich dieser Form nicht fügten; er versuchte daher die Annahme

$$\frac{dx}{dt} = b\,x^m$$

und fand für einen speziellen Fall genügend:

$$x = 29{,}05\,(t + 1{,}1816)^{-0{,}1719}\quad ,$$

wenn x in Millimeter, t in Minuten gemessen ist.

---

[1] G. WEIDMANN, WIED. Ann. 29. 214. 1886. — [2] VICAT, Ann. ponts chauss. 1834. — [3] W. WEBER, POGG. Ann. 54. 1. 1841.

3. WEBER wies darauf hin, daß die Dämpfung von Schwingungen durch innere Reibung sich aus der Nachwirkung müsse erklären lassen. Bei jeder Hinschwingung würde die Ruhelage, d. h. diejenige Stelle, an welcher die im Innern des Körpers wirkenden Kräfte im Gleichgewicht wären und an der er also, hätte er keine träge Masse, würde stehen bleiben, etwas rückwärts, bei jeder Rückschwingung etwas vorwärts verlegt werden. Daraus würde eine Abnahme des Schwingungsbogens bei jeder Schwingung nahe um das Doppelte jener Verschiebung bewirkt werden.

4. Den Beobachtungen von WEBER folgten zunächst einige gelegentliche von R. KOHLRAUSCH[1] an Seide und Glasfäden ohne allgemeine Resultate. Gegenstand einer eingehenden Untersuchung wurde die Nachwirkung erst durch F. KOHLRAUSCH.[2] Er wählte, als leichter beobachtbar, die Torsionsnachwirkung und stellte sich als die direkte experimentelle Aufgabe die Fragen: 1. Wenn man einen Draht um einen konstanten Winkel tordiert, wie ändert sich das Torsionsmoment D als Funktion der Zeit t, welche die Torsion bereits dauert? 2. Welches Torsionsmoment ist nach Aufheben der Torsion nötig, den unteren Querschnitt in die Ruhelage zurückzuführen? 3. Ein Draht sei während der Zeit T um einen Winkel φ tordiert worden, welches ist der Torsionswinkel x, um den der Draht von seiner permanenten Ruhelage absteht zur Zeit t nach Aufheben der Torsion? Die Temperatur sei τ^0 C.

Ad 1. Die erste Frage wurde geprüft, indem an einem Glasfaden eine Magnetnadel befestigt und aus dem magnetischen Meridian durch eine Torsion abgelenkt wurde. Ist dasjenige Drehungsmoment $= 1$ gesetzt, welches auf die Nadel ausgeübt wird, wenn sie senkrecht zum magnetischen Meridian steht, so ergab sich das Torsionsmoment als Zeitfunktion zu

$$D = D_1 + c e^{-a t^m}$$

$D_1 = 0{,}8970$ Material: Glasfaden.

$c = 0{,}0405$ Zeiteinheit: Minute.

$a = 0{,}3527$

$m = 0{,}25$.

Ad 2. Es fand sich d für denselben Glasfaden durch eine Zeitfunktion gleicher Form darstellbar und zwar:

$$d = d_1 + c e^{-a t^m} \quad \text{(Zeiteinheit: Minute)} \quad .$$

Hierin war $m = 0{,}25$ und

Dauer der Torsion	c	a
1380′	0,04551	0,45204
40	0,04225	1,0886
20	0,04178	1,2497
10	0,03240	1,3086

Ad 3. Was endlich die dritte Frage betrifft, so handelt es sich vorzugsweise um eine Entscheidung über das Folgende: Lassen sich die Beobachtungen darstellen durch die von WEBER benutzten Formel:

$$\frac{dx}{dt} = -b x^p \tag{1a}$$

[1] R. KOHLRAUSCH, POGG. Ann. **72**. 393. 1847. — [2] F. KOHLRAUSCH, ibid. **119**. 337. 1863.

mit dem Integral

(1 b) $$x = \frac{b_1}{(t + C_1)^p} (p > 1)$$

oder die von KOHLRAUSCH supponierte

(2 a) $$\frac{dx}{dt} = -\alpha \cdot \frac{x}{t^n}$$

mit dem Integral

(2 b) $$x = C \cdot e^{-\alpha t^m} \quad .$$

Die Gleichung (1 a) ist dann ein spezieller Fall von (2 a). Schreibt man nämlich

$$\frac{dx}{dt} = -b x \cdot x^{p-1}$$

und nach (1 a)

$$\frac{dx}{x^p} = -b\,dt \quad ; \qquad x^{-(p-1)} = -(p-1)\,b\,(t + C) \quad ,$$

so wird

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{(p-1)(t+C)}$$

und daher für $C = 0$

(3 a) $$\frac{dx}{dt} = -\alpha \frac{x}{t}$$

mit dem Integral

(3 b) $$x = \frac{c}{t^\alpha} \quad .$$

α nennt KOHLRAUSCH den Koeffizient der elastischen Nachwirkung.

Das allgemeine Resultat der KOHLRAUSCHschen Beobachtungen[1] geht dahin: Für kurze Torsionsdauern lassen sich die Formeln (3) benutzen. Wird aber der Draht durch eine, längere Zeit dauernde Torsion in den Zustand der Nachwirkung versetzt, so stellen nur die Gleichungen (2) den Verlauf derselben genügend dar. Es ist also n nicht mehr $= 1$, entfernt sich im Gegenteil um so mehr vom Werte 1, je größer die Torsionsdauer war; gleichzeitig nimmt auch α ab; $n - \alpha$ bleibt aber nahezu konstant. Zum Belege mögen die folgenden Zahlen dienen; sie beziehen sich auf die

Torsionsnachwirkung eines Silberdrahtes.

Torsionsdauer	α	n	$n - \alpha$
60 Sec.	0,388	1,0000	0,612
120 „	0,321	0,931	0,610
300 „	0,293	0,849	0,556
600 „	0,236	0,785	0,549
32400 „	0,042	0,652	0,610

Hat man bei einer gewissen Temperatur die Nachwirkung eingeleitet und steigt die Temperatur, während die Nachwirkung sich ausgleicht, so läuft diese rascher ab. — Umgekehrt gibt dieselbe Deformation, bei höherer Temperatur hergestellt, in gleichen Zeiten größere Nachwirkung (wenigstens bei Silber). Sie kann innerhalb Temperaturen von $+3$ bis $+22^0$ praktisch proportional der von $-21{,}5^0$ an gerechneten Versuchstemperatur gesetzt werden.

[1] F. KOHLRAUSCH, POGG. Ann. **128.** 1. 399. 1866; **158.** 337. 1876.

Die sämtlichen Beobachtungsreihen lassen sich schließlich zusammenfassen in der folgenden Gleichung. Die Ablenkung x zur Zeit t Minuten nach Aufheben der Torsion φ, welche während T Sekunden bestanden hat, ist (alle Vorgänge bei einer Temperatur von τ^0 C gedacht):

$$x = 0,00009093 \cdot T^{0,587} \cdot \varphi \frac{\tau + 21,5}{34} \cdot \frac{1}{t^{0,3875}} \quad .$$

x und φ sind im gleichen Maße ausgedrückt. Die Formel gilt unabhängig von der Länge des Drahtes. Der Radius des Silberdrahtes war = 0,046 mm. T ging dabei bis zu 600 Sekunden, φ bei dem 125 mm langen Drahte bis zu 340°.

Für größere Torsionen ist die Proportionalität der Nachwirkung mit der Torsion nicht mehr streng[1]; es muß ein quadratischer Ausdruck eingeführt werden. Für die Torsionsdauer von 1 Minute gilt dann:

$$x = (0,0000219\,\varphi + 0,0000000187\,\varphi^2)\,T^{0,59} \cdot \frac{1}{t^{0,39}} \cdot (\tau + 21,5) \quad .$$

5. Versuche von NEESEN[2] führten den Verfasser zum Schlusse, daß die KOHLRAUSCHschen Formeln auf seine Beobachtungen nicht anwendbar seien, sondern daß man ihnen genügen müsse durch eine Summe von Exponentialfunktionen, mindestens zwei Gliedern von der Form:

$$x = c e^{-\beta t} + c_1 e^{-\beta_1 t} \quad .$$

KOHLRAUSCH[3] zeigte, daß die Messungen nicht zu diesem Schlusse nötigen. Sie fügen sich ebensogut der KOHLRAUSCHschen Formel, erstrecken sich aber überhaupt über eine zu kleine Zeit und außerdem über eine solche, bei denen die Bewegungen schon so langsam sind, daß man denselben Beobachtungen, welche durch die Gleichung $x = c e^{-\beta t}$ dargestellt werden, ebensogut genügt, wenn man statt t einführt z. B. $\sqrt{t}$.

Für seine späteren Versuche über die Längsausdehnung des Kautschuks[4] fand NEESEN überhaupt keine Formel, welche sie gut darstellte. Am besten genügte ihnen noch $x = c/\log(a + t)$.

6. Den Koeffizient α der elastischen Nachwirkung fand KOHLRAUSCH

für Kokon	0,1719	Ausdehnung
„ Messingdraht	0,1643	Torsion
„ Silberdraht	0,3875	„
„ Kautschuk	0,67	„

7. Auch für Verlängerungs- und Biegungsnachwirkung von Kautschuk zeigte KOHLRAUSCH, daß die Formel (2) den Vorgang gut darstellt, während Formel (3) nur bei kleinen Deformationszeiten zulässig ist. Die Anwendbarkeit der KOHLRAUSCHschen Formeln, namentlich für die ersten Zeiten nach der Deformation, hat auch MESSER auf einem hübschen Wege (unter Anwendung der Photographie auf eine bewegte Platte) gezeigt.[5]

8. Von weiteren Resultaten der KOHLRAUSCHschen Versuche seien noch folgende bemerkt: Die elastische Nachwirkung tritt am stärksten bei organischen Substanzen auf; am Kokon beträgt sie mehr als die Hälfte der plötzlichen Änderung. Bei Glas und Metallen erreicht sie den Betrag von mehreren Prozenten. Überraschend aber ist es, daß der Koeffizient α bei allen von gleicher Größenordnung ist. — Von den dauernden Veränderungen durch Überschreitung der

[1] F. KOHLRAUSCH, POGG. Ann. **158**. 337. 1876. — [2] F. NEESEN, ibid. **153**. 498. 1874. — [3] F. KOHLRAUSCH, POGG. Ann. **155**. 579. 1875. — [4] F. NEESEN, WIED. Ann. **7**. 460. 1879. — [5] MESSER, Ber. d. naturf. Ges. zu Freiburg i. Br. Bd. 2. Heft 3. 1878.

Elastizitätsgrenze scheint sie unabhängig zu sein. — Bei Silber ließ sich ein gesetzlicher Verlauf der Nachwirkung bis zu einer Beobachtungszeit von einem halben Jahre nachweisen.

Bei Kautschuk ist der Einfluß der Temperatur entgegengesetzt dem bei Silber. Kautschuk nimmt größere Nachwirkung bei niedrigerer Temperatur an.[1]

Gegen die Formel $x = c/t^a$ kann man einwenden, daß für $t = 0$ die Nachwirkung $x = \infty$ würde. Doch ist dies praktisch ohne Belang. Kohlrausch berechnet z. B., daß bei einem Silberdraht die Nachwirkung gleich der ganzen erteilten Torsion würde für $t = 0,00000002$ Min. und zeigt, daß bei der Längsnachwirkung von Kautschukfaden schon für $t = 1$ Sek. die Formel die Beobachtungen darstellt.

Von besonderem Interesse sind endlich die Erscheinungen des allmählichen Heraustretens verschiedener, entgegengesetzter Nachwirkungen. Tordiert man z. B. einen Kautschukfaden erst längere Zeit nach rechts (1 Tag um 1080°), läßt ihn dann los und drillt ihn, sobald seine Bewegungen langsam geworden sind, kürzere Zeit und um einen geringeren Betrag nach links (10 Min. um 180°), so bewegt er sich zuerst im Sinne der letzten Nachwirkung, die Bewegung verlangsamt sich, hört bald nachher auf und geht (nach 3,5 Min.) in eine entgegengesetzte über, wie sie die erste Nachwirkung verlangt. So lassen sich mehrere Nachwirkungen übereinander lagern; dies gilt auch für Verlängerung und Verbiegung.

9. Der allgemeine Schluß, den man mit Kohlrausch aus seinen Beobachtungen ziehen kann, ist daher, daß mit einer und derselben äußeren Gestalt verschiedene Anordnungen der Molekeln verbunden sein können. Schon aus seinen ersten Versuchen folgerte er, daß man zur Erklärung der Nachwirkung eine Drehung der Molekeln annehmen könne, wenn man voraussetzt, daß sie langsam geschehe, und daß durch sie eine Änderung der Molekularkräfte herbeigeführt werde, ohne daß die Mittelpunkte der Teilchen ihre gegenseitige Stellung zu ändern brauchen. Diese Ansicht hatte auch W. Weber schon angedeutet; und Clausius[2] hatte gleichfalls auf sie hingewiesen. Endlich machte G. Wiedemann[3] darauf aufmerksam, daß man durch Zurückgehen auf seine Versuche über den Zusammenhang der Magnetisierung mit mechanischen Deformationen und die von ihm gegebene Erklärung der Erscheinungen für diese Vorstellungen eine positive Grundlage würde gehabt haben.

Es handelt sich noch um die Deutung der Formeln (2), die den Vorgang darstellen. Kohlrausch faßt dieselbe (2a) auf (etwa in Analogie zum Ohmschen Gesetz), als sei die Kraft, mit der die Drehung hervorgebracht wird, proportional dem Abstand aus der Gleichgewichtslage und umgekehrt proportional einem Widerstand. Der letztere wäre der Zeit, die seit der primären Änderung verstrichen ist, proportional; allgemeiner einer Potenz derselben (mit einem Exponenten kleiner als 1).

II. Versuche zu einer theoretischen Behandlung der Nachwirkung.

10. Der erste, der eine Theorie der elastischen Nachwirkung aufstellte, war O. E. Meyer.[4] Er nahm an, daß die elastischen Kräfte in Körpern unvollkommener Elastizität nicht nur von den Verrückungen, sondern auch von

[1] F. Neesen (Pogg. Ann. **7.** 469. 1879) schließt aus seinen Beobachtungen an einem Kautschukfaden auf ein anderes Verhalten; man vgl. jedoch weiter unten. — [2] R. Clausius, Pogg. Ann. **76.** 46, insbesondere p. 66. 1849. — [3] G. Wiedemann, Wied. Ann. **6.** 505. — [4] O. E. Meyer, Crelles Journ. **78.** 130; **80.** 315; Pogg. Ann. **151.** 108. 1874; **154.** 358. 1875. Vgl. auch Wied. Ann. **4.** 249. 1878, woselbst auch die Formulierung einer anderen Hypothese sich befindet. Bemerkung von Boltzmann dazu Wied. Ann. **5.** 430. 1878

der Geschwindigkeit abhängen, mit der sie vor sich gehen; diese Voraussetzung führte er in die Differentialgleichungen der Elastizität ein. Mit anderen Worten: er versuchte die elastische Nachwirkung auf die innere Reibung der festen Körper, die bekanntlich sehr groß ist, zurückzuführen. KOHLRAUSCH[1] wandte hiergegen ein, daß die elastische Nachwirkung zu langsam verlaufe, um durch innere Reibung dargestellt werden zu können; und ebenso erhob BOLTZMANN verschiedene Bedenken, insbesondere, daß eine solche Annahme nicht den Charakter der elastischen Nachwirkungserscheinungen wiedergeben könne. Er gab eine auf eine andere Hypothese gegründete Theorie.[2]

BOLTZMANN nimmt an, daß die Kraft, welche nötig ist, eine Verschiebung zu erhalten, nicht nur vom augenblicklichen Zustand des Körpers, sondern auch von den vorhergegangenen Deformationen abhängig ist. Wie man sich dies etwa denken könne, vgl. WIED. Ann. 3, l. c. Durch frühere Verschiebungen, welche in gleichem Sinne mit der momentanen stattfanden, tritt nach dieser Annahme eine „Kraftverminderung" ein; diese ist abhängig von der Größe der früheren Verschiebung α_τ, ihrer Dauer und der Zeit, die seit ihrer Existenz verflossen ist. Bezeichnet t die gegenwärtige, τ die frühere Zeit, so setzt BOLTZMANN die Kraftverminderung $= \alpha_\tau d\tau \cdot \varphi(t-\tau)$, wo der Index τ andeutet, daß α stattfand zur Zeit τ; φ ist eine vorerst unbekannte Funktion. Außerdem wird das Prinzip der Superposition als gültig gedacht, d. h. angenommen, daß sich der Einfluß der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Deformationen superponiert oder daß die Kraftverminderung, die eine bestimmte vor einer bestimmten Zeit stattgefundene Dehnung erzeugt, nicht abhängt von den Zuständen, die der Körper inzwischen durchlaufen hat.

Sind α, β, γ die Dehnungen der Längeneinheit in den Richtungen x, y, z; bezeichnet N_1 die Normalkraft auf die Fläche $dy\,dz$ eines rechtwinkligen Volumenelements, und sind λ und μ die LAMÉschen Elastizitätskonstanten, so geht z. B. das N_1 der gewöhnlichen Elastizitätstheorie, wo

$$N_1 = \lambda(\alpha + \beta + \gamma) + 2\mu\alpha$$

ist, über in

$$N_1 = \lambda(\alpha_t + \beta_t + \gamma_t) + 2\mu\alpha_t - \int_0^\infty d\omega\,\varphi(\omega)(\alpha_\tau + \beta_\tau + \gamma_\tau) - 2\int_0^\infty d\omega\,\psi(\omega)\,\alpha_\tau \quad ,$$

wo $t - \tau = \omega$, $-d\tau = d\omega$ gesetzt ist. Daraus leiten sich, wie bei CLEBSCH, die Kräfte als Funktionen der Verschiebungen u, v, w ab. In die Gleichungen gehen zwei Funktionen φ und ψ der Zeit ein; φ wäre aus Dehnungs- und Biegungsversuchen, ψ aus Torsionsbeobachtungen zu bestimmen. Beide wären auch verbunden durch die Relation für Nachwirkung gegen kubische Kompression, welche letztere vielleicht gleich null ist.

11. BOLTZMANN behandelt nun eine Reihe von Fällen, welche experimentell wichtig sind und leitet die Rechnungen so, daß die unbekannten Zeitfunktionen aus den Beobachtungen ermittelt werden können. Die wichtigsten wollen wir hier geben. Es werde z. B. ein Draht von der Länge l und dem Radius R durch das Drehungsmoment D tordiert um den Winkel ϑ (das Drehungsmoment soll immer am untersten Querschnitt angreifen und dort auch der Winkel ϑ gemessen sein); ist der Draht belastet mit einem Gewicht vom Trägheitsmoment K, so wird die Bewegungsgleichung des unteren Endes (die Torsion gleichmäßig über den Draht verteilt gedacht)

[1] F. KOHLRAUSCH, POGG. Ann. 160. 225. 1877. — [2] L. BOLTZMANN, Ber. Wien. Akad. 70; POGG. Ann. Ergänzungsband 7. 624—654. 1876.

$$(A) \qquad D - K\frac{d^2\vartheta_t}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2l}\left[\mu\vartheta_t - \int_0^\infty d\omega\,\psi(\omega)\,\vartheta_{(t-\omega)}\right] \quad .$$

I. Ist der Draht vorher vollkommen untordiert und wird er zur Zeit $t = 0$ tordiert um den konstanten Winkel c (ohne daß er Schwingungen ausführen kann), so ist das Drehungsmoment D zur Zeit t

$$D = \frac{\pi R^4 c}{2l}\left[\mu - \int_0^t d\omega\,\psi(\omega)\right] \quad .$$

Setzt man $D_0 = \pi R^4 \mu c/2l =$ dem Drehungsmoment, welches zur Zeit $t = 0$ nötig ist zur Verdrehung um den Winkel c, so ist

$$(1) \qquad \frac{dD}{dt} = \frac{\pi R^4 c}{2l}\cdot\psi(t) = \frac{D_0}{\mu}\psi(t) \quad .$$

Bezeichnet man mit D_∞ das Drehungsmoment für $t = \infty$ und setzt man

$$\mu' = \mu - \int_0^\infty d\omega\,\psi(\omega) \quad ,$$

bezeichnet also μ' die Konstante μ für $t = \infty$, so ist

$$(2) \qquad \frac{dD}{dt} = \frac{D_\infty}{\mu'}\cdot\psi(t) \quad .$$

Die Beobachtungen von F. KOHLRAUSCH (§ 4, ad 1) bezogen sich auf diesen Fall. Für Glas wäre demnach $\psi(t)$ von der Form:

$$\psi(t) = A\cdot t^{-3/4}e^{-0,35\cdot t^{1/4}} \quad .$$

Wir geben noch einige weitere Formeln:

II. Dem Drahte werde von $-\tau/2$ bis $+\tau/2$ die konstante Torsion γ erteilt. Das Moment d ist gesucht, welches nach Aufheben der Torsion zur Zeit $t > \tau/2$ nötig ist, um den Draht in der ursprünglichen Ruhelage zu erhalten. Dann ist

$$(3) \qquad d = \frac{\pi R^4\gamma}{2l}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} d\omega\,\psi(\omega) = -\frac{\pi R^4\gamma}{2l}\tau\cdot\psi(t) \quad (\tau \text{ eine kleine Zeit}) \quad .$$

III. Der Draht sei vorher untordiert, dann von $-\tau/2$ bis $+\tau/2$ um γ tordiert und nun freigelassen. Dann ist er zur Zeit t noch um den Winkel

$$(4) \qquad \vartheta = \frac{\gamma\tau}{\mu}\psi(t)$$

tordiert.

IV. Es soll ein Zusammenhang zwischen Dämpfung und Nachwirkung, oder das logarithmische Dekrement als Funktion der Schwingungsdauer gesucht werden. Auf den Draht wirke außer der Torsion kein Drehungsmoment. Dann ist (vgl. Gleichung A)

$$\vartheta = Ce^{-\varepsilon t}\sin(n+\alpha)t \quad ,$$

wo

$$n = \sqrt{\frac{\pi R^4\mu}{2lK}}$$

ist; ε und α werden kleine Größen sein. Setzt man den Ausdruck für ϑ in die Gleichung (A) ein und nimmt in dem bestimmten Integral, das in ihr vorkommt, ε und α gleich null, so ergibt sich durch Vergleichung der so entstehenden Formel mit der bekannten Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung (unter Anwendung des FOURIERschen Satzes) das Folgende: Ist L das logarithmische Dekrement, $T = 2\pi/n$ (so daß $L = \varepsilon T$), ferner $L = \chi(T)$, so wird

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\chi(T)$$

und

(5) $$\psi(t) = 2\mu\int_0^\infty \chi\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin n t \cdot dn \quad .$$

V. Wenn das logarithmische Dekrement von der Schwingungsdauer unabhängig ist, wie dies STREINTZ fand, so wird die Gleichung (5) unbestimmt. BOLTZMANN macht daher die den Beobachtungen jedenfalls nicht widersprechende Annahme, daß $\chi(T)$ für mäßige T konstant sei, für sehr kleine aber kontinuierlich abnehme. Man erhält dann $\psi(t) = B/t$. Diese Formel ist aber auch noch nicht direkt verwendbar, weil sowohl $\int_t^\infty \psi(t)\,dt$ als auch $\int_0^t \psi(t)\,dt$ unendlich wird. Daher substitüiert BOLTZMANN statt der Konstanten B eine Funktion $f(t)$, die für mäßige t fast konstant, für sehr große immer kleiner wird. Dann bleibt das erste Integral endlich; damit auch das zweite diese Eigenschaft behält, setzt er in Gleichung (A)

$$\mu = \int_0^\infty \frac{f(\omega)\,d\omega}{\omega}$$

und zieht beide in eines zusammen. Durch derart modifizierte Gleichungen leitet er noch folgende Relationen ab:

Ia. Bedingungen wie in I. Das Drehungsmoment, welches den Draht in der konstanten Torsion c zur Zeit t erhalten kann, ist [den früheren Gleichungen, die über die Funktion ψ keine bestimmte Angabe wußten, ordnen sich jetzt solche zu, welche die Form der Funktion enthalten; zu Gleichung (1) gehört Gleichung (1a) u. s. f.]:

(1a) $$D = c\left[a - b\log\mathrm{nat}\left(\frac{t}{\varrho}\right)\right] = A - B\log\mathrm{nat}\, t \quad .$$

IIa. Bedingungen wie in Nr. II.

(3a) $$d = -b\gamma\log\mathrm{nat}\frac{t+\frac{\tau}{2}}{t-\frac{\tau}{2}} \quad ,$$

oder für kleine τ

$$d = -\frac{b\gamma\tau}{t} \quad .$$

IIIa. Bedingungen wie in Nr. III.

(4a) $$\vartheta = \frac{b\gamma}{a}\log\mathrm{nat}\left(\frac{t+\frac{\tau}{2}}{t-\frac{\tau}{2}}\right) \quad ,$$

oder für kleine τ

$$\vartheta = \frac{b\gamma\tau}{a t} \quad .$$

IVa. Ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{a}} = \sqrt{\frac{8\pi l K}{R^4 A}}$$

$$\varepsilon = \frac{bT}{8K} = \frac{\pi b}{4\sqrt{aK}} = \sqrt{\frac{\pi^3 R^4 B^2}{32 l K A}} \quad ,$$

worin a der Torsionsmodul, A und B Konstanten sind, welche nur vom Material des Drahtes abhängen, so wird

$$L = \varepsilon T = \pi^2 \frac{b}{2a} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{B}{A} \quad ,$$

also das logarithmische Dekrement nur abhängig vom Material des Drahtes.

Dies liefert endlich, wenn die Torsionsdauer τ klein ist,

(4b) $$\vartheta = \frac{2\tau\gamma L}{\pi^2 t} + c$$

(wo c die dauernde Deformation mißt); ist τ nicht klein, so kommt

(4c) $$\vartheta = \frac{2L\gamma}{\pi^2} \log\text{nat} \left(\frac{t + \frac{\tau}{2}}{t - \frac{\tau}{2}} \right) + c \quad .$$

12. Prüfungen von BOLTZMANNs Theorie. F. KOHLRAUSCH[1] hat speziell die Frage, ob das Prinzip der Superposition gültig sei, in einer Reihe von Fällen untersucht. Nach demselben muß eine Nachwirkung, welche in irgend einem Zeitmoment existiert, sich in derselben Weise ändern (also immer abnehmen, wenn die Zeit weiter fortschreitet), wie auch im übrigen der Zustand des Drahtes ist. Die Nachwirkung nach einer Verschiebung von der Zeit T betrage zur Zeit t nach Aufheben dieser Verschiebung noch a_t; nach einer gleich großen Verschiebung von der Dauer nT betrage sie A_t. Wenn n eine ganze Zahl ist, so spricht sich das Prinzip der Superposition daher aus in der Gleichung:

$$A_t = a_t + a_{t+T} + a_{t+2T} + \dots a_{(n-1)T+t} \quad .$$

Diese Beziehung fand sich für einen Glasfaden bei nicht zu langen Zeiten annähernd erfüllt; bei einem Silberdraht waren aber die aus dem Prinzip der Superposition berechneten Nachwirkungen größer (bis zum ganzen Betrag der berechneten Größe) als die beobachteten. Auch HOPKINSON[2] schließt für größere Torsionsdauer aus seinen Versuchen an Glasfäden auf eine gleichsinnige Abweichung von der Theorie.

Gut bestätigen sich aber an Glasfäden die speziellen Gleichungen (1a) und (3a). So erhielt KOHLRAUSCH [Gleichung (1a)]:

$$D = D_1 (1 - 0{,}00467 \cdot \log\text{nat}\, t) \quad .$$

Darin ist D_1 das vom Faden eine Minute nach erfolgter Drillung ausgeübte Drehungsmoment; t ist in Minuten gemessen, die Zeiten t gehen bis zu 2 Tagen. — Für einen zweiten Faden ergibt sich 0,00375.

[1] F. KOHLRAUSCH, Pogg. Ann. **160**. 225. 1877. — [2] J. HOPKINSON, Fortschr. **35**. 222. 1879; Proc. Roy. Soc. **28**. 148. — Vgl. auch MESSER, Ber. d. naturf. Ges. Freiburg i. Br. **2**. 1878. Er hat Biegungsnachwirkung untersucht.

Ferner Gleichung (3a)

$$d = d_1 \cdot 0{,}00467 \cdot \log\operatorname{nat} \frac{\tau + t}{t} \quad .$$

Aus Beobachtungen von BOLTZMANN an einem Glasfaden berechnet endlich KOHLRAUSCH [Gleichung (4a)]

$$\vartheta = \gamma \cdot 0{,}00254 \cdot \log\operatorname{nat} \frac{\tau + t}{t} \quad .$$

FINGER[1] hat die Formel (4a) für kleine τ an Stahldraht bestätigt gefunden.

Die von BOLTZMANNS Theorie geforderte Unabhängigkeit des logarithmischen Dekrements ε von der Schwingungsdauer T findet KLEMENČIČ[2] an Glasstäben nicht bestätigt. In den meisten Beobachtungsreihen wird ε kleiner, wenn T abnimmt (z. B. $\varepsilon_1 = 0{,}00214$, $T_1 = 7{,}15$; $\varepsilon_2 = 0{,}0017$, $T_2 = 2{,}46$). Die Belastung blieb dabei ungeändert, nur das Trägheitsmoment wurde variiert. Die Luftreibung ist eliminiert. — Änderte man aber die Länge des schwingenden Teiles vom Stabe und dadurch die Schwingungsdauer, so ergab sich fast kein Einfluß auf das Dekrement.

13. Versuche von F. BRAUN.[3] Die BOLTZMANNsche Theorie betrachtet die Deformationen durch Nachwirkung gewissermaßen als einen Rest der vorher eingeleiteten und operiert bei der mathematischen Behandlung mit den Nachwirkungsverschiebungen nach denselben Gesetzen wie mit den in der gewöhnlichen Elastizitätstheorie betrachteten Verschiebungen. Nach den von W. WEBER und F. KOHLRAUSCH entwickelten Ansichten kann man bezweifeln, ob dies gestattet sei. Mit der elastischen Verschiebung, die in einer translatorischen Bewegung der Teilchen bestände, könnten Drehungen verbunden sein, welche die Nachwirkung bedingen. Wenn auch keine Möglichkeit vorhanden erscheint, experimentell darüber zur Gewißheit zu kommen, ob Nachwirkung wirklich in einer Drehung der Molekeln begründet ist, so bleibt doch die allgemeine Frage bestehen: Sind elastische Nachwirkung und elastische Verschiebung wesentlich gleiche, oder sind sie spezifisch verschiedene Bewegungen?

Eine Entscheidung darüber ist aber möglich auf Grund folgender Überlegung: Im allgemeinen wird in elastischen Körpern durch eine äußere Kraft, welche in einer Richtung wirkt, auch eine Verschiebung in einer dazu senkrechten Richtung hervorgebracht. So werden Gewichte, welche einen Stab durchbiegen, im allgemeinen gehoben oder gesenkt, wenn man den Stab durch einen horizontal laufenden Faden verbiegt. Zwei zueinander senkrechte Kräfte beeinflussen sich daher im allgemeinen. Doch lassen sich in einem einfach gestalteten Körper immer drei zueinander senkrechte Richtungen finden, welche so beschaffen sind, daß elastische Verschiebungen und Kräfte in der einen Richtung unabhängig sind von gleichzeitig eintretenden elastischen Verschiebungen in den anderen Richtungen. Elastische Nachwirkungsverschiebungen, welche in einer dieser Richtungen hervorgerufen sind, müssen dann von Verschiebungen in den anderen unabhängig sein, wenn die Nachwirkung wesentlich gleich ist mit elastischer Verschiebung. Es wird sich nicht mehr so zu verhalten brauchen, wenn die Nachwirkung ein molekularer Vorgang ist, welcher nicht wesensgleich mit der elastischen Verschiebung ist, sondern eine mit derselben zwar gleichzeitig, aber doch in spezifisch anderer Weise eintretende molekulare Änderung darstellt.

Die Ebenen, deren Durchschnittslinien die obigen Richtungen sind, sollen Hauptebenen heißen. In einem zylindrischen, ursprünglich geraden Stabe müßte demnach sein: 1. eine Biegung in einer Hauptebene unabhängig von einer solchen in einer zweiten Hauptebene; 2. eine Biegung unabhängig von einer

---

[1] A. FINGER, Wien. Ber. **72.** (2) 257. 1876. — [2] I. KLEMENČIČ, ibid. **81.** (2) 791. 1880. — [3] F. BRAUN, POGG. Ann. **159.** 337. 1876; Sitz.-Ber. d. naturf. Ges. zu Leipzig 1876.

Torsion; 3. eine axiale Verlängerung unabhängig von einer Torsion. Die Hauptbiegungsebenen sind parallel den Hauptträgheitsradien des Querschnitts. Sie sind gleichzeitig dadurch charakterisiert, daß ein Stab in ihnen linear ausschwingt. Bis zu welchen Grenzen diese Sätze gültig sind, wurde von BRAUN an dem zur Beobachtung benutzten Material vorher untersucht.

Elastische Nachwirkungen verhalten sich nun, wie die Versuche zeigten, im allgemeinen nicht wie elastische Verschiebungen. Im allgemeinen wird eine in einer ersten Hauptrichtung bestehende Nachwirkung durch eine Deformation in einer anderen Hauptrichtung verkleinert; in diesem Sinne wirkt Biegung auf Biegung, Verbiegung auf Torsionsnachwirkung, eine axiale Verschiebung auf eine Torsionsnachwirkung. Dabei ist es gleichgültig, ob die axiale Verschiebung durch eine Vermehrung oder eine Verminderung der Längsspannung hervorgebracht ist. Bemerkenswert ist aber, daß eine axiale Nachwirkung nicht auch umgekehrt durch eine Torsion beeinflußt wird. Die Einwirkung ist also nicht immer reziprok. Um dieses letztere Resultat mit Sicherheit zu konstatieren, war es nötig, die raschen Änderungen der Länge, welche die ablaufende Nachwirkung hervorbringt, zu eliminieren. Zu dem Ende waren in einem Abstand von 4 mm zwei Kautschukfäden von 61 cm Länge und 1 mm^2 Querschnitt nebeneinander vertikal aufgehängt. Sie trugen unten einen leichten Querstab, an dem sich ein Spiegel befand, die Spiegelnormale horizontal und in der Ebene der Fäden. Der eine Faden war mit seinem oberen Ende an der Achse eines Torsionskreises befestigt und konnte so tordiert werden. Am unteren Querstabe hing ein leichtes Blech, das in Wasser tauchte, um die Schwingungen des Systems zu beruhigen. Waren die Fäden längere Zeit gestreckt gewesen und dann frei gemacht, so daß sie sich zusammenzogen, so geschah die Zusammenziehung in beiden so gleichmäßig, daß mit einer Änderung von mehreren Millimetern keine Drehung der Spiegelnormale verbunden war, welche an einer entfernten Skala hätte wahrgenommen werden können. Eine Verschiedenheit der Längenänderung beider Fäden von 0,0004 mm wäre aber noch beobachtbar gewesen, d. h. bei 5 mm Gesamtverlängerung noch 0,008 $^0/_0$. Wurde einer der Fäden tordiert und wäre dadurch eine Änderung der Nachwirkung im angegebenen Betrag hervorgerufen worden, so hätte diese der Beobachtung nicht entgehen können. Bei einer derartigen Torsion wäre aber auch das ganze System und somit der Spiegel verdreht worden; um dies zu vermeiden, lehnte der Querstab an zwei vertikale Glasstäbe an. Die Reibung an diesen hat eine geringe Störung zur Folge; immerhin war mit voller Sicherheit zu konstatieren, daß Torsionen um 20×360^0 die Längswirkung nicht um 0,1 $^0/_0$ ihres Betrags veränderten.

14. Die Versuche erstreckten sich auf Stahl, Kupfer, Eisen, Messing, Neusilber, Platin, Silber, Kautschuk und Glas. Bei allen fanden sich die gleichen Resultate; nur bei Glas war nicht mit Sicherheit eine gegenseitige Beeinflussung nachweisbar. BRAUN ist der Ansicht, daß dies mit der sogen. Sprödigkeit des Materials zusammenhängt.

Daß eine Nachwirkung durch eine unabhängige Deformation verkleinert wird, gilt aber nur, wenn beide nacheinander eingeleitet werden. Sind sie gleichzeitig vorhanden, so begünstigen sie sich im Gegenteil. Wenigstens wirken so Verbiegungen aufeinander, sowie eine Längsspannung auf eine gleichzeitig angestrebte Torsionsnachwirkung. Zwei voneinander unabhängig wirkende äußere Kräfte bringen also gleichzeitig wirkend einen anderen Endzustand hervor (wenigstens in gleicher Zeit), als wenn sie nacheinander wirken und jede, ohne die Gegenwart der anderen, den ihrer Wirksamkeit entsprechenden Endzustand herbeiführt.

Die Versuche beweisen also, daß elastische Nachwirkung und elastische Verschiebung ihrem Wesen nach verschiedene Vorgänge sind. Sie zeigen, daß weder eine räumliche noch eine zeitliche Superposition allgemein auf sie an-

wendbar ist, stehen aber nicht im Widerspruch mit den speziellen, von BOLTZMANN behandelten Problemen. BRAUN hebt die Analogie mit chemischen Erscheinungen hervor und deutet schließlich eine auf der Drehung der Molekeln beruhende Erklärung an.

15. Die Idee der Drehungen der Molekeln, wie sie W. WEBER und F. KOHLRAUSCH ausgesprochen haben, kann eine doppelte Gestalt annehmen, je nachdem man an langsame Drehungen aus einer Lage in eine andere oder an rasche Wärmerotationen denkt, wie sie die Teilchen fester Körper nach der kinetischen Theorie ausführen sollen. Die elastische Nachwirkung würde hiermit, in Übereinstimmung mit BRAUN, von der eigentlichen Elastizität wesensverschieden sein. O. E. MEYER[1] hat dies zum Ausgangspunkt eines mathematischen Ansatzes gemacht, indem er an Stelle des elastischen Druckes dessen potentielle Energie in die Gleichung einführte und zu dieser alsdann die kinetische Energie der Wärmeschwingungen fügte; als drittes Glied kommt dann noch die innere Reibung in Betracht. So erhält man für die Nachwirkung x als Funktion des Ortes z und der Zeit t die Grundgleichung

$$\varrho \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} + \varrho \xi \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} ,$$

wo ϱ die Dichte, μ die Elastizitätskonstante für die betreffende Art von Deformation, η der Reibungskoeffizient und ξ ein thermischer Koeffizient ist. Dieser Gleichung genügt die Annahme, daß x für bestimmtes t linear in z sei, dann wird aber einfach

$$\frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \xi \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t}$$

und die Lösung

$$x = A \cdot \frac{z}{(a + t)^{1/(\xi - 1)}} ,$$

was mit der Formel von KOHLRAUSCH übereinstimmt.

16. Gegen die Versuche von BRAUN hat G. WIEDEMANN in dem Bericht über eine sehr ausführliche Untersuchung über die Torsion[2] mehrere Bedenken erhoben. Diese Untersuchung von WIEDEMANN bezieht sich auf permanente Gestaltsänderungen und fällt daher außerhalb des unserem Artikel gezogenen Rahmens. Sie enthält außerdem eine solche Fülle von Beobachtungen und Einzelresultaten auf engem Raume zusammen, daß ein Auszug kaum möglich erscheint. Diese können daher hier nur so weit erwähnt werden, als sie zu unserem speziellen Gegenstand in Beziehung stehen. G. WIEDEMANN erinnert an seine bekannten Versuche, wonach die Magnetisierung, desgleichen eine permanente Torsion zunimmt, wenn man während der Zeit, in welcher die magnetisierende oder tordierende Kraft einwirkt, den Körper erschüttert, daß sie dagegen abnimmt, wenn die Erschütterungen stattfinden zu einer Zeit, wo die Kraft nicht mehr wirkt. Er nimmt an, daß dabei die Molekeln beweglicher werden, indem die Reibung der Ruhe gewissermaßen in die kleinere Reibung der Bewegung verwandelt werde. a) Hiergegen ist zu bemerken, daß diese Analogie doch sehr äußerlich ist. Wenn die Reibung der Ruhe, z. B. von Eisenpulver, welches unter der Wirkung eines Magnets sich anordnen soll, durch Erschütterungen scheinbar verkleinert wird, so rührt dies daher, daß das Eisenpulver beim Klopfen einen Moment von der Unterlage entfernt ist und nun, in der Luft schwebend, sich einstellt. Einen solchen Fall kann man wohl nicht auf die Einstellung der Molekeln starrer Körper übertragen. b) Eine „Erschütterung“ und eine wohl

[1] O. E. MEYER, WIED. Ann. 4. 262. 1878. — [2] G. WIEDEMANN, WIED. Ann. 6. 485. spez. 496. 507. 509. 1879.

definierte Deformation lassen sich nicht direkt miteinander vergleichen. In der Tat, wäre die Sache so, wie G. WIEDEMANN es auffaßt, so sähe man nicht ein, warum nicht auch Glas sich verhält wie die anderen Körper und vor allem, warum nicht auch eine Längsnachwirkung durch Torsion geändert wird. Es scheint vielmehr der umgekehrte Weg der rationellere, nämlich den Einfluß der unbestimmten „Erschütterungen" zu erklären aus demjenigen, den gut definierte Deformationen ausüben. Endlich handelt es sich bei der Frage eben um Nachwirkungen, nicht um permanente Änderungen. — Bei alledem ist die Ähnlichkeit, welche Magnetisierung, permanente und Nachwirkungsdeformation zeigen, unverkennbar, und der kontinuierliche Übergang der letzteren ineinander so natürlich, daß auch BRAUN nicht an der Gleichheit eines inneren Grundes zweifelt. Nur wird man, solange nicht die Beobachtung dies bestätigt hat, nicht aus dem Verhalten permanenter Deformationen unmittelbar auf ein gleiches Verhalten für Nachwirkung und umgekehrt schließen können. Über die Änderung einer permanenten Deformation durch eine andere, in von der ersten unabhängigen Richtung war übrigens zur Zeit, als die besprochenen Versuche angestellt wurden, so gut wie nichts publiziert.

17. Theorie von WARBURG. Die Resultate der BRAUNschen Versuche veranlaßten WARBURG, eine andere mechanische Erklärung der Nachwirkung durchzuführen.[1] Er geht aus von der Überlegung, daß, wenn eine Drehung der Teilchen um ihre Schwerpunkte die Ursache der elastischen Nachwirkung sein soll, dies des weiteren erfordert, daß man die Teilchen nicht als kugelförmig ansehen darf. Die elastische Nachwirkung wäre also ein Phänomen, welches durch die Abweichung der Molekeln von der Kugelgestalt bedingt ist. WARBURG stellt sich deshalb die Aufgabe, für ein System beliebig gestalteter, gleicher Molekeln, deren Schwerpunkte im natürlichen Zustand gleichförmig angeordnet sind, die Gleichgewichtsbedingungen nach einer unendlich kleinen Verschiebung der Schwerpunkte zu untersuchen; d. h. es sollen diejenigen Orientierungen[2] der Molekeln gesucht werden, welche einer stabilen Gleichgewichtslage entsprechen; ferner sollen die Spannungen berechnet werden für diese Anordnung und verglichen mit denjenigen, die sich ergeben, wenn an jeder Stelle keine Richtung des Raumes bezüglich der Einstellung der Molekeln bevorzugt ist.

WARBURG nimmt dabei an, daß die linearen Dimensionen der Molekeln unendlich klein sind gegen den Abstand ihrer Schwerpunkte. Das Potential der Masseneinheiten aufeinander im Abstand r soll $f(r)$ sein und so beschaffen, daß $rf'(r)$, $r^2 f''(r)$ u. s. w. nicht sehr groß gegen $f(r)$ sind. Um den Zustand natürlichen Gleichgewichts zu erhalten, muß zu diesem Potential noch ein zweites $\varphi(r)$ hinzugefügt werden, welches man früher als das der Abstoßungskräfte der Molekeln bezeichnete und welches nach den modernen Anschauungen den Einfluß der Wärmebewegung repräsentiert. Da die Stöße der Wärmebewegung wegen ihrer Unregelmäßigkeiten keine bestimmte Richtung der Molekeln anstreben, so wird die Orientierung der Molekeln nur von $f(r)$ abhängen; dagegen bestimmt dieses nicht den von der Richtung der Molekeln unabhängigen Teil der Spannung, welcher der elastischen Verschiebung entspricht.

Wir können von den Resultaten nur einige hier anführen: 1. Die Hauptträgheitsachsen der Molekeln haben in den Gleichgewichtslagen die Richtungen der Hauptachsen des Elastizitätsellipsoids. Im natürlichen Zustand sowohl als in dem einer gleichförmigen Kompression haben die Molekeln daher keine bestimmte Orientierung. Bei der Torsion ist eine Trägheitsachse gerichtet nach

---

[1] E. WARBURG, Im Auszug WIED. Ann. 4. 233—249. Ausführlich in Ber. d. naturf. Ges. zu Freiburg i. Br. VII. Heft 2. — [2] Mit „Orientierung" soll stets die nur von den Winkeln abhängige Einstellung eines mit der Molekel fest verbundenen Achsensystems gegen ein im Raume feststehendes bezeichnet werden.

dem Radius des Querschnitts, die beiden anderen bilden einen Winkel von $\pm 45^0$ mit der Achse. 2. Wenn ein elastischer Körper unter dem Einfluß von Kräften, welche auf seine Oberfläche wirken, eine gegebene Formänderung erleidet, so ist die von den Kräften geleistete Arbeit ein Minimum, wenn während der Formänderung die Molekeln die der stabilen Gleichgewichtslage entsprechende Orientierung besitzen. 3. Ein Draht vom Radius R werde tordiert und die Molekeln sollen dabei die stabile Orientierung, wie sie der Torsion entspricht, annehmen. Welche Druckkräfte muß man den schon vorhandenen hinzufügen, um den Draht im Gleichgewicht zu erhalten? Auf der Mantelfläche ist nötig ein Druck in der Richtung der Innennormale:

$$P_1 - P^0 = \frac{2nf^2}{8}[(\lambda^2 - \mu^2) - (\varkappa^2 - \lambda^2)] \quad ,$$

auf der Endfläche der Druck

$$P_2 - P^0 = -\frac{2nf^2}{8}[(\lambda^2 - \mu^2) - (\varkappa^2 - \lambda^2)] \quad ,$$

und das Drehungsmoment

$$\varDelta' = -\frac{2nf^2}{8}[(\varkappa^2 - \mu^2)\pi R^3] \quad .$$

Darin ist f die früher besprochene Funktion, $\varkappa$, λ, μ die Hauptträgheitsradien einer Molekel; n die Zahl der Molekeln in der Raumeinheit. Daraus folgt: Das Drehungsmoment, das den Stab anfangs tordierte, läßt immer nach, sobald die Molekeln sich einstellen. — Das Vorzeichen von $P_1 - P^0$ und $P_2 - P^0$ hängt aber ab von der Gestalt der Molekeln. Wäre z. B. $\lambda^2 > \mu^2$ und $\varkappa^2 = \lambda^2$ (wie bei abgeplatteten Rotationsellipsoiden), so wäre $P_1 - P^0$ positiv; wären sie wie verlängerte Rotationsellipsoide ($\lambda^2 = \mu^2$; $\varkappa^2 > \lambda^2$), so wäre $P_1 - P^0$ negativ. 4. Auch für die Dehnung ergeben sich ähnliche Resultate. Soll die Deformation bestehen bleiben, während die Molekeln sich einstellen, so muß die Zugkraft, welche auf die Endflächen wirkt, nachlassen, auf der Mantelfläche aber eine Kraft angebracht werden, welche den Stab hindert, sich weiter in die Quere zu kontrahieren. Beachtenswert ist, daß bei Kompression und Dilatation der Betrag, um den die Kräfte sich ändern, nicht gleich zu sein braucht.

Aus den WARBURGschen Resultaten (Satz 1) folgt z. B., daß ein Draht, der im Zustand von Torsionsnachwirkung sich befindet, diese ändern, nämlich verkleinern muß, sobald man den Draht spannt. Denn die Molekeln streben dann derjenigen Lage zu, wo ihre Achsen der Drahtachse parallel stehen und wo sie kein Torsionsmoment bewirken. — Am Schlusse gibt WARBURG noch eine besondere Anschauung, wie er sich elastische Nachwirkung vorstellt. Sie beruht auf der Annahme, daß das Wärmegleichgewicht für eine bestimmte Temperatur eine bestimmte mittlere lebendige Kraft der Bewegungen (Rotationen oder Schwingungen) um den Schwerpunkt erfordert. Wird nun durch eine elastische Deformation die Anordnung der Schwerpunkte geändert, so treten für die einzelnen Molekeln Drehungsmomente auf, dadurch wird die lebendige Kraft der Drehungsbewegung vergrößert und somit das Wärmegleichgewicht gestört. Um es wieder herzustellen, ist eine Verkleinerung der Verdrehungen erforderlich, d. h. die Molekeln nähern sich ihrer Gleichgewichtsorientierung.

18. MICHAELIS[1] hat die WARBURGsche Theorie weiter fortgeführt und zunächst gezeigt, daß sich aus der Theorie die folgenden Resultate der BRAUNschen Beobachtungen ergeben: a) daß eine Torsionsnachwirkung durch eine elastische Verschiebung nach der Zylinderachse verkleinert wird, mag letztere von Zu- oder Abnahme der Spannung herrühren; b) daß eine Torsionsnachwirkung

[1] F. MICHAELIS, WIED. Ann. **17.** 726. 1882 (vgl. auch Literaturverzeichnis).

durch eine Biegung; c) daß eine Biegung durch eine spätere unabhängige Biegung verkleinert wird; daß aber eine Biegung in einer Hauptebene keine Nachwirkung in der anderen hervorruft. Nur daß eine gleichzeitige Spannung die Torsion vergrößert, steht im Widerspruch zur Theorie. Hier nimmt Michaelis die Erschütterungswirkungen Wiedemanns zu Hilfe. — Im weiteren Verlauf seiner Betrachtungen nimmt Michaelis auch Kräfte an, welche die Molekeln in die ursprünglichen Richtungen zurückzutreiben suchen; die Formeln ergeben dann auch die permanenten Gestaltsänderungen.

19. Eine Theorie von Neesen[1] führt die elastische Nachwirkung und deren zeitlichen Ausgleich auf die Molekularstöße zurück. Diese würden bei einer veränderten Anordnung der Molekeln je eines derselben immer in anderen Phasen seiner Bewegung treffen und diese Unregelmäßigkeiten in der Verteilung der Stöße sich erst mit der Zeit ausgleichen. Nach Neesen würde z. B. die zur Aufrechterhaltung einer Torsion notwendige Torsionskraft aus drei Teilen bestehen: 1. aus der schließlich nach Verlauf einer sehr langen Zeit nötigen Kraft; 2. aus der Kraft, welche während der Zeit des veränderlichen Zustands nötig ist zur Überwindung des Einflusses der unregelmäßig aufeinanderfolgenden Molekularstöße; 3. aus einem negativen Teile, welcher den zweiten mit der Zeit immer mehr vermindert und schließlich ganz aufhebt. Eine mathematische Formulierung sucht diese Differenz zwischen den Kräften 2 und 3, (d. h. die zeitliche Abnahme der Kraft 2) zu ermitteln und ergibt, daß ihr Funktionen von der Form e^{atm} oder $a/(a + bt^m)$ u. s. w. entsprechen. Die Gestalt der Molekeln spielt bei Neesen keine Rolle. — Nach O. E. Meyer[2] läßt die Neesensche Theorie die Deutung zu, daß sich die Elastizitätskonstanten selbst während der Nachwirkung verändern, was sehr wohl möglich ist; nur müßte, sollte die Theorie brauchbar werden, diese Veränderung in bestimmtere Form gebracht werden.

20. Sodann hat Maxwell[3] eine Anschauung von der Natur der elastischen Nachwirkung gegeben. Er bemerkt, daß Boltzmanns Theorie eine mathematische Formulierung, aber keine physikalische Erklärung sei, und daß man, statt die verflossene Zeit einzuführen, auch alles auf die gegenwärtige beziehen könne, wenn man die Größe $\vartheta_{t-\omega}$ in eine Taylorsche Reihe entwickelt

$$\vartheta_{t-\omega} = \vartheta_t - \omega\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} - \dots \quad ;$$

wird nun

$$A = \int_0^\infty \psi(\omega)\, d\omega \quad ; \qquad B = \int_0^\infty \omega\, \psi(\omega)\, d\omega \text{ u. s. w.}$$

gesetzt, so wird die elastische Kraft zur Zeit t, welche Boltzmann setzte:

$$N_t = k\vartheta_t - \int_0^\infty \varphi(\omega)\, \vartheta_{t-\omega}\, d\omega \quad ,$$

übergehen in

$$N_t = (k - A)\vartheta + B\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + C\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} \quad ,$$

wo sich alles auf die gegenwärtige Zeit bezieht.

Die Grundlage von Maxwells Anschauung besteht darin, daß in jedem Körper Gruppen von Molekeln vorausgesetzt werden, welche, namentlich

[1] F. Neesen, Pogg. Ann. **157**. 579. 1876. — [2] O. E. Meyer, Wied. Ann. **4**. 261. 1878. — [3] J. Cl. Maxwell, Encyclop. Brit. 9. Ausg. **6**. 313—15. 1877. Art. Constitution of bodies.

unter Einfluß einer elastischen Verschiebung, aufbrechen, während andere so fest sind, daß sie dann bestehen bleiben. Sind gar keine der letzteren Art in einem Körper, so ist das Medium eine zähe Flüssigkeit. Sind die festen so zahlreich, daß sie ein festes Fachwerk bilden, so ist der Körper fest, kann aber durch eine Kraft, welche eine gewisse Grenze überschreitet, dauernd deformiert werden. Enthält er beide Arten von Gruppen, so wird unter dem Einfluß einer Verschiebung der Widerstand gegen diese so lange abnehmen, bis alle Gruppen der ersten Art aufgebrochen sind, und dies dauert so lange, bis die elastische Kraft reduziert ist auf die der permanenten Gruppen. — Diese Anschauung erinnert, wie BARUS[1] hervorhebt, an die CLAUSIUSsche Auffassung der Elektrolyte. — BUTCHER[2] hat die MAXWELLsche Hypothese mathematisch eingekleidet. — GUILLAUME[3] hat eine ebenfalls auf Inhomogenität hinauslaufende Theorie aufgestellt, nur daß hier an die Stelle der Zähigkeit der zerrissenen Molekelkomplexe ihre chemische Umwandlung tritt.

21. Von MAXWELL[4] ist auch der wichtige Begriff der Relaxationszeit eingeführt worden. Relaxation im allgemeinen bedeutet die allmähliche Abnahme der infolge von Deformationsbewegungen in einem Körper wachgerufenen Druckkräfte; die Zeit, in der der Druck auf den $e\cdot(2,72\ldots)$ Teil seines ursprünglichen Wertes sinkt, heißt Relaxationszahl; in Formel

$$p = p_0 - p_1 e^{-t/\varrho} \quad ,$$

also die Relaxationszeit

$$\varrho = \frac{t}{\log \dfrac{p_1}{p_0 - p_1}} \quad ;$$

man kann die Relaxationszeit mit dem Elastizitätsmodul für die betreffende Art der Beanspruchung umgekehrt proportional setzen: $\varrho = \eta/E$, und alsdann η als innere Reibungskonstante betrachten. Ferner kann man das Reziproke von ϱ, die Relaxationsgeschwindigkeit

$$\sigma = \frac{1}{\varrho} = \frac{\log \dfrac{p_1}{p_0 - p_1}}{t}$$

einführen. Die Zeit ϱ ist natürlich für die meisten Stoffe und Vorgänge äußerst klein, sie kann aber da, wo sie am größten ist, den Betrag von ganzen Sekunden erreichen.

22. Theorie von WIECHERT.[5] Die beachtenswerteste unter den neueren Theorien der Elastizitätserscheinungen mit Rücksicht auf die Nachwirkung ist jedenfalls die von WIECHERT entwickelte; sie enthält die Theorien von WEBER und MAXWELL in sich, stimmt mit den von J. J. THOMSON[6] gegebenen Formeln überein, nimmt die empirischen Formeln von KOHLRAUSCH, sowie die BOLTZMANNschen Gesetze in sich auf und ist imstande, die wichtigsten Beobachtungsreihen in befriedigender Weise darzustellen. Bei der Weitläufigkeit der Rechnung und der Komplikation der Formel muß es genügen, hier nur den Gedankengang zu skizzieren.

Es sei s die augenblickliche Spannung eines Fadens, dessen Länge l nach

---

[1] C. BARUS, Phys. Verifikation von MAXWELLs Theorie der Viskosität fester Körper, Phil. Mag. (5) **26.** 183. 1888; SILL. Journ. **36.** 178. 1888. — [2] E. BUTCHER, Proc. Lond. math. Soc. **8.** 1878. — [3] C. E. GUILLAUME, Rapp. près au Congr. int. Paris 1900. **1.** 432. — [4] J. CL. MAXWELL, Phil. Trans. **157.** 52. 1867; Scient. Pap. **2.** 30. — [5] E. WIECHERT, Inaug.-Diss. Königsberg 1889; WIED. Ann. **50.** 335. 546. 1893. — [6] J. J. THOMSON, Appl. of dyn. to phys. etc. Lond. 1888. Cap. „On residual effects“.

beliebigen Änderungen von einem bestimmten Moment an festgehalten wird; und es sei

$$s = \mathfrak{s} + [s]$$

gesetzt, wo $\mathfrak{s}$ der Nachwirkungsanteil und $[s]$ der endgültige Wert von s ist. — WIECHERT nennt diese beiden Teile den epibolischen und den katastatischen. Wollte man nun $d\mathfrak{s}/dt$ proportional setzen mit dem augenblicklichen Werte von $\mathfrak{s}$ so würde man, wenn σ wieder die Relaxationsgeschwindigkeit ist,

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 e^{-\sigma t}$$

erhalten, was den Beobachtungen nicht entspricht; die Verhältnisse liegen schon im Einzelfalle viel verwickelter, und noch mannigfacher sind sie von Fall zu Fall. Um dem gerecht zu werden, wird angenommen, daß in dem Faden mehrere Zustandsänderungen mit verschiedenen Relaxationszeiten gleichzeitig nebeneinander ablaufen, und es wird demgemäß $\mathfrak{s}$ gleich einer Summe verschiedener $\mathfrak{s}_n$ gesetzt. Finden auch noch Längenänderungen des Fadens statt, so ändern sich die $\mathfrak{s}_n$ auch noch diesen proportional, und man erhält, wenn $T > T_1$ zwei Zeiten und die ε Konstanten sind:

$$\mathfrak{s} = \sum \mathfrak{s}_n$$

$$\mathfrak{s}_n(T) = -\varepsilon_n \int_{-\infty}^{T} e^{-\sigma_n (T-t)} dl + \mathfrak{s}_n(T_1) e^{-\sigma_n (T-T_1)} \quad ,$$

wozu noch, wenn e, e_0, l_0 Konstanten sind, die gewöhnliche Elastizitätsgleichung

$$[s] = e_0 - e(l - l_0)$$

hinzukommt.

Nun wird die Verallgemeinerung von einem Faden auf einen beliebigen Körper mit homogener Deformation vorgenommen. Es werden die sechs Deformationsgrößen $x_1 \ldots$ und die sechs Druckgrößen $f_1 \ldots$ eingeführt und man erhält, wenn μ und ν Summationsindizes von 1—6 sind und wenn zur Abkürzung

$$\psi_{\nu,\mu}(y) = \sum^n \varepsilon_{n,\nu,\mu} e^{-\sigma_n y}$$

gesetzt wird, die folgenden Fundamentalgleichungen der Theorie:

$$f_\nu(T) - [f_\nu(T)] = \mathfrak{f}_\nu(T) = -\sum_1^6{}^{\mu} \int_{t=-\infty}^{t=T} \psi_{\nu,\mu}(T-t)\, dx_\mu$$

$$[f_\nu] = -e_{\nu,0} - \sum_1^6{}^{\mu} e_{\nu,\mu} x_\mu \quad .$$

Speziell für isotrope Körper erhält man, wenn zur Abkürzung

$$x_v = x_1 + x_2 + x_3 \quad , \qquad e_v = e_{1,1} - \tfrac{4}{3} e_{4,4} \quad ,$$

$$\psi_v(y) = \psi_{1,1}(y) - \tfrac{4}{3} \psi_{4,4}(y)$$

gesetzt wird, die Formeln: für $\nu = 1, 2, 3$:

$$f_\nu(T) - [f_\nu(T)] = \mathfrak{f}_\nu(T) = -\int_{t=-\infty}^{t=T} \psi_{4,4}(T-t)\, d(2x_\nu - \tfrac{2}{3}x_v) - \int_{t=-\infty}^{t=T} \psi_v(T-t)\, dx_v$$

$$[\mathfrak{f}_\nu] = -e_{\nu,0} - e_{4,4}(2x_\nu - \tfrac{2}{3}x_v) - e_v x_v \quad ,$$

dagegen für $\nu = 4, 5, 6$:

$$f_\nu(T) - [f_\nu(T)] = \mathfrak{f}_\nu(T) = -\int_{t=-\infty}^{t=T} \psi_{4,4}(T-t)\, dx_4$$

$$[f_\nu] = -e_{\nu,0} - e_{4,4} x_4 \quad .$$

Es läuft also, soweit es sich um die Darstellung der Versuchsreihen handelt, alles auf die Kenntnis der Konstanten ε und der Zeitintervallfunktion ψ hinaus; diese letztere beansprucht daher das Hauptinteresse. WIECHERT hat nun diese Funktion analytisch bis ins einzelne untersucht und zur Erleichterung der Anschauung graphisch dargestellt; in Figur 269 sind beispielshalber die Funktionen

$$\psi = e^{-y}$$
$$\psi = \tfrac{1}{2} e^{-10y} + \tfrac{1}{2} e^{-y/10}$$
$$\psi = \tfrac{1}{16} e^{-10y} + \tfrac{1}{4} e^{-\sqrt{10}y} + \tfrac{3}{8} e^{-y} + \tfrac{1}{4} e^{-y/\sqrt{10}} + \tfrac{1}{16} e^{-y/10}$$
$$\psi = \tfrac{1}{16} e^{-10000y} + \tfrac{1}{4} e^{-100y} + \tfrac{3}{8} e^{-y} + \tfrac{1}{4} e^{-y/100} + \tfrac{1}{16} e^{-y/10000}$$

dargestellt, wobei aus leicht ersichtlichem Grunde die Abszissen nicht arithmetisch, sondern geometrisch wachsend gewählt wurden; die verstärkten Ordinaten stellen die Einzelglieder dar. Man sieht, daß die erste und dritte Kurve einfach geschwungen, die zweite und letzte aber wellig ist; überhaupt besteht, von dem exponentiellen Abfall abgesehen, eine gewisse Analogie mit den FOURIERschen Reihen.

Figur 269.

Die einzelnen Teile der Funktion ψ werden dann noch genauer untersucht, und es werden aus der experimentellen Literatur (WIECHERT selbst, KOHLRAUSCH, BOLTZMANN, HOPKINSON, WEIDMANN u. s. w.) Beispiele für die einzelnen Strecken gegeben, wodurch sich der verschiedene Charakter der betreffenden Beobachtungen, dem man bisher ohne Verständnis gegenüberstand, sehr einfach erklärt. Auch für die Mitwirkung der inneren Reibung, also für die Theorie O. E. MEYERS, ergeben sich besondere Anhaltspunkte. Schließlich wird die Funktion ψ für zwei wirklich ausgeführte Beobachtungsreihen von KOHLRAUSCH und KLEMENČIČ an tordierten Glasfäden verfolgt und, so weit nicht leicht erkennbare Fehlerquellen mitgewirkt haben, die Übereinstimmung mit der Theorie erwiesen. Weniger gut ist die Darstellung einer dritten Versuchsreihe von KOHLRAUSCH an einem tordierten Silberfaden, und zwar wegen der zu starken Deformationen, für die die Theorie versagt.

23. Ganz kurz sei die Theorie von PEARSON[1] erwähnt. Dieser Autor verallgemeinert die Differentialgleichungen des elastischen Gleichgewichts durch Hinzufügung von Gliedern, die aus der gegenseitigen Wirkung von Körper- und Ätherteilchen resultieren. Das Integral erhält dadurch den Faktor e^{mt}, wo m eine negative Wurzel einer der Gleichungen

$$m^2 = \frac{\mu}{\mu'} \qquad \text{oder} \qquad m^2 = \frac{3\lambda + 2\mu}{3\lambda' + 2\mu'}$$

ist (λ und μ die LAMÉschen, λ' und μ' zwei neue Konstanten).

[1] KARL PEARSON, Proc. Lond. math. Soc. **20.** 297. 1889; vgl. auch die Bemerkungen hierzu von H. LAMB, Nat. **41.** 463. 1890.

24. Auch die thermodynamische Theorie von DUHEM[1] in ihrer Anwendung auf Systeme mit Hysteresis kann schon wegen des überwiegenden Anteils thermodynamischer Prinzipien an den Entwickelungen hier nur eben erwähnt werden; die Formeln und Gesetze, die sie liefert, werden durch verschiedene Beobachtungsreihen bestätigt.

25. Endlich hat H. REISSNER[2] (vgl. oben p. 542) den interessanten Versuch gemacht, die Statik und Dynamik monozyklischer Systeme im Sinne von HELMHOLTZ und HERTZ auf die Probleme der Elastizitätstheorie uud insbesondere auf die elastische Nachwirkung anzuwenden. Für die Anwendung auf die gewöhnlichen Elastizitätserscheinungen kann man annehmen, daß die Energie des Körpers unabhängig sei, erstens von den Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter p (das sind die sechs Deformationskomponenten als „sichtbare Koordinaten") und zweitens von der verborgenen, zyklischen Koordinate $\mathfrak{p}$. Bei der Anwendung auf elastische Nachwirkung muß man diese Annahme fallen lassen, und es wird alsdann die innere Energie des Volumenelements

$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\dot{\mathfrak{p}}^2 + \dot{\mathfrak{p}}\sum_1^6{}^h \mathfrak{m}\,\mathfrak{c}_h\,\dot{p}_h + \tfrac{1}{2}\sum_1^6{}^h \sum_1^6{}^k \mathfrak{m}\,\mathfrak{d}_{hk}\,\dot{p}_h\,\dot{p}_k \quad ,$$

wo $\mathfrak{m}$ die Summe der Massen ist, $\mathfrak{a}$, h, $\mathfrak{d}_{hk}$ aus der Erfahrung zu bestimmende Funktionen der Parameter und der zyklischen Koordinate sind und die Punkte zeitliche Differentialquotienten bedeuten. Hieraus ergeben sich, wenn P_i eine der Parameterdruckkräfte und $\mathfrak{P}$ die der zyklischen Koordinate entsprechende Druckkraft ist, die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen in der Form

$$P_i = \mathfrak{m}\,\dot{\mathfrak{p}}^2\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathfrak{c}_i}{\partial \mathfrak{p}}\right) - \mathfrak{m}\,\dot{\mathfrak{p}}\sum{}^k \frac{\partial \mathfrak{d}_{ik}}{\partial \mathfrak{p}}\,\dot{p}_h$$

$$+\,\mathfrak{m}\sum{}^h\sum{}^k \dot{p}_h\,\dot{p}_k\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathfrak{d}_{hk}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathfrak{d}_{ik}}{\partial p_h}\right) - \mathfrak{m}\,\ddot{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{c}_i - \mathfrak{m}\sum{}^k \mathfrak{d}_{ik}\,\ddot{p}_k \quad ,$$

$$\mathfrak{P} = -\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\dot{\mathfrak{p}} + \mathfrak{m}\sum{}^h \mathfrak{c}_h\,\dot{p}_h\right) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}\,\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \mathfrak{p}}\,\dot{\mathfrak{p}}^2$$

$$+\,\mathfrak{m}\,\dot{\mathfrak{p}}\sum{}^h \frac{\partial \mathfrak{c}_h}{\partial \mathfrak{p}}\,\dot{p}_h + \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}\sum{}^h\sum{}^k \frac{\partial \mathfrak{d}_{hk}}{\partial \mathfrak{p}}\,\dot{p}_h\,\dot{p}_k \quad ,$$

wo die Glieder mit $\partial\mathfrak{a}/\partial\mathfrak{p}$ und $\partial\mathfrak{c}_i/\partial\mathfrak{p}$ wegfallen, wenn, wie es die Erfahrung lehrt, im natürlichen Anfangszustand ohne vorhergegangene Deformation die Eigenschaften des Systems unveränderlich sind. Für adiabatische Zustandsänderungen ist $\mathfrak{P}$ gleich 0 zu setzen, man erhält durch Integration der letzten Gleichung, wenn $\mathfrak{q}_0$ das anfängliche zyklische Moment $\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}_0\,\dot{\mathfrak{p}}_0$ ist:

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\dot{\mathfrak{p}} + \mathfrak{m}\sum{}^h \mathfrak{c}_h\,\dot{p}_h = \mathfrak{q}_0 + \int_{t=0}^{t} \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}\sum{}^h\sum{}^k \frac{\partial \mathfrak{d}_{hk}}{\partial \mathfrak{p}}\,\dot{p}_h\,\dot{p}_k \quad ,$$

und kann den hieraus resultierenden Wert von $\dot{\mathfrak{p}}$ in die erste Gleichung einsetzen. Übersichtlicher werden die Gleichungen, wenn man nicht, wie oben angenommen, die früheren, sondern die augenblicklichen Werte der Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter $\dot{p}$ verschwinden läßt, d. h. einen ruhenden Gleichgewichtszustand betrachtet. Es sei b eine Funktion, die aus dem Vergleich der beiden Formeln für die Energie $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{q}^2}{2\,\mathfrak{m}} - b = \tfrac{1}{2}\sum_1^6{}^h \sum_1^6{}^k c_{hk}\,p_h\,p_k\,d\tau$$

[1] P. DUHEM, Mém. Acad. belg. **54.** 1896; **62.** 1902 (daselbst auch die ältere Literatur); ferner C. R. **138.** 942. 1905. — [2] H. REISSNER, Ann. d. Phys. **9.** 44, insbesondere 74. 1902.

nach der Mechanik monozyklischer Systeme einerseits und nach der Elastizitätstheorie andererseits sich ergibt, wo die c die adiabatischen Elastizitätskonstanten sind und $d\tau$ ein Volumenelement ist. Alsdann ergibt sich die Lösung in der Form

$$\dot{\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{q}_0}{\mathfrak{m}} b + b \int_0^t \frac{1}{2} \sum\sum \frac{\partial \mathfrak{b}_{hk}}{\partial \mathfrak{p}} \dot{p}_h \dot{p}_k \, dt$$

$$P_i = \frac{1}{2\,\mathfrak{m}} \frac{\partial b}{\partial p_i} \left[\mathfrak{q}_0 + \int_0^t \frac{\mathfrak{m}}{2} \sum\sum \frac{\partial \mathfrak{b}_{hk}}{\partial \mathfrak{p}} \dot{p}_h \dot{p}_k \, dt \right]^2 .$$

Dieser Wert für die Spannung stimmt mit dem für vollkommene Elastizität überein, wenn alle früheren Deformationen unendlich langsam vor sich gegangen wären. Das zu $\mathfrak{q}_0$ hinzutretende Integral stellt die elastische Nachwirkung dar, man kann also sagen, daß diese ein neues zyklisches Moment $\mathfrak{q}_n$ erzeugt, das sich zu dem alten addiert. Schließlich ändern sich auch die Elastizitätskonstanten in entsprechendem quadratischem Verhältnis.

III. Weitere Tatsachen.

26. Akkommodation. G. WIEDEMANN[1] hat zuerst gezeigt, daß ein elastischer Körper, den man öfter durch gleiche Kräfte deformiert, im Anfang wechselnde Erscheinungen zeigt, aber schließlich in einen konstanten oder, wie man sagen kann, „Normalzustand" gelangt, d. h. daß dann der gleichen Kraft auch stets die gleiche Gestalt sich zuordnet. In diesem Zustand sind dann auch die Torsionen unabhängig von der Belastung.[2] WIEDEMANN hat diese Erscheinungen aus Drehungen der Molekeln erklärt, und insbesondere dies aus den Änderungen des magnetischen Verhaltens von derart deformierten Stäben geschlossen. Im Anfang setzen die Molekeln den Drehungen einen größeren Widerstand entgegen; derselbe nimmt aber bei wiederholten gleichsinnigen Deformationen bis zu einem konstanten Werte ab.

Ähnliche Erscheinungen hat später STREINTZ[3] beobachtet und mit dem Namen der „Akkommodation" bezeichnet (auch der entsprechende deutsche Ausdruck „Anpassung" wird vielfach benutzt). Er fand z. B., daß das logarithmische Dekrement eines Torsionsschwingungen ausführenden Drahtes bei längerem Schwingen abnahm. Nach längerem Ruhen, namentlich wenn er inzwischen einmal in krummer Lage gewesen war, wuchs es wieder. Er wies auf bekannte Erfahrungen des täglichen Lebens hin (Stahlfedern werden während des Gebrauchs weicher) und erklärte aus ihr die Angaben, wonach Blasinstrumente und Violinen durch öfteren richtigen Gebrauch an Tonfülle gewinnen sollen.

Gegenüber den Beobachtungen von STREINTZ und deren Erklärung weist P. M. SCHMIDT[4] nach, daß nicht die vorausgegangenen Schwingungen die Ursache der Akkommodation sind, als vielmehr die längere Zeit wirkende Spannung. Das logarithmische Dekrement nimmt auch dann ab, wenn die Belastung längere Zeit am Drahte hängt, ohne daß er Schwingungen ausführt; z. B. fand SCHMIDT für einen Magnesiumdraht nach dem Aufhängen das Dekrement $\varepsilon = 0{,}01031$; nachdem er 10 Tage gehangen hatte, ohne daß er Schwingungen ausführte, war

[1] G. WIEDEMANN, POGG. Ann. **103.** 563. 1858; **106.** 161. 1859; **107.** 139. 1860; **117.** 193. 1862; Berl. Monatsber. 1860. — [2] G. WIEDEMANN, WIED. Ann. **6.** 502. 1879. — [3] F. STREINTZ, POGG. Ann. **153.** 387. 1874; Wien. Ber. **79.** 1874. — [4] P. M. SCHMIDT, WIED. Ann. **2.** 48. 241. 1877.

$\varepsilon = 0{,}00664$. Spannt man den Draht einige Zeit ab, so ist das Dekrement nach der Ruhepause wieder gestiegen, um nach längerer Belastung wieder zu fallen.

Spätere Versuche haben STREINTZ[1] überzeugt, daß in der Tat schon bloße Belastung ausreicht, um das logarithmische Dekrement abnehmen zu lassen, daß aber auch die früher von ihm allein angenommene Akkommodation an die Schwingungsbewegung vorhanden ist. — Er fand ferner, daß die bereits eingetretene Akkommodation durch jede Störung der molekularen Anordnung wieder aufgehoben wird (Verbiegung, Erschütterung, Erwärmung).

STREINTZ fand ferner, daß wiederholte Torsionen um große Winkel die zurückbleibenden Deformationen vergrößern, wiederholte Torsionen um kleine Winkel sie dagegen verkleinern. W. BRAUN und A. KURZ[2] bestätigten dies Resultat. Sie folgern daraus, daß Dekremente, welche man bei einer mit großer Amplitude beginnenden Beobachtungsreihe erhält, einen gestörten Verlauf zeigen und daher die Frage, wie das Dekrement von der Amplitude abhängt (vgl. § 33) schwer definitiv zu erledigen ist.

Auch bei wiederholten Temperaturänderungen zeigt die Nachwirkung, wie TH. SCHRÖDER[3] fand, eine Akkommodation, d. h. die Nachwirkung ist bei einem Drahte (*Ag*), nachdem er einigemal auf 100^0 erwärmt war, viel kleiner.

Auch die Schwingungsdauer nimmt mit wachsender Zeit für die Dauer der Belastung ab, ob nun der Draht in der Zwischenzeit Schwingungen ausführte, oder nur belastet blieb.[4] Dies wurde aber nur beobachtet, wenn die Belastung vergrößert worden war. An einem Kupferdraht dagegen hatte WARBURG[5] früher gefunden, daß die Schwingungsdauer mit wachsender Zeit abnahm, gleichgültig, ob die Schwingungsänderung in einer Zu- oder Abnahme der Spannung bestanden hatte.

Über den Einfluß der Zeit, welche der Draht schon schwingt, auf den Torsionsmodul vgl. PISATI, l. c. § 27. Die Schwingungsdauer nimmt nach längerem Schwingen ab, beim Silber z. B. im Verhältnis von 1,0038 : 1,0000 (l. c., p. 19).

BARUS (a. a. O.) hat die Nachwirkung und die Akkommodation am Stahl studiert und gezeigt, wie gut sie zur MAXWELLschen Theorie stimmen; glasharter Stahl hat die größte Zahl unbeständiger Molekulargruppen (besonders von C- und Fe-Atomen) und deshalb die stärkste elastische Nachwirkung.

NEGBAUER[6] hat die Akkommodation bei der Torsion weiter verfolgt und u. a. folgende Sätze gefunden bezw. bestätigt: 1. Bei Wiederholung der Haupttorsion wird die Nachwirkungstorsion immer kleiner. 2. Jede Lagenänderung und jede Verringerung der Belastung hebt die schon eingetretene Akkommodation ganz oder teilweise wieder auf. 3. Durch lange Fortsetzung der Haupttorsion kann man die Nachwirkung zum Verschwinden bringen. 4. Der Eintritt der Akkommodation ist vom Drahtdurchmesser unabhängig. — Freilich beziehen sich alle diese Sätze zunächst auf Versuchsreihen mit dauernder Deformation.

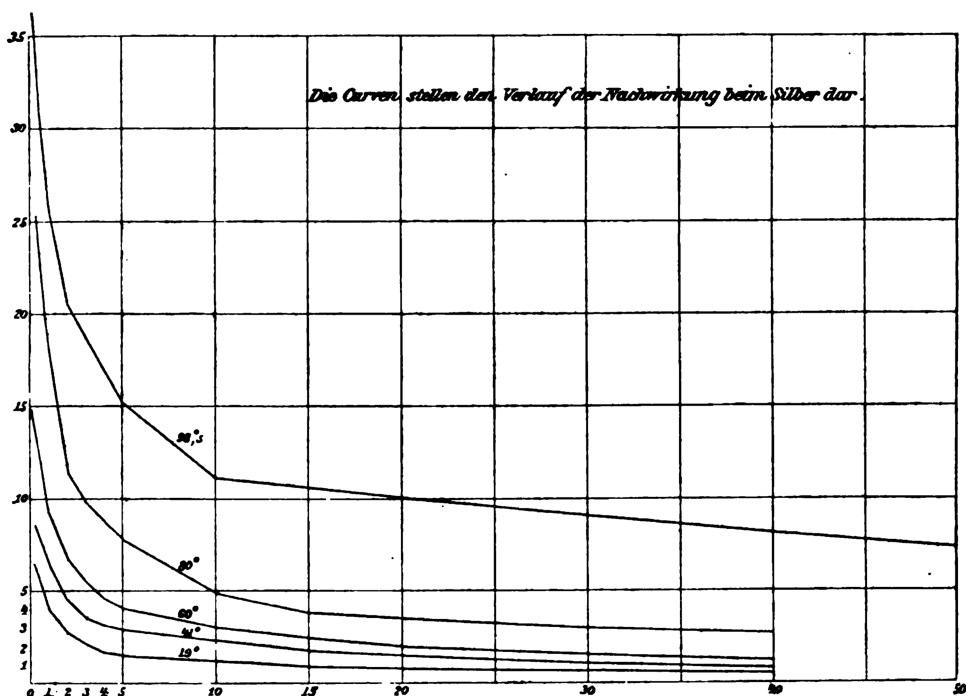
Endlich sei auf die Beobachtungen von WANDERSLEB[7] über die Akkommodation bei Jenenser Gläsern hingewiesen. Es werden die Differenzen der Konstanten für den normalen und akkommodierten Zustand, die Erfüllung des bezw. Abweichung vom HOOKEschen Gesetz, besonders aber die Labilität des Akkommodationszustands festgestellt: er konnte in einigen Minuten bis Stunden in den Normalzustand dadurch übergeführt werden, daß Schwingungen von Stimmgabeln mittlerer Tonhöhe in bestimmter Anordnung auf den betreffenden Glasstab wirkten.

---

[1] F. STREINTZ, Wien. Ber. **80**. 397; CARLS Rep. **16**. 476. 1880. — [2] W. BRAUN und A. KURZ, CARLS Rep. **17**. 253. 1881. — [3] TH. SCHRÖDER, WIED. Ann. **28**. 369. 1886. — [4] M. BAUMEISTER, WIED. Ann. **18**. 578. 1883. — [5] E. WARBURG, ibid. **10**. 20. 1880. — [6] W. NEGBAUER, WIED. Ann. **44**. 759. 1891. — [7] E. WANDERSLEB, Ann. d. Phys. **8**. 367. 1902.

27. Torsionszyklen. Eine besondere Ausgestaltung hat die Verfolgung der elastischen Nachwirkung und der Akkommodation durch die Durchführung vollständiger und oft wiederholter Zyklen ein- oder noch besser doppelseitiger Torsion erfahren; man erhält auf diese Weise „Hysteresisschleifen" von ganz ähnlicher Bedeutung wie bei den entsprechenden magnetischen Untersuchungen. Derartiges Material hat namentlich CANTONE in reichem Maße beigebracht, nachdem ihm schon PISATI vorangegangen war.[1] Bei gewöhnlicher Temperatur nimmt die Hysteresisfläche sukzessiver Zyklen ab; von einem Tage zum andern tritt häufig eine sprunghafte Änderung auf, und zwar je nach dem Metall im einen oder anderen Sinne. Die Hysteresiskurve für höhere Temperatur schließt die für niedere in der Regel vollständig ein, d. h. die Fläche wächst mit der Temperatur. Bei einigen Metallen bezw. individuellen Drähten freilich bleibt sie nahezu unverändert; beim Eisen sinkt sie bis zu 150° und wächst von da ab.

28. Einfluß der Temperatur auf die Torsionsnachwirkung. Bei höherer Temperatur ändert sich die Nachwirkung in der früher ausschließlich nach

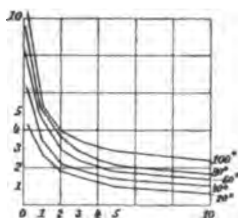


Figur 270.

den Versuchen von F. KOHLRAUSCH erörterten Weise. Weitere Beobachtungen über den Einfluß, welche eine rasche Temperaturänderung hat, sind von TH. SCHRÖDER gemacht.[2] a) Wird ein Draht, bei 100° tordiert, losgelassen, die Nachwirkung beobachtet und schnell abgekühlt, so wird die Drehung plötzlich nach der Ruhelage hin beschleunigt, aber nur auf kurze Zeit. Die Bewegung hörte dann auf, bis die Temperatur von neuem erhöht wurde. War diese Erwärmung eingetreten, so drehte sich der Spiegel wieder etwas von der Ruhelage fort, dann aber wieder derselben zu. b) Wird umgekehrt bei niederer Temperatur die Nachwirkung eingeleitet und dann die Temperatur erhöht, so läuft die Nachwirkung rasch ab.

[1] G. PISATI, Gazz. chim. ital. **6**. 1876 u. **7**. 1877. — M. CANTONE, Nuov. Cim. (4) **4**. 270. 354. 1896. — [2] TH. SCHRÖDER, WIED. Ann. **28**. 369. 1886.

Von den neueren Arbeiten über den Temperatureinfluß sind die von REHKUH[1] und E. SCHOLZ[2] hervorzuheben. Die Versuchsergebnisse von REHKUH sind im Auszuge in den folgenden Tabellen zahlenmäßig und in den Figuren 270 und 271 graphisch dargestellt. Die ursprüngliche Torsion betrug stets 60° und wurde 2 Minuten lang aufrecht erhalten; t ist die Zeit in Minuten, Θ die Temperatur, die Zahlen x sind die Nachwirkungen im Sinne der ABBEschen Definition (s. o.), in den Figuren sind die Ordinaten von willkürlichem (aber in beiden gleichem) Maßstabe; die Fäden wurden vorher durch elastische und thermische Präparation in den für die Messungen erforderlichen Normalzustand versetzt.



Glas.

Figur 271.

1. Silberdraht, gezogen (Länge 50,3; Dicke 0,03).

t	x				
	Θ = 19	40	60	80	100
1/4	0,0181	0,0244	0,0417	0,0719	0,1180
1/2	143	213	331	556	933
1	105	180	256	442	744
2	76	120	185	319	599
3	60	101	153	253	512
5	47	83	111	194	433
10	33	61	83	133	344
20	22	46	53	96	286
50	14	21	28	64	208
120	—	14	16	38	167
240	—	6	11	14	128

Für die KOHLRAUSCHschen Koeffizienten α und c ergeben sich hiernach die Werte:

Θ	19	40	60	80	100
α	0,490	0,492	0,491	0,509	0,342
c	0,0105	0,0170	0,0252	0,0442	0,0744

α ist also bis 80° konstant, für 100° aber (wohl infolge der Stöße beim Sieden) wesentlich kleiner; dagegen wächst c von vornherein, anfangs langsamer, später rascher; zur leidlichen Darstellung genügt die Formel:

$$\log x = (a + b\,\Theta^{\gamma}) \log \Theta - \alpha \log t \quad ,$$

und zwar mit $a = -2,85$; $b = 0,5$; $\gamma = \frac{1}{3}$. — Ähnlich wie Silber verhalten sich auch Gold, Platin und Kupfer.

2. Glasfaden, thüringer (Dimensionen wie oben).

t	Θ = 20	40	60	80	100
1/4	0,0115	0,0174	0,0225	0,0252	0,0286
1/2	90	137	170	214	220
1	71	93	128	146	170
2	49	70	89	102	124
4	32	46	60	69	90
10	16	27	39	44	64

[1] F. REHKUH, WIED. Ann. 35. 476. 1888. — [2] E. SCHOLZ, Inaug.-Diss. Bonn 1902.

Hier wird:

$$\alpha = 0{,}53 \text{ (im Mittel, nur für } \Theta = 100^0\text{: } \alpha = 0{,}44) \quad ,$$

$$c = 0{,}0068;\ 0{,}0096;\ 0{,}0124;\ 0{,}0152;\ 0{,}0179 \quad ;$$

es genügt demnach $\gamma = 1$, also $c = a + b\Theta$ und darin $a = 0{,}004$; $b = 0{,}0014$ zu setzen. Die Nachwirkung ist also bei Glas kleiner als bei Silber, der Temperaturkoeffizient sehr viel kleiner. Jedenfalls aber nimmt auch bei Glas die Nachwirkung mit der Temperatur zu, womit ein von WEIDMANN[1] erhaltenes, entgegengesetztes Resultat widerlegt ist.

E. SCHOLZ dehnte die Temperatursteigerung durch Anwendung siedender Dämpfe bis 140° aus und wählte zur Vermeidung von Erschütterungen dickere Drähte (bis zu 0,07 cm); die Torsionsdauer betrug je nach dem Material — dasselbe wie bei REHKUH — 1 bis 4 Minuten. Die Konstante c erwies sich auch bei höheren Temperaturen als proportional mit der Torsion, ihre Abhängigkeit von der absoluten Temperatur läßt sich durch eine Potenz darstellen. Dagegen nimmt die Konstante α ungefähr umgekehrt proportional mit der Temperatur ab.

Schließlich sei noch eine Arbeit von OVERBECK[2] erwähnt, in der der Temperatureinfluß zugleich mit dem von Belastungen studiert wird.

29. **Längsnachwirkung.** Über diese liegen relativ wenige Untersuchungen vor; angeführt seien von denen, die sich auf Dehnung beziehen, die von MILLER[3] und AUSTIN.[4]

Von den MILLERschen Versuchen ist teilweise schon im Artikel „Zug und Druck" (p. 570) die Rede gewesen; es wurde dort schon zwischen dem „primären" und „sekundären" Modul unterschieden. Was speziell die Dehnungsnachwirkung bei 0 und 100° betrifft, so fand sich für Eisen, wenn die E die Moduln der elastischen Dehnung, die E' diejenigen der Nachwirkung sind:

$$\frac{E_{100} - E_0}{E_0} = -\,0{,}0428 \quad , \qquad \frac{E'_{100} - E_0'}{E_0'} = -\,0{,}1897 \quad ;$$

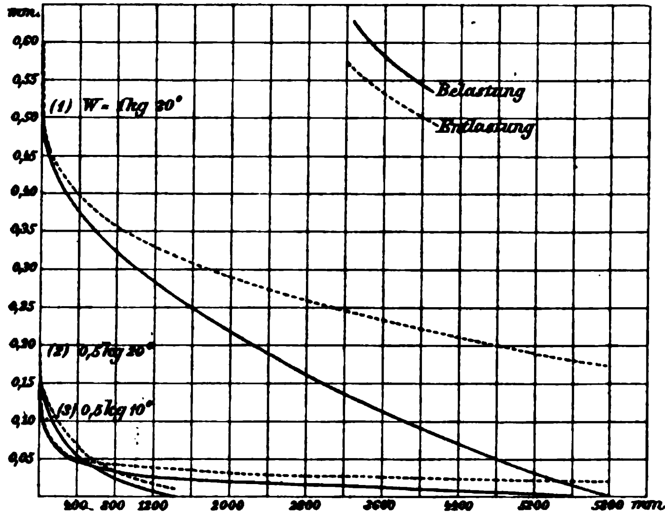
die letztere Größe ändert sich also viel stärker als die erstere. Später hat MILLER die Versuche fortgesetzt und für zahlreiche Metalle festgestellt, in welcher Weise der Dehnungsmodul von der Größe der vorangegangenen Belastung und der Geschwindigkeit ihrer Änderung abhängt. Es muß aber an diesem Hinweis genügen.

AUSTIN führte seine Versuche im Turme des Straßburger Instituts aus und konnte daher Drähte von 23 m Länge benutzen; zum Vergleich wurde außer der Längs- auch die Torsionsnachwirkung bestimmt. Von den Ergebnissen seien folgende hervorgehoben: Die Längsnachwirkung befolgt annähernd dieselben Gesetze wie die Torsionsnachwirkung. Sie ist nahezu der Hauptdehnung proportional; die Kurven ihrer Abnahme sind nahezu ähnlich, solange die Dauer der Hauptdehnung klein bleibt; für längere Dauer sinkt die Kurve langsamer. Die Nachwirkung wächst mit der Temperatur, auf die Schnelligkeit des Verschwindens der Nachwirkung hat diese jedoch wenig Einfluß. In der folgenden Tabelle stellt N bezw. N' die Torsions- bezw. Längsnachwirkung dar bei 20°, nach einer Dehnung 1, die 1 Minute bestanden hatte und vor 1 Minute aufgehoben war; α bezw. α' ist der KOHLRAUSCHsche Exponent, γ der Temperaturkoeffizient für Torsion:

Metall	N	N'	N/N'	α	α'	γ
Messing . .	0,0011	0,00059	1,9	0,59	0,48	0,029
Kupfer . . .	0,0045	0,0013	3,6	0,51	0,34	0,034
Silber . . .	0,0018	0,00098	1,8	0,49	0,27	0,036

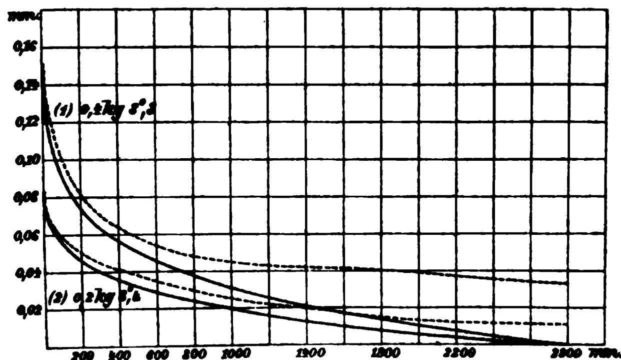
[1] G. WEIDMANN, WIED. Ann. **29.** 214. 1886. — [2] R. OVERBECK, Progr. Realgymn. Döbeln 1892. — [3] A. MILLER, Münch. Ber. 1882. p. 377; 1885. p. 9; 1886. p. 707. — [4] L. AUSTIN, WIED. Ann. **50.** 659. 1893.

Die Längswirkung ist also schwächer als die für Torsion, und ebenso ist der Exponent hier kleiner; die Nachwirkungen bei Kupfer, Silber, Messing verhalten sich etwa wie 7 : 8 : 2 bei Torsion und wie 4 : 8 : 2 bei Dehnung; der Temperaturkoeffizient ist für Torsion etwa $^1/_{30}$, bei Dehnung scheint er etwa ebensogroß zu sein. — Nach lange andauernder Deformation erhält man keine



Figur 272.

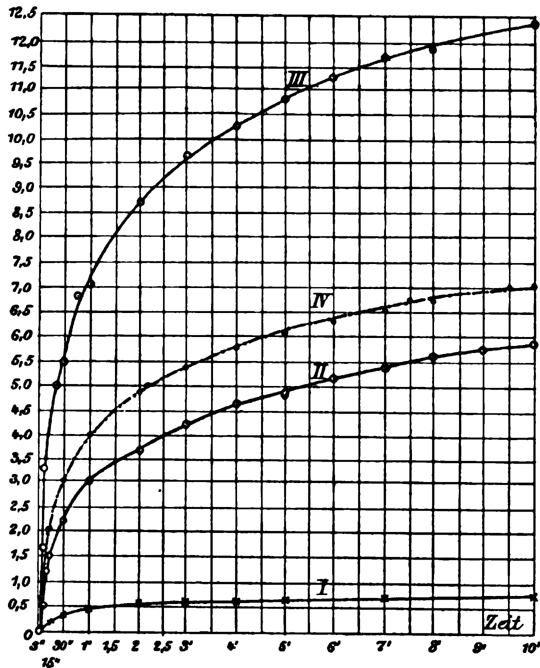
allgemein befriedigenden Resultate, vermutlich wegen der dauernden Veränderung des Drahtes; für nicht zu große, mehrere Tage dauernde Spannungen braucht die Nachwirkung jedenfalls zu ihrem Verschwinden ebensoviel Zeit wie zu ihrer Erzeugung, und die beiden Kurven verlaufen ähnlich. — In den Kurven der Figuren 272 und 273 sind einige Resultate graphisch dargestellt, und zwar für Belastung und Entlastung getrennt; eine nähere Erläuterung ist überflüssig.



Figur 273.

Einige Messungen über Biegungsnachwirkung hat Joffé (s. w. u.) gelegentlich anderer Untersuchungen ausgeführt, und zwar an Jenenser Gläsern; die Resultate sind in Figur 274 dargestellt. Man sieht, wie stark sich auch in dieser Hinsicht die verschiedenen Jenenser Gläser unterscheiden; durch besonders geringe Nachwirkung zeichnet sich Nr. 0102 aus, wie auch wegen seiner einfachen Zusammensetzung von vornherein vermutet worden war.

30. Dehnungs- und Biegungszyklen. Die Hysteresisschleifen für Dehnung und Biegung scheinen ähnliche Gestalt zu haben wie für Torsion. Für Biegung hat wiederum CANTONE[1] reichhaltiges Material geliefert. Horizontale Messingstreifen, an einem Ende befestigt, wurden am anderen durch Belastung gebogen, und zwar entweder durch Kräfte, die zwischen null und wachsenden einseitigen Werten oder durch solche, die zwischen wachsenden entgegengesetzt gleichen Werten schwankten; die Hysteresisschleifen wurden in ihrer Abhängigkeit von den maßgebenden Faktoren studiert. Die Zurückführung eines Streifens in den normalen Zustand konnte durch eine Reihe abnehmender, abwechselnd entgegengesetzter Kräfte bewerkstelligt werden; man bemerkt wieder die Analogie mit der Entmagnetisierung von Eisenstäben. Abweichende Erscheinungen treten nach starken Biegungen auf. Ferner wurde der Einfluß von Stößen untersucht und die Tatsache, daß er je nach der Art des Eingriffs die Biegung vergrößert oder herabdrückt, als Konsequenz des Vorangegangenen festgestellt. Die Stöße haben auch einen Einfluß auf den Modul, und zwar verkleinern sie ihn. Die weiteren interessanten Einzelheiten entziehen sich der auszugsweisen Behandlung.



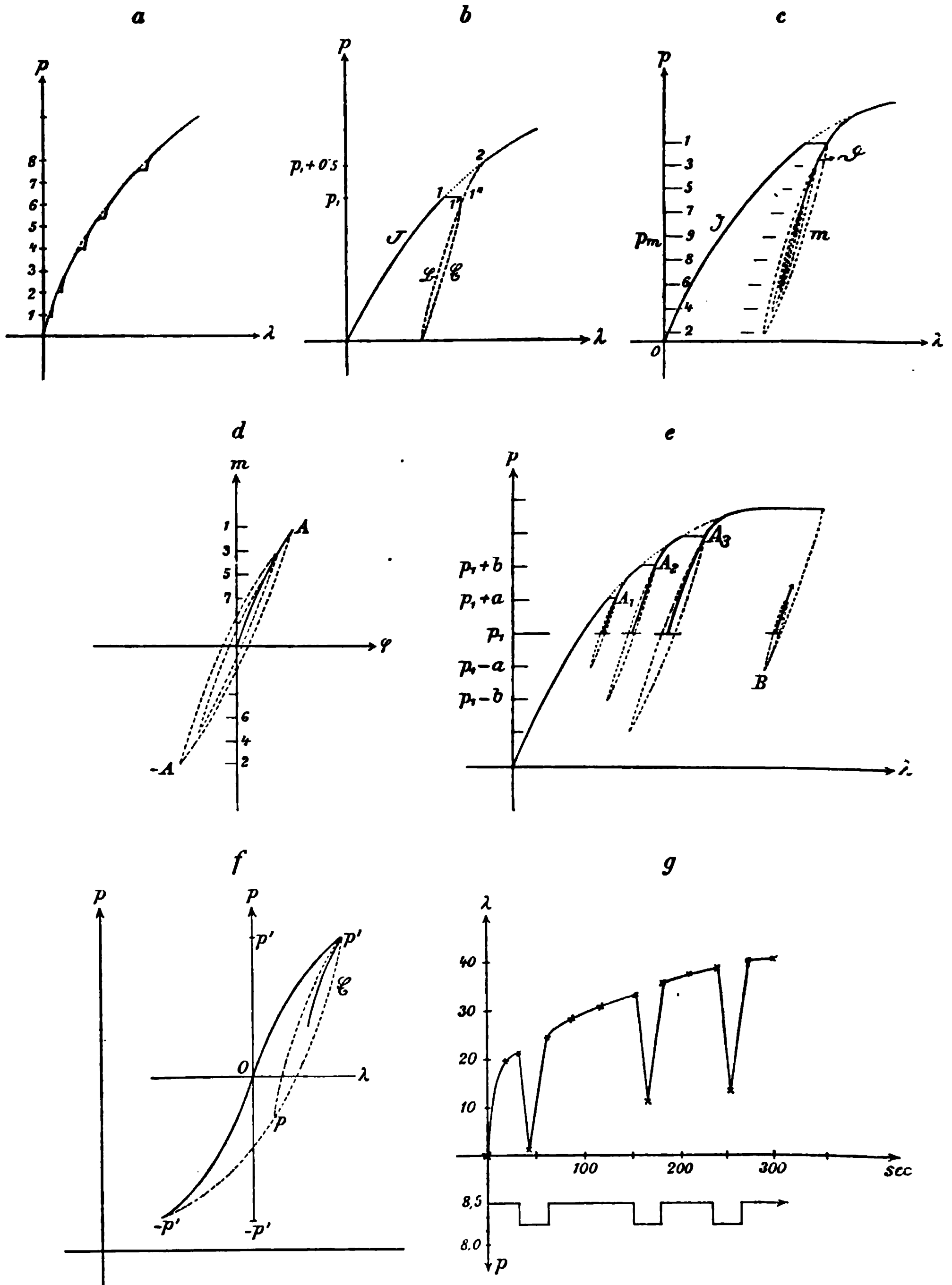
Figur 274.

Ganz ähnliche Resultate hat GAMBA[2] bezüglich der Biegungszyklen an Marmorplatten erhalten, die durch Gewichte in der Mitte nach der einen oder andern Seite durchgebogen wurden. Nur sind hier die einseitigen Schleifen vielfach übereinander gelagert, insofern die Kurve der folgenden Belastung zuweilen höher liegt als die vorhergehende Kurve der Entlastung. Wird die Belastungsänderung innerhalb eines Zyklus jedesmal durch Entlastung unterbrochen, so kehrt auch die Entlastungskurve die konvexe Seite nach unten, und die Schleife wird sehr eng.

31. Die neueste Arbeit über elastische Zyklen (für Druck, Zug und Drillung) ist die von BERLINER[3] über das Verhalten des Gußeisens bei langsamen Belastungswechseln; sie berichtigt eine Reihe bisheriger Vorstellungen und bringt das ganze Phänomen in einen schönen einheitlichen Zusammenhang, ähnlich wie das in bezug auf die entsprechenden magnetischen Erscheinungen schon längst geschehen war. Von den Ergebnissen kann hier nur weniges angeführt werden: 1. Ermittelt man die Belastungs-Dehnungskurve (die p-λ-Kurve) des jungfräulichen Stabes bis zu einem gewissen Punkte, läßt jetzt die elastische Nachwirkung einsetzen und fährt in der Steigerung der Belastung nach einiger Zeit fort, so erhält die Kurve zwar einen Knick, setzt sich aber sehr bald in der alten Spur fort,

[1] M. CANTONE, Rend. Acc. Linc. (5) **2.** 2. 246. 295. 339. 385. 1893; **3.** 1. 26. 1894. — [2] P. GAMBA, Nuov. Cim. (4) **8.** 273. 1898. — [3] S. BERLINER, Gött. Inaug.-Diss. 1906; Ann. d. Phys. **20.** 527. 1906.

und ebenso, so oft man auch unterbricht (Figur 275 *a*). 2. Fängt man ebenso an (jungfräuliche Kurve, Nachwirkung), entlastet aber jetzt und belastet dann von neuem, so erhält man eine Entlastungs-Belastungsschleife, und auch hier schließlich wieder Einmündung in die Fortsetzung der jungfräulichen Kurve (Figur 275 *b*).



Figur 275.

3. Geht man zwischen einander sich mehr und mehr nähernden Umkehrpunkten hin und her, läßt man also den Stab sozusagen eine Spirale durchlaufen, und belastet man vom Mittelpunkte dieser Spirale aus, so erhält man die „Durchschreitungskurve (Figur 275 *c*, Linie $m\vartheta$). 4. Bei Schwingungen um den Nullpunkt stimmt die Durchschreitungskurve im allgemeinen mit der jungfräulichen überein (Figur 275 *d*). 5. Bei Schwingungen mit wachsenden Intervallen erhält man das Bild der Figur 275 *e* (der Punkt *B* hat andere Bedeutung). 6. Die Formel für die jungfräuliche Kurve ist

$$\lambda = \int_0^p a\,dp + cp^3 = (\text{angenähert})\ ap + cp^3 \quad ,$$

die für die Durchschreitungskurve

$$\lambda = \int_{p_1}^{p} a\,dp + c(p - p_1)^3 + \text{const}$$

$$= (\text{angenähert})\, a(p - p_1 + c(p - p_1)^3 + \text{const} \quad ;$$

damit wird die Dehnung zerlegt in ein elastisches und ein unelastisches Glied; ersteres ist mit dem Belastungsintervall, letzteres mit dessen Kubus proportional; dazu kommt dann drittens noch die elastische Nachdehnung, die für entsprechende Punkte der verschiedenen Kurven ziemlich als Konstante gelten kann. 7. Die Fläche der Hysteresisschleife, Figur 275 *f*, Kurve $-p'op'p$, also die zyklische Arbeit, ist in erster Annäherung

$$F = -\,2cp'^4 \quad ,$$

d. h. proportional mit der vierten Potenz des Lastintervalls (also annähernd auch der Dehnung). — 8. In Figur 275 *g* ist für wiederholte Entlastungspausen das Zeitdiagramm der Dehnung (oben) und der Spannung (unten) wiedergegeben. — Im übrigen ist auf die Abhandlung selbst zu verweisen.

32. Torsion und Belastung. Drähte, denen man eine permanente Torsion erteilt hat, verlieren einen Teil davon, wenn man sie belastet; diese Erscheinung, von der schon an früherer Stelle die Rede war, ist auch für die Nachwirkungstheorie von Interesse. Wiederholte Be- und Entlastung wirken in gleichem Sinne mit abnehmender Intensität, bis der Draht in einen konstanten Zustand gelangt ist. Dann tritt eine dauernde Änderung der permanenten Torsion nicht mehr bei Spannungsänderung ein.[1]

Belastet man den Draht in diesem Zustand, so tordiert er sich, wie WARBURG fand, und kehrt nach Fortnahme der Belastung in seine alte Lage zurück. Der Sinn dieser temporären Torsion ist der gleiche, wie der Sinn der permanenten Torsion, welche dem Drahte erteilt war.[2] Diese Erscheinung, welche namentlich gut an Kupferdrähten zu beobachten war (bei Messing bemerkte sie WIEDEMANN nicht), erklärt WARBURG[3] daraus, daß der Draht anisotrop (äolotrop) geworden ist. Bei der Torsion findet in Richtungen, die senkrecht zum Radius des Querschnitts stehen und $\pm 45^0$ gegen die Achse des Drahtes geneigt sind, bezw. Kompression und Dilatation statt. Der Draht verhält sich, wenn seine Substanz diesen Kräften nachgegeben hat, wie ein Kristall des rhombischen Systems. Wenn der Grad der Anisotropie auch nicht gleichmäßig im Drahte verteilt ist, da die Verschiebungen nach außen zu größer sind, so folgt doch hieraus die beobachtete Erscheinung; und zwar wäre der Elastizitätsmodul in

[1] G. WIEDEMANN, WIED. Ann. 6, l. c.; vgl. auch R. OVERBECK (s. o.). — [2] E. WARBURG, WIED. Ann. 10. 28. — [3] Auch W. THOMSON, Art. „Elasticity" Encyclop. Brit. 1878.

derjenigen Richtung, in welcher permanente Drehung stattgefunden hat, kleiner, als für diejenige, nach welcher die Substanz komprimiert ist.[1]

Schröder[2] schließt aus der Änderung der Ruhelage eines tordierten Silberdrahtes bei Temperaturerhöhung, daß auch der thermische Ausdehnungskoeffizient in der Richtung der permanenten Dehnung größer als in derjenigen der permanenten Kompression sei.

33. Dämpfung. Abhängigkeit von der Amplitude. Einfluß der Temperaturänderung. Nach Gauss und Weber soll das logarithmische Dekrement konstant sein, unabhängig von der Amplitude, d. h. die Dämpfung in jedem Moment proportional der Geschwindigkeit. W. Thomson[3] machte auf eine Abhängigkeit des Dekrements von der Amplitude aufmerksam, später fast gleichzeitig Streintz[4] für Torsionsschwingungen und F. Braun[5] für Transversalschwingungen von Stäben. In den letzteren Beobachtungen ist aber noch der Einfluß der Luftreibung enthalten und es läßt sich daher aus ihnen nicht direkt, wie es vielfach geschehen ist, ein Einfluß der Amplitude auf die innere Reibung folgern. Auch Schwingungen von Saiten sind, wie Braun hervorhebt, aus demselben Grunde nicht vergleichbar. Es sei daran erinnert, daß Warburg[6] bei Torsionsschwingungen (für den inneren Widerstand) größeres Dekrement bei größerer Schwingungsdauer beobachtete; die stärkere Dämpfung, welche er z. B. in Blei und Kautschuk für die Fortleitung gerade der höheren Töne fand, sieht er daher in der Bildung kleinerer schwingender Unterabteilungen begründet.

P. M. Schmidt[7] fand für langsame Torsionsschwingungen eine Zunahme des logarithmischen Dekrements mit zunehmender Amplitude; gleichzeitig erhielt er aber auch für die gleichen Amplituden ein größeres Dekrement ε, wenn der Draht mit größeren Anfangsamplituden seine Bewegung begonnen hatte. Es ergab sich z. B. für dieselbe Amplitude von 14360″ ein Wert $\varepsilon = 0{,}01862$, wenn die Anfangsamplitude 17669″, dagegen $\varepsilon = 0{,}02060$, wenn die erste Amplitude $= 45466''$ gemacht war.

In höherer Temperatur wird die Dämpfung größer (Streintz). Dabei fand aber Schmidt auch wieder, daß eine Temperaturänderung ähnlich wie eine Belastungsänderung wirkt; d. h. wenn die Temperatur des Drahtes schon einen konstanten, etwa 20° höheren oder niederen Wert als vorher hat, so ändert sich das Dekrement doch noch längere Zeit.[8]

G. Wiedemann[9] fand für einen Silberdraht bei 100° einen sehr starken Einfluß der Belastung auf die Dämpfung. Wird aber nach einer stärkeren Belastung eine schwächere angewendet, so sinkt das Dekrement sofort auf den dieser letzteren entsprechenden früheren Wert. Läßt man die Drähte aber auch bei stärkerer Belastung sehr lange Zeit fortschwingen, so nähert sich das Dekrement immer mehr dem, welches sie bei der niederen Belastung besitzen. Bei diesen Versuchen änderte sich mit der Belastung auch das Trägheitsmoment.

Bei geglühtem Eisendraht fand dagegen Messer[10], daß bei gleicher Belastung das Verhältnis des logarithmischen Dekrements bei 20 und 100° mit abnehmender Schwingungsdauer wächst.

---

[1] Vgl. weitere Beobachtungen von F. Himstedt, Wied. Ann. **17.** 701. 1882. Er findet die Erscheinung allgemein; man hat aber zwei Gruppen von Körpern zu unterscheiden; bei den einen gibt Belastung Torsion, bei den anderen Detorsion. Zur letzten Gruppe gehören Messing, Aluminium, Nickel. — [2] Th. Schröder, Wied. Ann. **28.** 369. 1886. — [3] W. Thomson, Phil. Mag. **30.** 1865. — [4] H. Streintz, Pogg. Ann. **153,** l. c. — [5] F. Braun, ibid. **151.** 260. 1874. — [6] E. Warburg, ibid. **139.** 89. 1870. — [7] P. M. Schmidt, Wied. Ann. **2.** 241. 1877. — [8] Über die Abhängigkeit des Dekrements von Länge, Querschnitt und Temperatur des Drahtes vgl. die ausführliche Abhandlung. Vgl. ferner zu den Kontroversen zwischen Schmidt und Streintz die Arbeiten von W. Braun u. A. Kurz (Literaturübersicht). — [9] G. Wiedemann, Wied. Ann. **6.** 517—519. — [10] F. Messer, Wien. Ber. **78.** 935; Fortschr. **35.** 225. 1879.

Dagegen beobachtete wieder für Eisen KLEMENČIČ[1] weder einen Einfluß der Magnetisierung noch einen merklichen der Temperatur auf das Dekrement.

Aus den ausgedehnten Versuchen PISATIS[2], der Silber, Stahl, Eisen, Kupfer, Messing, Gold, Platin, Aluminium bis zu Temperaturen von 300° prüfte, würde folgen, daß, sobald der Draht in einen stationären Zustand gelangt ist, das logarithmische Dekrement immer, meistens sehr erheblich, mit steigender Temperatur zunimmt (für Silber ist es bei 300° ca. 150 mal größer als bei 30°).

Ferner sind Beobachtungen von TOMLINSON[3] anzuführen, bei denen ein geglühter Eisendraht in Torsionsschwingungen versetzt wurde, nachdem er wiederholt auf 100° erwärmt und langsam abgekühlt war. Das logarithmische Dekrement betrug alsdann nur noch $^1/_8$ seines ehemaligen Wertes; es betrug sogar nur $^1/_{30}$, wenn die Temperatur auf etwa 100° belassen wurde.

Eine sehr ausgedehnte Studie ist schließlich die von BOUWMAN[4], die Ergebnisse, in Abhängigkeit von Größe und Dauer der Schwingungen, sowie von den anderen Faktoren, sind aber so kompliziert, daß ein Auszug nicht gegeben werden kann.

34. Eine dreifache Wanderung der Ruhelage unterscheidet TAMMEN[5] (für Torsion), nämlich 1. eine oft jahrelang anhaltende I. Art; sie entsteht durch die Änderung der Belastung; 2. eine oszillatorische Bewegung (II. Art) der wirklichen Gleichgewichtslage um die experimentell bestimmte Ruhelage; ihre Periode ist gleich der Dauer der Torsionsschwingungen des Drahtes; sie rührt daher, daß die mittleren Querschnitte eines tordierten und an beiden Enden festgehaltenen Drahtes sich noch lange nach der neuen Ruhelage hinbewegen (O. E. MEYER, NEESEN); 3. eine vorher nicht beobachtete Wanderung III. Art, welche darin besteht, daß die Ruhelage, während die Amplituden in einer Beobachtungsreihe abnehmen, in entgegengesetztem Sinne zu demjenigen wandert, in dem sie sich infolge andauernder oder vermehrter Belastung bewegt. Die Wanderung III. Art ist um so größer, je länger der Apparat schon benutzt ist. Sie wurde an einem Stahldraht deutlich erkannt. Diesen drei Wanderungen sollen sich drei logarithmische Dekremente zuordnen.

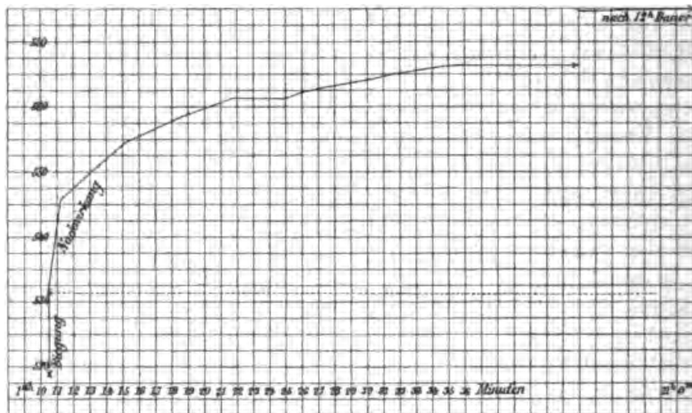
35. Nachwirkung im Quarz. Nach den vorliegenden Tatsachen und im Hinblick auf die Theorien von MAXWELL und WIECHERT erscheint es höchst wahrscheinlich, daß die Nachwirkung desto kräftiger ist, je inhomogener der betreffende Körper aufgebaut ist; am stärksten also in Kautschuk und anderen organischen Präparaten, wesentlich kleiner schon in Gläsern und Metallen, sehr klein — nach Beobachtungen von THRELFALL, BARNETT u. A. — im amorphen Quarz, der sich bekanntlich gerade deswegen in hervorragendem Maße zu Aufhängefäden für wissenschaftliche Apparate eignet. Noch kleiner wird sie aber, wie man vermuten darf, im kristallisierten Quarz sein, da doch die Kristalle zwar äolotrop, aber dafür im höchsten Maße homogen sind. Diese Vermutung ist durch eine ausgedehnte und sorgfältige Untersuchungsreihe von JOFFÉ bestätigt worden. Es wurde zunächst die Methode der direkten Beobachtung der Deformationsnachwirkung nach Biegung von Quarzstreifen angewandt, wozu ein Apparat diente, der zwischen denen von WARBURG-KOCH und STRAUBEL (vgl. p. 629) etwa die Mitte hielt. Es war aber keinerlei elastische Nachwirkung nachweisbar. Es wurde deshalb zu einer indirekten Methode übergegangen, nämlich zur

[1] J. KLEMENČIČ, Ber. d. naturf. Ges. zu Freiburg i. Br. 1877. — [2] G. PISATI, Gazz. chimica Ital. Tl. VI. 1876; Tl. VII. 1877. 109 Seiten. Eine übersichtliche Darstellung und Berechnung der Versuche siehe STREINZ, CARLS Rep. 16. 502. — [3] H. TOMLINSON, Chem. News 55. 45. 1887; Phil. Mag. (5) 23. 245. 1887. — [4] E. BOUWMAN, Nachwirkung und logarithmisches Dekrement bei Torsionsschwingungen dünner Drähte. Inaug.-Diss. Groningen 1899. — [5] H. TAMMEN, CARLS Rep. 18. 348—381. 1881; Beibl. 6. 564. 1882; vgl. TAMMEN, l. c. 20. 413—417. 1884; Beibl. 8. 850. 1884. — W. BRAUN u. A. KURZ, CARLS Rep. 15. 1879; 17. 1881; 18. 665. 1882; Beibl. 5. 393—399. 1881; 8. 177. 1884.

Messung der durch Nachwirkung nach Zug oder Druck (also homogener Deformation) erzeugten Piezoelektrizität; dazu diente der von CURIE konstruierte „quartz piézo-électrique“. Die hierbei auftretende Deformationsnachwirkung erweist sich aber als eine sekundäre elektrische Deformation, bedingt durch das Verschwinden der Piezoelektrizität. Diese Erscheinung und ihre Beeinflussung durch verschiedene Bestrahlung gehört also, so interessant sie an sich ist, nicht hierher.

Was sonstige Kristalle betrifft, so hat VOIGT bei seinen langjährigen Kristallarbeiten kaum je Nachwirkung beobachtet, außer, und auch hier nur in geringem Maße, bei Steinsalz. Kräftige Nachwirkung ist freilich bei Eis konstatiert worden (s. w. u.). Man muß aber bedenken, daß es sich in diesen Fällen um plastische Körper und Deformationen handelt, wodurch der Charakter des Phänomens völlig verändert wird.[1]

36. Nachwirkungserscheinungen an plastischen Körpern. Diese gehören wegen der gleichzeitigen Plastizität, von der sie nicht vollständig zu trennen sind, kaum hierher. Es mag aber auf einige Arbeiten hingewiesen werden,



Figur 276.

so für Eis auf die Arbeiten von KOCH und HESS[2], auf die im übrigen im nächsten Artikel zurückgekommen werden wird. In Figur 276 ist die Nachwirkungskurve des Eises für Biegung dargestellt, nach einer Versuchsreihe von KOCH (ausgeführt in Labrador, Temperatur 12 bis 15° unter null).

Für Kautschuk sind die Nachwirkungserscheinungen wiederholt studiert und dabei die schon von KOHLRAUSCH (s. o.) erhaltenen Ergebnisse im allgemeinen bestätigt worden. So fand HESEHUS[3], der die Längenänderungen graphisch aufzeichnete, daß für kleine Dauer der Deformation die Nachwirkung unmerklich und daß sie größer ist, wenn das Präparat schon gereckt war; mit der Temperatur nimmt sie ab, ebenso mit, bei gegebenen Massen, wachsender Oberfläche. Vollständige Zyklen führten CANTONE und CONTINO, sowie SCHEDD und INGERSOL[4] durch; die Differenz der Ordinaten für Hin- und Rückweg wächst vom Beginn der Entlastung bis zu einem Maximum und nimmt dann bis zu dem der dauernden Deformation entsprechenden Minimum ab. Mit wachsender Temperatur nimmt

---

[1] R. THRELFALL, Phil. Mag. (5) **30.** 99. 1890. — G. J. BARNETT, Phys. Rev. **6.** 1898. — E. BOUWMAN, Inaug.-Diss. Groningen 1899. — A. JOFFÉ, Ann. d. Phys. **20.** 919. 1906. — W. VOIGT, Inaug.-Diss. Königsberg 1874; POGG. Ann. Erg.-Bd **7.** 1. 177. 1876. — [2] K. R. KOCH, WIED. Ann. **25.** 438. 1885. — H. HESS, Ann. d. Phys. **8.** 405. 1902. — [3] N. HESEHUS, Journ. d. russ. phys. Ges. **14.** 287. 1882. — [4] M. CANTONE, Rend. Ist. Lomb. (2) **31.** 1898. — M. CANTONE u. G. CONTINO, ibid. **32.** 1899. — J. C. SCHEDD u. R. L. INGERSOL, Phys. Rev. **19.** 107. 1904.

nach ihnen die Nachwirkung anfangs schnell, dann langsam ab und bleibt von etwa 80° an annähernd konstant.

Als dritter derartiger Stoff sei Gelatinelösung angeführt, die u. A. von FRAAS, sowie von RANKINE[1] untersucht worden ist. FRAAS untersuchte sechs Stangen von Stunde zu Stunde, alle waren 20prozentig und gleich lange gekocht, aber jede folgende wurde eine Stunde später aus der Form genommen. Es zeigte sich, daß die Dehnung mit der Zeit nach dem Gießen rasch abnimmt, während es gleichgültig ist, ob die Stange schon benutzt wurde oder eben erst aus der Form kommt. Im übrigen haben die Nachwirkungskurven einen ganz normalen Verlauf. Mit zunehmender Konzentration scheint der Endzustand immer schneller erreicht zu werden. Ferner wurde der Einfluß der Dauer des Erhitzens vor dem Gießen sowie der Temperatur, bei der das Lösen stattgefunden hatte, festgestellt. — Beziehen sich die FRAASschen Versuche auf Dehnung, so hat RANKINE Torsionen untersucht, indem er die Lösungen zwischen zwei konzentrische Zylinder brachte, dem inneren durch ein Kräftepaar K eine Torsion φ gab und die Abnahme W bestimmte, die man K allmählich erteilen mußte, um φ trotz der Nachwirkung konstant zu erhalten. Bei den Lösungen mit 3,4 bis 4,4% Gehalt wurde nach Ablauf von 0,1 bis 2,1 Stunden eine Abnahme $W = 0{,}9$ bis $0{,}8\,K$ konstatiert, die dann nicht mehr wuchs; bei stärkeren Lösungen dagegen wuchs W stetig, wenn auch allmählich immer schwächer, etwa nach der Formel $W = a \log(pt + 1)$. Eine analoge Formel haben übrigens TROUTON und RANKINE auch für einen Bleidraht aufgestellt, und PHILLIPS[2] ist für Kautschuk, Glas und Metalle zu ähnlichen Ergebnissen gelangt.

37. Elastische Ermüdung. Dieser Ausdruck ist von verschiedenen Autoren enger oder weiter gefaßt worden. In der weitesten Fassung kann man darunter die Abnahme der Elastizität, insbesondere des betreffenden Moduls, infolge wiederholter Beanspruchung verstehen. Derartige Ermüdungserscheinungen findet man in mehreren der oben zitierten Arbeiten beschrieben, auch sei noch besonders auf eine Arbeit von J. O. TOMPSON[3] hingewiesen. Insbesondere nimmt bei Zyklen mit wachsender Amplitude der Mittelwert des Moduls im allgemeinen ab, und zwar bei Dehnung wie bei Torsion, bei Metallen wie bei Kautschuk. Ferner — und damit gelangen wir zu der engeren Definition — versteht man nach Lord KELVIN unter elastischer Ermüdung die Zunahme des logarithmischen Dekrements von Schwingungen, namentlich von Torsionsschwingungen, infolge zahlreicher vorangegangener Torsionen und Detorsionen; sie tritt besonders bei harten Drähten deutlich hervor und kompliziert den Gang der Erscheinung, zumal das Dekrement (s. o.) an sich mit der Zeit, d. h. mit der Abnahme der Amplituden abnimmt. Man vergleiche hierzu u. a. eine Abhandlung von BOUASSE[4], sowie eine solche von PEDDIE.[5] — Für die Ermüdung sind verschiedene Theorien aufgestellt worden, so, was die Metalle, besonders bei höheren Temperaturen betrifft, die Theorie von EGLESTON, wonach Kohlenstoff, bisher nur physikalisch vereinigt, chemisch gebunden wird.

38. Statisch und dynamisch bestimmte Elastizitätsmoduln. Der Unterschied der Werte, die man nach beiden Methoden erhält, ist schon in den Artikeln über Zug und Drillung sowie über elastische Schwingungen erwähnt worden; dabei zeigte sich freilich, daß er nicht immer deutlich und dem Vorzeichen nach schwankend ist. Insoweit der statische Wert größer ist als der dynamische, kann er von der elastischen Nachwirkung herrühren. Man vergleiche hierzu u. a. die Versuche, durch die WARBURG beide Werte an demselben Drahte bestimmte,

---

[1] E. FRAAS, WIED. Ann. 53. 1074. 1894. — A. O. RANKINE, Phil. Mag. (6) 11. 447. 1906. — [2] P. PHILLIPS, Phil. Mag. (6) 9. 513. 1905. — [3] J. O. THOMPSON, Phys. Rev. 1. 346. 1894. — [4] H. BOUASSE, Ann. chim. phys. (8) 2. 5. 1904. — [5] W. PEDDIE, Proc. Edinb. Soc. 23. 598. 1900.

indem er das Torsionsmoment mit dem Drehungsmoment einer bifilaren Aufhängung verglich; hier ergab sich das statische Moment meist etwas größer, besonders bei Kupfer. Ähnliches fand SCHRÖDER bei Silber.[1]

39. Thermische und elastische Nachwirkung. WEIDMANN[2] hat die bekannten Nullpunktsänderungen der Thermometer, welche nach dem Erhitzen auftreten, verglichen mit der elastischen Nachwirkung, welche Stäbe der gleichen Glassorte nach einer Deformation zeigen (insbesondere wurden Biegungen benutzt). Vergrößert man das Volumen der Glashülle, indem man von innen Überdruck wirken läßt, so erhält man im allgemeinen auch eine elastische Nachwirkung; bringt man die gleiche Volumänderung durch Erwärmen hervor, so entsteht eine thermische Nachwirkung. Beide sind aber nicht direkt miteinander zu vergleichen.

Nach PERNET ist die letztere nämlich proportional dem Quadrat der Temperaturerhöhung, die elastische Nachwirkung dagegen der ersten Potenz der Deformation. In der Tat sind beide Gestaltsänderungen auch nicht von gleichen Verschiebungen begleitet; dazu müßte man den Druck von allen Seiten auf das Glas wirken lassen. Bezeichnet man aber Gläser, welche entweder keine elastische Nachwirkung (bei Biegung, Torsion oder Volumveränderung durch einseitigen Druck) oder nur eine rasch verlaufende besitzen, als elastisch gut, so läßt sich doch sagen, daß elastisch gute Gläser im allgemeinen auch thermisch gut sind. „Glas von großer bezw. geringer thermischer Nachwirkung zeigt auch große bezw. geringe elastische Nachwirkung und umgekehrt." Die Zusammensetzung der Gläser steht damit in dem Zusammenhang, daß solche Gläser, welche nur ein Alkalimetall (Natron oder Kali) enthalten, besser sind, als solche mit zweien; ein großer gleichzeitiger Gehalt an beiden ist schädlich; cet. par. sind solche, welche zwar beide Alkalien, aber in geringem Prozentsatz, enthalten, besser als die an beiden reichen Gläser.

Die eingehendsten Untersuchungen über die elastisch-thermische Nachwirkung beim Thermometer hat MARCHIS durchgeführt. Die Glasmasse wird dabei als ein System behandelt, das von der Temperatur und außerdem von zwei Variabeln abhängt; die eine ist das spezifische Volumen, die andere wird chemische Variable genannt, wobei es aber unter Umständen erforderlich wird, zwei verschiedene chemische Variable einzuführen. Jede dieser Variablen ist mit einem Hysteresiskoeffizienten behaftet, und es bestehen gewisse Beziehungen zwischen ihnen. Die vollständig thermodynamisch durchgeführte Theorie gibt wichtige Fingerzeige für die Konstruktion der Thermometer mit minimaler Nullpunktsverschiebung.[3] Hier sei nur noch folgendes angedeutet. Um die Hysteresis eines Glases zu untersuchen, stellt man aus ihm ein Thermometer her und ermittelt die Kurven, die die Abhängigkeit des Gefäßvolumens von der Temperatur darstellen. Diese v-t-Kurven fallen für steigende und fallende t nicht zusammen, sie bilden vielmehr im Anfangs- und Endpunkte gewisse Winkel miteinander. Durch jeden Punkt der v-t-Ebene geht je eine auf- und absteigende Kurve, und zwar liegt in einem gewissen Bereich der Ebene die steigende Kurve, in einem anderen die fallende höher, dort findet eine Erhöhung, hier eine Erniedrigung des Nullpunktes statt; getrennt werden beide Bereiche durch die Linie der natürlichen Zustände. Übrigens ist die Veränderung nicht dieselbe, wenn man die hohe Temperatur, auf die man erhitzt, konstant hält oder periodischen Schwankungen unterzieht; es bestehen vielmehr bestimmte Differenzen, und diese lassen sich nach DUHEM theoretisch darstellen.

---

[1] E. WARBURG, WIED. Ann. **10.** 20. 1880. — TH. SCHRÖDER, ibid. **28.** 369. 1886. — [2] G. WEIDMANN, ibid. **29.** 214. 1886; vgl. daselbst auch die Literatur über thermische Nachwirkung. — [3] L. MARCHIS, Mém. Soc. sciences Bord. (5) **4.** 1898; Journ. de phys. (3) **7.** 573. 1898; Ztschr. f. phys. Chem. **37.** 553. 605. 1901. — Auch in Buchform zusammenfassend und ergänzt erschienen.

Weitere Literatur.

HODGKINSON, Fortschr. **9.** 120. Nachwirkung bei Steinplatten 1855. — BOILEAU, C. R. **42.** 933; Fortschr. **12.** 179. 1856. (Kautschuk betr.) — DIETZEL, Polyt. Centralbl. 1857. p. 689; Fortschr. **13.** 143, (Kautschuk betr.) — E. REUSCH, Über die Guttapercha. (POGG. Ann. **134.** 315. 1868). Reckung derselben und merkwürdiger Temperatureinfluß auf die gereckte Substanz. — H. STREINTZ, POGG. Ann. **155.** 588. (Polemik gegen O. E. MEYER.) — L. BOLTZMANN, CRELLEs Journ. **81.** 96. (Zu O. E. MEYERs Theorie.) — FINGER, Wien. Ber. (2) **72.** 257. (Versuche zur Prüfung von BOLTZMANNs Theorie.) — L. BOLTZMANN, Wien. Ber. (2) **76.** 815; Fortschr. **33.** 243. (Bemerkungen zu P. M. SCHMIDTs Abhandlung, einen Einwand gegen BOLTZMANN betr.) — O. FABIAN, Dehnbarkeit und Elastizität des Eises (Fortschr. **33.** 246. 1877; CARLs Rep. **13.** 447—457). — J. CLEMENČIČ, Beobachtungen über die elastische Nachwirkung am Glase (CARLs Rep. **15.** 409—427. 1879). Prüfung und meistens Bestätigung der KOHLRAUCHschen allgemeinsten Formel bei Torsion und Biegung. — W. BRAUN u. A. KURZ, Dämpfung von Torsionsschwingungen von Drähten (CARLs Rep. **15.** 561—577. 1879; **17.** 233—253. 1881; **20.** 856—857. 1884; Beibl. **9.** 297. 1885). — TH. NISSEN, Zur Kenntnis der elastischen Nachwirkung (Inaug.-Dissert. Bonn 1880; Beibl. **5.** 19. 1881). Eine Theorie, bei welcher der intermolekulare Äther zur Erklärung herangezogen wird. — N. A. HESEHUS, Die elastische Nachwirkung und andere verwandte physikalische Erscheinungen (Beibl. **7.** 654. 1883). Auszug des Verf. aus Journ. d. russ. chem.-phys. Ges. **14.** 320—385. 1882. Bezieht sich vorzugsweise auf das Verhalten des Kautschuks. — A. MILLER, Münch. Ber. 1885. p. 9—92; Beibl. **9.** 498. 1885. (Der Elastizitätsmodul einer großen Zahl untersuchter Stoffe ergibt sich abhängig von der Anfangsspannung und verschieden, je nachdem dieselbe ab- oder zunimmt. Die Drähte waren vorher durch größere Belastungen dauernd gestreckt.) — L. PERARD, Rev. univ. des mines. (2) **15.** 346—364. 1884; Beibl. **9.** 375. 1885. (Der Verfasser stimmt Erklärungen von TAMMEN, die dreifache Wanderung der Ruhelage betr., auf Grund seiner Beobachtungen zu). — G. J. MICHAELIS, Theorie der elastischen Nachwirkung (Beibl. **9.** 11. 1885); Theorie der Rotation der Moleküle (Beibl. **10.** 149. 1886; Arch. Néerl. **20.** 20—35. 1885). — C. PULFRICH, Elastische Nachwirkung eines Kautschukschlauches und deren Einwirkung auf die Konstante μ (WIED. Ann. **28.** 87—107. 1886). Der Verfasser untersucht auch die Nachwirkungen nach der Querdimension und zeigt, daß beide bei Belastung und Entlastung in genau identischer Weise und mit derselben Geschwindigkeit erfolgen; auch Prüfung der KOHLRAUCHschen Formeln enthaltend. — H. TOMLINSON, Bleibende und vorübergehende Wirkung einer Temperatursteigerung bis 100° C auf einige physikalische Eigenschaften des Eisens (Chem. News **55.** 45. 1887; Beibl. **11.** 499. 1887). Bezieht sich auf logarithmisches Dekrement und die Elastizitätsmoduln; Zähigkeit der Metalle, innere Reibung der Metalle (Proc. Lond. Roy. Soc. **38.** 42—45. 1884; Beibl. **9.** 707. 1885; **11.** 213. 1887; **40.** 240—242. 1886). — A. MILLER, Der primäre und sekundäre longitudinale Elastizitätsmodul und die thermische Konstante des letzteren (Münch. Ber. 1866. 707—758; Beibl. **11.** 211. 1887). — C. REINHERTZ, Ztschr. f. Instrumentenk. **7.** 153. 189. 1887 (Elastische Nachwirkung beim Federbarometer). — E. ZIMANSKY, WIED. Ann. **54.** 139. 1895 (Ermüdung und Nachwirkung bei Zink bei verschiedenen Temperaturen). — P. BACHMETJEW u. P. VASKOW, Journ. d. russ. phys. Ges. **28.** 217. 1896 (Einfluß des umgebenden Mediums auf die elastische Nachwirkung in Metalldrähten; untersucht wurden Ni- und Cu-Drähte in Luft, Petroleum und Sulfatlösungen, und zwar auf Dehnung; der Einfluß geht bis auf 100% des Wertes hinauf, wobei hinsichtlich des Vorzeichens seltsamer Weise ein Gegensatz zwischen para- und diamagnetischen Metallen besteht). — A. WINKELMANN, WIED. Ann. **61.** 136. 1897 (Bei Jenenser Gläsern erwies sich der Modul nach der Erwärmung um durchschnittlich 2% größer als bei gleicher Temperatur vor der Erwärmung; im einzelnen schwanken die Werte zwischen 0,1 und 4,6%; ein Zusammenhang mit der chemischen Konstitution ist aber nicht zu erkennen; auch dürfte die Erscheinung mit der Nullpunktsdepression bei Thermometern nichts zu tun haben). — A. WINKELMANN, WIED. Ann. **63.** 117. 1897 (Analoge Erscheinungen bei Platin, Differenz vor und nach dem Erwärmen 7%). — L. WEINHOLD, Zur Elastizität der Metalle. Inaug.-Diss. (Leipz.) Chemnitz 1899 (Hysteresis u. s. w.). — H. HOVESTADT, Jenaer Glas. Jena 1900. Kap. 9 (hauptsächlich thermische Nachwirkung). — C. BACH, Mitt. u. Fortschr. d. V. d. Ing. Heft 1. p. 24. 1901 (Nachwirkungserscheinungen bei Sandstein). — G. GRIMALDI, Accad. Gioenia, Catania **80.** 1904 (Einfluß elektrischer Wellen und magnetischer Felder auf die elastische Hysteresis des Eisens; die Hysteresisfläche für Dehnung wird durch die elektrischen Wellen bis auf 80% herabgedrückt, schwächer durch Magnetismus). — P. PHILLIPS, Phil. Mag. (6) **9.** 513. 1905 (logarithmische Formel für Kautschuk, Glas und Metalle, Wiederholungs- und Temperatureinflüsse). — G. ERCOLINI, Nouv. Cim. (5) **9.** 5. 1905 (bei Palladium wird die Hysteresisfläche, sowohl für Dehnung wie für Drillung, durch Okklusion von Wasserstoff verkleinert, besonders bei kleinen Deformationen).

Kohäsion.

Von F. AUERBACH.

Übersicht. Unter dem Namen „Kohäsion“ kann man der Bequemlichkeit halber eine große Klasse im einzelnen sehr mannigfaltiger Erscheinungen zusammenfassen. Zunächst alle diejenigen, welche sich auf bleibende Veränderungen der Körper beziehen, d. h. auf Veränderungen, die nach Aufhebung des äußeren Zwanges noch bestehen bleiben. Während also Elastizität der Widerstand gegen vorübergehende Veränderung ist, ist Kohäsion in diesem Sinne der Widerstand gegen dauernde Veränderung. Wie dort, soll auch hier die Betrachtung auf feste Körper beschränkt bleiben, da die analogen, auf Flüssigkeiten und Gase bezüglichen Erscheinungen anderweitig selbständige Behandlung finden (s. Artikel „Kapillarität“, „Reibung“ u. s. w.).

Zwischen den Erscheinungen der Elastizität und denen der Kohäsion besteht eine scharfe Grenze, gebildet durch die „Elastizitätsgrenze“; jene bewegen sich innerhalb, diese außerhalb derselben. Die Elastizitätsgrenze, welche wie früher und wie alle noch zu behandelnden analogen Größen in Kilos auf das Quadratmillimeter ausgedrückt werden soll, kann als der Widerstand gegen bleibende Veränderung bezeichnet werden; da in der Praxis (bei Bauten, Maschinen, Apparaten u. s. w.) bleibende Veränderungen ausgeschlossen werden müssen, kann man jenes Gewicht auch Tragfähigkeit oder, in Analogie mit dem Elastizitätsmodul, Tragmodul nennen. Dies ist also die untere Grenze des Gebiets, in dem die Kohäsionserscheinungen sich abspielen. Die obere Grenze andererseits wird durch das Gewicht bezeichnet, bei dem der Körper, auf den es wirkt, bezw. die Teile desselben ihren Zusammenhang verlieren und sich trennen. Diese Größe heißt Festigkeit oder Festigkeitsmodul. In der Technik spielt, wie gesagt, nicht dieser, sondern der weitaus kleinere Tragmodul die entscheidende Rolle; ja in den meisten Fällen legt man der Rechnung sogar eine noch um einen usuellen Faktor kleinere Zahl, den Sicherheitsmodul, zugrunde, um sich darauf verlassen zu können, daß nicht nur bei kurzem, einmaligem und gewöhnlichem, sondern auch bei langem und wiederholtem Gebrauche sowie bei außergewöhnlichen Fällen keine bleibende Veränderungen eintreten.

Die drei genannten Moduln ordnen sich also der Größe nach, vom kleinsten angefangen, so: Sicherheitsmodul, Tragmodul, Festigkeitsmodul. Wie sich der Elastizitätsmodul in diese Reihe einordnet, läßt sich im Prinzip nicht allgemein sagen. Tatsächlich aber ist er, außer bei einigen anomalen Stoffen, wie Kautschuk, der weitaus größte von allen. Während nämlich Dehnungs-, Torsionsmodul u. s. w. sich auf eine Längenänderung von $100\,^0/_0$, bezw. eine Winkeldrehung von 57^0 u. s. w. beziehen, tritt eine dauernde Veränderung, also die Elastizitäts-

grenze, schon bei einer vorübergehenden Längenänderung von $^1/_2$—2 % bezw. einer Winkeländerung von $^1/_4$—1° auf, und die Trennung der Teile bei einer solchen von 1—5 % bezw. $^1/_2$—3°.

Wie der Elastizitätsmodul, so ist auch der Tragmodul und der Festigkeitsmodul nicht eigentlich ein Begriff, sondern eine Begriffskategorie, die für jede Klasse äußerer Eingriffe zu einem besonderen Begriff führt: Für Zug und Druck (die hier nicht, wie bei der Elastizität, entgegengesetzt gleiche Erscheinungen liefern), für Biegung und Torsion, für Scherung u. s. w. Eine besondere Art der Festigkeit, welche hier neu hinzukommt, ist die Härte, eine weitere (deren Behandlung jedoch wesentlich in die Mineralogie gehört) der Widerstand gegen Spaltung (reziprok: „Spaltbarkeit"), endlich eine Art von Festigkeit zwischen zwei verschiedenen Körpern, die Adhäsion. Spricht man von den angeführten Erscheinungen schlechthin, so denkt man an statische Zustände, und man erhält eine neue Klasse von Größen, die Stoßfestigkeit, wenn man dynamische Vorgänge ins Auge faßt.

Bisher war nur von den beiden Grenzen die Rede, zwischen denen die Kohäsionserscheinungen liegen. Zur Kenntnis einer neuen Klasse von Eigenschaften der Körper gelangt man nun aber, wenn man sich fragt, wie weit diese beiden Grenzen bei einem bestimmten Körper auseinander liegen, d. h. ob es, wenn auf den Körper eine der Elastizitätsgrenze gleiche Kraft wirkt, bleibende Veränderungen also eben einzutreten beginnen, nunmehr einer erheblichen Steigerung dieser Kraft bedarf, um ihn zu zerteilen, oder ob schon eine geringe Steigerung diese Wirkung hat. Im ersten Falle, wenn also der Festigkeitsmodul sehr erheblich größer ist als der Tragmodul, heißt der Körper plastisch oder geschmeidig, im anderen Falle, wenn also beide Moduln dicht beieinander liegen, heißt er spröde, und zwischen der äußersten Geschmeidigkeit und der äußersten Sprödigkeit liegt eine stetige Reihe von Graden derselben. Auch hier handelt es sich im übrigen um zahlreiche einzelne Arten von Geschmeidigkeit (Duktilität, Walzbarkeit, Hämmerbarkeit u. s. w.).

Eine besondere Stellung nehmen auch hier, wie bei der Elastizität, die Kristalle ein, insofern sie nach verschiedenen Richtungen verschiedene Festigkeit u. s. w. besitzen, was sich noch besonders in merkwürdigen Erscheinungen, namentlich der Spaltbarkeit und den Gleitflächen, zu erkennen gibt.

Den Beschluß des Artikels bilden die Erscheinungen, deren Träger nicht mehr zusammenhängende feste Körper, sondern lose Konglomerate solcher, also pulverförmige oder lose Massen sind. Solche Massen bilden gewissermaßen einen Aggregatzustand für sich und bieten spezifische Phänomene dar, unter denen der „Erddruck" und die Gleichgewichtsfiguren hervorzuheben sind.

1. Elastizitätsgrenze und Grenzveränderung.

Elastizitätsgrenze. Dieses Wort hat einen allgemeinen, unbestimmten und einen speziellen, bestimmten Sinn. Im ersteren bedeutet es die Grenze, bis zu der ein Körper nach Aufhebung der auf ihn ausgeübten Beanspruchung wieder in den Anfangszustand zurückkehrt. Im letzteren ist es insbesondere die in diesem Grenzpunkte auf den Körper ausgeübte Beanspruchung, also seine Grenzspannung, und es steht ihr alsdann eine zweite Größe gegenüber, die Grenzdeformation, d. h. die im Grenzpunkte stattfindende Deformation des Körpers, die nach Aufhebung der Beanspruchung restlos wieder verschwindet. Daß beide Größen nicht eigentlich den Charakter einer mathematischen Größe haben, ist schon p. 501 angedeutet worden, und es ist jetzt folgendes hinzuzufügen. Eine mathematische Größe muß die Eigenschaft haben, daß, wenn man die Genauigkeit ihrer empirischen Bestimmung mehr und mehr steigert, sie sich anfangs noch

stark, allmählich aber schwächer ändert und sich schließlich einem bestimmten Werte nähert; als eines von zahllosen Beispielen kann das Atomgewicht dienen. Hier aber, bei der Elastizitätsgrenze, hat die Genauigkeit, mit der man feststellt, ob ein Deformationsrest zurückbleibt, auf den Wert der Grenzspannung nicht bloß einen Genauigkeits-, sondern einen Einfluß, der von derselben Größenordnung wie die Größe selbst ist, und es erscheint gar nicht unwahrscheinlich, daß die Grenzbeanspruchung, die einer unendlich vollkommenen empirischen Bestimmung der Deformation entspricht, überhaupt null sei. Damit fällt sie aber als exakter Begriff in sich zusammen, und es bleibt nur ein von usueller Festsetzung abhängiger Begriff von lediglicher praktischer Bedeutung übrig. Schließlich wird auch diese praktische Bedeutung sehr beeinträchtigt durch mehrere Umstände: erstens dadurch, daß die kleinste Deformation, die man noch gelten läßt, für verschiedene Arten der Beanspruchung zweckmäßig verschieden hoch bemessen wird; zweitens, daß es hierbei auf die Zwecke der Untersuchung ankommen wird; drittens aber, daß auch noch die Vorgeschichte des Körpers, die Zeitdauer der Beanspruchung u. s. w., kurz alles das mitwirkt, was sich in der elastischen Nachwirkung kundgibt. Unter diesen Umständen wird es genügen, hier einige wenige Angaben zu machen und einiges über die neuesten Bestrebungen, das Problem etwas exakter auszugestalten, mitzuteilen.

Die Elastizitätsgrenze im Sinne der Grenzspannung soll mit G, die entsprechende Grenzveränderung mit V bezeichnet werden. Zwischen beiden besteht offenbar die Beziehung, daß der Quotient G/V gleich dem Modul für die betreffende Art der Beanspruchung ist, und zwar sein Wert für die betreffende Stärke der Beanspruchung — mit dem Werte für kleine Beanspruchungen, also dem Normalwerte des Moduls wird jener im allgemeinen nicht genau und in manchen Fällen auch nicht annähernd mehr übereinstimmen. Als kleinster Wert der bleibenden Deformation, den man noch gelten läßt, ist z. B. für die Längsdehnung vielfach eine Verlängerung um 0,5 mm auf 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt festgesetzt worden. Es ergeben sich alsdann für die Metalle folgende angenäherte Werte von G und V (zum großen Teil schon von Wertheim ermittelt, aber mit Benutzung neueren Materials verbessert und ergänzt):

Blei, gezogen	0,25	—	Palladium	27	0,0023
Bronze	25	0,0028	Platin, gezogen	26	0,0015
Eisen, gezogen	32	0,00150	Silber, gezogen	11	0,0015
„ Guß-	12	0,0012	Stahl, Hart-	60	0,003
„ angelassen	5	—	„ Fluß-	50	—
„ Fluß-	20	—	„ gezogen	43	0,0025
„ Schweiß-	15	—	„ Bessemer	33	—
Gold, gezogen	14	0,0018	„ Schweiß-	22	—
Kupfer, gezogen	12	0,001	Zink, gezogen	10	0,0011
„ angelassen	3	—	Zinn	4	0,0010
Messing	24	0,0029			

Die Grenzspannung schwankt, wie man sieht, zwischen $^1/_4$ und 60, die Grenzveränderung zwischen 0,001 und 0,003; der Umstand, daß diese letztere Schwankung weit geringer als die erstere ist, gibt zu Betrachtungen Anlaß, auf die hier indessen nicht eingegangen werden soll.

Für Hölzer ist die Grenze besonders schwer anzugeben; für Eichenholz darf man etwa $G = 2$ setzen, also noch etwas kleiner als für das (nächst Blei) unterste Metall.

Für abnorme Stoffe, wie Kautschuk, ist die Grenzspannung außerordentlich klein, die Grenzverlängerung aber trotzdem sehr groß; es wäre aber mißlich, hier Zahlen anführen zu wollen, da sie keine allgemeinere Bedeutung beanspruchen könnten.

In neuerer Zeit hat man verschiedentlich versucht, die Elastizitätsgrenze

schärfer zu fassen. So geht FREMONT[1] von der bekannten Wahrnehmung aus, daß infolge ungleichförmiger Kraftverteilung über den Querschnitt bei zylindrischen Metallstäben bei Zug oder Druck auf der gut polierten Oberfläche unregelmäßig verteilte Linien entstehen. Um das zu verhindern, benutzt er Stäbe mit konischer Verjüngung, die am dünneren Ende sich in Zylinder fortsetzen; die Längenänderung wird nur am konischen Teile gemessen; hier fehlen nämlich jene Oberflächenlinien gänzlich, es breitet sich vielmehr hier eine zusammenhängende rauhe Fläche aus. Hat diese rauhe Fläche eine scharfe Begrenzung, so läßt sich die Elastizitätsgrenze exakt angeben, anderenfalls lassen sich nur Grenzen für sie aufstellen.

Eine anscheinend sehr befriedigende Definition könnte man erhalten durch Aufsuchung des Punktes, wo die Proportionalität zwischen Kraft und Wirkung eben aufhört. Indessen würde auch dieser Punkt kaum besonders scharf festzulegen sein; und sodann weiß man jetzt, daß auch schon für kleine Kräfte jene Proportionalität nicht streng und in manchen Fällen auch nicht annähernd existiert. Es muß also auch dieser Gedanke fallen gelassen werden.

Einen indirekten Weg hat ISBERG[2] eingeschlagen; er benutzt das Phänomen der Abkühlung, mit der die Dehnung verbunden ist, solange sie rein elastischen (vorübergehenden) Charakters ist, und die bei permanenter Dehnung in eine Erwärmung übergehen kann. Diese Erscheinung ist von W. WEBER, W. THOMSON und namentlich von EDLUND studiert worden; und an die Apparate des letzteren schließen sich die ISBERGs eng an. Zur Temperaturmessung diente ein Thermoelement und ein Galvanometer. Die Ablenkung des letzteren wird mit wachsender Belastung zunächst größer, dann aber kleiner und schließlich null. Der Umkehrpunkt läßt sich mit der WERTHEIMschen Elastizitätsgrenze identifizieren. Vorzuziehen aber ist die Definition der Grenze als die größte Beanspruchung, für die die Abkühlung noch proportional mit der Beanspruchung ist. Die Einzelheiten der Versuche, die sich auf Eisen, Stahl und einige andere Metalle beziehen, müssen im Original nachgesehen werden.

An dieser Stelle sei auch eine Arbeit von BARUS[3] erwähnt, obwohl sie streng genommen nicht hierher gehört. Sie betrifft die Frage, wieviel von der zum Spannen eines Drahtes bis zur Elastizitätsgrenze aufgewandten Energie in Wärme umgesetzt und wieviel zur Erhöhung der inneren potentiellen Energie verwandt wird; der letztere Teil ergibt sich als Differenz der ganzen, mechanisch gemessenen Arbeit und der kalorimetrisch gemessenen Wärme. Es ergeben sich für Kupfer 25, für Messing 40, für Eisen 50 $^0/_0$.

Vereinzelte Angaben über die Elastizitätsgrenze findet man in vielen von den in den Artikeln über Zug und Druck, Biegung und Drillung zitierten Abhandlungen, und es ist unmöglich, auf diese hier zurückzukommen; einige weitere Angaben folgen sogleich im Zusammenhang mit der Festigkeit. Aus neuester Zeit seien aber noch die Arbeiten von COKER[4] erwähnt, die sich mit der Grenzspannung bei der Dehnung und Torsion, ihrer gegenseitigen Beeinflussung, der Wirkung niedriger Temperaturen u. s. w. befassen.

Ferner seien Versuche erwähnt, die LUCAS zur Prüfung einer bestimmten (thermodynamischen) Theorie an Metallstäben anstellte; sodann die von MUIR über den Einfluß des Abschreckens auf die Elastizitätsgrenze zahlreicher Metalle (Stahl, Eisen, Kupfer, Messing, Zink und Zinn). Im allgemeinen wird durch das Abschrecken die Grenze erniedrigt, und die Abweichung von der Proportionalität beginnt alsdann schon bei sehr kleinen Kräften; auch wird die Grenzdehnung größer.[5]

[1] CH. FREMONT, C. R. **135**. 281. 1902. — [2] P. I. ISBERG, Öfvers. Vet.-Akad. Förhandl. 1885. p. 143; 1888. p. 399. — [3] C. BARUS, SILL. Journ. **38**. 193. 1889. — [4] E. G. COKER, Edinb. Trans. **40**. 263. 1901; Phys. Review **15**. 107. 1902. — [5] F. LUCAS, C. R. **121**. 109. 1895. — J. MUIR, Proc. Roy. Soc. **71**. 80. 1902.

Interessante Untersuchungen liegen auch vor über das Überschreiten der Elastizitätsgrenze und die nachherige Rückkehr zur vollkommenen Elastizität bei Metallen. Es sei hierüber aus der neuesten Arbeit von MORLEY und TOMLINSON[1] folgendes angeführt: Wenn nach Überschreitung der Grenze hinreichende Zeit, meist etwa 14 Tage, gewartet wird, wird die Rückkehr zur Elastizität herbeigeführt; durch Erhitzen auf etwa 100^0 wird aber diese Zeit verkürzt, die Rückkehr freilich auch zuweilen, z. B. bei Aluminium, weniger vollständig. Bei Kupfer erfolgt die Rückkehr sehr rasch, bei Aluminiumbronze sehr langsam.

Schließlich sei auf das Verhalten der Elastizitätsgrenze bei Wiederholung der Versuche, sowie bei Sukzession verschieden starker Beanspruchung hingewiesen. Wenn z. B. auf eine Kraft P, die die elastische Deformation a, die bleibende b, also die gesamte $c = a + b$ erzeugt, eine kleinere Kraft P' folgt, so bringt sie lediglich eine elastische Deformation $b' (< b)$ hervor, obwohl sie, wenn sie primär gewirkt hätte, auch schon eine bleibende Deformation $c' (< c)$ erzeugt hätte. Folgt dagegen auf die Kraft P eine größere Kraft P'', so bringt sie eine neue bleibende Deformation c'' hervor. Man vergleiche dieses Verhalten mit dem ganz entsprechenden, namentlich von FRÖMME und AUERBACH studierten beim permanenten Magnetismus (Band V). Eine interessante Folgerung aus diesem Verhalten ist diese. Offenbar kann man durch Bestimmung der Kraft, die in einem Körper eben schon eine bleibende Deformation erzeugt, die größte Kraft ermitteln, die in der Vorgeschichte des Körpers je eine Rolle gespielt hat — eine Beziehung, die z. B. Fürst GAGARIN benutzt hat, um in gewissen Fällen den Druck zu ermitteln, dem ein Körper ausgesetzt gewesen ist.[2]

2. Festigkeit.

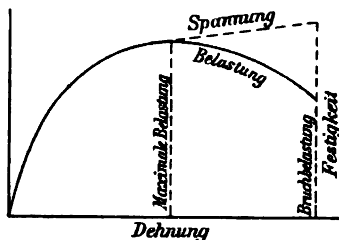
Hier ist zu unterscheiden zwischen Festigkeit gegen Zug, Druck, Biegung (Knickung), Scherung (Schub-), Drillung und Stoß.

a) Absolute oder Zugfestigkeit.

Wenn ein prismatischer oder zylindrischer Körper durch wachsende Kräfte gedehnt wird, so tritt ein Moment ein, wo seine Teile ihren Zusammenhang aufgeben; der Körper wird zerrissen oder zerbrochen; man nennt diese Erscheinung Bruch, die Belastung, bei der er eintritt, Bruchbelastung und die Dehnung bezw. Dilatation kurz vor dem Bruche die Bruchdehnung; in bezug auf letztere sei aber gleich bemerkt, daß sie aus praktischen Gründen meist erst nach der Katastrophe, also nach Wegfall ihres elastischen Teiles, gemessen wird. Um aus der Bruchbelastung die Zugfestigkeit, d. h. die kritische Kraft pro Querschnittseinheit zu erhalten, muß man die Bruchbelastung mit dem Querschnitt dividieren. Dazu sind nun zwei wichtige Bemerkungen zu machen. Erstens muß eine Entscheidung darüber getroffen werden, ob mit dem ursprünglichen Querschnitt oder mit dem zur Zeit des Bruches dividiert werden solle — ein Unterschied, der hier nicht so geringfügig ist, wie bei der Definition des Dehnungsmoduls (p. 551). Prinzipiell müßte man natürlich den letzteren wählen, man wählt aber, wenigstens in der Praxis, fast durchweg den ersteren, weil er bequemer und sicherer zu messen ist und weil er, da er größer ist, zu einem kleineren Werte der Festigkeit führt, was der Sicherheit halber vorzuziehen ist. Zweitens aber ist der Verlauf des Vorgangs nicht immer derart, daß der Querschnitt überall derselbe bleibt. In vielen Fällen bildet sich vielmehr bei fort-

[1] A. MORLEY u. G. A. TOMLINSON, Phil. Mag. (6) 11. 380. 1906. — [2] Vgl. O. CHWOLSON, Lehrbuch der Physik 1. 695.

schreitender Steigerung der Belastung infolge geringfügiger Ungleichheiten des Materials an einer Stelle, meist in der Mitte, seltener mehr nach dem Ende hin, eine Einschnürung, und an dieser Stelle erfolgt alsdann der Bruch. Die Folge dieser Erscheinung ist die, daß man zwar anfangs die Belastung fortwährend steigern muß, daß man sie aber vom Moment der beginnenden Einschnürung ab wieder abschwächen darf, ohne daß der Dehnungsprozeß aufhört, seinen Fortgang zu nehmen. Die technischen Materialdrüfungsmaschinen sind hierauf schon eingerichtet und lassen die höchste Belastung direkt erkennen. Diese maximale Belastung ist es nun, die in der Praxis gewöhnlich als Bruchbelastung angeführt wird, nicht die etwas kleinere im Moment des Bruches. Dagegen nimmt natürlich die Spannung, die bisher mit der Belastung proportional war, auch jetzt noch weiter zu; die beiden Kurven trennen sich also im Moment der beginnenden Einschnürung und man hat das Schema der Figur 277.



Figur 277.

Bei vollständigen Bruchversuchen sind die folgenden Größen zu bestimmen: 1. Tragmodul (Elastizitätsgrenze); 2. Bruchbelastung; 3. Zugfestigkeit; 4. Verlängerung (wenn möglich elastische und bleibende) der Längeneinheit; 5. Verminderung der Querschnittseinheit über den Stab im ganzen; 6. Verminderung der Querschnittseinheit an der Einschnürungs- und Bruchstelle im besonderen; 7. Zerreißungsarbeit. Letztere wird offenbar in Figur 277 durch die entsprechende Fläche dargestellt; und zwar im wesentlichen durch die Fläche bis zur Ordinate der größten Belastung, während das rechts noch folgende Flächenstück mehr zur örtlichen Formänderung an der Einschnürungsstelle Verwendung findet. Die durch das ursprüngliche Volumen des Stabes dividierte Arbeit heißt das Arbeitsvermögen des betreffenden Materials bei Bruchbeanspruchung.

Bei experimenteller Ermittelung der obigen Größen muß man dafür Sorge tragen, daß der Zug möglichst gleichförmig über den ganzen Querschnitt wirke, und auch sonst alle Fehlerquellen sorgfältig vermeiden. Man verwendet meist Stäbe mit kreisförmigem, quadratischem oder rechteckigem Querschnitt und läßt den eigentlichen, zylindrischen Teil des Stabes beiderseits in sich leicht erweiternde Kegelenden auslaufen. Auf die Einzelheiten der Methodik kann indessen nicht eingegangen werden.

Das Eigengewicht des Stabes ist gegenüber den großen hier in Frage kommenden Belastungen meist zu vernachlässigen; wenn nicht, muß man es in ähnlicher Weise berücksichtigen, wie bei der Elastizität (p. 574) oder, wenn dies zulässig ist, den Körper von der zylindrischen Form derart abweichend wählen, daß gleichförmige Beanspruchung statthat.

Metalle nach WERTHEIM.[1]

Metall	gezogen		angelassen		Metall	gezogen		angelassen	
	T	F	T	F		T	F	T	F
Blei	0,3	2,1	0,2	1,8	Kupfer . . .	12	40,3	3	30,5
Zinn . . .	—	2,5	—	1,7	Platin . . .	26	34,1	14,5	23,5
Gold . . .	14	27	3	10	Eisen . . .	32	61	5	47
Silber . . .	11	29	2,8	16	Gußstahl . .	56	80	5	66
Zink . . .	—	12,8	—	—	Stahldraht . .	43	70	15	40

[1] A. WERTHEIM, Ann. chim. phys. (3) 12. 385. 1844.

Gezogene Metalle haben also eine größere Festigkeit als angelassene (s. w. u.). Hiermit hängt es vielleicht zusammen, daß nach Baumeister[1], wie folgende Tabelle zeigt, mit abnehmender Dicke von Drähten die Festigkeit steigt:

Stoff	Dicke in mm	F	Stoff	Dicke in mm	F
Schwedisches Stabeisen . .	0,72	64	Messing	0,75	76
" " . .	0,50	83	"	0,25	98
" " . .	0,30	96	"	0,10	98
" " . .	0,25	94	Kupfer	0,27	35
" " . .	0,15	98	Silber	0,35	30
" " . .	0,10	123			

Es kann das aber auch in einer besonderen Oberflächenfestigkeit seinen Grund haben. In jedem Falle sei festgestellt, daß das Produkt: Festigkeit mal Kubikwurzel aus Dicke nahezu konstant ist (für Eisen 60).

Ferner fand Wertheim die Festigkeit für kurzdauernde Belastung größer als für langdauernde, weil bei letzterer die Dehnung immer weiter fortschreitet und oft erst nach Tagen oder Wochen zum Zerreißen führt. Eine etwas andere Frage, nämlich den Einfluß der Schnelligkeit, mit welcher man das spannende Gewicht steigert, untersuchte Bottomley[2]; hier ist das Ergebnis gerade das entgegengesetzte: bei langsamer Zugsteigerung (in 1 bis 2 Tagen 1 Pfund) ist die Festigkeit größer als bei rascher (in 2 bis 5 Minuten 1 Pfund), überdies ist im ersten Falle die äußerste Dehnung sehr viel kleiner als im letzten. Bei plötzlicher Spannung wird eben ein Stoß ausgeübt und demgemäß die Stoßfestigkeit zum Teil mit in Anspruch genommen; man muß also bei allen Versuchen über statische Festigkeit allmählich zu Werke gehen.

Eine Reihe eigentümlicher, auf die Elastizitätsgrenze und die Festigkeit von Metallen bezüglicher Erscheinungen haben J. Thomson[3], Thurston[4], Hodgkinson[5], Uchatius[6], Bauschinger, Kramm[7] (Einfluß von Torsionen auf die absolute Festigkeit) u. A. beobachtet; hier kann auf dieselben nicht näher eingegangen werden.

Zu erwähnen ist noch eine Abhandlung von Carus-Wilson[8], in der gezeigt wird, daß der Bruch beim Stahl nicht durch Trennung der Teilchen in einem zur Achse senkrechten Querschnitt, sondern in einer um 45° geneigten Ebene und zwar durch Abscherung zustande kommt. Hieraus lassen sich einige interessante Schlüsse ziehen, z. B. der, daß der Schubwiderstand des Stahles halbsogroß sein muß wie seine Zugfestigkeit; besondere Versuche haben das bestätigt.

Schließlich sei auf Zugversuche hingewiesen, die Szily[9] mit auf inneren Druck beanspruchten Röhren angestellt hat; der innere Flüssigkeitsdruck wurde bis auf 200 Atmosphären getrieben. Die Zugfestigkeit war, wenn sie nur aus der Belastung bestimmt wurde, vom inneren Drucke unabhängig; in Wahrheit ist sie um den Betrag der durch den inneren Druck erzeugten Längsspannung größer. Hieraus ließ sich ein wichtiger Schluß (s. w. u.) ziehen.

Legierungen. Auch für diese liegt reiches Material vor.

---

[1] M. Baumeister, Wied. Ann. **18.** 578. 1883 und Würzb. Inaug.-Diss. 1883. — [2] J. F. Bottomley, Proc. Roy. Soc. **29.** 221. 1879. — [3] J. Thomson, Cambr. and Dubl. Math. Journ. 1848. — [4] Thurston, Dingl. Polyt. Journ. **225.** 233. 1877. — [5] Hodgkinson, Rep. Brit. Ass. 1837. p. 362 und a. a. O. — [6] Uchatius, Dingl. Polyt. Journ. **223.** 242. 1877. — [7] Kramm, Marb. Inaug.-Diss. 1873 (s. w. u.). — [8] C. A. Carus-Wilson, Proc. Roy. Soc. **47.** 363. 1890. — [9] C. v. Szily, Zugversuche u. s. w. Budapest 1901.

Legierungen nach WERTHEIM.

Legierung	Formel	F	Legierung	Formel	F
DARCETs Metall . .	$Pb_2Bi_2Sn_2$	1,74	Similor	ZCu_5	51,90
Letternmetall . . .	Pb_2Sb	1,87	Messing	ZCu_2	60,22
Schnell-Lot	PbSn	2,46	Neusilber	$Z_4Cu_{18}Ni_2$	61,88
Tomback	ZCu_2	32,50	Packfong	$Z_2Cu_5Ni_2$	68,10

Für Legierungen von Gold mit Spuren anderer Metalle fand ROBERTS AUSTEN[1], daß hierdurch die Kohäsionsverhältnisse sehr stark beeinflußt werden. Während nämlich reines Gold nach ihm eine Zugfestigkeit von 10 hat, wird sie beim Zusatz von nur 0,2 % von

Kalium oder Wismut . . . . 0,8 } (also viel kleiner)
Tellur oder Blei . . . . 6 }
Thallium, Zinn, Antimon . . . 10 (also unverändert)
aller anderen Metalle . . . 11 bis 14 (also größer).

Ähnlich ist der Einfluß auf die Dehnung vor dem Bruche, die bei reinem Gold 18,5 % beträgt und durch jene Zusätze einerseits bis an 50 heraufgeschraubt, andererseits ganz zum Verschwinden gebracht werden kann.

Ob beim Zusatz geringer Spuren fremder Stoffe zu anderen Metallen als Gold sich ähnliche Erscheinungen ergeben, ist noch nicht untersucht worden.

Ferner hat THURSTON[2] zahlreiche Bronzen untersucht und als festeste diejenige gefunden, welche 55 % Kupfer, 43 % Zink und 2 % Zinn enthält.

Für Besssemerstahl mit verschiedenem Gehalt an Kohlenstoff hat BAUSCHINGER[3] nicht nur die Werte für Zug, sondern auch die übrigen ermittelt, die hier der Kürze und Übersichtlichkeit halber gleich mit angegeben sind.

Bessemerstahl nach BAUSCHINGER.

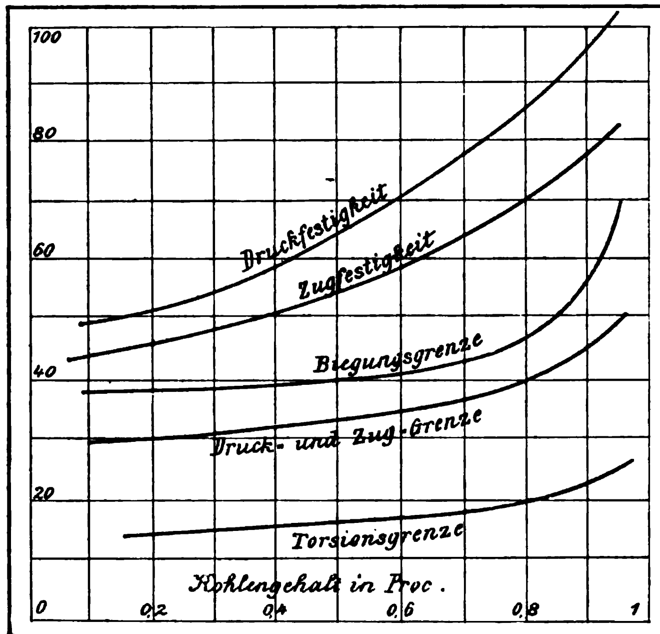
Gehalt an Kohlenstoff in Prozenten	Zug		Druck		Biegung		Schub	Torsion
	T	F	T	F	T	F	F	T
0,14	30	44	28	48	38	—	34	—
0,19	33	48	30	54	42	—	37	15
0,46	35	58	34	63	40	83	36	15
0,51	34	56	33	70	42	93	40	—
0,54	35	56	34	61	40	86	39	15
0,55	33	56	35	62	42	88	40	—
0,57	33	56	34	66	45	96	36	16
0,66	37	63	38	66	44	86	43	17
0,78	37	65	38	73	47	88	41	18
0,80	40	72	44	97	47	76	48	20
0,87	43	74	39	89	47	77	50	20
0,96	49	83	50	99	69	85	58	27

Wie man sieht, wächst sowohl der Tragmodul als auch der Festigkeitsmodul nicht unwesentlich (um 50 bis 100 %), wenn der Gehalt an Kohlenstoff von einem siebentel bis zu einem ganzen Prozent steigt. Einige der obigen Zahlen sind in Figur 278 der Anschaulichkeit halber graphisch dargestellt. Dabei ist aus den Zahlen für Zug- und Druckgrenze, die fast gleich sind, nur eine Kurve gebildet, während die Zug- und Druckfestigkeitskurven, wie man sieht, ziemlich verschieden sind.

Über die Zugfestigkeit des Goldes bei Zusatz verschiedener Metalle hat

[1] W. C. ROBERTS AUSTEN, Proc. Roy. Soc. 43. 425. 1888. — [2] THURSTON, Mondes 55. 148. 1879. — [3] BAUSCHINGER, Mitteilung aus dem mechanisch-technischen Laboratorium zu München, Heft 3. 1874.

Roberts Austen[1] Versuche angestellt, und zwar im Hinblick auf das periodische System. Reinstes Gold hat eine Zugfestigkeit von 6,8 Tonnen auf den Quadratzoll und eine Dehnung von 18,5 % vor dem Bruche. Zusatz von Elementen mit größerem Atomvolumen vermindert, mit kleinerem erhöht, mit gleichem läßt die Zugfestigkeit ungeändert; so wird durch Aluminium (0,2 %) die Zahl auf 8,9 er-



Figur 278.

höht, durch Tellur auf 3,9 und durch Wismut oder Kali gar auf 0,5 herabgedrückt. Ähnlich, aber doch nicht so einheitlich ist der Einfluß auf die Bruchdehnung.

Schwirkus[2] hat mit dem von ihm empfohlenen und in drei Sorten unter dem Namen Silberschlaglot in den Handel gekommenen Hartlot (Kupfer und Zink, mit 4 bis 12 % Silber) Kupfer- und Messingdrähte gelötet und die Zugfestigkeit des gelöteten mit der des ungelöteten Drahtes verglichen; die Verminderung bei Messing erwies sich als viel kleiner als die bei Kupfer; bei Kupfer stellte sich der Bruch immer in der Lötung ein, bei Messing dagegen nur bei der silberschwächsten Lötung (4 %).

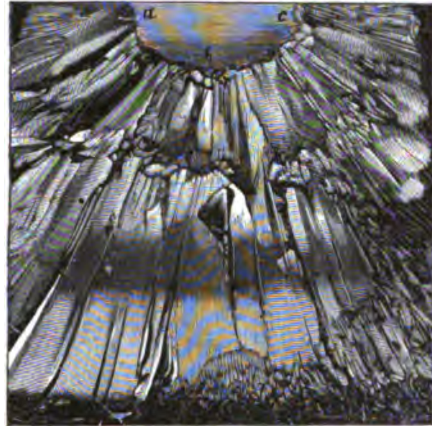
Shepherd und Upton[3] haben Kupfer–Zinnlegierungen untersucht und die Zugfestigkeit graphisch als Funktion der prozentischen Zusammensetzung dargestellt. Die betreffenden Kurven zeigen nun interessante Beziehungen zu den Ergebnissen der physikalisch-chemischen Forschung, nach der es bei mehr als 50 % Kupfer nur eine einzige Verbindung Cu_3Sn, aber eine ganze Reihe fester Mischungen von Sn und Cu mit verschiedener Kristallform gibt. Dieser Zusammenhang läßt gewisse, für die Praxis wichtige Schlüsse zu.

Glas. Nächst den Metallen interessieren am meisten die Gläser. Für diese liegen Untersuchungen vor von Wertheim und Chevandier[4], die für

Fensterglas von St. Quentin	1,763
Spiegelglas von Cirey	1,400
Kristallglas von Valery	1,002
Kristallglas von Baccarat	0,665

[1] W. C. Roberts Austen, Proc. Roy. Soc. **43.** 425. 1888. — [2] R. Schwirkus, D. Mech.-Ztg. 1900. p. 232. — [3] E. S. Shepard u. B. G. Upton, Journ. of phys. Chem. **9.** 441. 1905. — [4] Wertheim u. Chevandier, C. R. **20.** 1637. 1845.

fanden; von J. v. KOWALSKI[1], der für seine Glassorte 8,77 fand, von BRODMANN[2], der dasselbe Material wie KOWALSKI benutzte und trotzdem einen wesentlich größeren Wert, nämlich 10,7 im Mittel, dabei aber viel größere Einzeldifferenzen fand; und noch von manchen anderen Autoren. Alle diese Arbeiten treten an Bedeutung zurück gegen die von WINKELMANN und SCHOTT[3], weil erst hier ausreichend mannigfaltiges und wohldefiniertes Material, nämlich Jenaer Gläser von SCHOTT und Genossen, benutzt wurde. Der Apparat garantierte zentrale Belastung, die Stäbchen waren von quadratischem Querschnitt und 6 × 6 mm dick, die Belastung erfolgte durch Gewichte, aber mit Arretierung und so, daß beim Zerreißen die Fallhöhe des Gehänges nur 0,5 mm betrug. Die Stäbchen waren, um vollkommene Rißflächen zu erhalten, in der Mitte eingeschnürt, und zwar in der Weise, daß auf den vier Seitenflächen mittels eines Zylinders flache Höhlungen eingeschliffen und diese dann in der gleichen Richtung poliert wurden. Auch so ergaben sich immer noch ziemlich differente Werte für verschiedene Stäbchen aus demselben Glase, und zwar desto größere, je kleiner die immer noch meist vorhandene glatte Bruchfläche im Verhältnis zum ganzen Rißquerschnitt war; Figur 279 läßt den gerissenen und den gebrochenen Teil (*a b c*) des Querschnitts deutlich erkennen. Hieraus folgt, daß man sich den wahren Werten der Zugfestigkeit besser nähern wird, wenn man nicht die Mittelwerte, sondern die Maximalwerte nimmt. Diese sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, zugleich mit den Werten, die man berechnen kann, indem man für die Bestandteile der Gläser gewisse Koeffizienten, nämlich



Figur 279.

Na_2O	0,02	SiO_2	0,09	ZnO	0,15
K_2O	0,01	PbO	0,025	MgO	0,01
B_2O_3	0.065	As_2O_5	0,03	P_2O_5	0,075
Al_2O_3	0,05	BaO	0,05	CaO	0,20

benutzt (wegen der Fabriknummern vgl. oben p. 559):

Glassorte	Zugfestigkeit (beob.)	Zugfestigkeit (berechn.)	Differenz in Proz.
Natrontonerdeborosilikat	6,95	7,75	−11
Schwerstes Bleisilikat	3,53	3,80	− 8
Tonerdebleiborosilikat	6,12	5,98	+ 2
Natrontonerdeborat	5,76	5,79	− 1
Barytzinkborosilikat	7,52	7,33	+ 3
Schwerstes Kalibleisilikat	6,07	5,27	+13
Natronzinksilikat	8,51	8,53	0
Kalitonerdephosphat	5,56	6,21	−12
Kalibarytnatronsilikat	6,76	7,06	− 5
Natronbleizinksilikat	6,79	7,38	− 9
Kalikalksilikat	7,82	7,24	+ 7
Baryttonerdephosphat	7,63	6,50	+15
Kalizinksilikat	8,32	7,78	− 6
Schweres Bleisilikat	5,32	4,37	+18
Natronkalkzinksilikat	8,35	9,19	−10

[1] J. v. KOWALSKI, WIED. Ann. **36**. 307. 1889. — [2] C. BRODMANN, Gött. Nachr. 1894. p. 1. — [3] A. WINKELMANN u. O. SCHOTT, WIED. Ann. **51**. 712. 1894.

Die Zugfestigkeit der Gläser bewegt sich also zwischen 3,5 und 8,6, d. h. zwischen Grenzen, die sich etwa wie $1:2\,^1/_2$ verhalten; von der der stärkeren Metalle macht sie nur etwa ein Zehntel aus.

Hölzer. Hierfür liegen aus älterer Zeit die folgenden Zahlen vor:

F für Hölzer bei 20% Feuchtigkeit (nach WERTHEIM und CHEVANDIER).[1]

Holz	long.	rad.	tang.	Holz	long.	rad.	tang.
Pappel	1,97	0,15	0,21	Erle	4,54	0,33	0,18
Fichte	2,48	0,26	0,20	Eiche	6,49	0,58	0,41
Buche	3,57	0,89	0,75	Esche	6,78	0,22	0,41
Ahorn	3,58	0,72	0,37	Espe	7,20	0,17	0,41
Tanne	4,18	0,22	0,30	Akazie	7,93	—	1,23
Birke	4,30	0,82	1,06				

Die Akazie hat also das festeste, die Eiche fast ebenso festes, die Pappel das wenigst feste Holz. In der Achsenrichtung ist die Festigkeit am größten, in den beiden anderen ziemlich gleich.

In neuerer Zeit hat WIJKANDER[2] schwedische Hölzer mit großer Sorgfalt untersucht; es muß aber auf die Originalarbeit verwiesen werden.

Fäden. Es seien einige Zahlen für organische Stoffe, wie sie zu Fäden Verwendung finden, angegeben, obgleich sie schon deshalb nur beschränkte Bedeutung haben, weil hier die Proportionalität der Reißbelastung mit dem Querschnitt gar nicht besteht, somit auch die Reduktion auf das Quadratmillimeter eigentlich nicht zulässig ist; jedenfalls ist deshalb der wahre Querschnitt mit angegeben:

Stoff	Dicke	Festigkeit	Stoff	Dicke	Festigkeit
Pferdehaar	0,26 mm	9,6	Spinnfaden	0,0025 mm	18,8
Menschenhaar	0,10 „	11,6	Hanffaden	0,26 „	25,9
Wollfaden	0,55 „	13,9	Kokonfaden	0,0013 „	27,5

Die Festigkeit solcher Fäden ist also relativ sehr beträchtlich, was sie für wissenschaftliche Zwecke außerordentlich verwendbar macht.

Für Kautschuk ist es wegen der individuell sehr verschiedenen Verhältnisse sehr mißlich, Zahlen anzugeben; es sei aber auf Arbeiten von THURSTON[3] hingewiesen.

Für Gesteine liegen überaus zahlreiche Messungen von technischer Seite vor; es muß aber in dieser Hinsicht auf die technische Literatur, namentlich auf die Schriften von BACH hingewiesen werden.

Nur eine dieser Arbeiten, von GRÜBLER[4] ausgeführt, sei hier ihres prinzipiellen Interesses wegen noch besonders angeführt. Um nämlich die Zugfestigkeit einwandfrei zu erhalten, wird hier — es handelt sich um Zementmörtel u. s. w. — die Form des Hohlzylinders benutzt, auf diesen ein gleichförmiger innerer Druck ausgeübt und aus dem erreichten Grenzwerte des Druckes die Ringspannung an der inneren Oberfläche berechnet: nach der Theorie ist diese die größte aller überhaupt auftretenden Spannungen und somit das wahre Maß der Zugfestigkeit. Die Versuche lieferten in der Tat für verschiedene Wandstärken gleiche Werte, und diese stimmten nahezu überein mit den auf andere Weise erhaltenen.

[1] WERTHEIM u. CHEVANDIER, C. R. **23.** 1846. — [2] A. WIJKANDER, Bihang til tek. Samfunders Handl. 1897. Nr. 11. — [3] R. H. THURSTON, Science **6.** 758. 1897; **7.** 522. 1898. — [4] M. GRÜBLER, Physik. Ztschr. **4.** 78. 1902.

Kristalle. Bei diesen wird man in den verschiedenen Richtungen verschiedene Festigkeit erwarten dürfen, und die Erfahrung bestätigt diese Vermutung. Am sorgfältigsten ist wohl Steinsalz untersucht worden. Für dieses Material hat zuerst SOHNCKE[1] die Zahlenwerte ermittelt, auf Grund von Versuchen, gegen die dann, trotz ihrer Sorgfalt, verschiedene schwerwiegende Einwände erhoben worden sind. Jedenfalls sind sie überholt durch die Messungen von SELLA und VOIGT.[2] Diese fanden folgende Werte, der Kleinheit der Zugfestigkeit dieses Materials halber in Grammen pro Quadratmillimeter ausgedrückt:

a) Längs- und Querrichtung in einer Würfelfläche (φ = Winkel mit einer Hauptachse):

$\varphi =$	0	15	30	45
	571	(553)	737	1150

b) Längs- und Querrichtung in einer Granatoederfläche:

$\varphi =$	0	32	$54\frac{1}{3}$	72	90
	917	1870	2150	2240	1840

c) Längsrichtung in einer Hauptachse (χ = Winkel der Querdimension gegen die anderen Achsen):

$\chi =$	0	$22\frac{1}{2}$	45
	571	714	917

d) Längsrichtung in der Halbierungslinie des Winkels zweier Hauptachsen (ω = Winkel einer Querdimension gegen die Ebene beider Achsen):

$\omega =$	0	19	38	45
	1150	1620	1730	1840

Der Bruch erfolgte meist in einiger Entfernung von der Mitte der Stäbchen; die Bruchfläche war meist eine ebene, glänzende Spaltungsfläche, in einigen der letzten Fälle traten jedoch zwei oder gar vier Bruchflächen auf, die häufig das Stäbchen durchsetzten, so daß es in mehr als zwei Stücke zerfiel; in den beiden letzten Fällen ergaben sich sogar unebene und mitunter gekreuzte Bruchflächen.

Von anderen Kristallen sei noch Flußspat angeführt, der nach SELLA und VOIGT (a. a. O.) folgende Konstanten hat:

a) Längsrichtung und Querrichtungen den Hauptachsen parallel: 4,66.

b) Längsrichtung parallel einer Granatoedernormalen, eine Querdimension in derselben Würfelebene wie die Länge: 3,65.

c) Längsrichtung in einer Oktaedernormalen, eine Querdimension um 33, die andere um 65 Grad gegen eine andere Oktaedernormale geneigt: 2,21.

Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß die Einzelwerte, aus denen obige die Mittel sind, kolossal differieren, und daß wahrscheinlich die wahren Werte viel höher sind.

Endlich hat RINNE[3] für Glimmerstreifen, deren Längsrichtung teils parallel, teils senkrecht zur ausgezeichneten Linie der Schlagfigur war, folgende Werte gefunden: im ersten Falle 0,31; im zweiten: 0,25; dabei war der Bruch schieferig, und bei einem Präparat der zweiten Orientierung, das mit glattem Quersprung riß, fand sich sogar 0,43.

[1] L. SOHNCKE, POGG. Ann. **137**. 177. 1869. — [2] A. SELLA und W. VOIGT, WIED. Ann. **48**. 636. 1893. — [3] F. RINNE, Centralbl. f. Min. 1902. p. 262. Die Zahlen erscheinen etwas verdächtig klein, so daß ein Referent die 100-fachen dafür setzen zu sollen meinte; alsdann werden aber die Zahlen unglaubhaft groß.

Einfluß der Temperatur. Die Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Temperatur ist sehr häufig untersucht worden; hier können nur die Arbeiten mehr wissenschaftlichen Charakters erwähnt werden. PISATI[1] fand für Eisen (t Temperatur, F Zugfestigkeit, λ Dehnung vor der Trennung):

t	14°	50°	75°	90°	120°	125°	200°	235°	240°	300°
F	54,9	58,5	53,8	55,5	53,0	52,4	52,6	51,4	71,2	65,8
λ	0,144	0,122	0,044	0,049	0,027	0,019	—	0,029	0,067	0,116

Zwischen 14 und 235° nahm also F unregelmäßig und langsam ab, dann plötzlich stark zu und dann wieder ab. Ebenso fanden sich bei Stahl und Messing mehrere Maxima und Minima. Dagegen ergab hartes Kupfer:

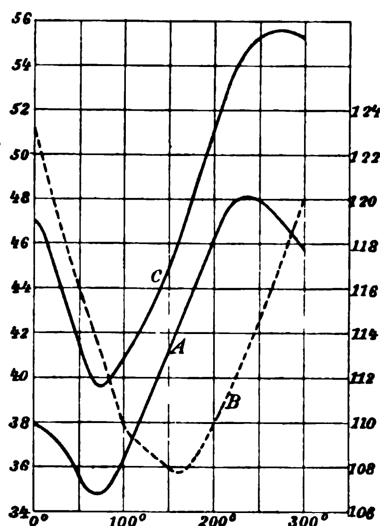
t	14°	50°	100°	150°	200°	250°	300°
F	49,6	47,6	46,1	43,2	41,3	38,0	31,3

also eine regelmäßige Abnahme der Festigkeit; bei weichem Kupfer ließ sich dieselbe sogar ziemlich genau durch die lineare Formel $F = 29,40 - 0,037\,t$ darstellen. Ähnlich verhält sich Aluminium, und zwar ist

$$\text{bis zu } 100^0\text{:} \quad F = 50,8 - 0,0458\,t - 0,000372\,t^2$$

$$\text{von 100 bis } 300^0\text{:} \quad F = 54,7 - 0,12\,t \quad .$$

Eingehende Untersuchungen hat LE CHATELIER[2] durchgeführt. Die Metallstäbe wurden, um ihnen die von der Fabrikation herrührende Härtung zu nehmen, vorerst bis zur Rotglut erhitzt, dann belastet und die Bruchverlängerung wie das Bruchgewicht bestimmt; der Bruch trat stets in der Mitte der Stäbe ein. Für rotes Kupfer befriedigte die lineare Formel $21 - 0,025\,t$. Legierungen zeigen meist eine anfänglich sehr geringe und erst für höhere Temperaturen starke Abnahme der Festigkeit. Aluminium-Messing hält sich für alle Temperaturen über Zinnbronze und anderen Legierungen, ist also für praktische Zwecke diesen vorzuziehen. Eigentümlich verhalten sich Eisen und Stahl. Bei 80° erreicht das Bruchgewicht ein Minimum, steigt dann bis zu 250° zu einem Maximum und fällt dann rasch bis zu dem Werte ab, den es bei Zimmertemperatur hat. Es liegt dieses Verhalten, wie Kontrollversuche über den Einfluß der Geschwindigkeit, der Wiederholung der Zyklen u. s. w. bestätigen, an einer molekularen Umwandlung, die das Material durch die permanenten Deformationen erleidet. Damit hängt es auch zusammen, daß sich Eisen und Stahl zwischen 100 und 250° sprungweise und mit Geräusch verlängern. Jenseits 300° hört die Erscheinung, die an Drähten auffälliger ist als an Stäben, wieder auf. — Bei Nickel nimmt das Bruchgewicht erst von etwa 300°, dann aber sehr stark ab. Nickeleisen



Figur 280.

[1] G. PISATI u. SAPORITA-RICCA, Nuov. Cim. (3) 1. 35. 1877; Soc. it. Scienze (3) 2. 1. 1877. — PISATI u. SICCHILONE, Rend. Acc. Linc. 1876—77. — [2] A. LE CHATELIER, C. R. 109. 24. 58. 1889; Génie civil 1891. p. 107.

(25 %) hat im gewöhnlichen Zustand eine gegen die Elastizitätsgrenze sehr große Festigkeit; wird es aber magnetisiert, so rücken beide Punkte sehr nahe aneinander. — Bei Zink endlich nimmt das Bruchgewicht sehr rasch ab, und zwar desto stärker, je langsamer die Belastung erfolgt.

Bald darauf hat ASCOLI[1] das Problem wieder aufgenommen und an Streifen aus gewalztem Eisen von CREUZOT (50 × 1,0 × 0,4) die Zugfestigkeit zwischen 0 und 300° bestimmt; auch das Verhältnis q des ursprünglichen zum Bruchquerschnitt wurde gemessen. Im Mittel aus mehreren Reihen fand sich folgendes

t	F	q	t	F	q
0	37,9	1,228	175	43,8	1,084
25	37,1	1,194	200	46,3	1,100
50	35,7	1,161	225	48,0	1,121
75	35,0	1,135	250	47,9	1,146
100	36,9	1,110	275	47,1	1,174
125	39,1	1,090	300	45,8	1,203
150	41,4	1,079			

Wie man sieht, hat die Zugfestigkeit ein Minimum bei etwa 70, ein Maximum bei etwa 236°, die Querschnittsverminderung ein Minimum bei etwa 160°. In der Figur 280 sind die Zugfestigkeiten (Kurve *A*), die Querschnittsverhältnisse (*B*) und die Zugfestigkeiten, berechnet für den Bruchquerschnitt (*C*) dargestellt. Schließlich sei bemerkt, daß die Bruchstelle unterhalb des Minimums meist unregelmäßig, darüber meist regelmäßiges Ansehen hatte.

Für Bronze (91 Kupfer, 5 ½ Zink, 3 Zinn) fand BACH[2] folgende Werte:

Temperatur	100	200	300	400	500
Zugfestigkeit	24,2	22,5	13,7	6,8	4,4
Bruchdehnung %	35,4	34,7	11,5	0	0
Querschnittsverminderung % .	47,4	48,2	16,2	0	0

Alle drei Größen nehmen also jenseits 200° rapide ab, die beiden letzten werden von 400° ab geradezu null. Es ist jedoch zweifelhaft, ob sich andere Bronzen ebenso oder ähnlich verhalten.

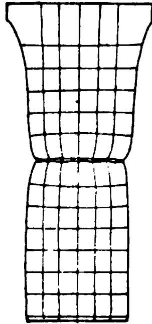
Verschiedene Legierungen hat CHARPY[3] untersucht, namentlich im Hinblick auf die Wirkung des Anlassens. So ergab sich für Messing der Wert 62, nach Erwärmung auf 540° nur noch 32 und nach 930° nur noch 27; gleichzeitig stieg die Bruchdehnung von 4 auf 55 % (nach Erwärmung auf 540°), weiter auf das Maximum 65 % (nach 700°), sank dann aber wieder auf 57 % (nach 930°). Eine elektrisch-mikroskopische Untersuchung der Bruchfläche zeigte beim gehärteten Messing ziemlich homogene Struktur, im angelassenen Messing schieden sich dagegen oktaedrische Kristalle aus, die mit steigender Anlaßtemperatur immer deutlicher wurden und jenseits von 700° eine Umformung unter Bildung von Bläschen (Zinkdampf?) erfuhren. Demnach besteht das Messing aus einer kristallisierten und einer amorphen Legierung; die Kristallisation verbessert die mechanischen Eigenschaften.

Bei Kupfer–Zinklegierungen verschiedener Zusammensetzung hat das Anlassen je nach der Temperatur desselben einen verschiedenen Einfluß: im ersten Intervall ist der Einfluß null, im zweiten nimmt die Festigkeit immer mehr ab, die Dehnung immer mehr zu, im dritten bleiben beide konstant, im letzten

[1] M. ASCOLI, Rend. Acc. Linc. (5) **1**. 1. Sem. 388. 1892. — Es sei hier darauf aufmerksam gemacht, daß der Referent der „Beiblätter" (LCK.) in zahlreichen ausländischen Abhandlungen die Begriffe „Festigkeit" und „Zähigkeit" verwechselt hat, infolgedessen sind diese Arbeiten den Benutzern vielfach entgangen und auch von mir zum Teil erst durch einen Zufall aufgefunden worden. — [2] C. BACH, Mitt. über Forsch.-Arbeiten u. s. w. Heft 1. p. 32. 1901. — [3] G. CHARPY, C. R. **116**. 1131. 1893; **121**. 494. 1895.

nehmen beide ab. Die Grenzen zwischen diesen Intervallen liegen für reines Kupfer etwa bei 350, 400 und 1000; je mehr Zink hinzukommt, desto mehr erniedrigt sich die erste und die zweite Grenze. Im vollkommen angelassenen Zustand (dritter Abschnitt) hat die Legierung mit 43 % Zink die größte Festigkeit, die mit 30 % Zink die größte Verlängerung vor dem Zerreißen.

Bei sehr tiefen Temperaturen, wie sie durch Eintauchen in flüssige Luft oder Sauerstoff erzielt werden, erhöht sich die Zugfestigkeit nach DEWAR und HADFIELD[1] für die meisten Metalle ganz bedeutend. Am größten, nämlich über 100 %, ist die Erhöhung bei Eisen, am kleinsten, nämlich 26 %, bei Silber; Wiederholung der Abkühlung zeigt im allgemeinen dieselben Verhältnisse. Gegossene Proben von Zinn, Blei, Lötmetall und Woodmetall erhalten bei -182° ebenfalls zwei bis dreifache Festigkeit. Quecksilber wird etwa halb so fest wie Blei bei Zimmertemperatur. Eine Ausnahmestellung nehmen Zink, Wismut und Antimon ein, insoweit ihre Festigkeit, vermutlich infolge Auftretens von Spannungen in diesen kristallinischen Metallen, bis zu 50 % abnimmt. — Die Dehnung vor dem Zerreißen nimmt im allgemeinen stark ab und kommt in einigen Fällen sogar ganz zum Verschwinden. Nur bei gewissen Nickeleisen bleibt sie fast oder ganz ungeändert. Manganeisen, das sich durch sehr hohe Zugfestigkeit auszeichnet, hat bei Zimmertemperatur eine sehr starke, bei Kälte aber fast gar keine Bruchdehnung. Besondere Eigentümlichkeiten zeigen Legierungen des Eisens mit anderen Metallen, es kann aber hierauf nicht eingegangen werden.



Figur 281.

Ergänzungen zur Zugfestigkeit. Die Erscheinungen, die beim Zerreißen der Körper im einzelnen auftreten, sind von großer Mannigfaltigkeit und zum Teil auch wissenschaftlich nicht ohne Interesse; es fehlt aber an Platz, darauf einzugehen, und es muß an folgendem genügen. In Figur 281 ist, im Anschluß an eine photographische Wiedergabe von BACH, die Deformation der Längs- und Querfäden beim Bruch angedeutet. Wenn der Versuchskörper schon von vornherein nach der Mitte zu sich verjüngt, wird die Deformation natürlich etwas anders. Daß diese Verjüngung die Zugfestigkeit nicht beeinträchtigt, wurde schon bemerkt. Es hat sich aber bei gewissen Materialien sogar herausgestellt, daß eine Einkerbung geradezu von Vorteil ist. So hat KIRKALDY drei Rundeisenstäbe miteinander verglichen, von denen der erste etwas dicker als der dritte war, während der zweite eine Einkerbung und hier den kleineren, im übrigen aber den größeren Querschnitt hatte. Es ergaben sich folgende Festigkeiten und Querschnittsverminderungen:

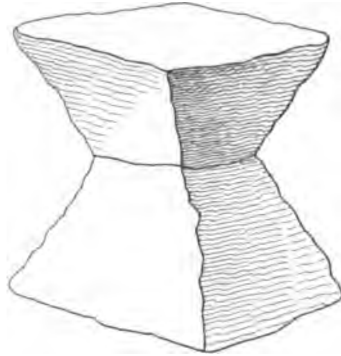
Material	Form	Zugfestigkeit	Querschnittsverminderung
Low Moor-Walzeisen	Dicke 2,54 cm	45,6	51 %
	Dicke 2,54, Kerbe 1,85 cm	64,2	8,0
	Dicke 1,85 cm	49,2	49,2
Gowanwalzeisen, geschmiedet	Dicke 2,54 cm	50,3	40,7 %
	Dicke 2,54, Kerbe 1,78 cm	69,1	13,8
	Dicke 1,78 cm	50,2	36,0

Man erkennt die Ursache der größeren Festigkeit der gekerbten Stäbe: der Querzug der der Kerbe benachbarten Teile verhindert die Querkontraktion zum größeren Teile. Neuere Versuche von BACH haben freilich gezeigt, daß dieser günstige Einfluß der Kerbung nicht selten durch ungünstige überdeckt wird.[2]

[1] J. DEWAR, DINGL. polyt. Journ. **302.** 48. 1896. — J. DEWAR u. R. A. HADFIELD Chem. News **91.** 13; Ann. chim. phys. (8) **4.** 556. 1905. — [2] Vgl. C. BACH, Elastizität und Festigkeit. 4. Aufl. p. 120.

b) Druckfestigkeit.

Wenn ein Körper von zwei gegenüberliegenden Seiten zusammengedrückt wird, oder wenn er mit einer dieser Seiten befestigt, von der andern aus zusammengedrückt wird, so wird seine **Druckfestigkeit** oder, wie man früher vielfach sagte, seine **rückwirkende Festigkeit** in Anspruch genommen. Man hat es aber hier mit einer im Effekt sehr mannigfachen und komplizierten Erscheinung zu tun. Erstens, je nachdem der Versuchskörper im Verhältnis zu seinem Querschnitt kurz oder lang ist: im ersten Falle wird er wirklich zerquetscht, zermalmt, zertrümmert, im anderen weicht er bei leisester Asymmetrie — und eine solche ist meist unvermeidlich — nach einer Seite aus und wird zerknickt; wie bei der Elastizität bildet diese letztere Erscheinung auch hier die Brücke zwischen Druck und Biegung. Zweitens kommt es auf Material und Gang der Beanspruchung an, ob die Wirkung eine explosionsartige Zertrümmerung zu Staub ist, wie z. B. bei kleinen Glaswürfeln (s. u.), wobei nicht selten auch eine Lichterscheinung auftritt, oder ob sie darin besteht, daß, wie bei vielen Gesteinsarten, an den Mantelflächen des prismatisch gedachten Stabes sich Platten ablösen, die nach den Mitten hin stärker werden, so daß der übrig bleibende Rest eine Doppelpyramide darstellt (Figur 282); zwischen diesen beiden Extremen gibt es dann zahlreiche Übergänge. Endlich ist drittens zu bedenken, daß das bisher Gesagte nur für spröde Körper gilt, während plastische der Pressung nach allen Seiten hin ausweichen und so, durch Vergrößerung des beanspruchten Querschnitts, die Katastrophe hinhalten.



Figur 282.

Auf die Technik der Versuche, die große Hilfsmittel beanspruchen, kann hier nicht eingegangen werden. Nur sei bemerkt, daß die Flächen des Versuchs-

Metalle.		Roter Sandstein	6 bis 10
Stahl[1]	bis 430	Dichter Kalkstein	8 bis 14
Messing	110	Diabas	27
Gußeisen	50 bis 100	Basalt	13
Schmiedeeisen	25 bis 55	Porphyr	25
Kupfer	30 bis 60	Ziegelstein	0,5 bis 2
Blei	etwa 5	Zementmörtel	1,5
Minerale.		**Gläser.**	
Bergkristall ⊥[2]	154	Minimum	55
Bergkristall[3]	160	Maximum	125
Bergkristall ∥[3]	182	**Hölzer.**	
Orthoklas[2]	17,3	Eiche	7,0
Korund[1]	60	Buche, Esche	6,6
Achat[3]	132	Weißtanne	5,1
Gesteine.		Nußbaum, Erle	5,0
Schwarzer belgischer Marmor[3]	25	Fichte	4,8
Weißer italienischer Marmor[3]	7	Rottanne	4,6
Granit	15 bis 22	Birke	4,5
Gneis	2,5 bis 8	Pappel	3,6

[1] KIRSCH, Ver.-Bl. d. D. Ges. f. Mech. u. Opt. 1893. p. 164. — [2] F. RINNE, Centralbl. f. Min. 1902. p. 262. — [3] A. WINKELMANN u. O. SCHOTT, a. a. O.

körpers sorgfältig herzustellen sind, daß für exakte Zentrierung nach Möglichkeit zu sorgen ist, und daß man, um nicht zu kleine Werte zu erhalten, den Körper zwischen möglichst harte Platten einschließen muß, wenn man nicht Vorkehrungen trifft, auf diese ganz verzichten zu können.

Zunächst sei die Druckfestigkeit einiger Stoffe sehr verschiedenen Charakters zusammengestellt, vielfach nur von der Bedeutung roher Mittelwerte (vgl. vorstehende Tabelle).

Wie man sieht, ist die Druckfestigkeit im allgemeinen sehr viel größer als die Zugfestigkeit; nur bei den Hölzern findet das Umgekehrte statt. Im einzelnen sind auch hier die Unterschiede sehr stark, so ist harter Stahl fast hundertmal so fest wie Blei. An der Spitze steht unter den Metallen Stahl, unter den Mineralien Bergkristall, unter den Gesteinen Diabas, Marmor und Porphyr, unter den Hölzern Eiche, Buche und Esche; daraus ergeben sich die entsprechenden praktischen Konsequenzen.

Für Jenaer Gläser fanden WINKELMANN und SCHOTT (a. a. O.) folgende Werte:

Natrontonerdeborosilikat	120,8	110,9	+16
Schwerstes Bleisilikat	60,6	63,0	− 4
Tonerdebleiborosilikat	105,7	88,2	+17
Natrontonerdeborat	81,2	87,9	− 8
Barytzinkborosilikat	84,0	87,8	− 5
Schwerstes Kalibleisilikat	77,5	77,9	− 1
Natronzinksilikat	97,8	95,7	+ 2
Kalitonerdephosphat	71,7	72,0	0
Kalibarytnatronsilikat	91,6	90,7	+ 1
Natronbleizinksilikat	99,0	102,3	− 3
Kalikalksilikat	68,3	76,6	−12
Baryttonerdephosphat	74,6	73,3	+ 2
Kalizinksilikat	73,9	79,2	− 7
Schwerstes Bleisilikat	67,3	68,8	− 2
Natronkalizinksilikat	112,9	105,2	+ 7

Hinter den beobachteten Werten stehen wieder die berechneten, wobei diesmal die Koeffizienten

Na_2O	0,6	SiO_2	1,23	MgO	1,1
K_2O	0,05	PbO	0,48	P_2O_5	0,76
B_2O_3	0,9	BaO	0,62	CaO	0,2
Al_2O_3	1,0	ZnO	0,6		

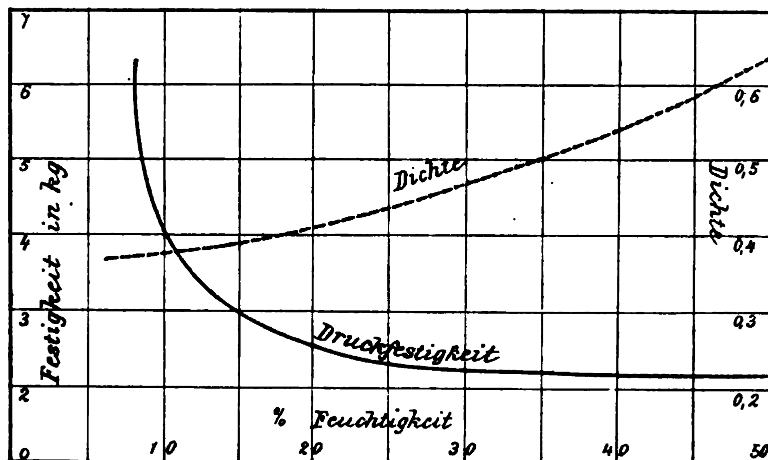
benutzt wurden. Wie man sieht, schwankt die Druckfestigkeit der Gläser zwischen 60 und 120, also wie 1:2. Mit der Zugfestigkeit geht sie nicht irgendwie parallel, auch haben die Koeffizienten der chemischen Bestandteile für beide Fälle keine ersichtliche Beziehung. Die Druckfestigkeit der Gläser ist ein starkes Vielfaches ihrer Zugfestigkeit, das Verhältnis bewegt sich zwischen 9 und 19.

Den Widerstand von Glasröhren gegen inneren Druck haben BRADLEY und BROWNE[1] untersucht; der innere Wasserdruck wurde so lange gesteigert, bis die Röhre zerbrach. Für dieselbe Glassorte ergab sich die Festigkeit um so größer, je größer die Wandstärke, aber je kleiner der innere Durchmesser war; man kann also in erster Annäherung das Produkt FD/W als Maß der Festigkeit der Sorte betrachten. — Mit demselben Thema beschäftigt sich auch eine Arbeit von Fürst GALITZIN[2]; er findet, daß die Geschwindigkeit der Drucksteigerung keinen Einfluß hat, und daß die Festigkeit mit zunehmendem Radienverhältnis erst zu- und dann abnimmt.

---

[1] W. P. BRADLEY u. A. W. BROWNE, Journ. of phys. chem. 8. 37. 1904. — [2] B. GALITZIN, Bull. St. Petersburg 16. 1. 1902.

Für Hölzer sind schon oben einige Zahlen aus älterer Zeit (von HODGKINSON herrührend) angegeben; sie beziehen sich auf den trocknen Zustand der Hölzer. In neuerer Zeit hat in dieser Hinsicht BAUSCHINGER[1] eingehende Untersuchungen angestellt und gefunden, daß die Festigkeit in doppelter Weise von der Dichte des Holzes abhängt; insoweit nämlich mit wachsender Feuchtigkeit die Dichte



Figur 283.

zunimmt, nimmt die Festigkeit ab, und zwar (Figur 283) anfangs schnell, später langsam; bei verschiedenen Proben derselben Holzart, welche dieselbe Feuchtigkeit, aber verschiedene Dichte haben, ist dagegen die Festigkeit desto größer, je größer die Dichte ist. Im Mittel fand BAUSCHINGER bei $15\,^0/_0$ Feuchtigkeit folgende Zahlen:

Lärche	5,1	Föhre	4,2	Weimutskiefer	2,5
Fichte	4,3	Tanne	4,2	Zirbe	2,4

Beziehung zur Länge und zum Querschnitt. Die Komplikation des Begriffs der Druckfestigkeit kommt besonders darin zum Ausdruck, daß sich bei demselben Material je nach Höhe und Querschnitt des Stabes oder Prismas und sogar je nach der Form des Querschnitts verschiedene Werte ergeben. Auf die Angabe von Zahlenmaterial, das dies veranschaulicht, muß hier verzichtet werden. Dagegen sei aus den verschiedenen Formeln, durch die man jene Abhängigkeit darzustellen versucht hat, und die natürlich durchweg nur empirisch-praktische Bedeutung haben, die von BAUSCHINGER angeführt; sie gilt auch nur, wenn die Höhe h kein zu großes Vielfaches der Dicke d (höchstens etwa das Fünffache) ist und ist in drei durch ihre Komplikation unterschiedenen Formen ausgestaltet worden, nämlich, wenn u der Umfang des Querschnitts q ist und α und β empirisch zu ermittelnde Konstanten sind:

vollständig
$$F = \left(\alpha + \beta \frac{\sqrt{q}}{h}\right) \sqrt{\frac{\sqrt{q}}{\frac{u}{4}}} \quad .$$

einfacher
$$F = \left(\alpha + \beta \frac{\sqrt{q}}{h}\right) \frac{\sqrt{q}}{u/4} \quad ,$$

am einfachsten
$$F = \alpha + \beta \frac{\sqrt{q}}{h} \quad .$$

[1] BAUSCHINGER, Mitt. d. mech.-techn. Lab. der technischen Hochschule München 1887. Heft 16.

Hiernach haben BAUSCHINGER, BACH, MARTENS u. A.[1] zahlreiche Versuche berechnet und meist schon mit den einfacheren Formeln befriedigende Ergebnisse erzielt.

Für größere Längen, namentlich vom Zwölffachen der Dicke an, versagen derartige Formeln, weil hier ganz andere Verhältnisse eintreten. Man kann aber für rohe Zwecke zu brauchbaren Werten gelangen, wenn man die obigen Zahlen für die Festigkeit

bei	12	24	36	48	60	72 facher Länge
mit	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

multipliziert. Außerdem gelten dann zum Teil ganz andere Gesetze, nämlich die für die Knickfestigkeit; sie ist u. a. dem Querschnittsquadrat direkt und dem Höhenquadrat umgekehrt proportional; auch kommt die Form des Querschnitts in Betracht, und zwar ist im allgemeinen die Festigkeit desto größer, je regelmäßiger, bei gleicher Größe, der Querschnitt geformt ist.[2]

Schließlich sei eine Arbeit von FRANCKE[3] erwähnt über die Knickung von unten festgemauerten, oben durch ein Gewicht belasteten Säulen.

c) Biegungsfestigkeit.

Diese Festigkeit wurde früher auch vielfach als relative Festigkeit bezeichnet; der wenig berechtigte Ausdruck scheint aber abgekommen zu sein. In der Elastizitätslehre (vgl. oben p. 618 und 636) führt die Biegung zu keiner neuen Konstanten, da sie sich in eine Dehnung der konvexen und eine Zusammenziehung der konkaven Hälfte auflösen läßt. Analog würde man hier, wenn h der Hebelarm der biegenden Kraft ist, und K_1 und K_2 die Kräfte sind, die bleibende Veränderung bezw. Bruch herbeiführen,

$$K_1 h = k T \frac{q}{l} \quad , \qquad K_2 h = k F \frac{q}{l}$$

haben, wo

für rechteckigen Querschnitt (Breite a, Höhe b) $q = \frac{1}{6} a b^2$	für ein festes, ein freies Ende $k = 1$
für quadratischen Querschnitt $q = \frac{1}{6} a^3$	„ zwei aufgestützte Enden $k = 4$
„ kreisförmigen „ $q = \frac{\pi}{4} r^3$	„ zwei feste Enden $k = 8$

ist. Für die Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit von den Dimensionen des Stabes gelten hiernach dieselben Gesetze wie für die Biegungselastizität (p. 630 u. f.). Was aber den Zahlenfaktor betrifft, so hat man zu bedenken, daß es sich hier nicht, wie dort, um kleine, sondern um große Dehnungen und Verkürzungen handelt, und daß für solche nicht eine gemeinsame Konstante, wie dort E, sondern zwei verschiedene maßgebend sind, wie denn in der Tat die obigen Zahlen für Druck- und Zugfestigkeit beträchtlich voneinander abweichen. Hieraus folgt, daß die durch Biegungsversuche bestimmten Trag- und Festigkeitsmoduln T und F zwischen denen für Zug und Druck liegen werden. Ferner ergibt sich, daß man dem Querschnitt des auf Biegung beanspruchten Körpers eine ganz be-

[1] Vgl. C. BACH, Elastizität und Festigkeit. 4. Aufl. p. 150. — A. MARTENS, Mitt. d. K. techn. Vers.-Anst. Berl. **14.** 133. 1896. — [2] Vgl. hierzu die technische Literatur über Knickfestigkeit, u. A. bei C. KRIEMLER, Habilitationsschrift. Karlsruhe 1902. — [3] A. FRANCKE, Ztschr. f. Math. u. Phys. **46.** 419. 1901.

stimmte Form geben muß, um möglichst günstige Ergebnisse zu erzielen; ist der Stab oder Balken z. B. mit den Enden aufgelegt und in der Mitte belastet, so muß man bei Metallen und Steinen (Druckfestigkeit größer als Zugfestigkeit) den Querschnitt ⊥ förmig (umgekehrt T-förmig), bei Hölzern T förmig (T-förmig) gestalten. Kommt es hierauf weniger an, wohl aber darauf, möglichst viel Material in den Grenzschichten zu konzentrieren, so wählt man einen hohlen, □ förmigen oder einen I förmigen (doppelt-T-förmigen) Querschnitt. Wo es angängig ist, muß man im übrigen auch der Länge nach die Masse passend verteilen.

Biegungsfestigkeit einiger Stoffe.[1]

Stahl	80	Eis (je nach Orientierung) nahe unter 0°	0,08—0,14	Fichte	5,1
Gußeisen	32	Esche	8,5	Zirbe	3,8
Schmiedeeisen	25	Eiche	7,1	Weimutskiefer	2,8
Quarz ∥	16,3	Buche	6,6	Granit	1,2
Quarz ⊥	12,6	Lärche	6,8	Kalkstein	0,9
Flußspat (je nach Orientierung)	2,2—4,7	Föhre	5,5	Roter Sandstein	0,6—0,9
Steinsalz (je nach Orientierung)	1,2—1,9	Tanne	5,2	Weißer Sandstein	0,4—0,6
				Ziegelstein	0,1—0,3

Für verschiedene Temperaturen hat J. v. KOWALSKI[2] für eine nicht genau bezeichnete Glassorte folgende Werte erhalten, die eine Abnahme der Festigkeit und eine entsprechende Zunahme der Dilatation an der Bruchstelle erkennen lassen:

Temperatur	Biegungsfestigkeit	Dilatation
12°	87,9	0,00132
100	87,0	0,00145
150	86,4	0,00156
200	86,0	0,00162

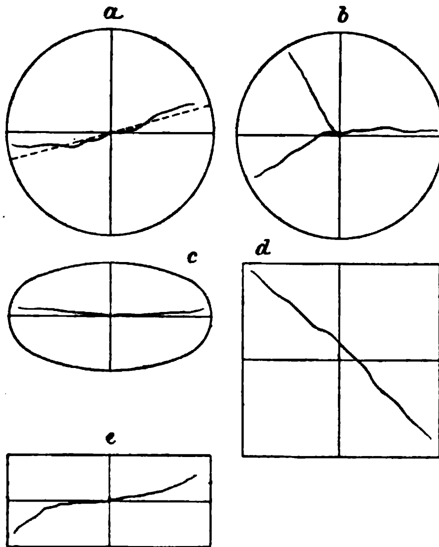
Wegen der Biegungsfestigkeit von gekühltem und ungekühltem Jenenser Glas vergleiche man eine Abhandlung von LUDWIG[3]; auch sei auf eine Arbeit von FRÉMONT[4] hingewiesen über die Lage der neutralen Faser bei durch Biegung gebrochenen Körpern.

Auch die Biegungsfestigkeit erscheint wegen der Natur der betreffenden Deformation von Größe und Form des Querschnitts abhängig. Es muß genügen, hier als Beispiel die von BACH[5] ermittelte Biegungsfestigkeit gußeiserner Stäbe von verschiedener Querschnittsform anzuführen: sie ist am kleinsten, nämlich 19,8 oder das 1,45-fache der Zugfestigkeit für Doppel-T-Form, größer für Schienenprofil, noch größer der Reihe nach für Rechteck, Quadrat und Kreis, und am größten für stehendes Quadrat, nämlich 32,2 oder das 2,35-fache der Zugfestigkeit; eine für diesen Verlauf nach Maßgabe der Konzentration des Materials nach der Achse aufgestellte Formel liefert befriedigende Übereinstimmung.

Über die Beschaffenheit des Bruches bei der Biegung ist es schwer, allgemeineres anzugeben, da hier Zufälligkeiten eine besonders große Rolle spielen. Am wertvollsten mögen noch die Angaben sein, die VOIGT[6] für Quarzstäbchen

[1] Die Zahlen rühren zum Teil von verschiedenen älteren Beobachtern her, die für Nadelhölzer, die sich auf 15% Feuchtigkeit beziehen, von BAUSCHINGER, a. a. O. Heft 16. 1887; die für Quarz, Flußspat und Steinsalz von VOIGT u. SELLA (a. a. O.), die für Eis von H. HESS, Ann. d. Phys. 8. 417. 1902, die für Stahl von den KRUPPschen Werken in Essen; für Bessemerstahl vgl. die Tabelle oben p. 839. — [2] J. v. KOWALSKI, WIED. Ann. 39. 155. 1890. — [3] W. LUDWIG, Physik. Ztschr. 1. 124. 1899. — [4] C. FRÉMONT, C. R. 132. 202. 1901. — [5] C. BACH, a. a. O. p. 236. — [6] W. VOIGT, WIED. Ann. 48. 666. 1893.

macht. Der Bruch erfolgte hier nur ausnahmsweise in einer einzigen, nahezu vertikalen Fläche, und alsdann stets zu früh. Bei den normal verlaufenden Versuchen dagegen traten entweder von der oberen Seite her zwei unter 45° geneigte unvollkommene Ebenen auf, oder aber neben einem vertikalen Querschnitt eine in der unteren Hälfte des Stäbchens verlaufende horizontale Fläche, die sich seitlich mehr oder weniger ausbreitete und durch Ausbiegung nach oben die eine oder beide Stabhälften nochmals zerspaltete. — Bei Platten, die durch Wasserdruck gebogen oder gebrochen werden, lassen sich aus der Verteilung der Beanspruchungen Schlüsse über den Verlauf der Sprünge ziehen, wie u. A. BACH[1] gezeigt hat, und diese werden durch die Erfahrung im allgemeinen bestätigt. So erhält man bei kreisförmiger Platte nahezu einen Durchmesser, oder aber drei Radien; bei elliptischer nahezu die große Achse, beim Quadrat etwa eine Diagonale, beim Rechteck eine Linie, die in der Mitte der großen Kante parallel läuft, dann aber nach den Ecken hin umbiegt. Natürlich ist bei diesem Verlauf, der in den Figuren 284 angedeutet ist, der Zufall bezw. die minimalste Ungleichförmigkeit des Materials teilweise mitwirkend.



Figur 284.

d) Scher- oder Schubfestigkeit.

Es ist das die Festigkeit, d. h. der Widerstand gegen Scherung oder Schub, wobei also entweder zwei Gegenflächen eines würfelähnlichen Körpers tangential beansprucht werden oder ein stabförmiger Körper quer durchschnitten wird. Indessen zeigt sich bei näherer Betrachtung, daß die exakte Festlegung des Begriffs auf Schwierigkeiten stößt und überhaupt nicht einheitlich erfolgen kann. Bestimmungen von allgemeiner Bedeutung liegen auch nur sehr wenige vor. Solche für Bessemerstahl nach BAUSCHINGER sind schon oben angeführt; für Schmiedeeisen kann etwa 28 als Mittelwert gelten, für Gußeisen etwa 18; sie ist also im allgemeinen kleiner als die Zugfestigkeit.[2] Für einige Gesteine fand ebenfalls BAUSCHINGER[3]:

Syenit	1,4—2,7	Roter Sandstein . .	0,6—1,0
Granit	0,5—1,4	Weißer Sandstein . .	0,1—0,3
Kalkstein	0,5—1,0	Ziegelstein	0,1—0,3

Für Holz (Kiefer und Fichte) kann man 0,3—0,5 annehmen.

Spaltbarkeit der Kristalle. Die Schubfestigkeit kommt auch in Betracht bei zwei der auffälligsten Erscheinungen, die sich bei Kristallen darbieten. Eine davon ist ihre Spaltbarkeit nach bestimmten Flächen, die Spaltungsflächen heißen. Es sind die Ebenen, in deren Normale die Festigkeit, und zwar speziell die Scherfestigkeit des Kristalls (von einigen Autoren wird die Beanspruchung anders aufgefaßt) am kleinsten ist. Sie gehen stets wirklichen oder möglichen

[1] C. BACH, a. a. O. p. 597 ff. — [2] Wegen einer bestimmten Beziehung zwischen Zug- und Scherfestigkeit bei Stahl vgl. C. FRÉMONT, C. R. 133. 437. 1901. — [3] BAUSCHINGER, a. a. O. Heft 3 (1874) u. 9 (1883).

Kristallflächen parallel, und zwar für eine bestimmte Spezies immer den Flächen derselben einfachen Kristallform, z. B. beim Kalkspat den Flächen des Rhomboeders, beim Flußspat denen des Oktaeders, beim Steinsalz denen des Würfels. Je nach den relativen Differenzen der Festigkeit in verschiedenen Richtungen ist die Spaltbarkeit der Kristalle von verschiedenem Grade der Vollkommenheit, am vollkommensten beim Glimmer, dann kommen Gips, Kalkspat, dann u. a. Flußspat und Steinsalz, ganz zuletzt u. a. Bergkristall, bei dem sie so gut wie null ist. — Hat ein Kristall Spaltbarkeit in mehr als zwei nicht in einer Zone liegenden Ebenen, so kann man aus ihm eben begrenzte Spaltungsstücke herausschneiden, die den natürlichen Kristallen ähnlich sind, aber natürlich andere Eigenschaften haben; so beim Kalkspat rhomboedrische, beim Steinsalz würfelförmige Spaltungsstücke.

Die Spaltung wird in der Mineralogie auch als Blätterbruch bezeichnet, und es werden ihm andere Arten von Bruch zur Seite gestellt, wie muschliger, ebener, splittriger Bruch u. s. w. In physikalischer Hinsicht sind die Unterschiede dieser Bruchformen und ihre genetischen Grundlagen noch wenig erforscht.

Gleitflächen. Eine andere Klasse ausgezeichneter Flächen in manchen Kristallen sind die Gleitflächen oder Gleitschichten; sie sind von REUSCH[1] entdeckt worden und bieten nach verschiedenen Richtungen besonderes Interesse. Über die theoretischen Betrachtungen, die VOIGT[2] für den Kalkspat durchgeführt hat, ist schon im Artikel „Elastizität der Kristalle“ berichtet worden. Die Erscheinung kompliziert sich in manchen Fällen dadurch, daß die verschobenen Teilchen zugleich in kristallographische Zwillungsstellung übergehen, nämlich immer dann, wenn der Charakter der Trennungsfläche es zuläßt, also nicht beim Steinsalz (Granatoederfläche), wohl aber beim Kalkspat (Rhomboederfläche, die aber nicht mit der Spaltungsrhomboederfläche identisch, sondern mehr stumpfwinklig ist).

Die Beziehung zwischen Spaltungsflächen und Gleitungsflächen ist in physikalischer Hinsicht insofern sehr eigenartig, als die ursprünglich ausgeübte Kraft in beiden Fällen in die Richtung der schließlichen Trennungsfläche fällt; bei der Gleitung wirkt sie aber direkt als Scherung, bei der Spaltung indirekt durch eine die Teile in der Querrichtung auseinandertreibende Querkraft.[3]

Eine dritte Art von derartigen Veränderungen an Kristallen hat MÜGGE[4] festgestellt und als Translation bezeichnet; sie ist erkennbar an einer eigentümlichen Streifung, an gewissen Knickungen und Biegungen und kommt gerade bei denjenigen Kristallen häufig vor, die auch Gleitflächen bilden, z. B. bei Kalkspat; beide Flächen sind aber nicht oder doch nicht immer identisch. In bezug auf das Weitere muß auf die reichhaltigen Angaben des genannten Autors verwiesen werden.

e) Torsions-, Drillungs- oder Drehfestigkeit.

Für das Moment $K_1 h$ der dauernd tordierenden bezw. dasjenige $K_2 h$ der abdrehenden Kraft (h Hebelarm) gilt wie bei der Elastizität die Formel $K_1 h = Tq$ bezw. $K_2 h = Fq$, wo

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für kreisförmigen Querschnitt} & & q = \frac{\pi}{2} r^3 \\ \text{„ rechteckigen} & \text{„} & q = \frac{2}{3}\frac{a^3 b^3}{(a^2+b^2)^{1/2}} \\ \text{„ quadratischen} & \text{„} & q = \frac{1}{3\sqrt{2}} a^3 \end{array}\right\} \text{ist.}$$

[1] REUSCH, POGG. Ann. **132**. 441. 1867. — [2] W. VOIGT, WIED. Ann. **39**. 432. 1890; **67**. 201. 1899. — [3] Vgl. hierzu auch C. VIOLA, N. Jahrb. f. Min. **1**. 9. 1902. — [4] O. MÜGGE, ibid. **1**. 71. 1898; **2**. 55. 1899; Gött. Nachr. 1899. p. 56.

Einige Werte für F sind: Gußeisen 17—25. Schmiedeeisen 6—12; einige Werte von T für Stahl sind oben zusammengestellt.

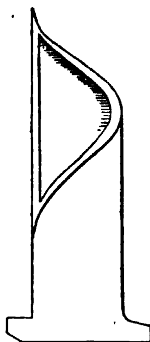
Die Abhängigkeit von der Form des Querschnitts hat BACH[1] festgestellt. Für eine bestimmte Sorte Gußeisen fanden sich folgende Zahlen für die Drehfestigkeit in Kilogramm pro Quadratmillimeter, sowie in Teilen der Zugfestigkeit:

Kreis	16,2	1,02
Kreisring	13,0	0,82
Quadrat.	22,3	1,42
Rechteck, $a:b = 1:2,5$ . .	25,3	1,6
„ $a:b = 1:9$ . . .	25,1	1,59
Hohlquadrat	17,9	1,13
Kreuz	25,9	1,63

Für Glas hat KOWALSKI[2] folgende Werte bei verschiedenen Temperaturen gefunden:

12°	78°	100°
10,1	9,2	9,0

Für Steinsalz erhielt VOIGT[3] die Drillungsfestigkeit zu etwa 2,8 kg/qcm, also unerwarteterweise nicht unwesentlich größer als die Zugfestigkeit (s. oben); auch gilt der obige Wert fast identisch für die Würfel- und die Granatoederfläche als Seitenflächen, während doch die Zugfestigkeiten für diese Fälle sich fast wie 1 : 2 verhalten. Da sich hier die Beanspruchung aus Zug und Druck zusammensetzt, wäre zu schließen, daß seitlicher Druck die Zugfestigkeit erhöht und zugleich einen Ausgleich der Richtungen herbeiführt; jedoch ist das Material zu solchen Schlüssen noch nicht ausreichend.



Figur 285.

Was die Form des Bruches bei der Drillung betrifft, so ist, da hier die Oberflächenelemente stärker gespannt sind, als die inneren, von vornherein einleuchtend, daß das Zerreißen an der Oberfläche beginnen und nach dem Innern fortschreiten muß wie es denn auch die Erfahrung bestätigt. Die Gestalt des Bruches selbst ist natürlich je nach den Körperformen verschieden; es läßt sich aber so viel sagen, daß er im allgemeinen schief, annähernd etwa 45° gegen die Achse liegt und, namentlich bei Hohlkörpern, spiralig am Mantel herumläuft; die Figur 285 deutet dies schematisch mit Benutzung einer BACHschen photographischen Aufnahme an; auch sei auf die Abbildungen in BACHs Buche hingewiesen, die den Bruch bei Kreuzstäben und Schrauben darstellen.

Über Festigkeit und Tragfähigkeit im allgemeinen ist noch die Bemerkung zu machen, daß in der Wirklichkeit häufig mehrere Arten gleichzeitig beansprucht werden, und daß sie sich dann gegenseitig nicht unwesentlich beeinflussen, ebenso wie auch der zeitliche Verlauf und die Wiederholung der Beanspruchung von großer Bedeutung sind. So untersuchte BAUSCHINGER[4] den Einfluß der Streckung der Metalle auf die Elastizitätsgrenze und fand eine Erhöhung derselben z. B. bei Bronze durch Streckung mittels 10 kg pro qmm von 7,1 auf 9,4 kg. KRAMM[5] untersuchte die Beziehungen zwischen Torsion und absoluter Festigkeit, und erhielt eine Reihe interessanter Sätze. Ferner gehören

[1] C. BACH, Ztschr. d. Ver. d. Ing. 1889. p. 140 u. 166; Elastizität u. Festigkeit. 4. Aufl. p. 314. — [2] J. v. KOWALSKI, WIED. Ann. 39. 158. 1890. — [3] W. VOIGT, ibid. 48. 656. 1893. — [4] BAUSCHINGER, DINGL. Polytechn. Journ. 224. 1. 129. 1877; s. auch: UCHATIUS, ibid. 223. 242. 1877. — [5] KRAMM, Über den Einfluß der Torsion auf die absolute Festigkeit von Drähten. Marb. Inaug.-Diss. 1873.

hierher Untersuchungen und Betrachtungen von W. THOMSON[1], HIMSTEDT[2], WARBURG[3] u. A. Auf die zahlreichen, diese Frage behandelnden, rein technischen Untersuchungen kann hier nicht näher eingegangen werden.

f) Das prinzipielle Problem der Festigkeit.

Bisher ist jede der verschiedenen Gattungen von Festigkeit für sich betrachtet worden, und es haben sich dabei nicht nur für die verschiedenen Stoffe, sondern auch bei einem und demselben Stoffe für die verschiedenen Gattungen der Beanspruchungen verschiedene Werte der Festigkeit herausgestellt. Nun kommen aber, wie in der Elastizitätstheorie gezeigt wird, alle diese Erscheinungen auf zwei einander prinzipiell gegenüberstehende Größen hinaus: die Spannung und die Deformation, und für jede dieser beiden Größen gibt es wiederum zwei einander gegenüberstehende und sich ergänzende Typen: die normale und die tangentiale Beanspruchung bezw. Deformation. Es erhebt sich somit die prinzipielle Frage: Was ist für die Störung des Zusammenhangs der Teile fester Körper, also für ihre Festigkeit schlechthin, maßgebend? Gibt es eine einem bestimmten Material individuelle Festigkeitskonstante, und wenn: von welcher Natur ist sie?

Diese Frage ist schon frühzeitig aufgeworfen, von ST. VENANT und CLEBSCH wohl zuerst klar formuliert, aber erst in neuester Zeit bis in ihre Wurzeln verfolgt worden, von physikalischer Seite namentlich von VOIGT und seinen Schülern (SELLA, JANUSZKIEWICZ, BRODMANN, KUNTZE u. A.), auf technischer Seite besonders von MOHR und FÖPPL. Es muß genügen, hier einen gedrängten Überblick über diese Arbeiten zu geben.

Es sind offenbar drei Möglichkeiten vorhanden: es könnte für den Zerfall maßgebend sein erstens eine bestimmte lineare Dilatation, zweitens eine bestimmte Spannung und drittens keine von beiden Größen, wohl aber eine geeignete Kombination von ihnen; dazu käme dann noch viertens die Möglichkeit, daß sich die Festigkeit überhaupt nicht allgemein charakterisieren ließe. Die erste Annahme ist schon von WEBER und NEUMANN, namentlich aber von SAINT-VENANT gemacht worden, die zweite von CLEBSCH, und zwar soll die Grenzspannung sowohl ein Zug wie ein Druck sein und beliebig gegen die Trennungsfläche liegen können. Indessen lehren die Ergebnisse der Erfahrung, namentlich die große Verschiedenheit der unter verschiedenen Umständen gefundenen Zahlen, daß keine dieser beiden Annahmen richtig sein kann. Nicht nur die Druck- und Zugfestigkeit sind kolossal verschieden, auch die Zug- und Biegungsfestigkeit weichen erheblich, bei Steinsalz z. B. wie 1 : 2, voneinander ab, obgleich doch die Natur der Beanspruchung in gewissem Sinne dieselbe ist. Man vergleiche ferner die Zahlen von KOWALSKI, Glas betreffend. Ferner hat sich bei den SELLA-VOIGTschen Messungen am Steinsalz gezeigt, daß die Festigkeit von Stäbchen bei gleicher Achsenrichtung (parallel einer Würfelkante), in hohem Grade von der Orientierung der Seitenflächen abhängt, nämlich bei Granatoederrichtung um mehr als die Hälfte größer ist als bei der Würfelrichtung, und zwar ganz gleich für Zug und Biegung; und das, obwohl doch der Querschnitt keine andere Bedeutung als die der Summation über lauter gleiche Fäden haben kann. Man wird hier sofort an eine Besonderheit der Oberfläche denken, also annehmen, daß es sich hier nicht um Volumen-, sondern um Flächenfestigkeit handelt, daß die Oberfläche selbst geringere Festigkeit besitzt als das Innere und den Zerfall daher beschleunigt — in verschiedenem Maße je nach der Orientierung der Querschnittskontur. Diese Auffassung wird durch Versuche von BRODMANN

---

[1] W. THOMSON, Enc. Brit. Art. „Elasticity". — [2] F. HIMSTEDT, Ber. naturf. Ges. Freiburg 8. (2) 1882. — [3] E. WARBURG, ibid. 7. (4) 1880.

bestätigt, die für geätzte Glasstäbe weit größere Werte liefern als für ungeätzte, nämlich:

	Dehnung	Biegung	Drillung
ungeätzt	11,9	13,5	12,1
geätzt	17,8	27,5	20,3

Eine weitere Frage ist die, ob und inwieweit man in der Festigkeitslehre von den Verhältnissen bei homogener Deformation auf solche bei ungleichförmiger schließen dürfe; hegt man in dieser Hinsicht Zweifel — und es gibt mehrfache Gründe, das zu tun — so wird man es für wichtig halten, die bisherigen Versuchsmethoden durch solche mit zweifellos homogener Deformation zu ersetzen. Hierfür hat VOIGT die folgende Beanspruchung als geeignet ermittelt: zwei Hauptspannungen sind einander gleich vorgeschrieben, die dritte wird so lange gesteigert, bis der Zerfall eintritt. Es wurden demgemäß in der Mitte verjüngte Stäbchen einem Längszug unterworfen, während sie einmal in der Atmosphäre, das andere Mal in einem Rezipienten mit hochgespanntem Gase aufgehängt waren. Da der Druck mit Hilfe von Kohlensäurebomben nur bis 55 Atm. gesteigert werden konnte, mußten Stoffe von geringer Festigkeit gewählt werden, zuerst Steinsalz (VOIGT), alsdann ein dichtes und feinkörniges Gemisch von Stearin- und Palmitinsäure, durch Zusammenschmelzen erhalten (JANUSCZKIEWICZ), endlich eine Mischung von chemisch reiner Stearinsäure und fein gesiebtem Gips (KUNTZE). Die beiden ersten Substanzen ergaben übereinstimmend ein sehr überraschendes Resultat: es war im Rezipienten die gleiche Federspannung zum Zerreißen erforderlich wie in der freien Luft. Daraus folgt aber, daß die Längsspannung in beiden Fällen kolossal verschieden ist, nämlich, was zunächst das Steinsalz betrifft,

in Luft: 570 (Federspannung) — 10 (Luftdruck) = 560 g/qmm
im Rezipienten: 570 — 520 (Gasdruck) . . . . . = 50 „

Von gleicher Längsspannung ist also nicht die Rede; dagegen ist, wie leicht ersichtlich, die Differenz zwischen dem Zuge normal und dem parallel zur Zerreißungsfläche in beiden Fällen gleich groß. Die Versuche an der Stearinsäure- (62 %), Palmitinsäure- (22 %), Paraffin- (16 %), -Mischung bestätigten das vollkommen, lieferten aber überdies ein noch viel merkwürdigeres Resultat. Es war nämlich die Federspannung 145, der Luftdruck wieder 10, der Gasdruck 413 g/qmm; berechnet man hieraus den longitudinalen und transversalen Druck (letzterer ist einfach der Gas- bezw. Luftdruck), so erhält man:

im Luftraum Längsdruck = — 135, Querdruck = + 10
im Rezipienten + 267 + 413 .

Das Zerreißen hatte also zwar im Luftraum durch einen Längszug, im Rezipienten aber durch einen Längsdruck stattgefunden; die Größe, die nach der zweiten der obigen Meinungen charakteristisch sein sollte, hat also hier in zwei durchaus vergleichbaren Fällen sogar entgegengesetztes Vorzeichen! Aber auch die Bruchdilatation ist ganz verschieden, und damit erledigt sich auch die erste Meinung. Höchstens kann man sagen, daß die Differenz zwischen den gleichsinnig gerechneten Spannungen normal und parallel zur Trennungsfläche eine wenigstens für Fälle der geschilderten Art charakteristische Größe sei.

An dem dritten der oben genannten Präparate hat alsdann KUNTZE mit allen Vorsichtsmaßregeln die vier praktischen Festigkeiten bestimmt und folgendes erhalten:

2. Zugfestigkeit	0,55	540
3. Drillungsfestigkeit	0,81	793
4. Biegungsfestigkeit	1,01	986 .

Diese Zahlen widerlegen nicht nur die obigen Annahmen, sondern auch einige weitere, so die, von THOMSON und TAIT ausgesprochene, daß die Differenz zwischen größter und kleinster Hauptspannung maßgebend sei, sowie die, daß es eine charakteristische lineare Beziehung zwischen den Dilatationen gebe, endlich daß die Energie bei allen Arten der Beanspruchung konstant sei.

Es bleibt nun noch die in der Technik übliche Auffassung zu kritisieren übrig; die neueste Theorie ist hier die von MOHR aufgestellte, die in den beiden Sätzen gipfelt: 1. die Bedingung des Zerfalls hängt nur von den gegen die Trennungsfläche wirkenden Drucken oder Spannungen ab, und 2. diese Trennungsfläche steht stets auf der Ebene der größten und kleinsten Hauptspannung senkrecht, ist also der mittleren Hauptspannung parallel; daraus folgt dann weiter, daß die Bedingung des Zerfalls von der mittleren Hauptspannung unabhängig ist. Auf die elegante, aber, wie VOIGT gezeigt hat, angreifbare geometrische Darstellung der MOHRschen Theorie kann hier nicht eingegangen werden; es muß genügen, anzuführen, daß die Messungen von VOIGT und KUNTZE mit ihr nicht im Einklang stehen. Für die Technik mögen die MOHRschen Sätze und Konstruktionen in vielen Fällen brauchbare Regeln darstellen; das prinzipielle Problem wird durch sie nicht gelöst.

Das Gesamtergebnis vorstehender Betrachtungen ist also bis auf weiteres in der Hauptsache noch negativ; es bedarf weiterer Untersuchungen, um die Natur der Festigkeit wissenschaftlich klarzustellen.

Von den Einzelergebnissen sei schließlich noch folgendes angeführt. FÖPPL zertrümmerte Gesteinspräparate, insbesondere gepreßte Zementwürfel, durch Druck entweder auf ein oder auf zwei Flächenpaare, betrachtete das Eintreten der ersten Sprünge als maßgebend und erhielt das Resultat, daß der Grenzdruck in beiden Fällen derselbe, daß also, wie man sagen kann, die Druckfestigkeit gleich der „Umschlingungsfestigkeit" ist — ein Ergebnis, das mit den VOIGTschen Untersuchungen nicht im Einklang steht. — ROTH diskutiert eingehend die sämtlichen Möglichkeiten und gibt schließlich der MOHRschen Definition der Festigkeit den Vorzug, wenn er auch zugibt, daß sie nicht immer gültig sei. — SZILY schließt aus seinen Zugversuchen mit auf inneren Druck beanspruchten Röhren (s. o.), daß nicht die Spannung, sondern die Dehnung maßgebend sei. — An diesen Andeutungen muß es an dieser Stelle genügen.[1]

g) Kinetische oder dynamische Festigkeit.

Die bisherigen Betrachtungen setzten stillschweigend voraus, daß die Beanspruchung *statisch* erfolgt, es wurde sogar bei den feineren Experimentaluntersuchungen Wert darauf gelegt, die Belastung so vorsichtig wie möglich auszuführen. Dieser statischen Festigkeit steht nun die kinetische oder dynamische gegenüber,

[1] Literatur zur Prinzipienfrage: ST.-VENANT, Mém. sav. étr. **14**. 233. 1856. — A. CLEBSCH, Theorie der Elastizität. Leipzig 1862. p. 138. — THOMSON und TAIT, Nat. phil. **1**. 832. 1883. — J. v. KOWALSKI, WIED. Ann. **36**. 320. 1889. — C. BRODMANN, Gött. Nachr. 1894. 1. — A. SELLA und W. VOIGT, WIED. Ann. **48**. 638. 1893. — W. VOIGT, ibid. **53**. 43. 1894; **67**. 452. 1899; Ann. d. Phys. **4**. 567. 1901. — A. FÖPPL, Mitteilung aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der technischen Hochschule. München 1900, Heft 27. — O. MOHR, Ztschr. Ver. d. Ing. **44**. 1524. 1900; **45**. 4. 1901. — P. ROTH, Ztschr. f. Math. u. Phys. **48**. 285. 1902. — L. JANUSZKIEWICZ, Gött. Inaug.-Diss. 1898. — G. KUNTZE, ibid. 1903; Ann. d. Phys. **11**. 1020. 1903. — C. v. SZILY, Int. Verb. f. d. Material-Prüf. d. Techn. Budapest 1901.

bei der auf den betrachteten Körper eine lebendige Kraft mehr oder weniger plötzlich einwirkt oder bei der er selbst in irgend einer für die Wirkung maßgebenden Bewegung begriffen ist.

Stoßfestigkeit. Die erste der beiden somit präzisierten Klassen von Erscheinungen betrifft das, was man kurz als Stoßfestigkeit bezeichnen kann. Im Prinzip kann es ebensoviele Stoßfestigkeiten wie statische geben, je nach der Art der Beanspruchung, man kann einen Körper plötzlich auf Zug, Druck, Biegung, Drillung beanspruchen. Es liegen aber für mehrere dieser Beanspruchungen kaum Bearbeitungen vor, und das Interesse beschränkt sich auf zwei Probleme. Das eine ist die eigentliche Stoßfestigkeit, bei der der Körper auf Druck (ev. auf Zug) beansprucht wird. Man läßt also auf den Körper bestimmte lebendige Kräfte wirken, z. B. gemessene Gewichte aus gemessenen Höhen fallen und steigert die eine oder die andere dieser beiden Größen so lange, bis Bruch eintritt; theoretisch maßgebend ist dann das Produkt Gv^2 oder Gh. Indessen hat sich gezeigt, daß auf diese Weise erzielte Resultate keine allgemeinere Bedeutung haben, daß hier die Stoßdauer, die Elastizitätskonstanten des stoßenden und des gestoßenen Körpers, die Oberflächengestalt beider u. s. w. von verwickeltem Einfluß sind. Auch kann die Größe Gv^2 unmöglich die einfache Charakteristik liefern, da doch für $v = 0$ immer noch die statische Festigkeit bleibt; man muß also entweder diese hinzufügen oder die Analyse des Stoßvorgangs vornehmen. Nur zwei Punkte lassen sich einfach erledigen: Einerseits wird dasselbe Gewicht, das statisch noch lange nicht Bruch erzeugt, kinetisch dies tun, sobald die kinetische Energie einen gewissen Betrag überschreitet, und man wird in erster Annäherung daran denken, daß die erstmalige Dilatation mindestens doppelt so groß ist wie die nach Ablauf der Schwingungen definitiv sich einstellende, in zweiter Annäherung aber an die Beziehungen denken, die z. B. HERTZ für statische Berührung und kinetischen Stoß zweier Körper aufgestellt hat. Andererseits kann auch der Fall eintreten, daß ein Gewicht, das statisch Bruch herbeiführt, unter Umständen auffällt, die zur Herbeiführung des Bruches nicht genügen, z. B. wegen der außerordentlich kurzen Stoßzeit. So haben J. und B. HOPKINSON auf eine Scheibe, an der ein vertikal ausgespannter Draht unten endigte, ringförmige Gewichte fallen lassen und gefunden, daß Eisen- oder Kupferdrähte Momentankräfte bis etwa $^1/_{1000}$ Sekunde Dauer ohne Schaden aushalten, auch wenn sie das statische Bruchgewicht erheblich überschreiten. — Man vergleiche hierzu auch Versuche von PEROT und LÉVY, die freilich schwer zu deuten sind. — Wie eigentümlich die beiden erwähnten, einander entgegengesetzten dynamischen Einflüsse sich geltend machen, lehrt am besten die vielbesprochene Frage, ob in Fällen von Unsicherheit langsame oder rasche Beanspruchung vorteilhafter sei, ob es z. B. besser ist, über eine zweifelhaft gewordene Brücke möglichst langsam oder möglichst rasch zu fahren: für die eine Entscheidung spricht die erste, für die andere die zweite der obigen Erwägungen.

Mit steigender Temperatur nimmt auch die Stoßfestigkeit, wie es scheint, allgemein ab. So hat ANDREWS Versuche an Eisenbahnachsen angestellt, bei denen er sie auf Biegung durch Stoß in Anspruch nahm; die Festigkeit sank, die Bruchbiegung stieg mit steigender Temperatur, zugleich ging der körnige Bruch in mehr fasrigen über. Auch den Einfluß des Abschreckens, der nicht einheitlich ist, hat ANDREWS untersucht.

Bei anderen Versuchen bestand die Kinetik nicht in eigentlichen Stößen, sondern in einem raschen Wechsel von entgegengesetzten Beanspruchungen. So hingen REYNOLDS und SMITH an einen Stab ein Gewicht und bewirkten mittels einer Dampfmaschine schnelle Hebungen und Senkungen (in der Sekunde 20 bis 30 mal). Es zeigte sich, daß die Anzahl der zum Bruch führenden Hebungen und Senkungen um so kleiner war, je schneller sie aufeinander folgten, und daß bei sehr schneller Folge die spezifischen Unterschiede

in der Festigkeit, z. B. zwischen hartem und weichem Stahl, verschwinden. — Bei den Versuchen von EWING und HUMPHREY wurde der Bruch durch einige Millionen Dehnungen und Zusammendrückungen erzielt, wobei die Kraft noch unter der Elastizitätsgrenze lag; dabei erfährt das Eisen z. B. sehr merkwürdige mikroskopische Veränderungen. — Bei Versuchen von ARNOLD zeigte sich, daß der Widerstand von Stahl gegen Bruch unter alternierenden Drucken umgekehrt proportional ist der Stärke der Druckänderung, und daß hierbei der Stahl in irreversibler Weise spröde wird.[1]

Festigkeit schwingender oder rotierender Körper. Dieses Problem hat infolge der zahlreichen Fälle, in denen Körper brechen, ohne daß nach statischen Gesetzen solches zu erwarten wäre, längst das Interesse der Techniker wachgerufen; in neuester Zeit ist es durch die Untersuchungen von SCHLICK über Massenverteilung, Resonanz und Schiffswellen neu belebt worden. Das elastische Problem ist schon im Artikel „Elastische Schwingungen" am Schluß erwähnt worden. In bezug auf die dabei auftretende Bruchgefahr in verschiedenen Fällen kann hier nur nochmals auf die dort genannten Arbeiten von SOMMERFELD, LORENZ u. s. w., sowie auf die weiteren von BOUSSINESQ, FRITH und LAMB[2] hingewiesen werden.

3. Härte.

Ritzhärte; Härteskala. In der Mineralogie hat sich schon vor langer Zeit das praktische Bedürfnis geltend gemacht, das, was man im gewöhnlichen Sprachgebrauch als Härte bezeichnet — eine Eigenschaft der Mineralien, die für ihre Charakteristik und Wiedererkennung von Wert ist —, in einfacher Weise zu definieren und experimentell ohne irgend größere Veranstaltungen zu bestimmen. Das kann nun geschehen durch Ermittelung der Wirkung, die eine Spitze eines Körpers auf eine möglichst ebene und glatte Fläche eines anderen Körpers ausübt; als gut sichtbare Wirkung empfiehlt sich dabei die Ritzung (besser als das unscheinbare punktförmige Eindringen). Man nennt also einen Körper härter als einen anderen, wenn eine Spitze des ersteren eine glatte Fläche des letzteren ritzt; und indem man dies Verfahren nach dem Schema *a*—*b*, *b*—*c*, *c*—*d* u. s. w. fortsetzt, kann man sich eine Skala verschaffen, in der die Körper nach ihrer Härte angeordnet sind. Diese Methode rührt von HAUY her, und nach ihr hat MOHS die folgende Härteskala gebildet:

1. Talk.	3. Kalkspat.	5. Apatit.	7. Quarz.	9. Korund.
2. Gips.	4. Flußspat.	6. Feldspat.	8. Topas.	10. Diamant.

Man ist dann einen Schritt weiter gegangen, hat die zehn Ordnungsnummern des Tableaus als „Härtenummern" bezeichnet und charakterisiert durch sie nebst Bruchteilen (meist nur $^1/_2$ oder auch, statt $6^1/_2$, lieber 6—7) die Härte aller übrigen Stoffe. Einige solche Zahlen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Das ganze Verfahren ist offenbar von rein praktischem Charakter, beruht aber auch als solches auf zwei stillschweigenden Annahmen, deren Richtigkeit erst noch zu prüfen wäre: erstens, daß, wenn eine Spitze aus Stoff *a* eine Ebene aus Stoff *b* ritzt, eine Spitze aus Stoff *b* sicher eine Fläche aus Stoff *a* nicht ritzt; zweitens, daß, wenn nach dieser Definition *a* härter als *b* und *b* härter

[1] B. HOPKINSON, Proc. Roy. Soc. **74.** 498. 1905. — A. PEROT u. H. M. LÉVY, C. R. **138.** 474. 1198. 1904. — TH. ANDREWS, Proc. Inst. Civ. Ing. **87.** (I) 1886 u. **94.** (II) 1888; **103.** 1890. — O. REYNOLDS u. J. H. SMITH, Proc. Roy. Soc. **70.** 44. 1902. — J. A. EWING und J. C. HUMPHREY, ibid. **71.** 79. 1902. — J. O. ARNOLD, Chem. News **90.** 211. 1904. —
[2] J. BOUSSINESQ, C. R. **116.** 1418. 1893. — J. FRITH u. E. H. LAMB, Journ. Inst. Electr. Eng. **31.** 146. 1902.

als *c* ist, dann auch sicher und erst recht *a* härter als *c* sei; denn nur dann ist die Härte vom Charakter einer Nummer (vom Charakter einer mathematischen Größe zunächst noch zu schweigen).

Achat	7	Bleiglanz	2,5	Gold	2,5—3	Platiniridium	6,5
Adular	6	Borsäure	3	Granat	7	Quarz	7
Alabaster	1,7	Chlorsilber	1,3	Graphit	0,5—1	ROSES Metall	2,5
Alaun	2—2,5	Diamant	10	Gips	1,6—2	Salpeter	2
Aluminium	2	Dolomit	3,5—4	Hornblende	5,5	Schwefel	1,5—2,5
Andalusit	7,5	Eisen	4½	Iridium	6	Schwerspat	3,3
Anthracit	2,2	Eisenglanz	6	Iridosmium	7	Serpentin	3—4
Antimon	3,3	Eisenkies	6,3	Kalkspat	3	Silber	2,5—3
Antimonblüte	2,6	Eisenvitriol	2	Kaolin	1	Stahl, ganz weich	5
Antimonglanz	2	Feldspat	6	Korund	9	„ ganz hart	8½
Apatit	5	Feuerstein	7	Kupfer	2,5—3	Steinkohle	2—2,5
Aragonit	3,5	Flußspat	4	Kupfervitriol	2,5	Steinsalz	2
Arsen	3,5	Galmei	5	Lehm (0°)	0,3	Talk	1
Asbest	5	Glaubersalz	1,7	Magneteisenerz	6	Topas	8
Asphalt	1—2	Glas, gewöhn-		Marmor	3—4	Turmalin	7,3
Augit	6	liches	5	Meerschaum	2—3	Wachs (0°)	0.2
Bernstein	2—2,5	Glas, schwerstes		Messing	3½	Wismut	2,5
Beryll	7,8	Bleisilikat	4½	Opal	4—6	Zinn, gegossen	1½
Bittersalz	2,3	Glas, Borosilikat	6½	Palladium	4,8		
Blei	1½	Glimmer	2,8	Platin	4,3		

Um diese Vorfragen zu prüfen, hat AUERBACH[1] 14 verschiedene Jenaer Glassorten, die sich, wie sich später zeigen wird, sehr erheblich (bis zum Verhältnis 1 : 2) an Härte unterschieden, systematischen Ritzversuchen unterworfen; von jeder Sorte wurde ein Brocken mit einer weder zu stumpfen noch zu scharfen Spitze hergestellt und unter 60° mit starkem Drucke über die Fläche des anderen Glases geführt; alle 14 mal 13 = 182 Kombinationen wurden durchgeführt. Überraschenderweise zeigte sich, daß jedes Glas jedes andere ritzt, selbst das weichste das härteste. Um also auf die Härte schließen zu können, mußte man die Definition abändern und dasjenige von zwei Gläsern härter nennen, welches das andere stärker ritzt, als dieses jenes, während bei gleicher Ritzstärke gleiche Härte bestehen soll. Erschwert wurde diese Bestimmung durch den, namentlich bei der mikroskopischen Beobachtung deutlich hervortretenden qualitativen Unterschied der Ritze, die bei einigen Sorten blätterig, bei anderen muschelig, bei noch anderen unregelmäßig waren, die bald reinen Längscharakter hatten, bald mit Quersprüngen durchsetzt waren. Immerhin konnte in zahlreichen Fällen gezeigt werden, daß die so bestimmten Härten nicht das Verhalten von Größen oder auch nur Nummern haben. So fanden sich folgende Widersprüche (die Zahlen bedeuten die 14 verschiedenen Gläser, das Zeichen > bedeutet härter als): $8 > 14 > 2$ und trotzdem $8 = 2$; $13 > 1 > 9$ und trotzdem $13 = 9$; $12 > 11 > 7$, aber $7 > 12$; $11 = 5$ und $6 = 5$ und trotzdem $11 > 6$. — Man vergleiche hierzu auch die Bemerkungen von BÜSGEN in seiner weiter unten genannten Arbeit. — Es erweisen sich also die beiden bisher stillschweigend zugrunde gelegten Annahmen als unrichtig, die Härtenummern schweben somit prinzipiell in der Luft. Damit soll nicht gesagt sein, daß sie nicht häufig richtig sein können; Vertrauen, das nicht noch anderweitig gerechtfertigt würde, wird man aber zu ihnen nie haben dürfen.

Relative Härtemessung; Sklerometer. Den Übergang zu messenden Versuchen machte FRANKENHEIM, indem er den Druck schätzte, den er mit der Hand ausüben mußte, um mit einer bestimmten Spitze in der zu prüfenden

[1] F. AUERBACH, WIED. Ann. **53**. 1000. 1894.

Fläche einen Ritz zu erzeugen. Aber erst SEEBECK, FRANZ, GRAILICH und PEKAREK, F. EXNER, PFAFF, TURNER, MARTENS, KICK, JANNETAZ, BÜSGEN u. a.[1] benutzten Apparate, die diesen Druck oder die bei bestimmtem Drucke erzielte Tiefe des Eindringens anzugeben gestatteten und den Namen Sklerometer erhielten. Zunächst ist hierzu zu bemerken — was auch EXNER zugibt —, daß zum Wesen einer Messung hier das eine der beiden notwendigen Erfordernisse fehlt, indem nur die obere Grenze gemessen wird, während die untere der Schätzung überlassen bleibt; der Fortschritt besteht also nur darin, daß die Schätzung von der Hand auf das empfindlichere Auge übertragen wird. Was bestehen bleibt, sind zwei wesentliche Einwände: erstens der, daß das Ergebnis von zahlreichen speziellen Faktoren, als Material und Schärfe der Spitze, Druckrichtung, Geschwindigkeit der Bewegung u. s. w. abhängt; insbesondere kommt erschwerend in Betracht, daß Stahl, das geeignetste Material für die Spitze, schwer zu identifizieren ist, und daß man nicht für alle Stoffe dasselbe Spitzenmaterial anwenden kann, also erst noch eine vergleichende Brücke zwischen harten und weichen Körpern schlagen muß; ferner aber, daß man die Schärfe der Spitze nicht identifizieren kann und daß sich auch eine und dieselbe Spitze beim Gebrauch verändern wird. Diese Bedenken werden auch nicht entkräftet durch die vielfach benutzten Modifikationen des Ritzverfahrens, z. B. Abdrehen oder Abschleifen mittels rotierenden Scheibchens, Messung des Substanzverlusts mit der Wage u. s. w. — man vergleiche hierzu u. a. die Methoden von JANNETAZ und GOLDBERG sowie von E. MÜLLER.[2] Der zweite Einwand betrifft die Frage, ob denn überhaupt der Bewegungsvorgang des Ritzens, der doch nur zu Deutlichkeitszwecken gewählt wurde, zur Härtedefinition taugt, ob er nicht vielmehr das Problem hoffnungslos verwickelt. Das ist nun tatsächlich der Fall; von den statischen Festigkeitsverhältnissen wissen wir einiges, die dynamischen entziehen sich, wie schon oben bemerkt wurde, größtenteils exakter Begründung.

In der Tat ist die statische Methode der Härtemessung älter als die kinetische, und man ist immer wieder zu ihr zurückgekehrt; insbesondere sind hier die Arbeiten von CRACE-CALVERT und JOHNSON, HUGUENY, BOTTONE, PFAFF, JAGGAR u. A.[3] zu nennen. Man schlägt, preßt oder bohrt (eventuell, wie bei JAGGAR, mit großer Rotationsgeschwindigkeit) eine Spitze in das Material und definiert die Härte entweder als das zur Eindringung in bestimmte Tiefe erforderliche Belastungsgewicht oder als die bei bestimmtem Drucke nötige Zahl von Umdrehungen des Bohrers oder als die Tiefe des Eindringens bei gegebener Belastung oder endlich als die Zeit, die bei bestimmtem Druck u. s. w. zur Erreichung einer bestimmten Tiefe erforderlich ist. Die Ergebnisse der zahlreichen auf diese Weise ermittelten Härten von Stoffen liefern ein so buntes Bild grellster Widersprüche, daß es unmöglich ist, ihnen irgend welche Bedeutung zuzusprechen; die Zahlen für dieselbe Substanz verhalten sich bei den Autoren oft wie 1:10 oder noch abweichender. Um trotzdem etwas anzugeben, sei die neueste derartige Reihe mitgeteilt, von JAGGAR aus der Zahl der Umdrehungen der bis zu 0,01 mm eindringenden Diamantspitze gewonnen:

---

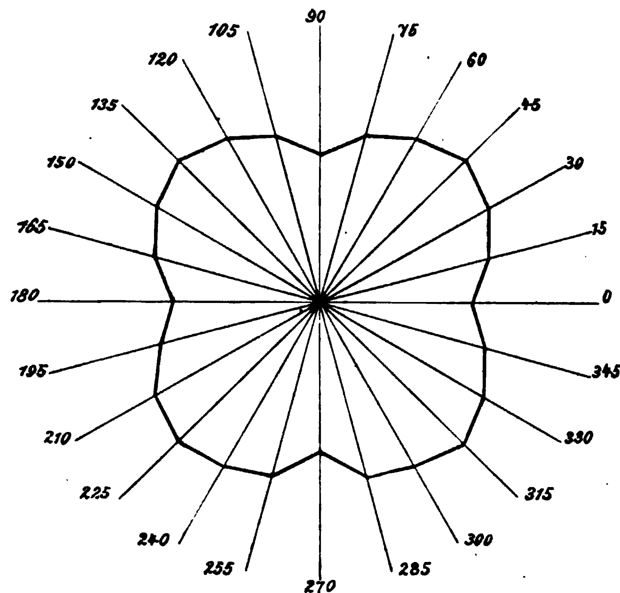
[1] R. FRANKENHEIM, De cohaesione. Inaug.-Diss. Breslau 1829. — A. SEEBECK, Progr. Kölner Realgymn. 1833. — R. FRANZ, Inaug.-Diss. Bonn 1850; POGG. Ann. **80.** 37. 1850. — GRAILICH u. PEKAREK, Wien. Ber. **13.** 410. 1854. — F. EXNER, Untersuchung über die Härte an Kristallflächen. Wien 1873. — FR. PFAFF, Münch. Ber. 1883. p. 55 u. 372. — TH. TURNER, Proc. Birm. Phil. Soc. **5.** (2) 1887. — F. MARTENS, SB. Ver. Gew.-Fl. 1888 u. 1889; Mitt. Kgl. techn. Vers.-Anst. 1890. — P. JANNETAZ, C. R. **116.** 687. 1893. — [2] JANNETAZ u. GOLDBERG, Assoc. franc. Bordeaux 1895. — EGON MÜLLER, Inaug.-Diss. Jena 1906. — [3] HUGUENY, Rech. exp. s. l. dureté des corps. Paris 1865. (Auszug in d. Ber. d. Straßb. Ges. 1865.) — S. BOTTONE, SILL. Journ. 1873. p. 457; POGG. Ann. **150.** 644. 1873. — FR. PFAFF, Münch. Ber. 1884. p. 255. — T. A. JAGGAR, Ztschr. f. Kryst. **29.** 262. 1898. — M. BÜSGEN, Ztschr. f. Forst- u. Ingenieurwesen 1904. p. 543.

Gips (Spaltfläche)	8,3	Orthoklas (basische Spaltfläche)	4665
Calcit (Spaltfläche)	50	Quarz (Basis)	7648
Flußspat (Spaltfläche)	148	Topas (Basis)	28867
Apatit (Basis)	233	Korund (rhomboedrische Spaltfläche)	188808

Natürlich haben diese Zahlen nicht nur bloß relative Bedeutung, im Vergleich mit einer willkürlichen Einheit, sondern auch ihre Verhältnisse sind lediglich eine Folge der willkürlichen Wahl der Zahl der Umdrehungen als Härtemaß; man könnte offenbar ebensowohl deren Quadratwurzel nehmen u. s. w. Immerhin sieht man, wie verschieden groß die Stufen der Härteskala und wie verschieden die Härten verschiedener Stoffe selbst sind.

Ferner hat BÜSGEN durch Bestimmung der Belastung, bei der eine Stahlnadel 2 mm tief eindrang, die mittlere Querschnittshärte von 182 Hölzern verschiedenster Herkunft in ausgiebig getrocknetem Zustand untersucht und, wie die folgende kleine Auswahl zeigt, große Unterschiede (Extreme wie 1 : 60) gefunden:

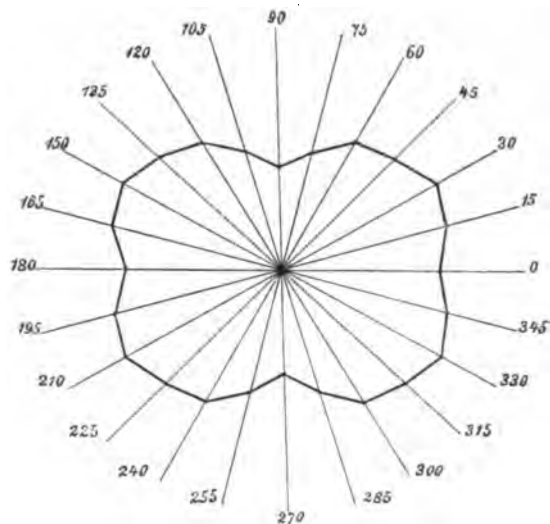
Aeschynomene elaphroxylon	2½	Acer campestre	30
Salix alba	4	Taxus baccata	32½
Pinus strobus	6½	Sorbus aria	40
Populus nigra	8	Rhamnus cathartica	46
Tilia grandifolia	9½	Carpinus betulus	50
Populus tremula	11	Crataegus sp.	50
Ulmus effusa	13½	Berberis vulgaris	55
Castanea japonica	14½	Eucalyptus globulus	57½
Castanea vesca	17	Ilex aquifolium	65
Platanus occidentalis	17½	Buxus sempervirens	80
Quercus robur	20	Pockholz	90
Larix europaea	21½	Quebracho	110
Pirus communis	22½	Grenadilla	140
Prunus padus	25		



Figur 286.

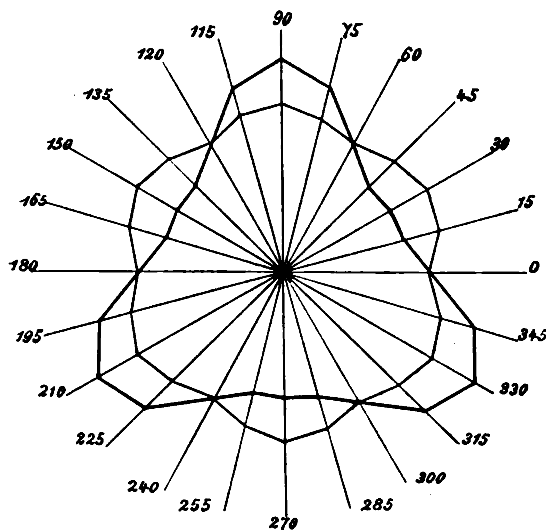
Härte der Kristalle. Schließlich sei bemerkt, daß sich der Unterschied der statischen und kinetischen Methode am deutlichsten bei Kristallen offenbart: die

Flächen eines und desselben Kristalls, aber einen bestimmten Wert für eine bestimmte Fläche; die kinetische Methode dagegen liefert auch für eine und dieselbe Fläche verschiedene Werte je nach der Ritzrichtung. Es sind für solche Zwecke besondere Kristallsklerometer konstruiert worden, die die einzelnen Richtungswerte bequem zu ermitteln erlauben, und es sind ihnen andere Apparate, Mesosklerometer, gegenübergestellt worden, die eben nur den statischen oder den mittleren kinetischen Härtewert für eine Fläche liefern. Übrigens ist von Exner noch eine weitere Eigentümlichkeit der kinetischen Härte konstatiert worden: ihre, auch für dieselbe Richtung innerhalb einer Fläche, häufig vorkommende Verschiedenheit je nach dem Richtungssinn des Ritzens (hin oder her).

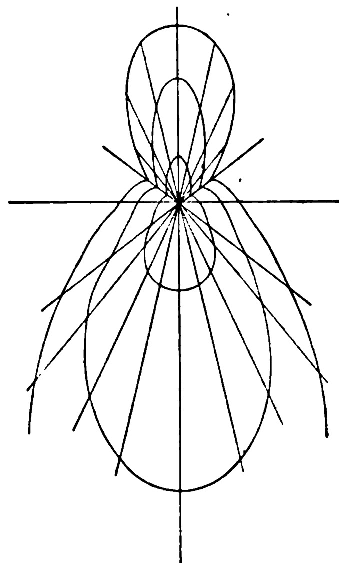


Figur 287.

Man sieht, daß vom Standpunkte der Klassifikation der Größen in Skalare, Vektoren und Tensoren statische und kinetische Härte ganz verschiedenartige Begriffe sind.



Figur 288.


Figur 289.

Von den Ergebnissen der Messungen an Kristallen, die im übrigen in die Mineralogie gehören, seien hier die von Exner und Müller[1] angeführt. Nach Exner hängt die Verschiedenheit der Härte in verschiedenen Richtungen innig

[1] F. Exner, a. a. O. — Egon Müller, a. a. O.

zusammen mit der Lage und Natur der Spaltungsebenen; z. B. ist die Härte gleich nach allen Richtungen einer Fläche, die von keiner Spaltungsebene durchschnitten wird; andernfalls weist sie doppelt soviele Maxima und Minima auf, als die Fläche Kombinationskanten mit Spaltungsebenen hat, und die Minima liegen diesen Kanten parallel; in der Richtung gegen einen spitzen Spaltungswinkel hin ist die Härte größer als in der umgekehrten u. s. w. Von den zahlreichen graphischen Darstellungen, die EXNER seinem Buche beigegeben hat und die man Härtekurven oder Härterosetten nennen kann, seien einige hier zur Probe wiedergegeben, und zwar die für Steinsalz; dabei bezieht sich Figur 286 auf eine Würfelfläche (Richtung 0^0 ist parallel einer Kante), Figur 287 auf eine Dodekaederfläche (0^0 senkrecht auf der abgestumpften Kante), Figur 288 auf eine Oktaederfläche (0^0 parallel der Würfelkante), wobei die stark gezogene Kurve dem positiven und negativen Sinne der Richtung des Ritzens, jeden für sich genommen, entspricht, während die schwach gezogene die Mittelwerte für jede Richtung gibt. Die drei Kurven sind jedoch ihren absoluten Verhältnissen nach nicht miteinander vergleichbar. Ferner, aus der Arbeit von MÜLLER, die Kurve (Figur 289) für die Fläche $(10\bar{1}1)$ des Kalkspats, und zwar für drei verschieden harte Meßrädchen; wie man erkennt, ist der Habitus der Kurve in allen drei Fällen ziemlich derselbe.

Technische Härte. In technischen Kreisen ist von der mineralogischen Härtedefinition und Methodik vielfach mehr oder weniger abgewichen worden. So hat schon WHEWELL die Härten zweier Körper relativ als die Tiefen der Zusammendrückungen definiert, die sie sich beim Druck (oder Stoß) gegenseitig erteilen; sind es z. B. Zylinder, so gehen in die Definition die Längen, Querschnitte und Elastizitätsmoduln ein. In neuerer Zeit hat u. A. KICK die Härte als Scherfestigkeit unter besonderen Verhältnissen angesprochen, wogegen wiederum MARTENS Einwendungen erhebt — Fragen, auf die einzugehen hier der Raum fehlt.

Absolute Härte. Das Verdienst, eine Definition der Härte aufgestellt zu haben, die, ohne dem damit verbundenen Begriff untreu zu werden, doch alle Mängel und Unklarheiten der früheren Definitionen vermeidet, gebührt HERTZ. Erstens ersetzt er die bisherige „Spitze" durch eine kugelförmige Endfläche, d. h. er führt für den vagen Krümmungszustand jener Spitze den wohldefinierten Krümmungszustand einer sanfteren Oberfläche ein; zweitens läßt er zwar das Material dieser Linse zunächst ganz allgemein, gibt aber damit die Möglichkeit an die Hand, es schließlich mit dem Material der zu prüfenden Fläche zu identifizieren, so daß die Messung von jedem fremden Stoffe unabhängig wird; drittens endlich soll der Prüfkörper nicht grob verletzt oder deformiert, sondern es soll ihm nur die erste, deutlich sichtbare Verletzung beigebracht werden, und zwar eine solche von ganz bestimmter, gesetzmäßiger Beschaffenheit. Die Härte ist hiernach nichts anderes als eine bestimmte Art von Festigkeit, und zwar die bei dem Drucke zweier gekrümmter Flächen des Materials aufeinander. Diese Art der Beanspruchung ist oben eingehend behandelt und als Eindringung bezeichnet worden (p. 603); die Härte ist also „Eindringungsfestigkeit". Am einfachsten wird es sein, eine Kugelfläche (Linse) und eine Ebene zu wählen, und damit entspricht man auch am besten den bisherigen Verhältnissen von Spitze und Ebene. Man setzt also den Druck so lange herauf, bis ein — aus Symmetriegründen hier kreisförmiger — Sprung auftritt, und bestimmt den jetzt vorhandenen Druck im Mittelpunkte der Druckfläche; wie die Theorie lehrt, kann man dafür auch die gesamte Kraft (in Kilogramm) nehmen, durch die Größe der Druckfläche dividieren und mit $^3/_2$ multiplizieren. In Formel, wenn F die Druckfläche, D ihr Durchmesser, E' der Eindringungsmodul, P die Belastung, ϱ der Krümmungsradius der Linse und q der während der Belastungssteigerung konstant bleibende Quotient $p/d^3 = P/D^3$ ist:

$$H = \frac{6}{\pi}\,\frac{P}{D^2} = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\,\frac{E'^2 P}{\varrho^2}} = \frac{6}{\pi}\sqrt[3]{P q^2} \quad .$$

Der Apparat, mit dem AUERBACH auf diese Weise absolute Härten bestimmt hat, ist schon oben p. 601 abgebildet. Das Ergebnis der Messungen ist insofern überraschend, als sich für dasselbe Material verschiedene Werte von H ergeben je nach der Linsenkrümmung, z. B. für eine gewisse Glassorte

ϱ =	3	5	10	15
H =	156,0	127,9	108,1	95,0

Die Härte ist also desto größer, je stärker die Linsenkrümmung ist, und eine nähere Prüfung zeigt, daß man ziemlich konstante Zahlen erhält, wenn man die H mit den Kubikwurzeln aus den Krümmungshalbmessern multipliziert, z. B. im obigen Falle:

ϱ =	3	5	10	15
$H\sqrt[3]{\varrho}$ =	228	222	227	223

Nennt man also die so modifizierte Größe H_1 die absolute Härte, so hat man in ihr eine charakteristische Konstante des Materials; es ist offenbar die Eindringungsfestigkeit für Ebene und Linse vom Radius 1.

Dieses eigentümliche Resultat ist später wiederholt bestätigt worden, in besonders interessanter Weise von FÖPPL und SCHWERD. Hier wurden nämlich nicht Kugel und Ebene, sondern zwei Zylinder benutzt, die in gekreuzter Stellung aufeinander drückten, also ebenfalls Kreisfläche für den Druck lieferten und bei denen sich das Gesetz der Kubikwurzel ebenfalls fand. Es läßt sich leicht einsehen, was das Gemeinsame beider Fälle ist: der Umstand, daß von den vier Krümmungen der beiden gegeneinander drückenden Körper dort wie hier zwei endlich und zwei null sind (nur die Gruppierung ist dort 2 + 0, hier 1 + 1). Bei zwei Kugeln erhält man in der Tat ein anderes Gesetz, worauf aber hier nicht eingegangen zu werden braucht.

Daß die HERTZsche Theorie in diesem einen Punkte nicht durch die Erfahrung bestätigt wird, kann verschiedene Gründe haben. Der nächstliegende ist jedenfalls der, daß die Theorie kleine Deformationen voraussetzt, während sie hier bis an die Elastizitätsgrenze und über diese hinaus reichen. In der Tat haben HUBER, FRIESENDORFF u. A. gezeigt, inwieweit sich die Rechnung für größere Deformationen modifiziert, ohne daß es indessen aussichtsreich wäre, diese Rechnung bis zur praktischen Anwendbarkeit durchzuführen. Eine zweite Erklärung, die schon AUERBACH gegeben und FÖPPL angenommen hat, geht dahin, daß die Körper eine besondere Oberflächenhärte besitzen, die größer ist als die im Innern und etwa mit der Oberflächenspannung der Flüssigkeiten zu vergleichen wäre. Man vergleiche hierzu auch die Ausführungen BRILLOUINs über die Tangentialkräfte beim Eindringen einer Kugel in die Ebene. Damit erhebt sich schließlich aufs neue der Zweifel, der schon oben nach VOIGT geäußert wurde, ob es überhaupt möglich ist, die Festigkeitseigenschaften der Körper durch allgemeingültige individuelle Konstanten auszudrücken, und ob hierfür mehr die Spannung oder mehr die Deformation maßgebend ist.

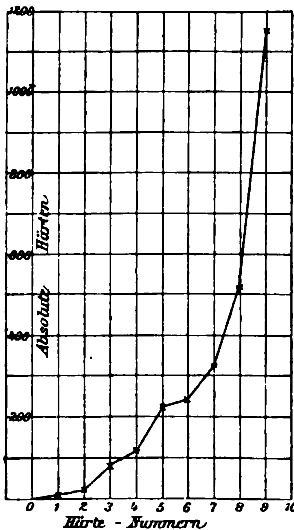
Wie dem auch sei, die absolute Härtemessung nach HERTZ und AUERBACH ist, mit der angegebenen Reduktion, begründet genug, um zur Festlegung von Zahlen zu dienen. Jedenfalls hieße es das Kind mit dem Bade ausschütten, wollte man dem Vorschlag FRIESENDORFS beistimmen, die Festigkeitsdefinition der Härte aufzugeben und sie durch einen Modul, den Eindringungsmodul E', zu charakterisieren; denn damit verläßt man das Gebiet aller bisherigen Vorstellungen über Härte.

Von den zahlreichen absoluten Härtewerten, die zurzeit vorliegen, kann hier nur eine Auswahl wiedergegeben werden. Dabei ist noch folgendes zu bemerken:

nicht bei allen hier aufgeführten Stoffen tritt bei Steigerung der Eindringungsbelastung ein Sprung auf, nämlich nur bei den spröden, nicht aber bei den plastischen Stoffen, ein Gegensatz, von dem noch die Rede sein wird. Bei plastischen Stoffen käme man daher in Verlegenheit wegen des für die Härte maßgebenden Druckes, wenn nicht hier, wie AUERBACH gezeigt hat, bei Steigerung der Belastung die Druckfläche in solchem Maße wüchse, daß der Druck pro Flächeneinheit sich einem konstanten Endwerte nähert, und diesen Wert hat man ohne Zweifel hier der Härteberechnung zugrunde zu legen.

Absolute Härte (kg : qmm)

Adular	253	Glockenguß[1]	109
Aluminium	52	Gold	97
Apatit	237	Gips	14
Blei	10	Kalkspat (Sp.-Fl.)	96
Borsäure	62	Korund	1150
Bronze	127	Kupfer	95
„ gegossen[1]	98	„ hart	143
Diamant[2]	2500	Messing	107
Eisen, Schmiede-[1]	190	„ gegossen	68
„ Guß-[1]	201	Opal	113
Flußspat (Okt.)	106	Quarz (⊥)	308
		„ (‖)	230
Gläser		„ (amorph)	223
Baryumsilikat	316	Silber	91
Kalisilikat	289	Stahl, ganz hart[1]	900
Natronborosilikat	274	„ hart	500
Natronzinksilikat	272	„ mittel	360
Geräteglas	267	„ weich	280
Jenaer Normalglas	266	Steinsalz, W.-Fl.	20
Bleiborosilikat	244	Talk	5
Natronborat	219	Topas	525
Baryumphosphat	217	Zinn[1], gegossen	11
Schweres Bleisilikat	210		
Schwerstes Bleisilikat	183		
Kalibleisilikat	173		



Figur 290.

Wie man sieht, sind die Härten der Stoffe allerdings sehr verschieden, und die Stufen der Härteskala:

1	5	3	96	5	237	7	308	9	1150
2	14	4	106	6	253	8	525	10	2500

werden nach oben hin in gewaltigem Maße größer (Figur 290), die letzten zufällig etwa so, daß sich die Härte von einer zur anderen immer verdoppelt. Vergleicht man mit den anderen Arten von Festigkeit, so findet man, daß die Härte meist die größte von allen ist, selbst die Druckfestigkeit übertrifft sie meist noch einmal. Bei den Metallen ist es kaum möglich, scharfe Bestimmungen zu machen, weil hier die Herstellung, Bearbeitung, feinere Zusammensetzung u. s. w. einen kolossalen Einfluß ausübt. Dagegen lassen sich die Gläser auch hier sehr sicher charakterisieren, das härteste von ihnen steht etwa mit dem Bergkristall auf einer Stufe, das weichste

[1] Nach Bestimmungen von FÖPPL. — [2] Nach ungefähren Schätzungen (AUERBACH), da es nicht möglich ist, Diamant so zu bearbeiten, daß exakte Messungen möglich sind.

zwischen Apatit und Flußspat; auch kann man, wie AUERBACH getan hat, versuchen, diese Härten aus gewissen, den Bestandteilen eigentümlichen Koeffizienten zu berechnen, wobei freilich nur eine sehr beschränkte Übereinstimmung erzielt wird; immerhin ist es interessant, daß der Koeffizient, mit dem dabei z. B. die Kieselsäure zu versehen ist, mit der Härte des Quarzes gut übereinstimmt.

Modifikationen für die Praxis; Methode von Brinell. Es muß zugegeben werden, daß die HERTZ-AUERBACHsche Härtemethode für die Praxis den Übelstand hat, daß sie von Versuch zu Versuch die Zerstörung guten und mühsam in Linsenform gebrachten Materials erfordert. Es sind daher verschiedene Vorschläge gemacht worden, das Verfahren zu vereinfachen. Ohne Aufgabe einer der prinzipiellen Grundlagen ist das freilich nicht ausführbar, und der absolute Charakter der Messung wird damit natürlich hinfällig. Indessen verdient eines dieser Verfahren doch besondere Hervorhebung, weil es sehr gut durchgearbeitet worden ist und sich in der Praxis bewährt hat. Es ist dies das BRINELLsche Härteprüfverfahren, das, außer von seinem Urheber, noch von drei anderen schwedischen Forschern, WAHLBERG, DILLNER und BENEDICKS, benutzt worden ist; der Letztgenannte hat es auch erst auf die nötige wissenschaftliche Höhe gebracht, indem er einige unklare Punkte aufklärte. Das Verfahren, das hauptsächlich auf Metalle Anwendung gefunden hat, benutzt als drückenden Körper eine Stahlkugel, deren Material natürlich identisch zu wählen und immer wieder zu identifizieren ist. Für verschiedene Radien der Kugel erhält man verschiedene Druckwerte, und das Gesetz der Reduktion ist hier begreiflicherweise ein anderes wie bei AUERBACH, da es sich um den Druck zweier verschiedener Stoffe gegeneinander handelt; man muß mit der fünften Wurzel aus dem Radius multiplizieren, um Konstanz zu erhalten. Dabei muß man aber, um aus dem Gesamtdruck den spezifischen Druck zu erhalten, nicht mit der ebenen Projektion der Druckfläche, sondern mit dieser selbst dividieren. Endlich tritt hier bei wachsender Belastung nicht völlige Konstanz des Druckes auf die Flächeneinheit auf, man muß vielmehr, um die Resultate vergleichbar zu machen, von dem besonderen Druck P auf einen bestimmten, durch Übereinkunft gewählten Druck P_0 reduzieren. Vereinigt man hiermit die Reduktion von dem benutzten Radius ϱ auf einen Normalradius ϱ_0, so erhält man die Reduktionsformel

$$H_0 = H\frac{C+P_0}{C+P}\sqrt[5]{\frac{\varrho}{\varrho_0}} \quad ;$$

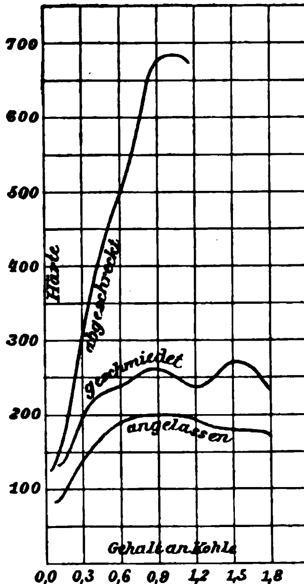
hierin ist freilich C eine Größe, die keinen ein für allemal angebbaren Wert hat, sondern je nach dem Druckintervall $P - P_0$ verschieden ausfällt (zwischen 3000 und 17000 kg). Als Normalwerte empfehlen sich $\varrho_0 = 2{,}5$ und $P_0 = 500$ kg oder auch $\varrho_0 = 5$ und $P_0 = 3000$ kg; das Reduktionsverhältnis ist in beiden Fällen zufällig fast genau dasselbe.

Stahl von Gysinge in Schweden

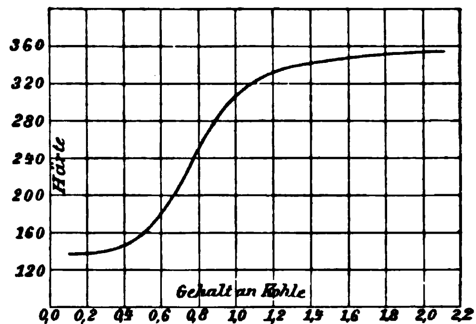
Gehalt an C	angelassen	geschmiedet	abgeschreckt
0,08	83	146	127
0,2	—	—	196
0,45	179	239	427
0,55	183	246	434
0,90	199	259	683
1,07	—	—	687
1,14	—	—	681
1,20	192	238	—
1,35	195	263	—
1,50	180	276	—
1,70	185	231	—

Von den Ergebnissen seien die Zahlen in vorstehender Tabelle, zu denen BENEDICKS für Stahl mit verschiedenem Gehalt an Kohlenstoff gelangte, angeführt.

Wie man sieht, steigt die Härte mit wachsendem Gehalt an Kohle erst stark an und wird dann mindestens konstant. Die anfängliche Zunahme fällt fast vollständig in das kurze Intervall zwischen 0,4 und 0,8 $^0/_0$; aus obigen Zahlen ist das nicht so zu ersehen, wie aus der graphischen Darstellung (Figur 291), am besten aber aus der nächsten Darstellung Figur 292, die sich auf Stahl von Langshyttan in Schweden bezieht; aus der ersteren Darstellung ersieht man zugleich, wie sehr die Härte durch Abschrecken gesteigert wird. Auf die weiteren Einzelheiten, Einfluß von Mangan und Silicium u. s. w., kann hier nicht eingegangen werden.[1]



Figur 291.



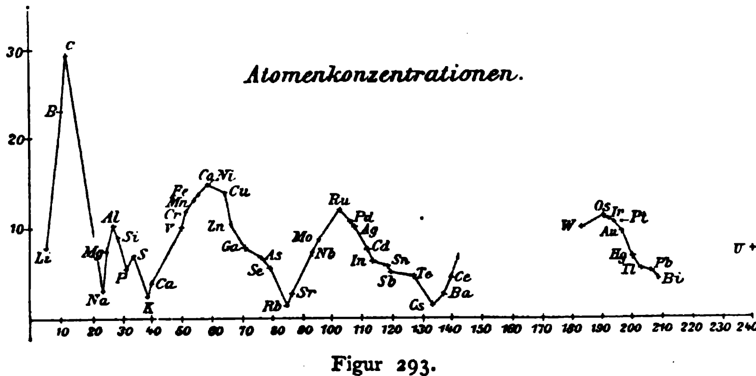
Figur 292.

Aus der reichen technischen Literatur, auf die hier im übrigen nicht eingegangen werden kann, seien noch drei Arbeiten herausgehoben: Erstens die Versuche, die SCHWERDT nach der erwähnten FÖPPLschen Zylindermethode durchgeführt und in anschaulichen graphischen Darstellungen wiedergegeben hat. Zweitens Arbeiten von STRIBECK und SCHWINNING über die zulässige Belastung von Kugeln und Kugellagern. Drei gleichgroße Stahlkugeln liegen übereinander und werden wachsenden Drucken ausgesetzt, die dabei eintretende Abplattung wird gemessen, ihre Gesetze werden bestimmt und mit den theoretischen verglichen.[2] Drittens einige umfangreiche Berichte, die OSMOND von der „Commission des méthodes d'essay" erstattet hat: sur la dureté und sur les essays par pénétration statique; es werden hier die sämtlichen Verfahren (bis zum Jahre 1893)

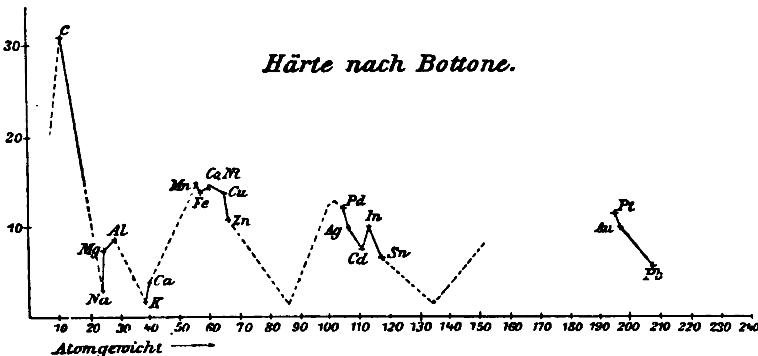
[1] Literatur zur absoluten Härtebestimmung: H. HERTZ, Verh. Berl. phys. Ges. 1882. p. 67; CRELLES Journ. **92.** 156. 1882; Verh. Ver. z. Beförd. d. Gew.-Fl. 1882. p. 441; Ges. Werke **1.** 147. — F. AUERBACH, WIED. Ann. **43.** 61. 1891; **45.** 262. 1892; **53.** 1000. 1894; **58.** 357. 1896. — A. FÖPPL, WIED. Ann. **63.** 103. 1897; Baumaterialienkunde 1897. — F. M. SCHWERDT, Mitt. techn. Lab. München 1897. — R. STRIBECK, Z. Ver. d. Ing. **45.** 1901. — SCHWINNING, ibid. — M. T. HUBER, Ann. d. Phys. **14.** 153. 1904. — R. FRIESENDORFF, Habilitationsschrift (russisch). St. Petersburg 1905. — J. A. BRINELL, Tekn. Tidskr. 1900; Congr. int. Paris 1900. — G. DILLNER, JERNKONTERETS Ann. **58.** 384. 1903. — A. WAHLBERG, Journ. Iron Inst. 1901. — C. BENEDICKS, Ztschr. phys. Chem. **36.** 529; Recherches s. l'acier au carbon, Inaug.-Diss. Upsala 1904 (mit eingehender, vergleichender Kritik der Methoden von AUERBACH und BRINELL). — A. LAFAY, Ann. chim. phys. (7) **23.** 1. 1901. — M. BRILLOUIN, ibid. (7) **13.** 231. 1898. — [2] Bei dieser Gelegenheit sei auch auf die Druckversuche von H. SCHOENTJES (Bull. Ac. Belg. (3) **35.** 270. 1898) an hohlen Metallhalbkugeln hingewiesen.

einer kritischen Besprechung unterzogen und gezeigt, daß nur das AUERBACHsche den zu stellenden Anforderungen genügt.[1]

Chemische Beziehungen. Zum Schlusse dieses Abschnitts möge auf die Versuche hingewiesen werden, die Härte mit den chemischen Verhältnissen in Zusammenhang zu bringen. Von einem solchen Versuche, den AUERBACH für die Härte Jenaer Gläser machte, ist schon die Rede gewesen. Andere betreffen die Beziehung zum Molekulargewicht und zum periodischen System der



Figur 293.



Figur 294.

Elemente. So ist von BOTTONE ein Gesetz aufgestellt und von TURNER neu aufgenommen worden, wonach die Härte amorpher Körper proportional sein soll dem Quotienten des spezifischen Gewichts durch das Atomgewicht, also der Zahl der Atome in der Volumeneinheit, ein Gesetz, das schon früher angezweifelt wurde und nach den neueren exakten Messungen nur sehr partielle und angenäherte Gültigkeit hat. Andere empirische Beziehungen sind von KENNGOTT, SCHRAUF und neuerdings von SCHRÖDER VAN DER KOLK ausgesprochen worden; nach letzterem soll die Beziehung zum Atomgewicht allerdings vorhanden sein, durch die verschiedene Spaltbarkeit der Mineralien aber getrübt bezw. modifiziert werden. Auf das Gesetz von BOTTONE kommt in neuester Zeit auch BENEDICKS zurück und glaubt ihm doch eine größere Bedeutung beilegen zu sollen; er stützt sich dabei auch auf die Auffassung der Härte als einer Art von osmotischem Druck in festen Lösungen und auf die Tatsache, daß z. B. die Härtung des Stahles wesentlich darin besteht, daß der Kohlenstoff mit dem Eisen als Karbid eine feste Lösung bildet, womit die Zahl der Atome im Volumen eine Erhöhung erfährt.

[1] Bei der Korrektur erhalte ich noch eine Abhandlung von PAUL LUDWIK über Härtebestimmung, Ztschr. d. Öst. Ing.- u. Archit.-Ver. 1907. Nr. 11 u. 12.

und Atomgewicht darstellt, zeigt einen sehr ausgesprochen periodischen Verlauf. Benedicks hat alsdann die Kurve auf Grund der Messungen von Bottone neu gezeichnet und mit der Kurve der Atomkonzentrationen verglichen; aus den Figuren 293 und 294 ist der Parallelismus beider Kurven zur Genüge ersichtlich. Auf die weiteren Ausführungen von Benedicks, namentlich über die verschiedene Rolle der Gleitung und der sich bei manchen Metallen, z. B. Silber und Blei, bildenden Gleitschichten im Verhältnis zu den verschiedenen Methoden der Härtemessung, kann hier nicht eingegangen werden.[1]

Temperatur. Daß die Temperatur einen beträchtlichen Einfluß auf die Härte ausübe, unterliegt nach den alltäglichen Erfahrungen keinem Zweifel, und zwar ist dieser Einfluß offenbar ein inverser. Indessen liegen exakte Angaben hierüber nicht vor. Auch steht die Frage in engstem Zusammenhang mit einer anderen Eigenschaft der festen Körper, ihrer Plastizität bezw. Sprödigkeit, wie denn z. B. bei Annäherung an den Schmelzpunkt die Härte sich der null, die Plastizität sich einem sehr großen Werte nähert. Diese Betrachtung bildet eine naturgemäße Brücke zum nächsten Abschnitt dieses Artikels; eine zweite das Problem der „Härtung" der Körper, namentlich der Metalle, ein Ausdruck, der zwar sprachlich aus „Härte" gebildet ist, in Wahrheit aber mehr die Sprödigkeit betrifft.[2]

4. Plastizität.

Plastizität und Sprödigkeit. Die Mannigfaltigkeiten der Natur sind so groß, daß sie fortwährend Erweiterungen oder Abänderungen aufgestellter Schemen notwendig machen. Wir haben bisher die Begriffe oder vielmehr Begriffskategorien: Elastizität, elastische Vollkommenheit und Festigkeit kennen gelernt; die alltägliche Erfahrung zeigt aber, daß hiermit die Eigenschaften der festen Körper noch nicht erschöpft sind. Insbesondere weiß man zunächst nicht, wie man den durch die Ausdrücke „Nachgiebigkeit" und „Sprödigkeit" gekennzeichneten Gegensatz zu den obigen Begriffen in Beziehung setzen solle. Sprödigkeit ist offenbar nicht dasselbe wie Härte, und Nachgiebigkeit oder Geschmeidigkeit oder Plastizität nicht dasselbe wie Weichheit, aber irgend ein Zusammenhang scheint doch zu bestehen. Geht man diesem Zusammenhang näher auf den Grund, so findet man folgendes. Zunächst leuchtet ein, daß es sich zwischen Nachgiebigkeit und Sprödigkeit ebensowenig um einen schroffen Gegensatz handeln wird wie zwischen hart und weich oder warm und kalt. Es wird vielmehr hier wie in diesen anderen Fällen eine quantitativ abgestufte Eigenschaft der Körper in Frage kommen, deren höchster Grad die äußerste Nachgiebigkeit, deren tiefster die äußerste Sprödigkeit sein wird. Ferner steht man auch hier, wie in den Fällen der Elastizität und der Festigkeit, keinem Einzelbegriff, sondern einer Begriffskategorie gegenüber, und die Einzelbegriffe treten auf, je nachdem es sich um Zug oder Druck, Biegung oder Drillung handelt. Es handelt sich also nur

---

[1] A. Kenngott, Jahrb. d. geol. Reichsanst. Wien 1852. — Schrauf, Pogg. Ann. **134**. 422. 1868. — Bottone, Sill. Journ. (3) **6**. 457. 1873. — Turner, Proc. Birm. phil. Soc. (2) **5**. 1887. — J. R. Rydberg, Ztschr. f. phys. Chem. **33**. 353. 1900. — C. Benedicks, ibid. **36**. 529. 1901. — J. L. C. Schröder van der Kolk, Versl. Akad. Wet. 1900/01. p. 692. — [2] Weitere Literatur zur Härte: Glück, Ws. öst. Ing. Ver. 1876. p. 251. — Hartig, Ziv.-Ing. 1891. — F. Kick, Verh. Ver. Bef. Gew. 1890; Ztschr. Öst. Ing. Ver. **42** u. **43**. 1890 u. 1891; Dingl. polyt. Journ. **281**. 292. 1891; Techn. Bl. **21**. 165. 1889. — B. Kirsch, Mitt. techn. Gew.-Mus. Wien 1891. — Laboulaye, Dictionaire des arts. Paris 1891. Art. dureté. — Rosiwal, Verh. geol. R.-A. Wien 1896. p. 475. — Drewitz, Diss. Rostock 1902.

für alle Arten der Beanspruchung in gleicher Weise festlegen müssen, wenn auch nachher die Zahlenwerte verschieden werden ausfallen können. Eigentümlicherweise ist diese Frage nach dem prinzipiellen Maße der Plastizität früher niemals in exakter Form aufgeworfen; erst AUERBACH hat das getan und zugleich die möglichen Antworten auf die Frage diskutiert.

Wenn ein Körper einer wachsenden Beanspruchung unterworfen wird, erreicht er bei einem bestimmten Werte V derselben die Grenze seiner elastischen Vollkommenheit; er erfährt nunmehr dauernde Veränderungen. Bei weiterer Steigerung der Beanspruchung wird die Festigkeitsgrenze F erreicht, d. h. der Zusammenhang der Teile des Körpers wird an irgend einer Stelle aufgehoben. Denkt man sich nun den extremen Fall des absolut spröden Körpers, der sich nicht dauernd zu verändern vermag, ohne diskontinuierlich zu werden, so sieht man ein, daß hier die beiden obigen kritischen Punkte zusammenfallen. Hat andererseits die Fähigkeit des Körpers, sich dauernd zu deformieren, keine Grenzen, so wird der Festigkeitspunkt nie erreicht, das Intervall zwischen den beiden kritischen Punkten wird unendlich groß. Hieraus folgt, daß ein mögliches und zwar das einfachste Maß der Plastizität N die Differenz der Festigkeit und der Vollkommenheit ist, in Formel:

$$N = F - V \quad ;$$

man kann diese Größe, da sie die Differenz zweier Moduln ist, als Plastizitätsmodul bezeichnen und wie jene in kg:qmm messen. Man kann die Größe auch die absolute Plastizität nennen und ihr die relative Plastizität oder Plastizitätszahl gegenüberstellen, die man erhält, indem man jene Differenz durch die Festigkeit dividiert, also in deren Bruchteilen ausdrückt, in Formel:

$$n = \frac{F - V}{F} \quad . \tag{I}$$

Ein dritter Begriff endlich geht von der uns schon wiederholt begegneten Auffassung aus, daß die Größen unseres Gebiets, in diesem Falle also die Plastizität, nicht zu messen sei durch den Bereich der Kraft, innerhalb dessen plastisches Verhalten auftritt, sondern durch die Größe der innerhalb dieses Bereichs auftretenden plastischen Wirkung (Veränderung). Von der ersten Größe N zu dieser dritten, die man Plastizitätsverhältnis oder (aus leicht ersichtlichen Gründen) praktische Plastizität nennen kann, macht man offenbar den Übergang, indem man mit dem Elastizitätsmodul dividiert, freilich nicht mit dem normalen, sondern mit demjenigen, welcher innerhalb des Plastizitätsbereichs durchschnittlich gilt, in Formel:

$$\mathfrak{N} = \frac{F - V}{E} \quad , \tag{II}$$

oder genauer, wenn man den Änderungen von E während des Übergangs von V zu F Rechnung tragen will:

$$\mathfrak{N} = \int_V^F \frac{dK}{E} \quad ,$$

wo K die allmählich gesteigerte Kraft und E der Modul als Funktion von K ist. Zur Veranschaulichung der drei Größen diene ein Kupferdraht als Objekt und Längszug als Beanspruchung; es ist in diesem Falle:

Plastizitätsmodul für Dehnung (40 — 12)	. . . . .	28
Plastizitätszahl für Dehnung (28 : 40)	. . . . . .	0,7
Praktische Plastizität für Dehnung (28 : 9000)	. . .	0,003

letztere Zahl aus der Annahme abgeleitet, daß der Dehnungsmodul des Kupfers zwischen Elastizitäts- und Festigkeitsgrenze allmählich von seinem normalen Werte 12000 auf 6000 abnimmt und im Mittel 9000 ist. Direkter wird man diese praktische Plastizität natürlich finden, wenn man die Bruchdehnung bezw. Querschnittsverminderung beim Bruch ermittelt, worüber oben einige, aber wenige Angaben mitgeteilt sind.

Der einzige berechtigte Einwand, den man gegen die obige Definition der Plastizität erheben kann, ist der, daß sie weder allein durch die Kraft, noch allein durch die Deformation bestimmt ist, also derselbe Einwand, der schon bei dem Begriff der Festigkeit eine prinzipielle Rolle gespielt hat. Insofern ist den Ausführungen von ASCOLI beizustimmen. Sein positiver Vorschlag dagegen, die Plastizität einfach als Verhältnis der bleibenden Deformation zur erzeugenden Kraft zu definieren, ist, wenn auch in manchen Fällen zweifellos brauchbar, doch für das Gesamtgebiet der Beanspruchungen und Stoffe entschieden zu eng. Es würde damit die Plastizität oder, wie man diese Größe passend nennen könnte, der Plastizitätskoeffizient in völlige Parallele mit dem Elastizitätskoeffizienten kommen, mit dem einzigen Unterschied, daß nicht die vorübergehenden, sondern die dauernden Deformationen in Frage kommen. Die Tatsachen lehren aber, daß dieser Parallelismus durchaus nicht allgemein vorhanden ist; insbesondere kommt dabei die Mannigfaltigkeit nicht zum Ausdruck, die darin liegt, daß die Plastizität von der Lage zweier Punkte abhängt, die beide tief oder beide hoch oder von denen der eine tief, der andere hoch oder (relativ) umgekehrt liegen kann. Man müßte also, um dem genannten Einwand Rechnung zu tragen, jedenfalls eine verwickeltere Funktion von Kraft und Wirkung ausfindig machen, die alle Tatsachen umspannt; nach dem schon bei der Festigkeit Erwähnten ist hierzu jedoch vorerst wenig Aussicht vorhanden.

Von anderen Definitionen der Plastizität bezw. der Sprödigkeit sei zunächst die von CONSIDÈRE genannt, weil sie denen von AUERBACH am nächsten kommt. Hier wird nämlich einfach das Verhältnis $V : F$ als Maß der Sprödigkeit vorgeschlagen, so daß, Reziprozität der Begriffe angenommen, das Verhältnis $F : V$ das Maß der Plastizität wäre; es bedarf keiner näheren Ausführung, um einzusehen, daß die zweite AUERBACHsche Definition die Vorzüge dieser Definition enthält, aber vollkommener als sie ist. — Nach KICK soll der allseitige Druck, unter dem ein Körper nachgibt, eventuell im Vergleich mit seinem Verhalten gegenüber Scherung, charakteristisch sein; eine vielleicht in gewissen praktischen Fällen brauchbare, im Prinzip aber viel zu spezielle und erzwungene Definition. — Sehr eigenartig ist die Auffassung von BRILLOUIN. Er geht davon aus, daß die Flüssigkeiten keinen Gestaltwiderstand besitzen, und nennt deshalb einen Körper plastisch, in dem ohne Dichteänderung eine instabile Gleitbewegung stattfinden kann; umgekehrt ist ein Körper brüchig, wenn kleine Deformationen unstabile Dichteänderungen in ihm hervorrufen können; bei Kristallen führt diese Unterscheidung auch zum Verständnis der Spaltbarkeit. Auf die interessanten Betrachtungen, die sich an diese Auffassung hinsichtlich der Wellennatur der elastischen Deformationen und der molekularen Schwingungen knüpfen lassen, kann hier nicht eingegangen werden. Nur so viel sei gesagt, daß die Definition zwar einen Gegensatz, aber keine graduelle Größe kennzeichnet und deshalb das Hauptproblem nicht löst. — Für Metalle insbesondere macht BRILLOUIN die Annahme, daß sie aus rein elastischen Kristallen bestehen, die

in ein rein plastisches Bindemittel eingebettet sind; für gewisse Zwecke muß freilich auch den Kristallen selbst Plastizität beigelegt werden.

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß schon COULOMB eine Theorie der permanenten Deformationen aufgestellt hat, die lange Zeit vergessen war, aber 1885 von DUGUET ans Licht gezogen wurde. Man vergleiche über diese Theorie und ihre Weiterbildung einen Aufsatz von BOUASSE.[1]

Es sei noch auf den lehrreichen Bericht hingewiesen, den OSMOND über das Problem erstattet hat; es werden hier alle denkbaren Formeln allgemeineren Charakters für die Plastizität zusammengestellt und kritisch besprochen; der letzten Schlußfolgerung, daß das Problem noch nicht endgültig erledigt sei, wird man sich anzuschließen nicht umhin können.[2]

Einzeluntersuchungen über Plastizität. Gehen wir jetzt zu den Spezialuntersuchungen über Plastizität und Sprödigkeit über, so müssen wir uns große Beschränkung auferlegen, da die Zahl dieser Arbeiten überaus groß und ihr Inhalt von einer, im Auszug oft nicht wiederzugebenden Mannigfaltigkeit ist. Auch greifen die betreffenden Arbeiten in die verschiedensten anderen Gebiete über, namentlich in die Lehre von der Nachwirkung, von der Zähigkeit und inneren Reibung, sowie in die Chemie, Kristallographie und Thermodynamik.

1. Die Plastizität eines Stoffes ist im allgemeinen ganz verschieden für verschiedene Arten der Beanspruchung, sie kann sogar für zwei solche Arten derartige Extreme annehmen, daß man im gewöhnlichen Sprachgebrauch den Stoff für die eine Beanspruchung als plastisch, für die andere als spröde bezeichnen wird. Ein Beispiel bilden Steinsalz und Flußspat; nach VOIGT u. A. sind sie für Zug durchaus spröde, nach AUERBACH für Druck, insbesondere für Eindringung, stark plastisch, und sie können hier geradezu als Typen für das Verhalten plastischer Körper angeführt werden. Während nämlich spröde Körper, wie Glas und Quarz, bei Druck einer Linse gegen eine Ebene die von HERTZ (p. 600) aufgestellten Gesetze befolgen, bis der die Druckfläche umgebende kreisförmige Sprung auftritt, ist bei Flußspat und Steinsalz die Größe q (Gesamtdruck durch Kubus des Durchmessers der Druckfläche, vgl. p. 602 u. 864) nicht konstant, sie nimmt vielmehr mit steigender Belastung stark ab, der Einheitsdruck nimmt demgemäß nur anfangs langsam zu, erreicht aber bald einen konstanten Grenzwert — man betrachte die für Flußspat gültige kleine Tabelle —, und ein Sprung tritt

Flußspatlinse ($r = 3$ mm) gegen Flußspatplatte (Einheiten willkürlich).

p	d	$100\,q$	$10\,p_1$	p	d	$100\,q$	$10\,p_1$
11	2,0	138	28	554	10,8	44	48
38	3,4	97	38	854	12,9	39	52
88	5,0	70	35	1354	15,8	34	54
188	6,8	61	41	1987	19,1	28	54
354	9,5	41	39	2487	21,3	25	54

überhaupt nicht auf, wohl aber eine dauernde Delle in der Platte, eine dauernde Abplattung der Linse. Die Delle ist ganz homogen und so klar, daß man z. B. ihren Radius auf optischem Wege bestimmen kann. Das Ergebnis ist also im wesentlichen in dem Satze enthalten: Plastische Körper passen sich der äußeren

[1] H. BOUASSE, Ann. chim. phys. (7) **23.** 198. 1901. — [2] F. AUERBACH, WIED. Ann. **45.** 277. 1892; Verh. Naturf.-Ges. 1891. — L. BRILLOUIN, Ann. école norm. 1890. p. 345; C. R. **112.** 1054. 1891; **126.** 328. 1898; Ann. chim. phys. (7) **13.** 377; **14.** 311; **15.** 447. 1898. — M. CONSIDÈRE, Note à la Comm. des méth-d'essay. Paris 1889. — M. ASCOLI, Rend. Acc. Linc. 1892. I. sem. p. 414; Nuov. Cim. (3) **32.** 134. 1892. — F. KICK, Techn. Bl. **21.** 165. 1889. — Man vergleiche auch die Ausführungen über Fluidität von J. BOUSSINESQ, C. R. **112.** 1099. 1891. — F. OSMOND, Comm. des méthodes d'essai. Paris 1893.

Kraft durch dauernde Deformation derart an, daß die Beanspruchung einen bestimmten, mit ihrer Kontinuität vereinbaren Wert nicht übersteigt. Der Versuch, hiernach die Plastizität zahlenmäßig zu bestimmen, stößt freilich meist auf große Schwierigkeiten, weil die Größe *V*, wie bereits bemerkt wurde, in hohem Maße labil ist. Als Beispiel sei immerhin angeführt, daß für Flußspat die elastische Vollkommenheit etwa $^1/_3$ der Festigkeit ist, so daß die Plastizitätszahl für Eindringung rund den Wert $^2/_3$ hat. Bei Stoffen mit geringer Plastizität werden die Versuche besonders heikel, man muß hier sehr vorsichtig operieren, weil sonst Sprünge auftreten, die so vermieden werden können. Bei Kalkspat z. B. war die Sprungbildung überhaupt nicht zu vermeiden, aber sie trat nur ganz allmählich ein, und man wird, wenn man diesen Gegensatz für den Augenblick zuläßt, sagen dürfen, daß dieser Stoff an der Grenze von Plastizität und Sprödigkeit steht. Sehr merkwürdig endlich verhielt sich bei den Versuchen Auerbachs eine gewisse Glassorte; hier trat nämlich bei der Belastung, wo dies zu erwarten gewesen wäre, der Sprung nicht auf, er bildete sich erst bei sehr viel größerer Belastung, und sein Durchmesser war entsprechend groß; man hätte also die erwähnte Erwartung einfach als irrig bezeichnen müssen, wenn sich nicht gleichzeitig mit dem großen noch ein kleiner Sprung gebildet hätte, gewissermaßen durch den großen ausgelöst und von den erwarteten Verhältnissen. Das ist also ein deutliches Anzeichen einer Spur von Plastizität oder doch einer gewissen Neigung zu solcher, jedenfalls aber des Bestrebens, den Zusammenhang der Teile bei genügend vorsichtiger Behandlung zu bewahren. — Übrigens ist es auch für andere Arten der Beanspruchung bekannt, daß es auf die Inszenierung derselben ankommt; manche Stoffe lassen sich z. B. vorsichtig biegen, brechen aber bei plötzlicher Biegung.

2. Daß das Glas, um gleich an die letzte Beobachtung anzuknüpfen, bei gewisser Zusammensetzung und unter bestimmten Umständen überhaupt dauernder Veränderung fähig ist, haben inzwischen auch andere Untersuchungen gezeigt, von denen hier die sehr ausgedehnten und sorgfältigen von Marchis über Thermometerglas und sein Verhalten bei Erhitzungen — Veränderung des Nullpunktes — erwähnt seien; es muß aber genügen, auf diese Arbeiten und ihre theoretische, thermodynamische Behandlung durch Duhem hinzuweisen, zumal ihr Schwerpunkt eben in die Wärmelehre fällt.[1]

3. Eigentümliche Beobachtungen am Glase hat auch Piccard[2] gemacht. Zwölf gleiche Stücke einer und derselben Glasplatte wurden mit dem Diamanten leicht geritzt, sechs von ihnen wurden sofort, indem sie im Sinne der Erweiterung des Ritzes gebogen wurden, gebrochen, die anderen sechs erst, nachdem sie mindestens einen Tag lang im Sinne der Zusammendrückung des Ritzes belastet waren; die letzteren wiesen alsdann eine um etwa 20 % größere Festigkeit auf, woraus der Autor auf eine gewisse Plastizität schließt.

4. Was die Metalle betrifft, so ist ihre Plastizität natürlich in hohem Maße von ihrer Herstellung und ihrem Zustand abhängig; besteht doch eine ganze Technik in der „Härtung" und ihrem Gegenteil, sei es auf mechanische, chemische oder thermische Weise, und „Härte" in diesem Sinne ist nichts anderes als Sprödigkeit. Reine Metalle scheinen indessen durchweg erheblich plastisch zu sein, wie die Messungen von Auerbach[3] an Aluminium, Blei, Bronze, Gold, Kupfer, Messing, Silber und Stahl beweisen; bei allen nahm der Einheitsdruck den konstanten Anpassungswert an, und bei allen wies die permanente Delle einen homogenen Charakter auf, mit alleiniger Ausnahme einer Sorte „glasharten" Stahles, wo Risse auftraten.

---

[1] L. Marchis, vgl. die Literaturangaben und Bemerkungen oben p. 830. — P. Duhem, Mém. Acad. Belg. **56**. 1898. — [2] J. Piccard, Chem. Ber. **34**. 3635. 1901. — [3] F. Auerbach, Ann. d. Phys. **3**. 108. 1900.

5. Härtung. Von den zahlreichen Methoden, durch welche man einem gegebenen Stoffe die verschiedenen Grade von Sprödigkeit bezw. Geschmeidigkeit erteilen kann, ist die am mannigfaltigsten zu regulierende und darum wichtigste die des Erhitzens und Wiederabkühlens. Macht man z. B. Stahl hellrot glühend und bringt ihn dann plötzlich mit kaltem Wasser, Öl oder einer anderen geeigneten, flüssigen oder dampfförmigen Substanz in Berührung („Ablöschen"), so wird er äußerst spröde oder, wie man sagt, glashart. Je größer die Erhitzung und je kälter das Ablöschungsbad, desto stärker die Wirkung. Will man nun einen gegebenen Grad von Geschmeidigkeit erzielen, so erwärmt man den so gehärteten Stahl bis zu einer bestimmten Temperatur („Anlassen") und läßt ihn dann allmählich (z. B. durch Umhüllung mit schlechten Wärmeleitern) abkühlen; je höher die Temperatur ist, bis zu welcher man geht, desto geschmeidiger wird der Stab, und dies kann man sehr genau abmessen, da sich bestimmte Temperaturen beim Stahl durch entsprechende Anlauffarben bemerklich machen: anfangs hellgrau, bei 220° blaßgelb, 230° strohgelb, 240° goldgelb, 250° braun, 275° purpurn, 285° hellblau, 290° vollblau, 315° dunkelblau, darüber hinaus dunkelgrau. Bei anderen Metallen ist das Verhalten ein etwas abweichendes, zumal bei Legierungen, von denen einige sogar durch schnelles Abkühlen geschmeidiger werden, als durch langsames. Andere Vorgänge, die Härtung im Gefolge haben, sind der Drahtzug, die Appretur (Oberflächenbehandlung) und der Zusatz anderer Stoffe (Kupfer zu Gold und Silber, Zinn zu Kupfer, Antimon zu Blei, Eisen zu Silber u. s. w.); am wichtigsten ist in dieser Hinsicht das Beispiel des Stahles, den sein Kohlenstoffgehalt ($^1/_2$ bis $1^1/_2$ %), im Gegensatz zum Eisen, in hohem Grade (wie oben angegeben) härtungsfähig macht.

Mit dem Härtungsgrad des Stahles stehen übrigens Erscheinungen, die dessen übrige Eigenschaften aufweisen, in Wechselwirkung, so namentlich die Dichte und deren Verteilung (Härtung vermindert die Dichte des Stahles, nach Versuchen von GRUNER um drei bis neun Tausendstel), der elektrische Widerstand und das magnetische und das thermoelektrische Verhalten; es muß jedoch genügen, in dieser Hinsicht auf die Arbeiten von BARUS, STROUHAL und BARUS, AUERBACH, FROMME, H. MEYER, CLÉMANDOT und CHEESMAN hinzuweisen.[1]

In noch höherem Grade als Stahl wird Glas durch plötzliches Ablöschen spröde, und es sind in dieser Hinsicht namentlich die Bologneser Flaschen und die Glastränen oder batavischen Tropfen berühmt geworden. Wirft man in jene einen noch so kleinen, aber scharfen Splitter, der den Boden nur schwach ritzt, so zerspringt die Flasche; bricht man bei diesen die Spitze, in die sie infolge der Herstellung auslaufen, ab, so zerfallen sie in Staub. Ähnliche Tränen, die bei genügender Kälte des Ablöschwassers sogar von selbst zerplatzten, stellte MARANGONI[2] aus Kolophonium her. Die Sprödigkeit hängt hier, ebenso wie bei anderen Stoffen, jedenfalls mit der durch das rasche Erkalten erzeugten Verschiedenheit in der Beschaffenheit der oberflächlichen und der tieferen Teile zusammen. In der Tat lassen sich die entsprechenden Spannungen leicht nachweisen, wenn man nach MACK die Tränen in Zedernholzöl taucht und im polarisierten Lichte ihre prächtigen Farben beobachtet. Und BARUS fand, daß durch Loslösung der oberflächlichen Schichten in Flußsäure die Explodierbarkeit mehr und mehr verloren geht.[3]

6. Besondere Erscheinungen bei der permanenten Deformation der

[1] C. BARUS, WIED. Ann. **7.** 338. 1879. — V. STROUHAL u. C. BARUS, Verh. phys. med. Ges. zu Würzburg **15.** 1880. — F. AUERBACH, WIED. Ann. **5.** 289. 1878. — C. FROMME, Gött. Nachr. 1876. p. 157; WIED. Ann. **8.** 352. 1879; **22.** 371. 1884. — H. MEYER, WIED. Ann. **18.** 233. 1883. — CLÉMANDOT, C. R. **94.** 703. 1882; **95.** 587. 1882. — L. CHEESMAN, Würzb. Inaug.-Diss. Leipzig 1882. — P. GRUNER, WIED. Ann. **41.** 334. 1890. — [2] MARANGONI, Nuov. Cim. (3) **5.** 116. 1879. — [3] K. MACK, WIED. Ann. **69.** 801. 1899. — C. BARUS, SILL. Journ. (3) **31.** 439; **32.** 181. 1896.

Metalle hat HARTMANN beobachtet. Es entstehen nämlich gewisse, regelmäßig abgegrenzte Zonen, die sich an der Oberfläche durch Kurvensysteme kennzeichnen; die mit solchen „Deformationslinien" bedeckten Teile sind durch nicht deformierte Zwischenräume voneinander getrennt. Die Kurvensysteme sind verschieden für Zug, Druck, Biegung und Stoß, sie sind ferner um so ausgebreiteter, je langsamer die Beanspruchung erfolgte, endlich werden die betreffenden Stellen von Säuren leichter angegriffen als die übrigen. — MESNAGER hat die Kurvensysteme weiter studiert und gefunden, daß es deren drei Systeme gibt, eins in der Richtung der größten Hauptspannung, die beiden anderen symmetrisch nach beiden Seiten divergierend. Sie entstehen durch Gleiten in Flächen, die zur Oberfläche normal sind, und können durch Ätzen schon unterhalb der Elastizitätsgrenze sichtbar gemacht werden. An die Formeln für die Gleitung können Schlüsse in betreff des Verhältnisses der Elastizitätsgrenzen für Zug und Druck geknüpft werden. — Bei der Dehnung hämmerbarer Metalle bilden sich äquidistante Knoten und Bäuche aus, infolge der Interferenz der Lastwirkung am unteren und der Reaktion am oberen Ende. Wenn der Stab abwechselnd durch Zug gehärtet und durch Erwärmen angelassen wird, bilden sich die Knoten bei der zweiten oder dritten Dehnung.[1]

7. Über die dauernde Veränderung von Metalldrähten durch Dehnungs-, Biegungs- und Drillungszyklen liegen zahlreiche Arbeiten von G. WIEDEMANN, WARBURG, HIMSTEDT, LENOBLE, COKER und vielen Anderen vor. HIMSTEDT fand, daß die Metalle durch dauernde Torsion bei gleichzeitiger Belastung äolotrop werden und bei ätzender Behandlung ein schraubenförmiges Ansehen bekommen. Ihre Plastizität verloren sämtliche Metalle fast vollständig, sie zerbrachen z. B. bei der Biegung u. s. w. Der Sinn der entstehenden Äolotropie ist übrigens nicht bei allen Metallen der gleiche, es lassen sich vielmehr zwei Gruppen von entgegengesetztem Verhalten unterscheiden.[1] — Bei dieser Gelegenheit sei auch auf die „säkularen" Versuche hingewiesen, die BOTTOMLEY[2] unternommen hat, um zu ermitteln, wie sich Metalldrähte allmählich verändern.

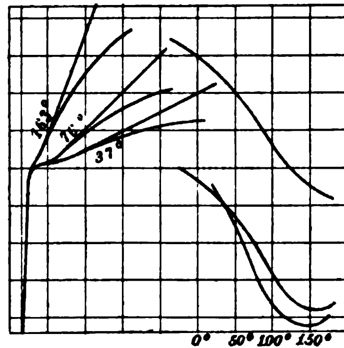
8. Eine große Reihe hierher gehöriger Studien hat SPRING durchgeführt. Er unterwarf feste Körper allseitigen Drucken, die bis zu kolossalen Werten — 20000 Atmosphären — gesteigert wurden, und fand, daß das permanente Volumen zwar anfangs abnahm, die Dichte also stieg, daß aber bei großen Drucken Konstanz eintrat, d. h. die Körper kehrten nach Aufhebung des Druckes wieder vollständig in den früheren Zustand zurück. Während es also für andere, zum Teil laterale Deformation eine Grenze der elastischen Vollkommenheit gibt, scheint diese für reine allseitige Kompression zu fehlen; denn die anfängliche Zunahme der Dichte läßt sich ungezwungen auf sekundäre Erscheinungen, Ausfüllung von Poren, Austreibung von Gas u. s. w. zurückführen. Was aber besonders unerwartet kam, war die Tatsache, daß bei einigen Substanzen die Dichte sogar um eine Kleinigkeit abnahm, und dies wurde nicht lange darauf von KAHLBAUM bei einer ganzen Reihe von Stoffen bestätigt (daß das Silber beim Schlagen das Volumen vergrößert, hatte übrigens schon H. ROSE konstatiert). SPRING glaubte für die Erscheinung eine Erklärung in der Annahme gefunden zu haben, daß der hohe Druck die festen Körper derart plastisch macht, daß sie stellenweise in einen quasiliquiden Zustand kommen, und daß sie in diesem mehr Raum einnehmen. Wenn das richtig ist, so darf die Erscheinung nicht auftreten bei einem Körper, der sich beim Schmelzen zusammenzieht, also z. B.

---

[1] L. HARTMANN, C. R. **118**. 520. 738. 1894. — F. OSMOND, C. R. **118**. 650. 1894. — MESNAGER, C. R. **126**. 515. 1898. — G. FAURIE, C. R. **126**. 400. 1898. — [2] F. HIMSTEDT, WIED. Ann. **17**. 701. 1882; daselbst auch die ältere Literatur. — E. LENOBLE, Journ. de phys. (3) **9**. 532. 1900. — E. G. COKER, Trans. Edinb. Soc. **40**. 263. 1901. — Auf die reiche technische Literatur über diese Fragen kann hier nicht hingewiesen werden. — [2] BOTTOMLEY, Rep. Brit. Ass. 1881 ff.

beim Wismut; in der Tat ergab der Versuch hier eine Zunahme der Dichte. Besondere Erscheinungen zeigen Stoffe mit zwei allotropen festen Modifikationen; sie verhalten sich der Kompression gegenüber nicht vollkommen elastisch, so der Schwefel und der Kohlenstoff, der durch Druck in Diamant übergeführt werden kann (MOISSAN). Schließlich seien noch Beobachtungen von GRUNMACH, sowie von GRAY und MEES erwähnt; ersterer fand, daß ein Stab aus Siemens-Martin-Stahl, der bis zur permanenten Deformation gezogen worden war, in dem deformierten Querschnitt eine Dichteverminderung aufwies, nämlich von 7,834 auf 7,789; letztere fanden bei bleibender Dehnung von Drähten aus Eisen, Messing, Neusilber und Klavierstahl im Betrag von 0,1—0,25 $^0/_0$ Durchmesservergrößerungen von 7—9 $^0/_0$, während sich bei stärkeren Dehnungen die Dicke verminderte.[1]

9. ASCOLI[2] hat zur Prüfung seiner oben erwähnten Definition der Plastizität als Verhältnis der permanenten Deformation zur erzeugenden Kraft Versuche an Eisenbändern angestellt und gefunden, daß die Plastizität des Eisens in diesem Sinne bei zunehmender Zugkraft zunimmt, dagegen mit steigender Temperatur bis zu einem Minimum bei etwa 150° abnimmt, ebenso wie auch die Elastizitätsgrenze. In der Figur 295 sind die Ergebnisse veranschaulicht, die Maßstäbe sind willkürlich, links ist die Deformation Abszisse, die Kraft Ordinate, das erste Kurvenstück entspricht der vollkommenen Elastizität, dann kommt ein zweites, fast horizontales, zuletzt wieder ein ansteigendes, und zwar gekrümmt oder gerade, je nachdem man die Querschnittskorrektion unterläßt oder vornimmt; rechts unten hat man für zwei Fälle die Abhängigkeit der Plastizität, rechts oben die der Elastizitätsgrenze von der Temperatur.



Figur 295.

10. Die wichtigsten technischen Formen der Plastizität sind folgende: Duktilität oder Geschmeidigkeit für Längszug (Ausdehnung in eine Linie). Sie ist sehr groß bei Platin, Silber, Kupfer, Eisen und Gold, dagegen klein bei Blei, Zinn und Zink. Platindraht ist bis herab zu 0,00005 mm Dicke hergestellt worden. Stoffe, die bei gewöhnlicher Temperatur nicht duktil sind, werden es in der Hitze, z. B. Zink, Siegellack und ganz besonders Glas; hierauf beruht die Technik des Glasblasens. Von letzterem erhielt durch Kunstgriffe (Abschießen mit der Armbrust) BOYS[3] Fäden von 30 m Länge und 0,002 mm Dicke; noch dünnere Fäden gab Quarz, nämlich so dünne, daß man sie selbst unter dem Mikroskop nicht bis zu Ende verfolgen kann; trotzdem kann man ihre Dicke sehr gut aus der NEWTONschen Farbe, die sie geben, abschätzen; bei den feinsten fehlt auch diese.

Walzbarkeit oder Geschmeidigkeit für Flächendruck (Ausbreitung in eine Fläche). Hier steht Gold an der Spitze, dann folgen Silber, Kupfer, Platin, Zinn, Zink, Messing und Eisen. Als Goldschaum hat Gold eine Dicke von 0,0003 mm, als Vergoldung eine solche von nur 0,00001 mm; auf indirektem Wege erhielt FARADAY sogar Blättchen von 0,000001 mm = 1 $\mu\mu$ Dicke. Nicht ganz so dünn läßt sich Stanniol, Schaumgold u. s. w. herstellen. In der Eisentechnik hat das Walzen eine sich noch immer steigernde Bedeutung.

---

[1] W. SPRING, in zahlreichen Bänden des Bull. Acad. de Belg., von 1880 an, zuletzt und zusammenfassend: 1903. p. 1066. — Vgl. auch Rapp. prés. au Cong. int. Paris 1900. — G. KAHLBAUM, Phys. Ztschr. 1901. p. 32; Abh. naturf. Ges. Basel **15**. 21. — L. GRUNMACH, WIED. Ann. **67**. 227. 1899. — T. GRAY und C. L. MEES, Phil. Mag. (5) **29**. 355. 1890. — [2] M. ASCOLI, a. a. O. — [3] C. V. BOYS, Phil. Mag. (5) **45**. 489. 1887; R. Inst. 1889, 14. Juni.

alle Metalle lassen sich mehr oder weniger gut hämmern, einige besonders gut in kaltem, andere in heißem bezw. glühendem Zustand.

11. Für Kristalle liegt namentlich von mineralogischer Seite eine reiche Literatur vor, von der hier nur weniges erwähnt werden kann. RINNE hat Stücke von Steinsalz und Sylvin in Kupferrohren, die mit geschmolzenem Alaun umgossen waren, zwischen den Platten einer SCHENKschen Festigkeitsmaschine einem Längsdruck bis zu 48000 kg auf etwa 400 qmm unterworfen; dabei wurde der Zylinder bis auf etwa die halbe Höhe zusammengedrückt und entsprechend ausgebaucht; die nunmehr wieder herauspräparierten Kristalle erwiesen sich ebenfalls stark breitgedrückt und unregelmäßig krummflächig, waren aber dabei meistens durchsichtig und einfach brechend geblieben. Steinsalz und Sylvin können also unter hohem Druck weitgehende plastische Umformungen erfahren, während das nach früheren Versuchen bei Kalkspat nicht der Fall ist (es wäre aber interessant, es auch noch bei Flußspat zu versuchen, wo das Ergebnis wahrscheinlich positiv sein wird). — Ferner sind hier die schon oben erwähnten Studien von MÜGGE über Translationsflächen nochmals anzuführen, da diese Flächen die Erklärung für die Plastizität mancher Kristalle abgeben können, auch wo eigentliche Gleitung, mit Zwillingsbildung, nicht vorhanden ist und der Zusammenhang völlig kontinuierlich bleibt; das einfachste Kennzeichen ist eine feine Streifung. Bei vielen Kristallen kann man diese beobachten, darunter auch bei manchen Metallen, so bei Kristallen von Gold, Silber und Kupfer, während es sich beim weichen Eisen um Gleitung handelt. — Mit der Kohäsion bei den Kristallen stehen jedenfalls auch die merkwürdigen Ätzfiguren im Zusammenhang, jene meist mikroskopischen Vertiefungs- oder Erhöhungsfiguren, die auf den glatten Flächen von Kristallen auftreten, wenn man sie der langsamen Einwirkung lösender oder korrodierender Mittel aussetzt; über die Einzelheiten sei auf die Lehrbücher der Mineralogie sowie auf die neuesten Jahrgänge der betreffenden Zeitschriften verwiesen. Auch bei Gesteinen ist mehrfach Plastizität festgestellt worden, z. B. bei Marmor durch L. WEBER (eine Platte von 150·50·5 cm hatte sich nach 17 Jahren um 21 mm durchgebogen), von ADAMS und NICOLSON außerdem auch am Kalkstein (bruchlose Faltung und Deformation), bei tonigen Gesteinen u. s. w.; dagegen sind nach WEINSCHENK Dolomite und Silikatgesteine nicht oder nur bis zu einem gewissen Grade (mehr wird aber auch gar nicht verlangt) plastisch. — Es ist einleuchtend, daß diese Frage für das Problem der Gebirgsbildung von großem Interesse ist, es muß aber an diesem Hinweis genügen.[1]

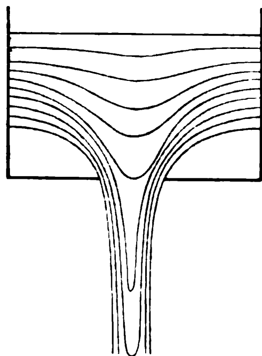
12. Um die inneren Veränderungen plastischen Materials bei starken Drucken feststellen zu können, kam BENTON[2] auf den Gedanken, in den z. B. kubischen Hohlraum ein Drahtgitter einzulegen, ihn dann mit dem Material, in diesem Falle WOODsches Metall, auszugießen, die Kompression (zwischen zwei Platten) auszuführen und alsdann das Metall, unter Beobachtung der nötigen Kunstgriffe, wieder wegzuschmelzen. Die Gitterstäbe erwiesen sich nach außen gebogen, am stärksten die äußeren; die inneren Drähte hatten nach den Enden hin Inflexionspunkte erhalten. Die fortschreitende Deformation wird durch Photogramme illustriert.

Eine theoretische Studie über einen ähnlichen Fall, nämlich die Deformation einer Scheibe, durch axialen Druck, hat NATANSON[3] veröffentlicht.

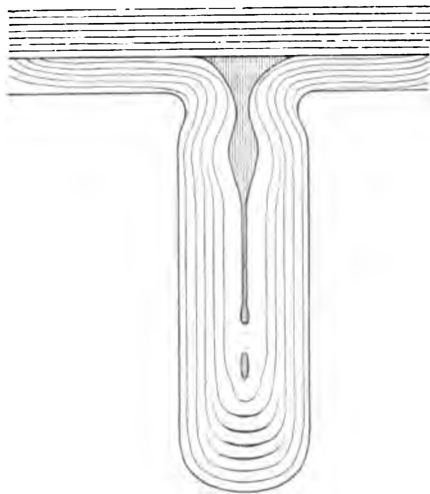
---

[1] F. RINNE, N. Jahrb. f. Min. **1.** 114. 1904. — O. MÜGGE, ibid. **1.** 71. 1898; **2.** 55. 1899; Gött. Nachr. 1899. p. 56. — F. ADAMS u. J. NICOLSON, Proc. Roy. Soc. **67.** 228. 1900. — E. WEINSCHENK, Zentralbl. f. Min. 1902. p. 161. — L. WEBER, Schr. nat.-wiss. Ver. f. Schlesw.-Holst. **11.** 3. 1895. — Man vergleiche ferner die Versuche von A. v. OBERMAYER, Wien. Ber. **106.** 2. Abt. p. 365. 1897; Schießversuche gegen plastischen Ton, mit Abbildungen der durchschossenen Tonblöcke und aufeinander geschichteten Tonplatten. — G. F. BECKER, Bull. Geol. Soc. Am. **4.** 13. 1893 (Deformation und Fließen in Gesteinsmassen). — [2] J. R. BENTON, SILL. Journ. (4) **13.** 207. 1902. — [3] L. NATANSON, Ztschr. f. phys. Chem. **43.** 185. 1903; Krak. Anz. 1902. p. 494.

Das Fließen und Ausfließen fester Körper.[1] Wenn man erwägt, daß die Plastizität der festen Körper eine Annäherung an die Fluidität, an den flüssigen Zustand bedeutet, so kommt man zu dem Schluß, daß es möglich sein muß, durch Anwendung genügend großer Drucke diese Körper zum Fließen, insbesondere zum Ausfluß aus Öffnungen in Gefäßen zu bringen. Diese Vermutung ist durch die schönen Versuche von TRESCA zuerst bestätigt worden. Füllt man ein zylindrisches Gefäß, dessen Boden eine Öffnung hat, mit einer Anzahl übereinander geschichteter Scheiben aus einem plastischen Stoffe, z. B. Ton, Lehm, Eis, Blei u. s. w., und läßt man mittels einer hydraulischen Presse einen starken Druck, etwa 10000 kg für Ton, 100000 für Metalle, auf die oberste Scheibe wirken, so sieht man die Masse in Gestalt eines festen, unter der Öffnung sich zusammenziehenden, weiterhin zylindrischen Strahles austreten, und beim Zerschneiden desselben sieht man, daß er sich aus lauter ineinander gesteckten Röhren zusammensetzt, deren jede einer der ursprünglichen Scheiben entspricht, und die sich unten sukzessive schließen. Figur 296 gibt das Bild für Ton, Figur 297 für Blei, hier sieht man, in vollkommener Analogie mit Flüssigkeiten,



Figur 296.



Figur 297.

die Ansätze zur Tropfenbildung. Bei Eis kann man die Schichten auch von außen wahrnehmen, und man erblickt dann meist noch zahlreiche, infolge der Ausdehnung der Schichten entstandene Querrisse. — Ähnliche Versuche hat bald darauf v. OBERMAYER ausgeführt und in neuester Zeit weiter verfolgt. Bei Eis, Kampher, Ton, Paraffin, Wachs u. s. w. zeigt der Strahl schuppenförmige Strukturen, Blei gibt keine solche; die Ausflußgeschwindigkeit ist etwa proportional dem Kubus des Druckes, bei Eis ist sie bei 0^0 neunmal so groß wie bei -6^0.

Sehr exakte Experimente hat TAMMANN, zum Teil in Verbindung mit WEREGIN und LEWKOJEW angestellt, und zwar hauptsächlich zur Prüfung der u. a. von POYNTING theoretisch formulierten Hypothese, daß die Plastizität der festen Körper auf eine teilweise Schmelzung während der Deformation zurückzuführen sei; es

---

[1] H. TRESCA, Mém. prés. à l'Acad. de l'Inst. de France **18.** 733. 1868; **20.** 75. 281. 617. 1872. — A. v. OBERMAYER, Wien. Ber. **58.** 2. Abt. p. 737. 1869; Wien. Anz. 1904. p. 35; Ver. z. Verbr. naturw. Kenntn. Wien 1904. — J. H. POYNTING, Phil. Mag. (5) **12.** 32. 1887. — G. TAMMANN, Ann. d. Phys. **7.** 198. 1902. — N. WEREGIN, J. LEWKOJEW u. G. TAMMANN, ibid. **10.** 647. 1903. — Auf den mehr thermodynamischen Inhalt der letzten beiden Arbeiten kann hier nicht eingegangen werden.

müßte alsdann zwei Schmelzkurven geben, die normale bei allseitigem Druck und verschiedenen Temperaturen, die andere bei so getroffener Einrichtung, daß die eventuell gebildete Schmelze frei abfließen kann; die Ausflußgeschwindigkeit müßte also bei Überschreitung dieser zweiten Schmelzkurven unstetig werden. Es wurde deshalb ein Apparat gebaut, dessen wesentlicher Teil ein konischer, auf die Möglichkeit des Ausweichens und Abfließens berechneter Druckstift war, dessen Einzelheiten aber hier nicht angegeben werden können. Das Resultat war negativ, d. h. die gedachte Diskontinuität tritt nicht ein, die Schmelzhypothese ist unhaltbar, die Plastizität ist eine primäre Eigenschaft der festen Stoffe. Als Beispiel für die Abhängigkeit der Ausflußgeschwindigkeit von Druck und Temperatur diene die folgende Tabelle; sie bezieht sich auf Eis, oben stehen die Temperaturen, links die Drucke in Kilogramm, die Einheit ist willkürlich:

	− 5,7	− 10,7	− 15,7	− 21,7
100	0,9	0,03	—	—
200	4,1	0,3	—	—
300	11,8	2,0	0,1	—
400	22,5	4,1	0,3	0,15
500	49,5	8,3	1,5	0,3
600	95,0	19	5,1	0,5
700	—	34	12,6	2,5
800	—	60	22,0	7,0
900	—	101	—	13,5
1000	—	170	—	20,5
1100	—	—	—	30
1200	—	—	—	53
1300	—	—	—	65

Wie man sieht, nimmt die Ausflußgeschwindigkeit sowohl mit steigendem Druck wie mit steigender Temperatur außerordentlich stark zu; 100 kg Drucksteigerung verdoppeln sie ungefähr; dreifache Annäherung an den Schmelzpunkt macht sie 20 bis 100 mal so groß. Ähnlich wie Eis verhält sich gelber Phosphor; bei kristallisiertem Naphthalin und Piperin dagegen sowie beim amorphen Piperin hat die Plastizität bei gewissen Temperaturen ein deutlich ausgeprägtes Maximum in ihrer Abhängigkeit vom Druck. — Bei der Ausdehnung der Versuche auf Metalle wurde ein Druck von 500 bezw. 1000 kg : qcm angewandt, nur bei Zink mußte der Druck auf 2000 kg gesteigert werden; Antimon kam auch bei 3000 kg zwischen 200 und 250° noch nicht ins Fließen. Nach der Stärke des Fließens ordnen sich die Metalle nach der Reihe: K, Na, Pb, Tl, Sn, Bi, Cd, Zn, Sb. Beispielsweise ergaben sich für Zinn bei 1000 kg : qcm Druck folgende Relativzahlen der Ausflußgeschwindigkeit:

10	20	32	42	51	61	70	83	91	100	111	121	131°
0,2	0,4	0,9	1,6	3,8	7,9	14,1	32,5	56,5	98	195	362	584

Wie man sieht, verdoppelt sich die Ausflußgeschwindigkeit etwa auf je 10° Temperatursteigerung (der Verfasser sagt irrtümlich, sie wüchse um das Doppelte). Von Einzelheiten seien gewisse Abnormitäten bei Zinn und Thallium sowie die Tatsache angeführt, daß sich das spröde Wismut zwischen die duktilen Metalle Sn und Cd einordnet.

Plastizität des Eises. Die größte Zahl der Untersuchungen über Plastizität hat sich begreiflicherweise dem Eise zugewandt; denn hier liegt der Schmelzpunkt im Bereich gewöhnlicher Temperaturen, und die Anwendung auf die Frage der Gletscher u. s. w. ist naheliegend. In der Tat ist die Gletscherbewegung ein Beispiel großartigsten Stiles für den Fluß fester Körper unter Druck, und es lassen sich alle Einzelheiten des Phänomens hier bequem studieren, so die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Drucke, von der Temperatur, von der Breite und Tiefe

des Bettes, die größere Geschwindigkeit in der Mitte als an den Rändern, so daß ursprünglich gerade Querlinien sich krümmen, die Veränderungen, die das Eis im Innern durch den Fluß erfährt u. s. w. — Fragen, die in neuerer Zeit mit verbesserten Hilfsmitteln eingehend studiert worden sind, aber nicht hierher, sondern in die Erdkunde gehören. Auf einige der rein physikalischen Arbeiten zur Plastizität des Eises muß aber noch kurz hingewiesen werden, namentlich auf die Arbeiten von K. R. Koch, Pfaff, Marangoni, Macconnel und Kidd, Odin, Andrews, Mügge, Russell, Tammann und H. Hess.[1] Bei einigen dieser Versuche wurde die Plastizität durch das Einsinken eines auf das Eis gestellten schweren Körpers im Laufe der Zeit gemessen, bei anderen wurden Eisstäbe gebogen u. s. w. Mit der Temperatur nimmt die Plastizität, wie schon oben festgestellt wurde, stark zu. Ferner ist sie verschieden für Eis verschiedener Herkunft, insbesondere natürliches und künstliches Eis, auch abhängig von der Art des Gefrierens; es liegt das daran, daß das Eis meist nicht homogenen Charakters, sondern in verwickelter Weise aus Kristallen und Komplexen aufgebaut ist. Aber auch bei homogenem Eise ergeben sich merkwürdige Erscheinungen. So werden Eisstäbe mit zur optischen Achse senkrechter Längsrichtung zwischen zwei Stützen gebogen, wenn die optische Achse vertikal, nicht aber, wenn sie horizontal liegt; Mügge bringt dies Verhalten mit seiner Theorie der Translation (p. 853) in Zusammenhang und zeigt an einigen weiteren Versuchen die Richtigkeit dieser Annahme; so wird, um nur ein solches Experiment anzuführen, ein zur optischen Achse senkrechter Stab, der horizontal und so zwischen Stützen gelegt wird, daß die optische Achse einen Winkel von 45^0 mit der Vertikalen bildet, durch ein angehängtes Gewicht tordiert und jener Winkel dadurch verkleinert. Russell bringt im Anschluß hieran die Gletscherbewegung mit der Verschiebung der Teilchen der Eiskörner in Richtung ihrer Gleitflächen in Verbindung, wofür er mehrere Belege anführt. Übrigens ist Gletschereis nicht bloß gegen Druck, sondern auch gegen Zug plastisch, was gegen die Regelationstheorie spricht; dagegen ist ein einzelner Eiskristall senkrecht zur optischen Achse nicht plastisch.

Die neueste und umfangreichste Arbeit über das Eis ist die von Hess, die sich auf Beobachtungen am Hintereisferner in Tirol aufbaut. Indessen wird hier die Plastizität vorwiegend als dynamischer Vorgang in Beziehung zur Zeit untersucht, es kommt also die innere Reibung wesentlich in Betracht (man vergleiche den späteren, dieser gewidmeten Artikel) und die Relaxationszeit, die hier ganze Sekunden beträgt, wird näher betrachtet. Immerhin ist auch reiches Material für die Plastizität als solche vorhanden. So wird gezeigt, daß sich die Plastizität des Eises senkrecht zur optischen Achse in Verschiebungen (Translationen) in deren Richtung in eigentümlichen Quetschungen offenbart; ferner, daß die Ausflußgeschwindigkeit nicht nur mit dem Drucke gewaltig ansteigt, sondern auch, daß, nachdem das Fließen einmal bei hohem Drucke eingeleitet ist, ein wesentlich geringerer Druck genügt, um die erzielte Ausflußgeschwindigkeit beizubehalten.

Andere Stoffe. Es gibt noch eine Reihe anderer Stoffe, die in dieser Hinsicht unsere Aufmerksamkeit beanspruchen, so die Lackarten, namentlich Siegellack, und die Peche, besonders das sogen. Schusterpech. Ein dünner Stab aus diesem Stoffe kann mit Vorsicht leicht gebogen werden, zerbricht aber bei plötzlicher Biegung wie Glas und zeigt alsdann eine glatte und glänzende Bruchfläche. Pechstücke fließen langsam unter der Wirkung ihres Eigengewichts, und die Erscheinungen der Gletscher kann man mit diesem Material an geignetem Modell aus Holz sehr gut darstellen. Schwere feste Körper, z. B. Metallkugeln,

[1] K. R. Koch, Wied. Ann. **25.** 438. 1885. — Fr. Pfaff, Ber. phys.-med. Soz. Erlangen 1875. p. 72. — Marangoni, Riv. Scient.-ind. **11.** 170. 196. 1879. — J. Mac Connel, Proc. Roy. Soc. **44.** 331. 1888; **48.** 259. 1890; **49.** 323. 1891. — Th. Andrews, ibid. **48.** 106. 1890. — O. Mügge, N. Jahrb. f. Min. **2.** 211. 1895. — J. Russell, Sill. Journ. (4) **3.** 344. 1897. — H. Hess, Ann. d. Phys. **8.** 417. 1903.

sinken langsam in die Pechmasse ein, und man kann bei geeigneter Wahl der Konsistenz die Einsenkungsmessungen über Stunden, Tage, Monate oder Jahre erstrecken — Erscheinungen, die wiederum Analoga sind zu solchen bei Gletschern, in deren Inneres Steine u. s. w. von außen her langsam eindringen.

Grenze und Wesen des festen Aggregatzustands. In neuerer Zeit haben mehrere Umstände die althergebrachte Auffassung des festen Aggregatzustands ins Wanken gebracht. Einer betrifft die eben behandelte Erscheinung des Fließens, die doch charakteristisch für Flüssigkeiten sein soll, nun aber auch bei festen Körpern, wenn auch nur unter hohem Drucke, bekannt ist. Ein zweites hierher gehöriges Phänomen stellen die von O. LEHMANN entdeckten flüssigen Kristalle dar, die das Fließen mit den Flüssigkeiten, die Äolotropie mit den festen Körpern teilen. Aus diesen und anderen Tatsachen ist zu schließen, daß die bisherige Definition des festen Zustandes nicht mehr brauchbar ist. Wenigstens dann nicht mehr, wenn man eine scharfe Grenze zwischen den Aggregatzuständen verlangt; begnügt man sich damit, zu sagen, es gebe einen allmählichen Übergang vom festen zum flüssigen Zustand, charakterisiert dadurch, daß die Zähigkeit oder innere Reibung unter einen gewissen Wert hinabsinkt, so wäre die Frage damit natürlich erledigt. Es ist aber zu bedenken, daß es einen ähnlichen graduellen Übergang in bezug auf die Kristallisationsfähigkeit nicht gibt, wenigstens solange man die flüssigen Kristalle nicht als einfache und für Prinzipienfragen in Betracht kommende Gebilde anerkennt. Wenn man diese Erwägungen weiter verfolgt, namentlich im Sinne der Thermodynamik und der Phasenlehre, so muß man wohl, wie das TAMMANN auf Grund seiner langjährigen Untersuchungen über die Grenzen des festen Zustands tut, zu dem Ergebnis kommen, daß es eigentlich nur die Kristalle sind, die dem festen Zustande angehören, während die amorphen Körper, die man als fest bezeichnet, nichts anderes sind, als unterkühlte Flüssigkeiten; die letzte äußerliche Konsequenz wäre dann die, daß man nicht mehr vom „festen“, sondern vom „kristallisierten“ Zustand spräche, was noch den weiteren Vorzug hätte, daß der Ausdruck „fest“ jetzt ausschließlich seine Bedeutung auf dem Gebiet der quantitativen Elastizitäts- und Kohäsionserscheinungen behielte. TAMMANN hat auch die Grenzkurven zwischen kristallisiert und flüssig für zahlreiche Stoffe ermittelt und die Nebenkurven für amorph (unterkühlt) hinzugefügt; jedoch gehört das Nähere in die Thermodynamik.[1]

5. Adhäsion und Kohäsion.

Nennt man die Erscheinung des Zusammenhalts der festen Körper in sich ihre Kohäsion, so kann man nun einen Schritt weiter gehen und den Zusammenhang verschiedener Körper aneinander betrachten; so gelangt man zu dem Begriff der Adhäsion. Man kann dann aber rückwärts von der Adhäsion wieder zur Kohäsion übergehen, indem man an die einzelnen Strukturteile oder molekularen Teilchen der Körper denkt und ihre Kohäsion als Adhäsion dieser Teile auffaßt. Die Brücke zwischen beiden Erscheinungen führt schließlich zur Betrachtung einer besonderen, interessanten Körperklasse, den Pulvern oder sandartigen Massen, deren Kohäsion eine Adhäsion der einzelnen Körner oder Stäubchen ist.

Adhäsion. Wie schon die tägliche Erfahrung zeigt, haften leichte Teilchen an der Oberfläche anderer Körper (Staub, Bleistift auf Papier, Kreide auf Holz u. s. w.) Bringt man zwei Platten, indem man sie übereinander schiebt und dreht, in innige Berührung, so leisten sie der Trennung einen gewissen Widerstand, den man messen kann, indem man die untere fest hinlegt, die obere an die eine

[1] G. TAMMANN, WIED. Ann. 62 und 66; DRUDES Ann. 2 ff.

Schale einer Wage hängt und die andere mit Gewichten belastet.[1] Auf diese Weise kann man auch die Adhäsion fester Körper an Flüssigkeiten messen. Aber alle diese Messungen fallen sehr schwankend aus, weil die verschiedensten Einflüsse (Parallelität, Glätte, Reinheit u. s. w. der Platten) sich geltend machen; bei Flüssigkeiten kommt meist noch störend hinzu, daß der feste Körper eine Schicht der Flüssigkeit mit sich nimmt, weil deren Kohäsion kleiner ist als die Adhäsion. Besonders gut adhärieren Marmor-, Blei- und Kupferplatten. Man kann z. B. die Seitenflächen von kupfernen Würfeln so vollkommen ebnen, daß, wenn man ein Dutzend derselben zu einer Säule aufschichtet und den obersten hebt, die ganze Säule mit gehoben wird. Das die Adhäsion quantitativ darstellende Gewicht P ist natürlich der Größe der Adhäsionsfläche F proportional, also $P = \alpha F$, und hierin ist α der Adhäsionskoeffizient. Wie klein derselbe meist im Vergleich zum Festigkeitskoeffizienten ist, zeigen folgende, von verschiedener Seite beobachtete Zahlen (in kg pro qmm):

Platten von gleichem Metall		Feste Körper und Flüssigkeiten	
Kupfer	0,0000013	Glas und Wasser	0,000006
Zink	10	Glas und Quecksilber	18
Wismut	10	Zinkamalgam und Quecksilber	50
Antimon	09		
Blei	09		
Zinn	06		

Wesentlich größer ist begreiflicherweise die Adhäsion von Bodenarten, sandigen wie tonigen; hierüber liegen zahlreiche Untersuchungen im landwirtschaftlich-technischen Interesse vor, von denen die von Schübler, Haberlandt und Schachbasian als auch physikalisch wertvoll erwähnt seien.[2] Der letztgenannte Autor fand auf Grund einer relativ sehr exakten Meßmethode (Abreißen einer Holz- oder Stahlplatte von der ebenen Oberfläche der Bodenart mit Hilfe der Wage) u. a. folgendes: 1. Bei den sandigen Bodenarten (Kalk und Quarzsand) ist die Adhäsion um so größer, je feiner das Korn ist. 2. Die größte Adhäsion an Holz und Eisen hat Ton, die kleinste Humus, in der Mitte steht Quarz. 3. Bei den sandigen Bodenarten nimmt die Adhäsion mit dem Wassergehalt bis zur Sättigung zu, bei den tonigen nur bis zu 80 %, dann aber wieder ab. 4. Bei den quarz- und humusreichen Böden ist die Adhäsion an Stahl größer als an Holz, bei den tonigen ist es umgekehrt. Als Zahlenbeispiel in g : qdm diene Quarzsand von verschiedener Korngröße in hundertstel Millimeter und voller Sättigung:

	< 7	< 11	< 17	< 25	> 25
Stahl, poliert	1957	1717	1450	727	0
Stahl, gerostet	1714	1268	974	570	0
Holz	1653	969	615	292	0

In auffälliger, aber durch alltägliche Erfahrung uns vertrauter Weise äußert sich die Adhäsion beim Schreiben mit Kreide, Blei, Graphit und ähnlichen weichen Stoffen; hier überwindet die Adhäsion an Holz, Schiefer, Papier u. s. w. sogar mit Leichtigkeit die Kohäsion der zuerst genannten Stoffe. Über derartige Adhäsionserscheinungen von Metallen an Glas, Porzellan und anderen Silikaten hat Margot[3] Versuche angestellt, die z. B. für Aluminium, Kadmium, Zink,

[1] Vgl. z. B. J. Schachbasian (s. u.) und Krebs (Schulapparat), Pogg. Ann. **135**. 144. 1868. — [2] G. Schübler, Grundz. d. Agr.-Chemie. Leipzig 1838. — F. Haberlandt, Allgem. Pflanzenbau. Wien 1879. p. 393. — J. Schachbasian, Inaug.-Diss. Jena 1890; Forschungen a. d. Gebiete d. Agr.-Chemie **13**. 193. 1890. — [3] Ch. Margot, Arch. de Genève (3) **32**. 138. 1894; **33**. 161. 1895.

Magnesium interessante Resultate lieferten; auch wird nachgewiesen, daß es sich hier nicht um eine Art von Lötung oder ähnliches, sondern um reine Adhäsionserscheinung handelt.

Metallüberzug, Leimung, Lötung, Schweißung. In das Gebiet der Adhäsionserscheinungen gehören zahlreiche technische Prozesse, die hier wenigstens erwähnt werden mögen. Der Metallüberzug erfolgt auf feurigem, trockenem, nassem oder galvanischem Wege und führt, je nach der Natur der beiden Metalle, zu einem mehr oder weniger hohen Grade von Adhäsion (Vergoldung, Versilberung, Plattierung u. s. w.). Beim Leimen werden flüssige Stoffe benutzt, die durch Verdunstung fest werden. Andere Stoffe, wie Mörtel und Gips, werden durch Trocknung fest, und ihre Adhäsion wird dadurch eine relativ große, z. B. bei Mörtel bis zu 0,000025, bei Gips sogar bis zu 0,00004. Beim Löten wird, nach Entfernung der oberflächlichen Oxydschicht, durch Schmelzung des Lotes, Auflegen in diesem Zustand und nachträgliches Erstarren eine innige Verbindung erzielt. Das Schweißen endlich beruht auf dem Zusammenhämmern in glühendem Zustand, und hierbei wird, namentlich bei Eisen und Platin, eine Adhäsion erzielt, welche der Kohäsion (Festigkeit) häufig so gut wie gleichkommt und die beiden Stücke von nun an als ein einziges Ganze zu betrachten gestattet.

Schweißung durch Druck. Daß auch bei gewöhnlicher Temperatur, allein durch genügende Steigerung des Druckes, eine innige Verschmelzung von Körpern und sogar von Pulvern zu konsistenten Massen erfolgen kann, hat durch langjährige Studien SPRING erwiesen. Freilich, die Idee, die den Ausgangspunkt seiner Arbeiten bildete, die Erklärung der Bildung der Felsmassen und Gebirge auf diesem Wege, mußte aufgegeben werden, da gerade die betreffenden Stoffe, Quarzsand, Kalkstein, Eisenoxyd, Tonerde u. s. w., negatives Resultat liefern. Wohl aber gelingen die Versuche, bei denen der Druck bis auf 20000 Atmosphären gesteigert wurde, bei zahlreichen anderen Stoffen, darunter bei *vielen* Metallen; so verwandeln sich Bleispäne bei 2000, Zinkspäne bei 5000 Atmosphären in eine homogene, kompakte Masse, auch Graphitpulver und Holzfeilicht werden konsistent. Besonders interessant verhalten sich Stoffe mit verschiedenen existierenden Modifikationen; so wird aus prismatischem oktaedrischer Schwefel, aus amorphem metallischer Phosphor. Als weitere Beispiele seien angeführt: Torf, der bei 6000 Atmosphären eine glänzend schwarze, steinkohlenähnliche Masse lieferte; übermangansaures Kali ergibt den in der Natur vorkommenden Pyrolusit; Quecksilberjodür gibt eine schwach durchsichtige, fein kristallisierte Masse u. s. w. Man kann sagen, daß alle kristallinischen oder der Kristallisation fähigen Substanzen zusammenschweißen. Nimmt man Feilichtgemenge von verschiedenen Metallen, so erhält man völlig homogene Legierungen, z. B. WOODsches Metall und sogar Messing. Auch chemische Reaktionen treten vielfach auf. Stellt man zwei Zylinder aus irgend einem Metall mit sorgfältig geschliffenen Endflächen aufeinander und erhält sie einige Zeit bei erhöhter (aber von der Schmelztemperatur weit entfernter) Temperatur, so schweißen sie zusammen, am besten und schnellsten, nämlich bei 385° in 3 Stunden, bei Zink, am unvollkommensten und bei 395° erst nach 12 Stunden, bei Antimon. Nimmt man zwei verschiedene Metalle, so erfolgt nicht nur die Zusammenschweißung, sondern sogar die Bildung einer dicken legierten Schicht, so z. B. bei Kupfer und Zink in 8 Stunden bei 400° eine messingartige Schicht von fast 2 cm Dicke. Es erweckt das offenbar vollkommen den Eindruck des Phänomens, das man bei flüssigen und gasigen Stoffen Diffusion nennt, und wie dort, wird man auch hier auf die Vorstellung geführt, daß die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten und Wegstrecken der molekularen Teilchen die Grundlage für die Erscheinung gibt. In der Tat hat ROBERTS-AUSTEN bei seinen entsprechenden Versuchen, die zum Teil sogar bei Zimmertemperatur angestellt wurden, durch Analyse der

einzelnen Schichten den Gang der Diffusion ganz im Einklang mit deren bekannten Gesetzen feststellen können. Auch als eine Art von Lösung kann man den Vorgang betrachten, wie ja die Legierungen schon vielfach als feste Lösungen bezeichnet worden sind. Diese Auffassung wird durch den Parallelismus zwischen den Lösungsverhältnissen der verschiedenen Metalle und ihrem Verhalten bei den hier in Rede stehenden Druckversuchen vollkommen bestätigt. Schließlich sei auf die Versuche und Studien von Hittorff, Warburg, Riecke u. A. über die Wanderung der Metallteilchen unter dem Einfluß der Elektrizität hingewiesen.[1]

Auch die hier angedeuteten Tatsachen weisen wiederum auf die Schwierigkeit hin, den festen Aggregatzustand scharf zu definieren und auf die Auffassung der festen Körper, mindestens der amorphen, als eine kontinuierliche Fortsetzung der flüssigen.

Wahre und scheinbare Adhäsion. Bisher ist stillschweigend angenommen worden, daß es sich bei der Adhäsion um eine primäre und einfache Erscheinung handle. Das ist aber durchaus nicht immer der Fall; es finden sogar jedenfalls sehr häufig Wirkungen statt, die eine Adhäsion vortäuschen, wenigstens wenn man dieses Wort im engeren Sinne einer direkten Wirkung zwischen den Körperteilchen nimmt. Die Wirkung, die die Täuschung hervorbringt, ist, worauf zuerst Stefan[2] aufmerksam gemacht hat, hydrodynamischen, genauer aerodynamischen Charakters. Die Berührung zwischen zwei Platten ist nämlich fast nie mathematisch genau, es existiert vielmehr zwischen ihne eine, wenn auch unregelmäßige und sehr dünne Schicht. Infolge der Reibung strömt, wenn die Platten auseinander gezerrt werden, die Luft, das Wasser, überhaupt das umgebende Medium nur langsam ein, zumal hierbei ein äußerer Überdruck entsteht. Man kann sogar aus den Gleichungen des so aufgefaßten Vorgangs die Reibungskonstante bestimmen und erhält dabei fast genau die auf andere Weise für Luft und Wasser gefundenen Werte. Nur beim Experimentieren im luftleeren Raume kann man sicher sein, daß es sich nicht um einen derartigen Vorgang handelt.

Im Anschluß hieran sind auch Versuche von Voigt[3] anzuführen, bei denen die Dicke der Zwischenschicht aus den Newtonschen Farben bestimmt wurde. Bei sorgfältig gewaschenen Platten ist die Farbe ein neutrales Weiß, also die Dicke noch mehrere tausendstel Millimeter, erst nach dem Beseitigen der durch das Poliermittel eingebrachten Stäubchen erhält man eine homogene Färbung, bis etwa zum Graublau erster Ordnung, entsprechend dem Abstand 0,00007 mm. Bei so gereinigten Platten, einer größeren oben und einer kleineren unten, gelang es meist erst nach mehrfachem Andrücken derartige Haftung zu erzielen, daß die untere Platte auch nach Stunden und Tagen nicht abfiel; die Dicke der Schicht war dabei etwa 0,00012 mm. Nach längerem, staubfreien Liegen nahm die Dicke bis zum dreifachen zu; wurde nun durch stärkeres Anpressen diese Dicke verringert, so trat wieder vollständige Adhäsion ein, und diese blieb auch bestehen, nachdem die Schicht durch einen vorsichtigen Zug wieder verdickt worden war. Unter der Luftpumpe änderte sich die einmal vorhandene Farbe nicht, auch hing sie nicht von der — einmal konstant gewordenen — Temperatur ab. Alle diese und weitere Tatsachen führen zu der Annahme, daß sich zwischen den Platten eine Luftschicht befindet, die hart an den festen Oberflächen in einem dem flüssigen, zum Teil vielleicht gar dem festen Zustand ähnlichen Zustand sich befindet.

---

[1] W. Spring, Bull. Acad. Belg. (2) **45.** 746. 1878; **49.** 323. 1880; (3) **5.** 55. 492; **6.** 507. 1883; **14.** 595. 1887; **28.** 238. 1894; **30.** 311. 1895; Ztschr. f. phys. Chem. **2.** 536. 1888; Rapp. du Cong. int. Paris **1.** 402. 1900; Lecture publ. Acad. Belg. 1899. p. 790. — W. C. Roberts-Austen, Proc. Lond. phys. Soc. 1882. p. 231; Proc. Roy. Soc. **49.** 281; **67.** 101. 1890; Trans. Roy. Soc. **187.** 383. 1896. — Vgl. auch die Abhandlung über das Schweißen der Metalle bei niedrigen Temperaturen, von C. A. Fawsitt, Dingl. polyt. Journ. **232.** 482. 1879. — [2] J. Stefan, Pogg. Ann. **154.** 316. 1875. — [3] W. Voigt, Wied. Ann. **19.** 39. 1883.

Der Erddruck steht nicht senkrecht auf der Mauer, sondern bildet mit ihrer Normalen einen Winkel Θ, der von der Neigung der Mauer und der Neigung der Erdoberfläche abhängt und spezielle Werte annimmt, wenn der letztere Winkel entweder null oder gleich dem natürlichen Böschungswinkel φ ist. — Nach FORCHHEIMER steigt bei horizontaler Verschiebung einer vertikalen oder vorgeneigten Stützmauer oder beim Umkippen um ihren inneren Fuß bei horizontaler Sandoberfläche die entstehende Gleitebene unter dem Winkel $45^0 + \varphi/2$ an, Verschiebung schräg nach abwärts vergrößert diesen Winkel. Bei horizontaler Verschiebung einer rückgeneigten Stützmauer oder Umkippen um den inneren Fuß ist dagegen jener Winkel $45^0 + \psi/2$, wo ψ die Neigung der Mauer gegen den Horizont ist. Der Erddruck selbst ist, wenn h die Höhe der Wand und $\chi = \arcsin(\operatorname{tang}\varphi \cos\psi)$ ist:

$$E = \frac{\varrho h^2}{2} \frac{\sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2}}{\sin\psi \sin\frac{\psi - \varphi}{2} \sin\left(\chi + \frac{\psi + \varphi}{2}\right)} .$$

Bei Verschiebung des Sandes mittels einer Wand bildet sich eine Gleitebene, deren Neigung größer als $45^0 - \varphi/2$ ist und noch größer, wenn der schiebenden Vorderwand eine Rückwand nahe ist. Auch über die Schichtenbildung von Sand und die dabei auftretenden Knickungen und Verwerfungen hat FORCHHEIMER interessante, durch zahlreiche Abbildungen veranschaulichte Untersuchungen angestellt; jedoch kann darauf nicht näher eingegangen werden.[1]

Gleichgewichtsfiguren loser Massen. In besonders charakteristischer Weise offenbart sich die Sonderstellung pulverförmiger Massen in den Gleichgewichtsfiguren, die sie auf fester Basis, bei sonst freier Oberfläche annehmen. Hierüber hat zuerst PETRUSCHEWSKI, alsdann unabhängig von ihm und in einwandfreierer Weise AUERBACH Untersuchungen angestellt. Man benutzt hierzu gut getrocknete, gleichförmig körnige Massen, am besten von nahezu kugeligem Korn und nicht zu grober, aber auch nicht zu feiner Korngröße, Die Bildung der Figuren kann auf sehr verschiedene Art zuwege gebracht werden; die meisten Methoden sind aber bedenklich, weil sie keine allgemein gültigen Resultate liefern. Am einwandsfreisten ist die Methode des Heraushebens aus einer größeren Masse mittels vorsichtiger Kurbelung; Figur 298 zeigt nach AUERBACH eine so aus der Umgebung herausgehobene Sandmasse. Die Ausmessung erfolgt durch eine Art von Punktierung nach den drei Koordinatenrichtungen, wobei die eben erfolgende Berührung der Punktierspitze sehr scharf durch Abrollen eines Körnchens sichtbar wird; auch der Stereokomparator von PULFRICH ließe sich mit Erfolg anwenden. Jedenfalls läßt sich bei Anwendung von Grundflächen, deren Lineardimension etwa 30 bis 60 cm beträgt, die Messung völlig genügend scharf durchführen.

Da es aussichtslos erscheint, die stenge Theorie auf das Problem anzuwenden, würde das Experiment in der Luft schweben, wenn es nicht AUERBACH gelungen wäre, ein einfaches Prinzip aufzufinden, das, unterstützt durch die Grenzbedingungen, alle Tatsachen zusammenfaßt und die Gleichgewichtsfiguren bis ins einzelne zu berechnen erlaubt. Es ist dieses Prinzip in folgendem Satze enthalten: Jedes Pulver hat eine Normalböschung, die sich einstellt, wenn die Böschungs- oder Abrollinien parallel, die Isohypsen geradlinig sind; bei divergierenden Abrollinien, also nach außen konvexen Isohypsen ist die Böschung kleiner, bei

[1] Eine sehr ausführliche Darstellung der Entwickelung der Lehre vom Erddruck hat F. KÖTTER gegeben im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 2; daselbst findet sich auch die gesamte Literatur. Eine kurze Darstellung, namentlich der graphischen Methode, findet man in LUEGERS Lexikon der Technik.

konvergierenden Abrollinien, also konkaven Isohypsen größer als die Normalböschung, und zwar desto kleiner bezw. größer, je größer der Winkel zwischen den Abrollinien, d. h. je stärker die Krümmung der Isohypsen ist. Das Prinzip



Figur 298.

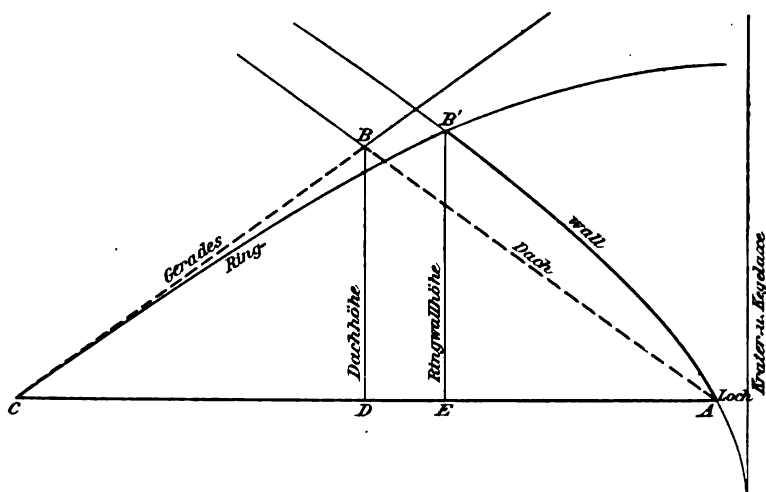
ist so einleuchtend, daß es keiner weiteren Begründung bedarf. Aus ihm folgt aber sofort, daß die Böschungsfläche mit geradem Horizontalschnitt eine Ebene ist, daß sich über dem Polygon als Basis eine Pyramide mit ebenen Flächen



Figur 299.

bildet, daß dagegen die Gleichgewichtsfigur über dem Kreise kein Kegel, sondern eine Art von Rotationshyperboloid ist, dessen Böschung von unten, wo sie normal ist, nach oben stetig abnimmt, und daß umgekehrt im Krater die Böschung von

alle möglichen Werte zwischen 0 (Gipfel der Hyperboloids) und 90° (ganz enges Kraterloch) annehmen. In Figur 299 ist die Figur über dem Kreise photographisch wiedergegeben, die Stärke der Abrundung ist natürlich von Normalböschung und Korngröße abhängig. Am deutlichsten kann man die Verhältnisse in ihrem Gegensatz an dem Ringwall studieren, der sich über dem Kreisring bildet, und von dem Figur 300 einen Axialschnitt gibt; zum Vergleich ist das gerade Dach



Figur 300.

über rechteckiger Basis gestrichelt eingezeichnet. Für kompliziertere Basisformen läßt sich das Zerlegungs- und Supérpositionsprinzip anwenden, so für die Figur über dem Fünfquadratekreuz als Basis (Figur 299), wodurch sich z. B. in leicht ersichtlicher Weise ergibt, daß der Zentralgipfel $\sqrt{2}$ mal so hoch ist wie die vier Seitengrate; ferner für die Figur über der Ellipse, die einen gewölbten, in der Mitte scharfen, nach den Enden hin sich verlierenden Grat, Figur 301 besitzt. — Das so gewonnene Bild wird nun zum Teil nicht unwesentlich modifiziert durch die Grenzbedingungen, und zwar sowohl an den Grenzen mit starren Wänden, als auch an den freien Kanten der Figuren selbst. Es muß genügen, von den betreffenden Modifikationen hier folgende anzuführen: die Normalböschung wird an vertikaler Wand kleiner, an horizontaler größer, entsprechend verändert sich auch jede andere Böschung. An die Stelle der normalen Böschungsebene tritt somit z. B. in einem parallelepipedischen Troge eine doppelt gekrümmte Fläche, deren Längsprofil in der Mitte gerade, an den Seiten aber konvex, und deren Querprofil am oberen Ende konkav, am unteren konvex, in der Mitte aber gerade ist; ein Kartenblatt, das man an den Ecken faßt, kann man leicht in die betreffende Form bringen.

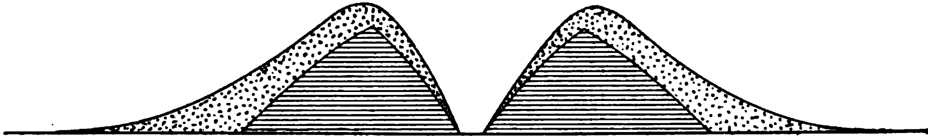


Figur 301.

Was andererseits die freien Kanten betrifft, z. B. bei den Pyramiden, so müssen sich diese wegen der Zweideutigkeit der hier bestehenden Abrollmöglichkeiten abrunden, und zwar in jedem Falle in ganz bestimmter Weise. Dies hat dann

wiederum eine Rückwirkung auf die Flächen- und Kantenböschung und damit auf die Höhe der Gipfel u. s. w.

Übrigens ist bisher vorausgesetzt, daß die Bildung der Figuren auf rein statischem Wege zustande komme. Wenn man die Körner mit lebendiger Kraft auffallen läßt, z. B. durch Ausfluß aus einem Trichter, oder wie bei den Vulkanstudien von LINCK durch Nachahmung der Vulkanausbrüche, so lagert



Figur 302.

sich über den statischen Kern der Gleichgewichtsfigur ein sozusagen kinetischer Mantel, dessen Oberfläche in ihrer Leitkurve durch die Wahrscheinlichkeit des Weiterrollens bestimmt wird, also im wesentlichen die Form der MAXWELLschen Wahrscheinlichkeitskurve hat, wie dies Figur 302 für den Ringwall andeutet. Natürlich haben dann des weiteren etwaige Luftbewegung, Bewegungen fester Wände u. s. w. Einfluß auf die Gestaltung der Figuren, wodurch dann die große Mannigfaltigkeit der Dynen-, Schutt-, Vulkan- und Firnbildungen sich erklärt; jedoch gehört das nicht mehr hierher.[1]

[1] TH. PERTUSCHEWSKI, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **16**. 410. 458. 1884. Diese nur russisch erschienene Arbeit ist vollständig unbekannt geblieben und auch dem Referenten erst durch Vermittlung des Herrn CHWOLSON zugeführt worden. — F. AUERBACH, DRUDES Ann. **5**. 170. 1901. — G. LINCK, N. Jahrbuch f. Min. u. Geol. Jubil.-Bd. 1907. p. 91.

